



**И.О. Бекетова, Е.В. Горемыкин, Л.А. Зинченко,  
М.Г. Левина, Н.К. Полуянович, Д.П. Рассоха**

## **СБОРНИК ЗАДАЧ**

*ПО КУРСУ*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Часть II

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

И.О. Бекетова, Е.В. Горемыкин, Л.А. Зинченко,  
М.Г. Левина, Н.К. Полуянович, Д.П. Рассоха

## **СБОРНИК      ЗАДАЧ**

*ПО КУРСУ*

### **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ** Часть II

Учебное пособие

Допущено

Министерством образования Российской Федерации в  
качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по специальности  
«Электрооборудование и электрохозяйство  
предприятий, организаций и учреждений» направления  
подготовки дипломированных специалистов  
«Электротехника, электромеханика и  
электротехнологии»

Таганрог 2004

УДК 621.3

Сборник задач по курсу «Теоретические основы электротехники». Ч. II / И.О. Бекетова, Е.В. Горемыкин, Л.А. Зинченко, М.Г. Левина, Н.К. Полуянович, Д.П. Рассоха; Под ред. И.О. Бекетовой. Таганрог: – Изд-во ТРТУ, 2004. – 184с.

Вторая часть задачника включает примеры расчета линейных схем по разделам: «Переходные процессы», «Расчет схем со взаимоиנדуктивными связями», «Четырехполюсники и фильтры». В свою очередь раздел «Переходные процессы» представлен четырьмя методами расчета:

- классическим,
- операторным,
- с помощью интеграла Дюамеля,
- переменных состояния.

Задачник предназначен для самостоятельной работы студентов специальностей 1813, 1811, 1808.

Рецензент: Ю.А. Бахвалов, д-р техн. наук, профессор  
Южно-Российского государственного университета (НПИ)

© Таганрогский государственный  
Радиотехнический университет  
© И.О. Бекетова, Е.В. Горемыкин,  
Л.А. Зинченко, М.Г. Левина,  
Н.К. Полуянович, Д.П. Рассоха, 2004

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	4
1. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ...	5
2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ .....	30
3. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ.....	45
4. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ .....	82
4.1. Общие понятия и определения.....	82
4.2. Формирование уравнения в матричной форме по методу наложения .....	84
4.3. Аналитическое решение уравнений состояния.....	87
4.4. Численные методы решения уравнений состояния.....	94
4.5. Анализ переходных процессов в электрических цепях путем дискретизации непрерывной математической модели цепи .....	102
4.6. Решение дифференциальных уравнений численными методами с помощью ППП Mathcad в схеме с источниками постоянного тока и напряжения.....	110
4.7. Задачи анализа переходных процессов численными методами .....	114
5. РАСЧЕТ СХЕМ СО ВЗАИМОИНДУКТИВНЫМИ СВЯЗЯМИ .....	117
6. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ФИЛЬТРЫ.....	139
6.1. Четырехполюсники .....	139
6.2. Фильтры .....	147
Библиографический список .....	151
Приложение 1 .....	152
Приложение 2.....	153
Приложение 3.....	166
ОТВЕТЫ.....	167

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач (часть II) является продолжением сборника задач (часть I), выпущенного в 2000 году.

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих теорию электрических цепей.

Часть вторая задачника включает три раздела:

- переходные процессы в линейных электрических цепях;
- расчет схем со взаимоиндуктивными связями;
- четырехполюсники и фильтры.

В разделе «Переходные процессы» рассмотрены четыре метода решения задач:

- классический,
- операторный,
- с помощью интеграла Дюамеля,
- переменных состояний.

Аннотация, предисловие и 3-я глава написаны доцентом И.О. Бекетовой, глава 1-я – доцентом М.Г. Левиной, 2-я глава – профессором Л.А. Зинченко, 4-я глава – доцентом Д.П. Рассохой, 5-я глава – доцентом Н.К. Полуянович, 6-я глава – доцентом Е.В. Горемыкиным.

Каждая тема в задачнике включает несколько типовых задач с подробным решением. Затем следуют условия задач без решения, но с ответами. Несколько задач - повышенной сложности отмечены звездочкой. Кроме того, в начале каждого раздела по переходным процессам (1, 2, 3 и 4-я главы) дается краткое теоретическое введение и алгоритм решения задач.

# 1. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В основе классического метода анализа переходных процессов лежит решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из частного и общего решений этого уравнения. Частное решение описывает установившийся режим в схеме после коммутации, а общее решение соответствует свободным процессам в цепи.

Таким образом, любая реакция цепи на коммутацию может быть представлена как сумма принужденной (установившейся) и свободной составляющих. Например,

$$u(t) = u_{\text{пр}}(t) + u_{\text{св}}(t).$$

Расчет переходного процесса в линейной электрической схеме выполняется согласно следующему алгоритму.

1. Определяем независимые начальные условия (ННУ).

Для схемы до коммутации составляем схему замещения.

Если схема гармонического тока, то составляем комплексную схему замещения.

Если схема постоянного тока, то составляем эквивалентную схему по постоянному току для индуктивностей и емкостей (рис. 1.1).

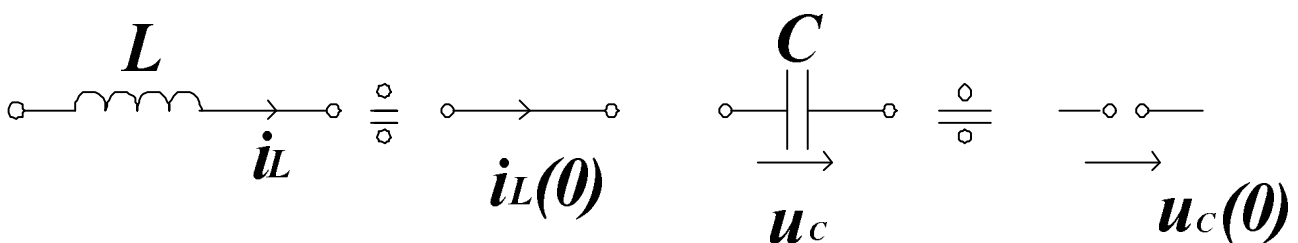


Рис. 1.1

Любым способом рассчитываем токи в индуктивностях и напряжения на емкостях.

Для схемы постоянного тока полученные значения и

будут являться независимыми начальными условиями:  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ .

Если схема гармонического тока, то в результате расчета будут получены комплексные (амплитудные или действующие) значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Необходимо от комплексных значений перейти к гармоническим функциям, а затем определяются мгновенные значения  $i_L(t)$  и  $u_C(t)$  для  $t = 0$ . Полученные величины и есть ННУ:  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ .

2. Определяем принужденную составляющую.

Составляем схему замещения после коммутации согласно характеру источника энергии.

В полученной схеме замещения определяем искомую реакцию.

Если схема постоянного тока, то полученный результат и есть принужденная составляющая.

Если схема гармонического тока, то в результате будет получено комплексное значение искомой реакции. Необходимо перейти от комплексного значения к гармонической функции. Эта функция и будет являться принужденной составляющей.

3. Определяем корни характеристического уравнения.

Количество корней совпадает с порядком схемы.

Для схем первого порядка корень характеристического уравнения определяется следующими формулами:

для схем с емкостью

$$P_1 = -\frac{1}{R_{\text{ЭС}} C}; \quad (1.1)$$

для схем с индуктивностью

$$P_1 = -\frac{R_{\text{ЭЛ}}}{L}. \quad (1.2)$$

Здесь  $R_{\text{ЭС}}$  и  $R_{\text{ЭЛ}}$  – входные сопротивления схемы со стороны реактивного элемента.

Для сложной схемы любого порядка можно сформировать

систему уравнений любым методом анализа сложных схем в операторной форме. Составляется определитель системы  $\Delta(P)$  и приравняется к нулю.

Решением полученного уравнения и будет искомый корень (корни).

Корни характеристического уравнения могут быть получены из решения уравнения  $Z_{BX}(P) = 0$ .

Чтобы получить  $Z_{BX}(P)$ , необходимо все источники заменить их внутренними сопротивлениями, а реактивные элементы заменить их операторными сопротивлениями

$$L \rightarrow LP \text{ и } C \rightarrow \frac{1}{CP}.$$

Далее разрываем любую ветвь полученной характеристической схемы и определяем  $Z_{BX}(P)$  со стороны обрыва. Приравняв  $Z_{BX}(P)$  к нулю и решая это уравнение, получаем искомые корни.

Правильно полученные корни не должны быть положительными, иначе переходной процесс не затухнет.

#### 4. Определяем зависимые начальные условия (ЗНУ).

К зависимым начальным условиям относятся значения всех токов и напряжений в момент коммутации [кроме  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ ]. Искомым ЗНУ в схемах первого порядка будет являться значение определяемой реакции в момент коммутации.

– Составляем схему замещения после коммутации во временной области.

– Для данной схемы составляем систему уравнений по законам Кирхгофа.

– В полученной системе полагаем  $t = 0$ .

– Решаем полученную систему для  $t = 0$  относительно искомого ЗНУ.

Для схем первого порядка можно применять более наглядный способ определения ЗНУ. Он заключается в построении схемы замещения для момента коммутации, т.е.

нулевого момента времени. Для построения этой схемы необходимо все источники  $e(t)$  и  $j(t)$  заменить их значениями:  $e(0)$ ,  $j(0)$ . Источники постоянного сигнала не изменяются. Все индуктивности следует заменить на источники тока  $i_L(0)$ , а все емкости – на источники напряжения  $u_C(0)$  (в случае  $i_L(0) \neq 0$  и  $u_C(0) \neq 0$ ). Если ННУ нулевые, то индуктивность заменяется обрывом, а емкость – коротким замыканием.

В полученной схеме все токи и напряжения являются начальными условиями. Рассчитав схему для  $t = 0$  любым способом, определяем искомое ЗНУ.

5. Определяем постоянную интегрирования.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения свободная составляющая будет иметь вид:

а) если корни  $P_1 \neq P_2 \neq \dots \neq P_n$  действительные разные числа, тогда

$$u_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{P_i t};$$

б) если корни  $P_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}$  комплексные сопряженные, тогда

$$u_{\text{св}}(t) = (A_1 \cos \omega_{\text{св}} t + A_2 \sin \omega_{\text{св}} t) e^{-\delta t}.$$

Записываем искомую функцию как сумму принужденной и свободной составляющих, причем свободная составляющая должна быть записана в уже определенном виде. Например,

$$u(t) = u_{\text{пр}}(t) + A_1 e^{P_1 t}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим формулу (1.3) для момента  $t = 0$ :

$$u(0) = u_{\text{пр}}(0) + A_1, \quad (1.4)$$

где  $u(0)$  – ЗНУ.

Подставив в формулу (1.4)  $u(0)$  и  $u_{\text{пр}}(0)$ , определяем постоянную интегрирования  $A_1$ .

Для схемы второго порядка уравнение (1.3) будет иметь вид:

$$u(t) = u_{\text{пр}}(t) + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}. \quad (1.5)$$

Продифференцируем уравнение (1.5) по  $t$ :

$$u'(t) = u'_{\text{пр}}(t) + A_1 P_1 e^{P_1 t} + A_2 P_2 e^{P_2 t}. \quad (1.6)$$

Далее уравнения (1.5) и (1.6) рассматриваются при  $t = 0$ :

$$\begin{cases} u(0) = u_{np}(0) + A_1 + A_2; \\ u'(0) = u'_{np}(0) + A_1 P_1 + A_2 P_2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Решая систему (1.7), определим  $A_1$  и  $A_2$ . Особенности определения  $u'(0)$  рассмотрены в задаче 1.4.

6. Построение графика искомой функции.

Результатом решения задачи будет являться уравнение (1.3) (если схема 1-го порядка) или уравнение (1.5) (если схема 2-го порядка) с подставленными значениями  $A_i$ ,  $P_i$  и принужденной составляющей.

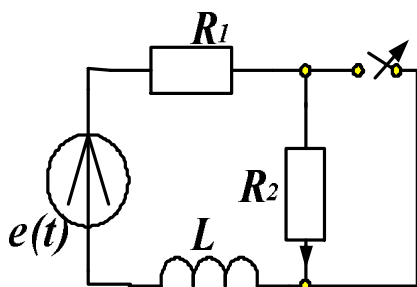
Для построения графика полученной функции необходимо определить постоянную времени переходного процесса

$$\tau = 1/|P \min|.$$

Обычно переходной процесс затухает через  $t = (3-5)\tau$ . Таким образом, график полученной функции строится для временного отрезка  $5\tau$ .

### Задачи

**1.1.** В представленной схеме (рис.



1.2):

$$e(t) = \sin(314t) \text{ В}; R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}; \\ L = 2 \text{ мГн.}$$

Определить характер изменения тока  $i_2(t)$  в схеме после коммутации.

Рис. 1.2

### Решение

Для определения независимых начальных условий составляем докоммутационную схему замещения в соответствии с типом источника (рис. 1.3).

Так как до коммутации сопротивление  $R_2$  закорачивается, то расчетная схема замещения примет вид, представленный на

(рис 1.4).

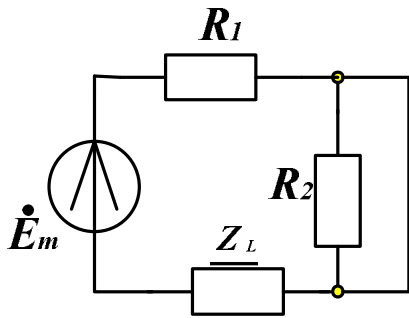


Рис. 1.3

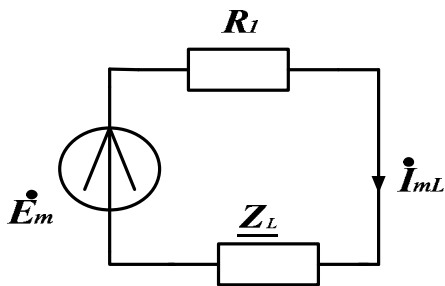


Рис. 1.4

В полученной комплексной схеме замещения определим ток  $\dot{i}_{mL}$ .

$$\dot{i}_{mL} = \frac{\dot{E}_m}{R_1 + \underline{Z}_L} = \frac{1}{100 + j0,628} = 3,2 \cdot 10^{-3} e^{-j0,40^\circ} \text{ A.}$$

Перейдем от комплексного амплитудного значения тока к мгновенному значению

$$i_L(t) = 3,2 \cdot 10^{-3} \sin(314t - 0,4^\circ) \text{ A.}$$

Определим ННУ, т.е.  $i_L(0)$ , рассмотрев  $i_L(t)$  при  $t=0$ :

$$i_L(0) = 3,2 \cdot 10^{-3} \sin(0,4^\circ) = -2,23 \cdot 10^{-5} \text{ A.}$$

Для определения принужденной составляющей тока  $i_2(t)$  составляем послекоммутационную схему замещения (рис.1.5). В полученной комплексной схеме

замещения определяем  $I_{2m}$  :

$$\dot{i}_{2m} = \frac{\dot{E}_m}{R_1 + R_2 + \underline{Z}_L} = \frac{1}{200 + j \cdot 0,628} = 5 \cdot 10^{-3} e^{-j0,2^\circ} \text{ A.}$$

Переходим от комплексного амплитудного значения к мгновенному значению:

$$i_{2пр}(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(314t - 0,2^\circ) \text{ A;}$$

$$i_{2пр}(0) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(-0,2^\circ) \text{ A.}$$

Определим корень характеристического уравнения  $p_1$ .

Так как схема первого порядка, то

воспользуемся формулой  $P_1 = -\frac{R_{ЭЛ}}{L}$ . Для

определения  $R_{ЭЛ}$  рассмотрим схему на рис. 1.6:

$$R_{ЭЛ} = R_1 + R_2 = 200 \text{ Ом;}$$

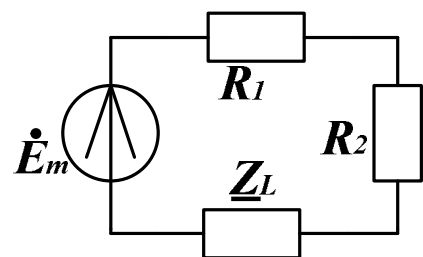


Рис. 1.5

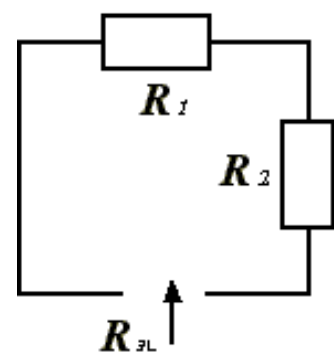


Рис. 1.6

$$P_1 = -200/2 \cdot 10^{-3} = -10^5 \text{ 1/c}.$$

Зная корень характеристического уравнения и принужденную составляющую, запишем искомую функцию  $i_2(t)$  как сумму свободной и принужденной составляющих:

$$i_2(t) = i_{2\text{пр}}(t) + A_1 e^{p_1 t} = 5 \cdot 10^{-3} \sin(314t - 0,2^\circ) + A_1 e^{-10^5 t} \text{ А.}$$

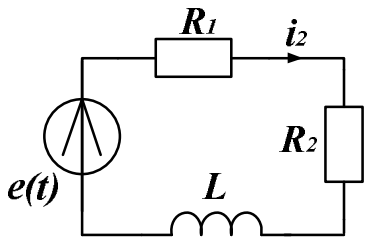


Рис. 1.7

Для получения точного значения функции  $i_2(t)$  необходимо определить постоянную интегрирования  $A_1$

С этой целью рассмотрим схему замещения после коммутации во

временной области (рис. 1.7).

В данном случае ЗНУ определяется просто, так как  $i_2(0) = i_L(0)$ . С учетом этого определяем постоянную интегрирование  $A_1$ :

$$i_2(0) = i_{2\text{пр}}(0) + A_1, \text{ откуда}$$

$$A_1 = i_2(0) - i_{2\text{пр}}(0) = -2,23 \cdot 10^{-5} + 1,7 \cdot 10^{-5} = -0,53 \cdot 10^{-5} \text{ А.}$$

Таким образом, искомая функция  $i_2(t)$  будет изменяться по следующему закону:

$$i_2(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(314t - 0,2^\circ) - 0,53 \cdot 10^{-5} e^{10^5 t} \text{ А.}$$

Для построения графика рассчитаем  $\tau = \frac{1}{|p|} = 10^{-5} \text{ с.}$

Переходной процесс закончится через интервал времени

$$\tau = 5\tau = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

**1.2.** Задана схема (рис.1.8), в которой:

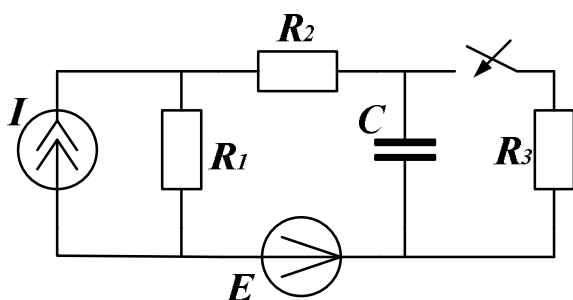


Рис. 1.8

$$I = 0,1 \text{ А, } E = 20 \text{ В,}$$

$$R_1 = 100 \text{ Ом,}$$

$$R_2 = R_3 = 200 \text{ Ом,}$$

$$C = 10 \text{ мкФ.}$$

Определить характер изменения тока  $i_1(t)$  в схеме после коммутации.

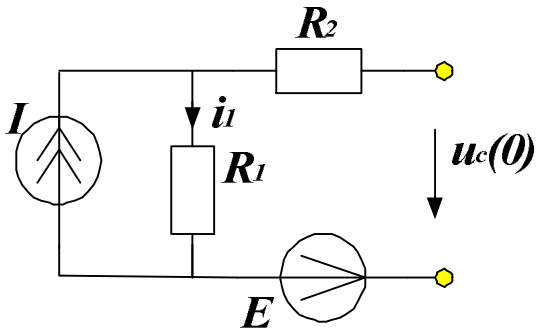


Рис. 1.9

**Решение**

Для определения ННУ–  $u_c(0)$  рассмотрим докоммутационную схему замещения (рис. 1.9).

Так как в схеме действуют постоянные источники, то емкость заменяется на обрыв, а ток  $i_1$  в ветви сопротивления  $R_1$  совпадает с током источника  $I$ .

По II Закону Кирхгофа можем записать:

$$i_1 R_1 - u_c(0) = E; \quad u_c(0) = I R_1 - E = -10 \text{ В.}$$

Принужденная составляющая тока  $i_1$  может быть найдена из расчета послекоммутационной схемы замещения. На рис. 1.10 изображена схема замещения после коммутации с учетом характера источников (постоянный ток), в которой емкость  $C$  заменяется обрывом.

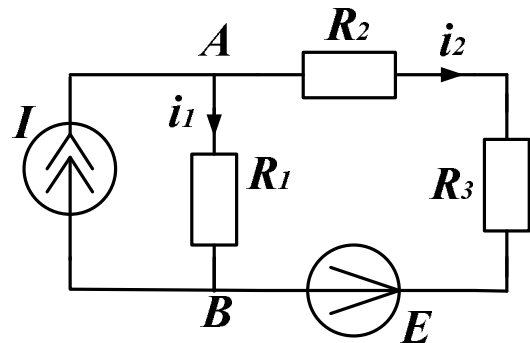


Рис. 1.10

Так как полученная схема относится к классу сложных схем замещения, то для расчета тока  $I_1$  воспользуемся методом узловых потенциалов. Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_b = 0; \\ \varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} \right) = I + \frac{E}{R_2 + R_3}. \end{cases}$$

Ток ветви можно определить по закону Ома:  $I_1 = \frac{\varphi_a}{R_1}$ .

После подстановки исходных данных получим

$$\varphi_a = 12 \text{ В}, \quad I_1 = 0,12 \text{ А.}$$

Полученное значение тока  $I_1$  и является принужденной составляющей  $i_{1пр}(t)$ :

$$i_{1пр}(t) = 0,12 \text{ А.}$$

Определим корень характеристического уравнения  $p_1$ , воспользовавшись формулой  $P_1 = -1/R_{эс}C$ . Для определения  $R_{эс}$  рассмотрим схему на рис. 1.11, в которой

$$R_{эс} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(100 + 200) \cdot 200}{100 + 200 + 200} = 120 \text{ Ом},$$

$$P_1 = -\frac{1}{120 \cdot 10^{-6}} = -833,3 \text{ 1/с}.$$

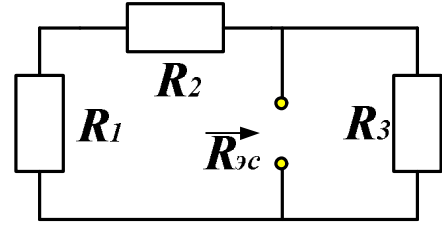


Рис. 1.11

Запишем искомую функцию  $i_1(t)$  в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1пр}(t) + A_1 e^{p_1 t} = 0,12 + A e^{-833,3t} \text{ А.}$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  рассмотрим  $i_1(t)$  в момент времени  $t = 0$ :  $i_1(0) = i_{1пр}(0) + A_1$ .

Ток  $i_1(0)$  является зависимым начальным условием. Для его определения составим схему замещения для нулевого момента времени (рис. 1.12), в которой емкость  $C$  заменим источником э.д.с.  $e = u_c(0)$ , направленным навстречу  $u_c(0)$ .

Для расчета воспользуемся методом узловых потенциалов:

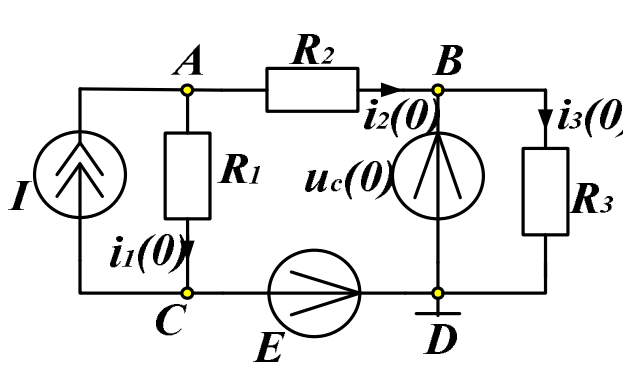


Рис. 1.12

$$\begin{cases} \varphi_d = 0; \\ \varphi_d - \varphi_b = u_c(0) \rightarrow \varphi_b = -u_c(0); \\ \varphi_d - \varphi_c = E \rightarrow \varphi_c = -E; \\ \varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\varphi_b}{R_2} - \frac{\varphi_c}{R_1} = I. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } i_1(0) = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{R_1} = \frac{1,43 + 20}{100} = 0,186 \text{ А.}$$

Зная  $i_1(0)$ , определяем  $A_1$ :  $A_1 = i_1(0) - i_{1пр}(0) = 0,186 - 0,12 = 0,0657$  А.

Искомый ток  $i_1(t)$  будет изменяться по следующему закону:

$$i_1(t) = 0,12 + 0,0657 e^{-833,3t} \text{ А.}$$

Для построения графика функции  $i_1(t)$  рассчитаем

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Таким образом, интервал для построения графика функции  $i_1(t)$  будет ограничен временем  $t = 5\tau = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$

**1.3.** Задана схема (рис. 1.13), в которой:  $I = 0,01 \text{ А}$ ;  $E = 50 \text{ В}$ ;  $C_1 = 0,1 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 0,2 \text{ мкФ}$ ;  $R_1 = R_2 = R_3 = 150 \text{ Ом}$ . Определить характер изменения тока  $i_2(t)$  в схеме после коммутации.

### Решение

В данном случае мы решаем схему 2-го порядка с независимыми начальными условиями  $u_{C1}(0)$  и  $u_{C2}(0)$ . Рассмотрим схему замещения до коммутации с учетом постоянных источников энергии (рис. 1.14). Так как в полученной схеме замещения во всех ветвях будет проходить ток  $I$  источника тока, то ННУ  $u_{C2}(0)$  можно определить из выражения

$$u_{C2}(0) = I(R_2 + R_2) = 3 \text{ В.}$$

Для получения  $u_{C1}(0)$  необходимо составить уравнение по II закону Кирхгофа для выделенного контура (см. рис. 1.14):

$$I(R_1 + R_3) + u_{C1}(0) = E,$$

откуда  $u_{C1}(0) = 50 - 3 = 47 \text{ В}$ . Принужденную составляющую определяем из послекоммутационной схемы (рис. 1.15). Как видно из рисунка, для данного варианта схемы замещения

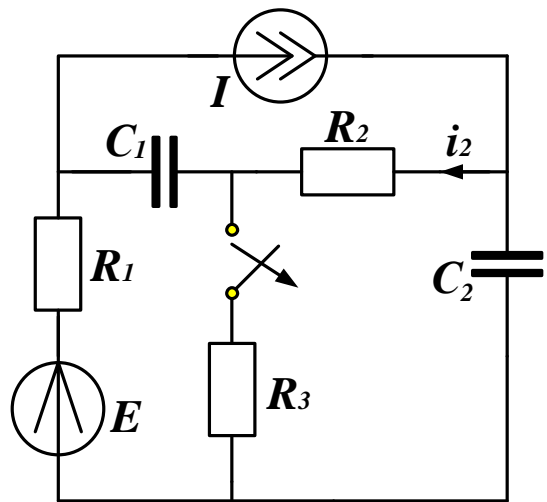


Рис. 1.13

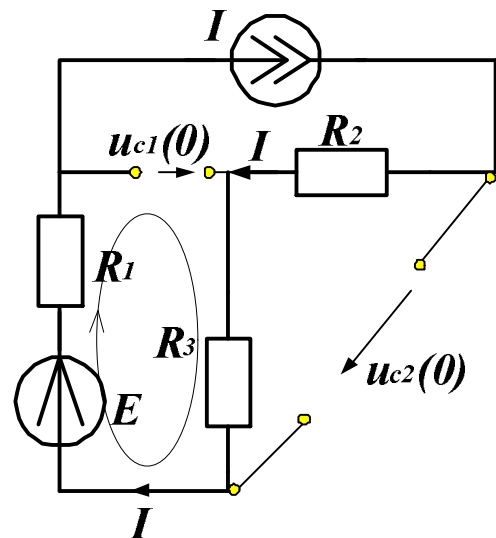


Рис. 1.14

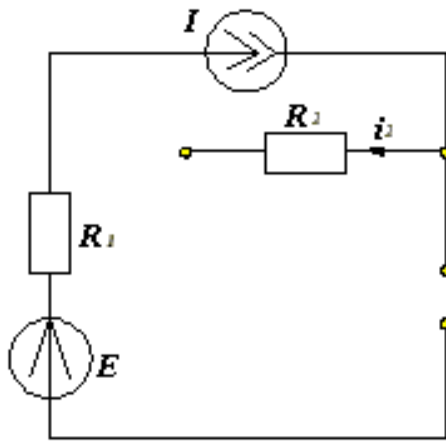


Рис. 1.15

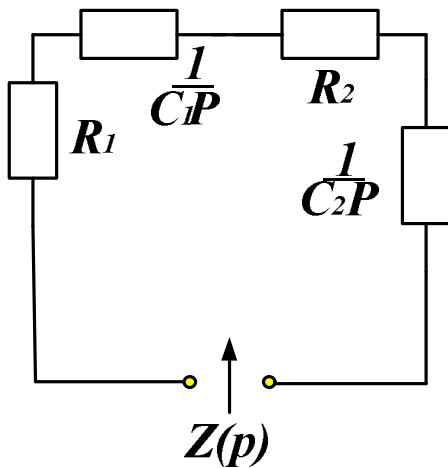


Рис. 1.16

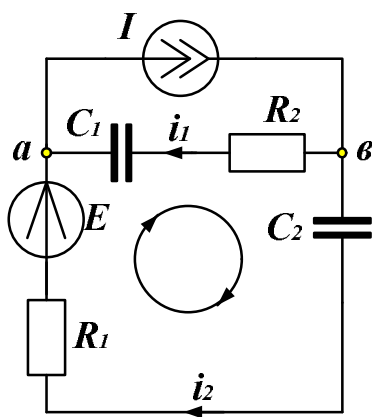


Рис. 1.17

$$i_{2уст} = 0.$$

При анализе переходного процесса в схеме второго порядка необходимо определить корни характеристического уравнения  $p_1$  и  $p_2$ .

Для определения корней составим характеристическую схему замещения (рис. 1.16) и рассчитаем характеристическое сопротивление  $z(p)$

относительно произвольного обрыва:

$$Z(p) = R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p} =$$

$$= \frac{(R_1 + R_2)C_1 C_2 p^2 + p(C_1 + C_2)}{C_1 C_2 p^2}.$$

Определим  $p_1$  и  $p_2$  из решения уравнения  $z(p)=0$ :

$$(R_1 + R_2) C_1 C_2 p^2 + p(C_1 + C_2) = 0;$$

$$6 \cdot 10^{-12} p^2 + 3 \cdot 10^{-7} p = 0 \text{ или}$$

$$p(6 \cdot 10^{-12} + 3 \cdot 10^{-7}) = 0;$$

$$p_1 = 0 ; p_2 = -5 \cdot 10^4 \text{ 1/c.}$$

Зная вид корней характеристического уравнения, запишем искомую функцию:

$$i_2(t) = A_1 + A_2 e^{-5 \cdot 10^4 t}, \text{ A}$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$i_2'(t) = A_2 (-5 \cdot 10^4) e^{-5 \cdot 10^4 t}, \text{ A/c.}$$

Рассмотрим  $i_2(t)$  и  $i_2'(t)$  при  $t = 0$ :

$$\begin{cases} i_2(0) = A_1 + A_2; \\ i'_2(0) = -5 \cdot 10^4 A_2. \end{cases}$$

Для определения ЗНУ  $i_2(0)$  и  $i'_2(t)$  рассмотрим послекоммутационную схему замещения во временной области (рис. 1.17). Для данной схемы запишем систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) + i_2(t) = I; \\ i_2(t)R_1 - u_C(t) - i_1(t)R_2 + u_{C2}(t) = E. \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему в момент времени  $t = 0$ :

$$\begin{cases} i_1(0) + i_2(0) = I; \\ i_2(0)R_1 - u_C(0) - i_1(0)R_2 + u_{C2}(0) = E. \end{cases}$$

Решив полученную систему, определим:

$$i_2(0) = 0,315 \text{ А}; \quad i_1(0) = -0,305 \text{ А}.$$

Для определения ЗНУ  $i'_2(0)$  продифференцируем систему по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i'_1(0) + i'_2(0) = 0; \\ i'_2(0)R_1 - u'_{C1}(0) - i'_1(0)R_2 + u'_{C2}(0) = 0. \end{cases}$$

Определим  $u'_{C1}(0)$  и  $u'_{C2}(0)$ , используя полюсные уравнения емкостей и значения  $i_1(0)$  и  $i_2(0)$ , которые равны токам емкостей  $i_1(0) = i_{C1}(0)$ ,  $i_2(0) = i_{C2}(0)$ .

$$\text{Тогда } u'_{C1}(0) = -\frac{i_1(0)}{C_1} \text{ и } u'_{C2}(0) = -\frac{i_2(0)}{C_2}.$$

Зная ЗНУ, определим  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1 = 0,01 \text{ А}; \quad A_2 = 0,305 \text{ А}.$$

Искомая функция имеет вид

$$i_2(t) = 0,01 + 0,305e^{-5 \cdot 10^4 t} \text{ А}.$$

Для построения графика функции  $i_2(t)$  рассчитаем

$$\tau = \frac{1}{|p_2|} = \frac{1}{50000} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

График полученной функции построим для интервала времени  $0 \leq t \leq 5\tau$ .

**1.4.** Дана схема замещения линейной электрической цепи во временной области (рис. 1.18) и параметры элементов:

$$E = 400\text{В}; \omega = 314 \text{ рад/с};$$

$$L = 0,5 \text{ Гн}; R_1 = 100 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 100 \text{ Ом}; R_3 = 200 \text{ Ом}.$$

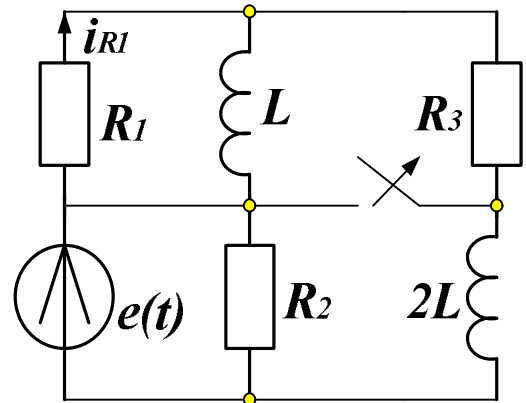


Рис. 1.18

Определить характер изменения тока через сопротивление  $R_1$  в схеме после коммутации.

### Решение

Расчет будем производить классическим методом анализа переходных процессов в линейных схемах с сосредоточенными параметрами. Согласно алгоритму расчета искомая функция состоит из двух компонент – свободной и принужденной составляющих:

$$i_{R_1}(t) = i_{R_1\text{пр}}(t) + i_{R_1\text{своб}}(t).$$

Прежде чем определять составные части искомой функции, рассчитаем независимые начальные условия. Для определения независимых начальных условий построим докоммутационную схему замещения (рис. 1.19).

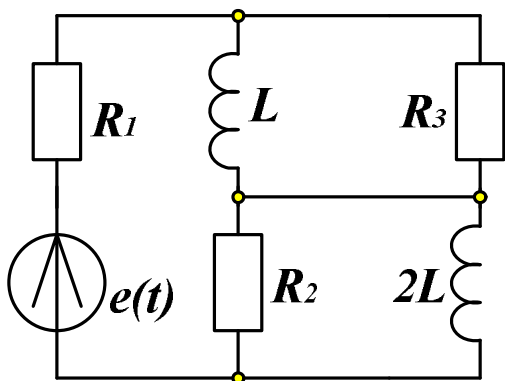


Рис. 1.19

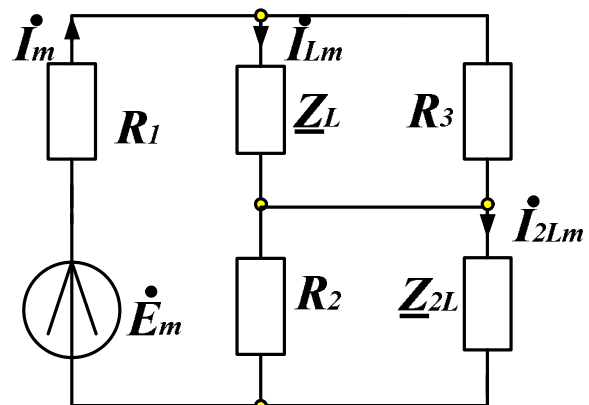


Рис. 1.20

Так как в исходной схеме источник энергии представляет собой идеальный источник гармонического напряжения, то необходимо построить докоммутационную схему замещения в комплексной области (рис. 1.20).

Запишем функцию источника э.д.с. в комплексной области:

$$e(t) = 400 \sin(314t) \text{ В}, \quad \dot{E}_m = 400e^{j0} \text{ В}.$$

Для определения независимых начальных условий  $i_L(0)$  и  $i_{2L}(0)$  рассчитаем значения токов в индуктивностях  $L$  и  $2L$ .

Для этого используем метод эквивалентных преобразований в простых схемах: будем постепенно сворачивать пассивные части схемы до одного эквивалентного сопротивления, учитывая, что  $\underline{Z}_L = j157 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{2L} = j314 \text{ Ом}$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_L \cdot R_3}{\underline{Z}_L + R_3} = \frac{200 \cdot 157j}{200 + 157j} = \frac{31400j}{200,7e^{j38^\circ}} = 314j(0,005e^{-j38^\circ}) = \\ &= 123,72j + 96,66 = 157e^{j52^\circ} \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{R_2 \cdot \underline{Z}_{2L}}{R_2 + \underline{Z}_{2L}} = \frac{100 \cdot 314j}{100 + 314j^{53^\circ}} = \frac{31400j}{167,2e^{j53^\circ}} = 31400j(0,006e^{-j53^\circ}) = \\ &= 188,4e^{j37^\circ} \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = R_1 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 100 + 157e^{j52^\circ} + 188,4e^{j37^\circ} = 420,4e^{j34,3^\circ} \text{ Ом}.$$

Далее делаем расчет комплексной схемы замещения:

$$\dot{I}_{mR1} = \frac{\dot{E}_m}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \frac{400e^{j0}}{420,4e^{j34,3^\circ}} = 0,95e^{-j34,3^\circ} \text{ А}.$$

На основании формулы разброса имеем:

$$\dot{I}_{mL} = \dot{I}_{mR1} \frac{R_3}{\underline{Z}_L + R_3} = 0,95e^{-j34,3^\circ} \frac{200}{200,7e^{j38^\circ}} = 0,95e^{-j72,3^\circ} \text{ А}.$$

$$\dot{I}_{m2L} = \dot{I}_{mR1} \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}_{2L}} = 0,95e^{-j34,3^\circ} \frac{100}{167,2e^{j53^\circ}} = 0,57e^{-j86,4^\circ} \text{ А}.$$

Для определения независимых начальных условий

перейдем от комплексных амплитудных значений к гармоническим функциям искомым токам:

$$i_L(t) = 0,95 \sin(314t - 72,3^\circ) \text{ A};$$

$$i_{2L}(t) = 0,57 \sin(314t - 86,4^\circ) \text{ A}.$$

Определим значения искомым функций в нулевой момент времени:

$$i_L(0) = 0,95 \sin(-72,3^\circ) = -0,9 \text{ A};$$

$$i_{2L}(0) = 0,57 \sin(-86,4^\circ) = -0,57 \text{ A};$$

$$i_L(0) = -0,9 \text{ A};$$

$$i_{2L}(0) = -0,57 \text{ A}.$$

Для определения принужденной составляющей искомой функции построим послекоммутационную схему замещения с учётом характера источника. Так как в схеме после коммутации включен источник гармонического напряжения, то перейдем к комплексной схеме замещения (рис. 1.21). Свернем схему (см. рис. 1.21) к эквивалентной с одним сопротивлением  $\underline{Z}_{\text{Экв}}$ :

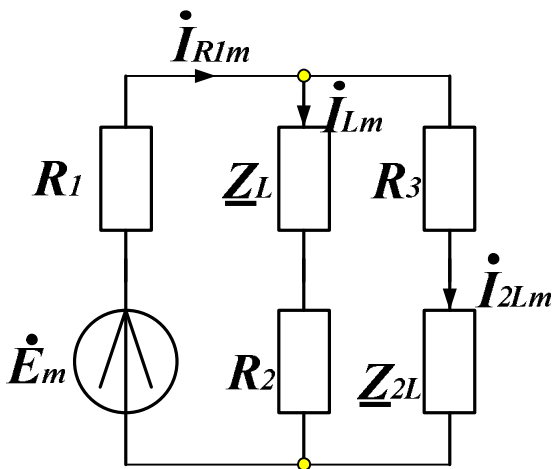


Рис. 1.21

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{(\underline{Z}_L + R_2)(\underline{Z}_{2L} + R_3)}{\underline{Z}_L + R_2 + \underline{Z}_{2L} + R_3} = \\ &= \frac{(157j + 100)(314j + 200)}{157j + 100 + 314j + 200} = \\ &= \frac{186,14e^{j57,5^\circ} \cdot 372,3e^{j57,5^\circ}}{558,4e^{j57,5^\circ}} = \\ &= 124,1e^{j57,5^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{Экв}} &= R_1 + \underline{Z}_1 = 100 + 124,1e^{j57,5^\circ} = \\ &= 165,1 + j102,1 = 194,2e^{j31,7^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Ток в ветви с источником:

$$i_{mR1} = \frac{\dot{E}_m}{\underline{Z}_{\text{Экв}}} = \frac{400e^{j0}}{194,2e^{j31,7^\circ}} = 2,05e^{-j31,7^\circ} \text{ A}.$$

От комплексного амплитудного значения искомого тока перейдем к гармонической функции:

$$i_{R1np}(t) = 2,05 \sin(314t - 31,7^\circ) \text{ A}.$$

Определим производную принужденной составляющей и начальные значения  $i_{npR1}(0)$  и  $i'_{npR1}(0)$ :

$$i'_{R1np}(t) = 643,7 \cos(314t - 31,7^\circ) \text{ A/c};$$

$$i_{R1np}(0) = 2,05 \sin(-31,7^\circ) = -1,08 \text{ A};$$

$$i'_{R1np}(0) = 643,7 \cos(-31,7^\circ) = 547,7 \text{ A/c}.$$

Для определения свободной составляющей необходимо вначале рассчитать корни характеристического уравнения.

Исследуемая схема – второго порядка, поэтому корней будет два:  $P_1$  и  $P_2$ . Для определения этих корней необходимо составить характеристическое уравнение. Рассмотрим послекоммутационную схему, в которой были произведены следующие замены: источник заменили его внутренним сопротивлением, а индуктивность – операторным сопротивлением (рис. 1.22).

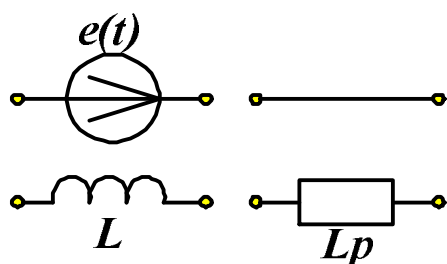


Рис. 1.22

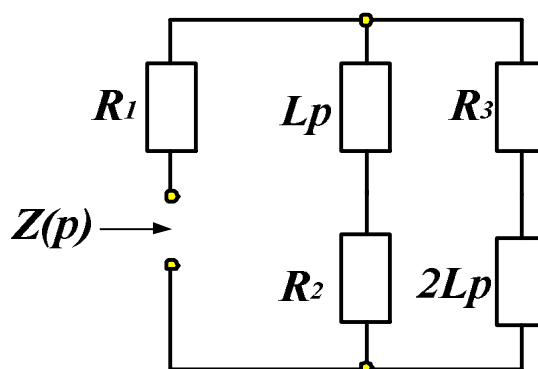


Рис. 1.23

В полученной схеме замещения обрываем ветвь с сопротивлением  $R_1$  (рис.1.23) и рассчитываем входное сопротивление со стороны обрыва

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_3 + 2Lp)(R_2 + Lp)}{R_3 + 2Lp + R_2 + Lp}.$$

Определяем  $p_1$  и  $p_2$  из условия  $Z(p) = 0$ :

$$R_1R_3 + R_12Lp + R_1R_2 + R_1Lp + R_3R_2 + R_3Lp + 2LpR_2P + 2L^2p^2 = 0;$$

$$0,5p^2 + 350p + 50000 = 0;$$

$$D = 350^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 50000 = 22500;$$

$$P_1 = \frac{-350 + 150}{2 \cdot 0,5} = -200 \text{ 1/c};$$

$$P_2 = \frac{-350 - 150}{2 \cdot 0,5} = -500 \text{ 1/с.}$$

Так как корни получились действительными разными числами, то свободная составляющая будет иметь вид

$$i_{R1\text{своб}}(t) = A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-500t}.$$

Запишем искомую функцию в общем виде:

$$i_{R1}(t) = 2,05 \sin(314t - 31,7^\circ) + A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-500t}, \text{ А.} \quad (1.7)$$

Продифференцируем уравнение (1.7):

$$i'_{R1}(t) = 643,7 \cos(314t - 31,7^\circ) - 200A_1 e^{-200t} - 500A_2 e^{-500t}, \text{ А/с.} \quad (1.8)$$

Чтобы найти постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , рассмотрим уравнения (1.7) и (1.8) в нулевой момент времени ( $t = 0$ ):

$$\begin{cases} i_{R1}(0) = -1,08 + A_1 + A_2; \\ i'_{R1}(0) = 547,7 - 200A_1 - 500A_2. \end{cases} \quad (1.9)$$

В системе (1.9) неизвестными являются постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  и зависимые начальные условия  $i_{R1}(0)$  и  $i'_{R1}(0)$ .

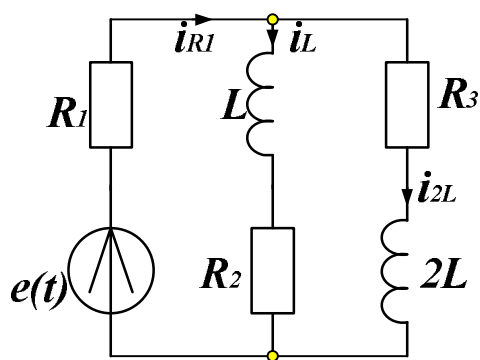


Рис. 1.24

Для определения зависимых начальных условий составим систему уравнений по законам Кирхгофа во временной области. Рассмотрим схему (рис. 1.24) после коммутации во временной области, из которой система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} i_L(t) + i_{2L}(t) - i_{R1}(t) = 0; \\ R_1 i_{R1}(t) + L \cdot i'_L(t) + R_2 \cdot i_L(t) = e(t); \\ R_3 \cdot i_{2L}(t) + 2L \cdot i'_{2L}(t) - i_L(t) \cdot R_2 - L \cdot i'_L(t) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Рассмотрим эту систему для момента времени  $t = 0$ :

$$\begin{cases} i_L(0) + i_{2L}(0) - i_{R1}(0) = 0; \\ R_1 \cdot i_{R1}(0) + L \cdot i'_L(0) + R_2 \cdot i_L(0) = e(0); \\ R_3 \cdot i_{2L}(0) + 2L \cdot i'_{2L}(0) - R_2 \cdot i_L(0) - L \cdot i'_L(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Подставим в полученную систему ранее найденные значения  $i_L(0)$ ,  $i_{2L}(0)$ ,  $e(0)$ :

$$\begin{cases} -0,9 - 0,57 - i_{R1}(0) = 0; \\ 100 \cdot i_{R1}(0) + 0,5 \cdot i'_L(0) - 9 = 0; \\ -114 + i'_{2L}(0) + 9 - 0,5 \cdot i'_L(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Решим систему относительно  $i_{R1}(0)$ ,  $i'_L(0)$ ,  $i'_{2L}(0)$ :

$$i_{R1}(0) = -1,47 \text{ A};$$

$$i'_L(0) = (192 - 100 \cdot (-1,47)) / 0,5 = 312 \text{ A/c};$$

$$i'_{2L}(0) = 114 - 9 + 0,5 \cdot (312) = 261 \text{ A/c}.$$

Для определения зависимого начального условия  $i'_{R1}(0)$  найдем  $i'_L(0)$  и  $i'_{2L}(0)$ :

$$i'_L(0) = 312 \text{ A/c};$$

$$i'_{2L}(0) = 261 \text{ A/c}.$$

Продифференцируем систему (1.10) и рассмотрим её при  $t = 0$ :

$$\begin{cases} i'_L(0) + i'_{2L}(0) - i'_{R1}(0) = 0; \\ R_1 \cdot i'_{R1}(0) + u'_L(0) + R_2 \cdot i'_L(0) = e'(0); \\ R_3 \cdot i'_{2L}(0) + u'_{2L}(0) - R_2 \cdot i'_L(0) - u'_L(0) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Подставим в систему (1.11) ранее найденные значения  $i'_L(0)$ ,  $i'_{2L}(0)$  и определим  $i'_{R1}(0) = 537 \text{ A/c}$ .

Подставляем в систему (1.9) значения зависимых начальных условий  $i_{R1}(0)$  и  $i'_{R1}(0)$ . Определяем постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

$$\begin{cases} -0,39 = A_1 + A_2; \\ 25,3 = -200A_1 - 500A_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -0,56 \text{ A}; \\ A_2 = 0,17 \text{ A}. \end{cases}$$

Искомая функция будет иметь вид

$$i_{R1}(t) = 2,05 \sin(314t - 31,7^\circ) - 0,56e^{-200t} + 0,17e^{-500t} \text{ A}.$$

Для построения графика полученной функции необходимо определить постоянную времени переходного процесса:

$$\tau = \left| \frac{1}{P_{\min}} \right| = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ с}.$$

Переходной процесс считается закончившимся через промежуток времени, равный  $5\tau$ , поэтому график полученной функции строим для временного интервала от 0 до 0,02 с.

**1.5.** Задана схема (рис.1.25), параметры которой:

$$E = 30 \text{ В}; R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}; R_3 = 50 \text{ Ом}; L = 100 \text{ мГн}.$$

Ключ К1 замыкается в момент времени  $t = 0$ , а через  $t_1 = 0,5$  с замыкается ключ К2. Определить характер изменения тока  $i_1(t)$  начиная с момента времени  $t=0$ .

### Решение

Так как в схеме присутствует два ключа, то необходимо рассчитать два переходных процесса.

В момент  $t = 0$  замыкается ключ К1 и начинается переходной процесс в схеме

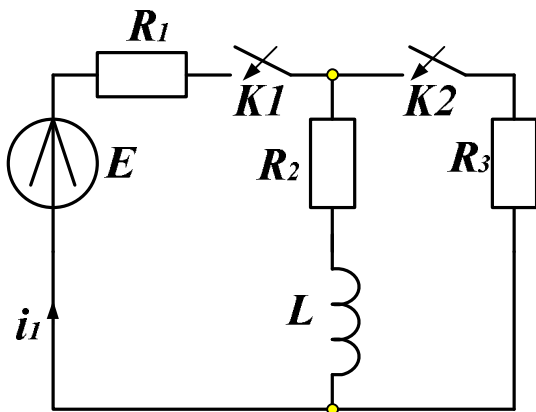


Рис. 1.25

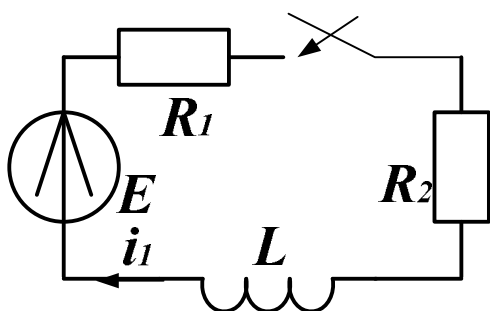


Рис. 1.26

(рис.1.26). Рассчитаем в этой схеме изменение во времени тока  $i_1(t)$  после коммутации.

Так как до коммутации индуктивность не была подключена к источнику энергии, то ток в индуктивности равнялся нулю. В схеме нулевые ННУ:  $i_L(0) = 0$ . Рассмотрим послекоммутационную схему после коммутации (рис. 1.27).

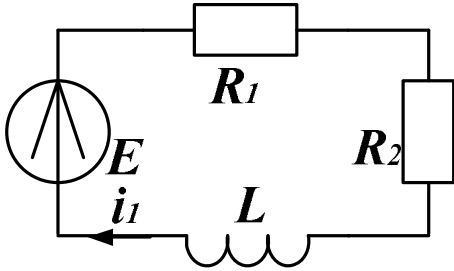


Рис.1.27

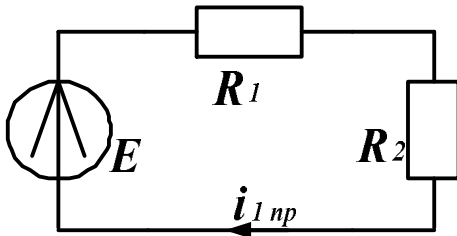


Рис. 1.28

Так как на постоянном токе индуктивность может быть заменена коротким замыканием, то схема принимает упрощенный вид (рис. 1.28) в принужденном режиме.

Из схемы (см. рис. 1.28)

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{30}{100 + 100} = 0,15 \text{ А.}$$

Корень характеристического уравнения определяем из выражения

$$P_1 = -\frac{R_{\Sigma L}}{L} = -\frac{R_1 + R_2}{L} = -2000 \text{ 1/с.}$$

Таким образом, искомый ток  $i_1(t)$  можно записать в виде

$$i_1(t) = i_{1np}(t) + i_{1cb}(t) = 0,15 + A_1 e^{-2000t} \text{ А.}$$

Рассмотрим  $i_1(t)$  в момент  $t = 0$ :  $i_1(0) = 0,15 + A_1$ .

Для данной схемы  $i_1(0) = i_L(0) = 0$  (см. рис. 1.27).

Тогда  $A_1 = i_L(0) - 0,15 = -0,15 \text{ А.}$

После первой коммутации искомый ток  $i_1(t)$  будет изменяться по закону

$$i_1(t) = 0,15 - 0,15 e^{-2000t} \text{ А.} \quad (1.12)$$

Через промежуток времени  $t = 0,5$  мс замыкается ключ К2 и топология схемы изменяется (рис. 1.29).

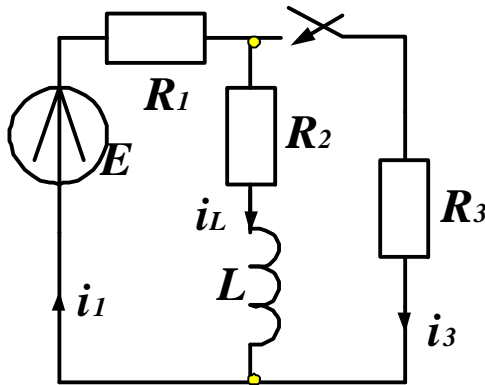


Рис. 1.29

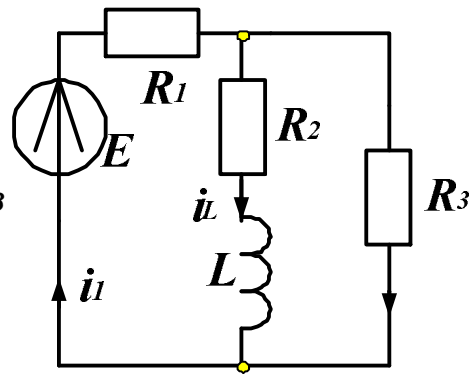


Рис. 1.30

Независимым начальным условием будет являться ток  $i_L$  в момент времени  $t_1$ . Так как до коммутации (см. рис. 1.29)

$i_L(t) = i_1(t)$ , то значение  $i_L(t_1)$  получаем из выражения (1.12) для  $i_1(t)$ :  $i_L(t_1) = i_1(t_1) =$

$$= 0,15 - 0,15 e^{-2000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = 0,095 \text{ А.}$$

Послекоммутационная схема будет иметь вид, изображенный на рис. 1.30.

Определим принужденную составляющую тока  $i_1(t)$  с учетом постоянного характера источника (рис. 1.31):

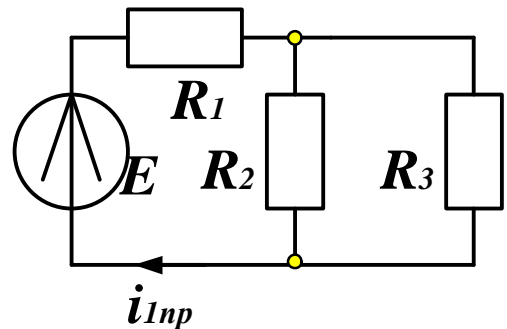


Рис.1.31

$$i_{1np} = \frac{E}{R_9},$$

$$\text{где } R_9 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 100 + \frac{100 \cdot 50}{100 + 50} = 133,3 \text{ Ом;}$$

$$i_{1np} = \frac{30}{133,3} = 0,255 \text{ А.}$$

Корень характеристического уравнения определяется из

выражения 
$$P_1 = -\frac{R_{\text{ЭЛ}}}{L} = -\frac{R_2 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{L} = -1330 \text{ 1/с.}$$

Так как второй переходной процесс начинался в момент времени  $t = t_1$ , то искомый ток  $i_1(t)$  можно записать в виде

$$i_1 = i_{1np}(t) + A e^{p(t-t_1)} = 0,255 + A_1 e^{-1330(t-t_1)} \text{ А.}$$

В начале переходного процесса  $t = t_1$ , тогда

$$i_1(t_1) = 0,225 + A_1.$$

В данном случае  $i_1(t_1)$  является ЗНУ и для его определения необходимо составить систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы, изображенной на рис. 1.30:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_L(t) - i_3(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + R_3 i_3(t) = E; \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_L(t) + u_L(t) = E. \end{cases}$$

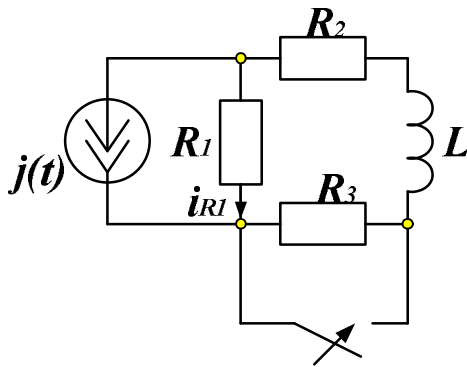


Рис. 1.32

Решив систему для момента времени  $t = t_1$ , определим  $i_1(t_1)$ :

$$i_1(t_1) = 0,232 \text{ А.}$$

Тогда  $A_1 = i_1(t_1) - i_{1np}(t_1) = 0,007 \text{ А.}$

Искомая функция  $i_1(t)$  имеет вид

$$i_1(t) = 0,225 + 0,07 e^{-1330(t-t_1)} \text{ А.}$$

Для полного интервала времени будет справедливо следующее решение:

$$i_1(t) = \begin{cases} 0,15 - 0,15 e^{-2000t} \text{ А, } 0 \leq t < t_1; \\ 0,225 + 0,07 e^{-1330(t-t_1)} \text{ А, } t \geq t_1. \end{cases}$$

**1.6.** Дана схема (рис. 1.32), в которой  $j(t) = 0,1 \sin(10^3 t - 30^\circ)$  А;  $R_1 = R_2 = R_3 = 200 \text{ Ом}$ ;  $L = 10 \text{ мГн}$ .

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R1}(t)$  после коммутации, которая происходит при  $t = 0$ .

**1.7.** Дана схема (рис. 1.33), в которой  $e(t) = 2\sin(314t - 45^\circ)\text{В}$ ;

$R_1 = R_3 = 100\ \text{Ом}$ ;  $R_2 = 150\ \text{Ом}$ ;  $C = 10\ \text{мкФ}$ .

Определить характер изменения во времени тока  $i_1(t)$  после коммутации, которая происходит при  $t = 0$ .

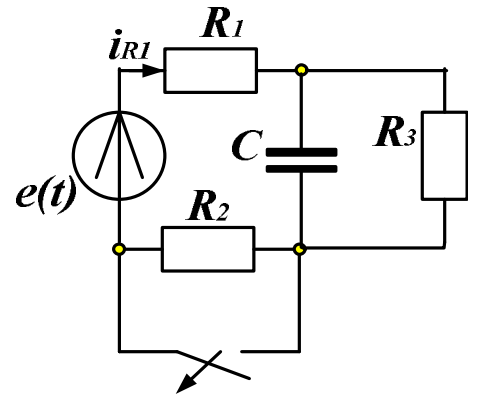


Рис. 1.33

**1.8.** Дана схема (рис. 1.34), в которой:

$E = 10\ \text{В}$ ;  $R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \text{Ом}$ ;

$L = 1\ \text{мГн}$ .

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R2}(t)$  после коммутации, которая происходит при  $t = 0$ .

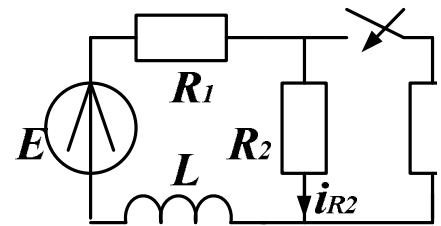


Рис. 1.34

**1.9.** Дана схема (рис. 1.35), в которой:

$E = 100\ \text{В}$ ;  $I = 2\ \text{А}$ ;  $R_2 = R_3 = 200\ \text{Ом}$ ;  $R_1 = 100\ \text{Ом}$ ;  $C = 10\ \text{мкФ}$ .

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R2}(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$ .

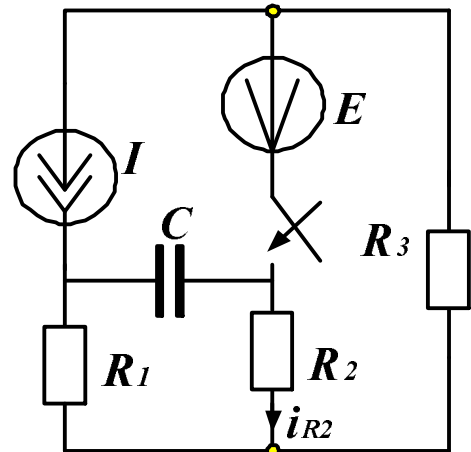


Рис. 1.35

**1.10.** Дана схема (рис. 1.36), в

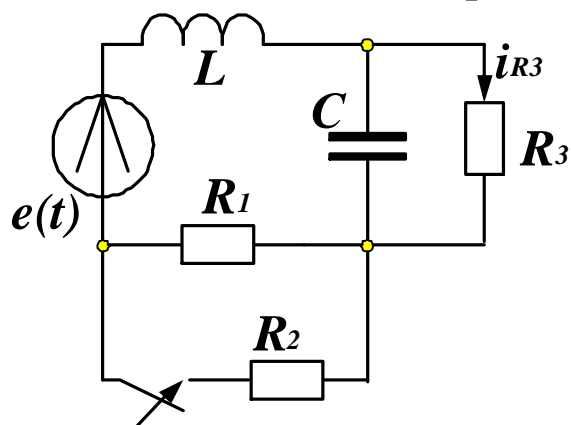


Рис. 1.36

которой  $e(t) = 3\sin(10^3 t - 20^\circ)\ \text{В}$ ;  $R_1 = R_2 = 100\ \text{Ом}$ ;  $R_3 = 200\ \text{Ом}$ ;

$C = 10\ \text{мкФ}$ .

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R3}(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$ .

**1.11.** Дана схема (рис. 1.37), в которой:  $E = 100 \text{ В}$ ;  $J = 1 \text{ А}$ ;

$$R_1 = R_3 = 200 \text{ Ом}; R_2 = 100 \text{ Ом};$$

$$L = 0,1 \text{ Гн}.$$

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R1}(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$ .

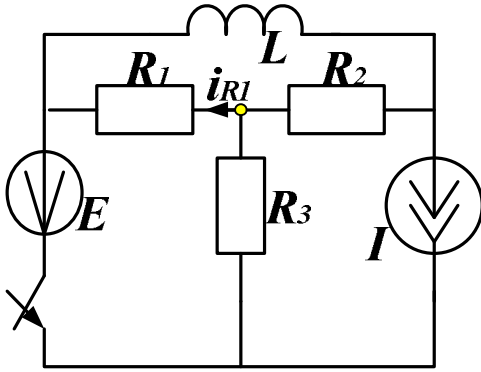


Рис. 1.37

**1.12.** Дана схема (рис. 1.38), в которой:  $E = 200 \text{ В}$ ;  $J = 2 \text{ А}$ ;  $R_1$

$$= R_2 = 100 \text{ Ом}; L = 0,2 \text{ Гн}; C = 10$$

$$\text{мкФ}.$$

Определить характер изменения во времени тока  $i_C(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$ .

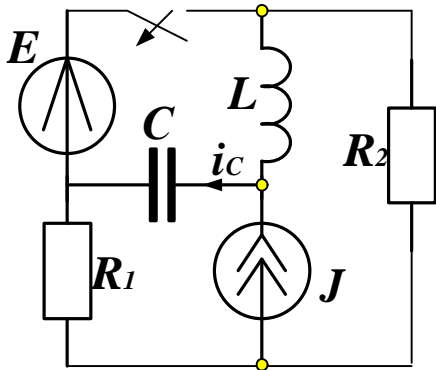


Рис. 1.38

**1.13.** Дана схема (рис. 1.39), в которой  $E = 100 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = R_3$

$$= 200 \text{ Ом}; R_4 = R_5 = R_6 = 100 \text{ Ом};$$

$$L = 0,1 \text{ Гн}; C = 20 \text{ мкФ}.$$

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R3}(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$ .

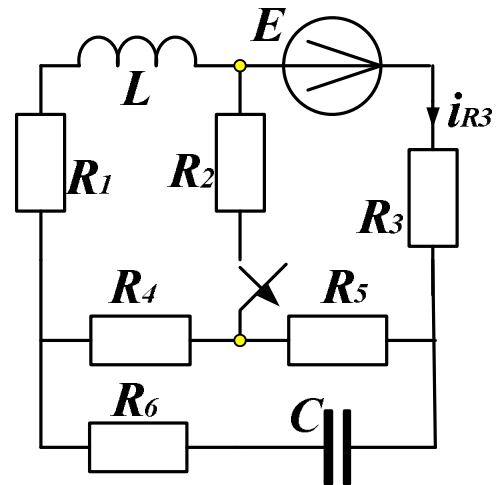


Рис. 1.39

**1.14.** Дана схема (рис. 1.40), в которой  $j(t) = 0,1\sin(100t + 45^\circ)$  А;

$$R_1 = R_2 = R_3 = 300 \text{ Ом};$$

$$C = 10 \text{ мкФ}; L = 0,2 \text{ Гн}.$$

Определить характер изменения во времени тока  $i_{R1}(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$

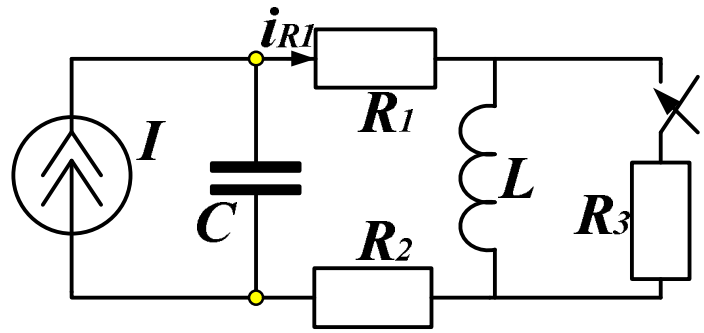


Рис. 1.40

**1.15.** Дана схема (рис. 1.41), в которой  $E = 100$  В;  $R_1 = R_2 = R_3 = 200$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 20$  мкФ.

Определить характер

изменения во времени тока  $i_{R3}(t)$  после коммутации, которая происходит в момент времени  $t = 0$ .

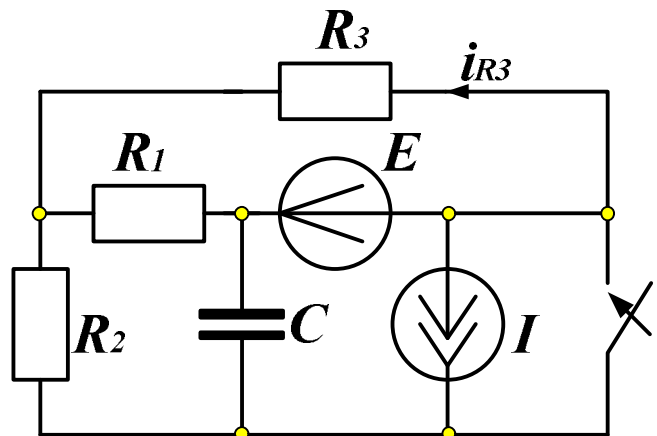


Рис. 1.41

## 2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Расчет переходных процессов операторным методом выполняется на основе следующего алгоритма.

1. Определить независимые начальные условия.
2. Перейти к операторной схеме замещения. Для этого заменить каждый элемент схемы его операторной схемой замещения (приложение 1).
3. Любым известным методом рассчитать полученную операторную схему замещения. В результате расчета определить операторное изображение искомой величины в виде отношения полиномов

$$U_k(p) = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

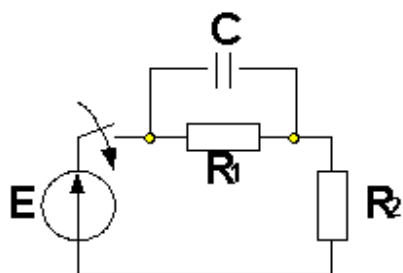
4. На основе обратного преобразования Лапласа перейти от изображения к оригиналу:

$$u_k(t) = L^{-1}[U_k(p)].$$

Переход от изображения к оригиналу выполняется на основе таблиц оригиналов и изображений (приложение 2) или с использованием математических программ МATHCAD, МATHLAB, MAPLE. Переход также может быть выполнен на основе теоремы разложения (разложение Хевисайда) (приложение 3).

### Задачи

**2.1.** Рассчитать напряжение  $u_{R_2}(t)$  операторным методом при следующих параметрах схемы (рис. 2.1):



$$E = 5 \text{ В};$$

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм};$$

$$C = 10 \text{ нФ}.$$

Рис. 2.1

1. Определим независимые начальные условия. Так как до коммутации схема была отключена от всех источников напряжения и тока, то все токи и напряжения были равны нулю. Следовательно,

$$u_c(0) = 0.$$

2. Перейдем к операторной схеме замещения. Для этого в схеме после коммутации заменим все элементы их операторными схемами замещения. В результате получим операторную схему замещения (рис. 2.2, а). Заметим, что независимый источник напряжения нулевой величины заменяем его внутренним сопротивлением (идеальным проводником) (рис. 2.2, б).

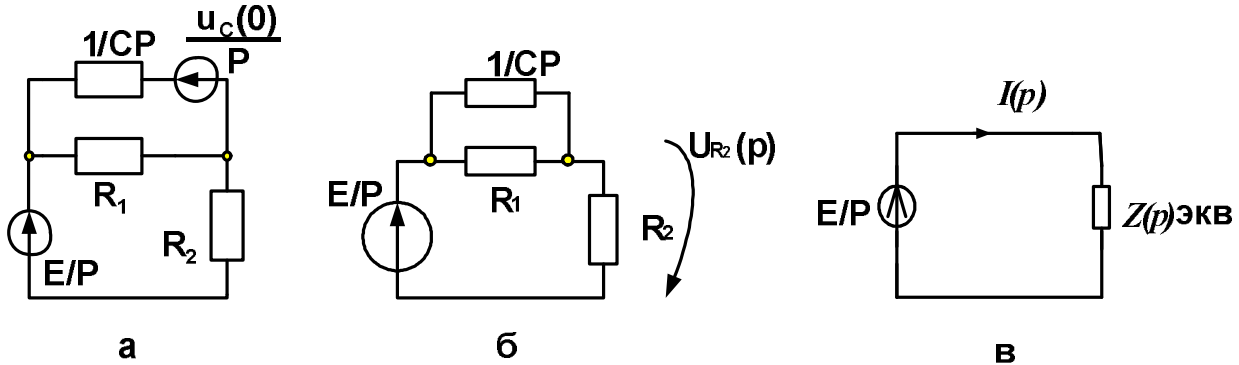


Рис. 2.2

Полученную схему рассчитаем методом эквивалентных преобразований. Так как элементы  $R_1$  и  $C$  соединены параллельно и последовательно с элементом  $R_2$ , то эквивалентное операторное сопротивление определяется следующим образом:

$$Z_{\text{ЭКВ}}(p) = R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{CP}}{R_1 + \frac{1}{CP}}.$$

Тогда схема (рис. 2.2, б) преобразуется к эквивалентной операторной схеме (рис. 2.2, в). Операторное изображение тока  $I(p)$  определяется на основе закона Ома в операторной форме:

$$I(p) = \frac{E}{Z_{\text{экв}}(p)} = \frac{E}{p \left( R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{Cp}}{R_1 + \frac{1}{Cp}} \right)} .$$

Операторное изображение напряжения на сопротивлении  $R_2$  определяется следующим образом:

$$U_{R_2}(p) = I(p) R_2 = \frac{ER_2}{p \left( R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{Cp}}{R_1 + \frac{1}{Cp}} \right)} .$$

При заданных параметрах схемы последнее выражение преобразуется к виду

$$U_{R_2}(p) = \frac{5 \cdot 10^3}{p \left( 10^3 + \frac{10^3 \frac{1}{10^{-11} p}}{10^3 + \frac{1}{10^{-11} p}} \right)} .$$

После несложных преобразований получаем:

$$U_{R_2}(p) = \frac{N(p)}{pM_1(p)} = \frac{5 \cdot 10^3 (10^{-8} p + 1)}{p (10^{-5} p + 2 \cdot 10^3)} .$$

Приравнивая знаменатель к нулю, находим полюсы:

$$p_1 = 0, p_2 = -2 \cdot 10^8 \frac{1}{c} .$$

3. Так как один из полюсов равен нулю, для перехода во временную область используем частный случай теоремы разложения (приложение 3).

$$u_{R_2}(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + \frac{N(p_2)}{p_2 M_1'(p_2)} e^{p_2 t} ,$$

где  $N(0) = 5 \cdot 10^3$ ;  $M_1(0) = -2 \cdot 10^3$ ;  $M_1'(p) = 10^{-5}$ ;  
 $N(p_2) = 5 \cdot 10^3 (10^{-8} \cdot (2 \cdot 10^8) + 1)$ ;  $M_1'(p_2) = 10^{-5}$ .

В результате получаем искомое выражение

$$u_{R_2}(t) = 2,5 + 2,5e^{-2 \cdot 10^8 t} \text{ В.}$$

**2.2.** Рассчитать ток  $i_c(t)$  операторным методом при следующих параметрах схемы (рис. 2.3):  $J = 1 \text{ А}$ ,  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ .

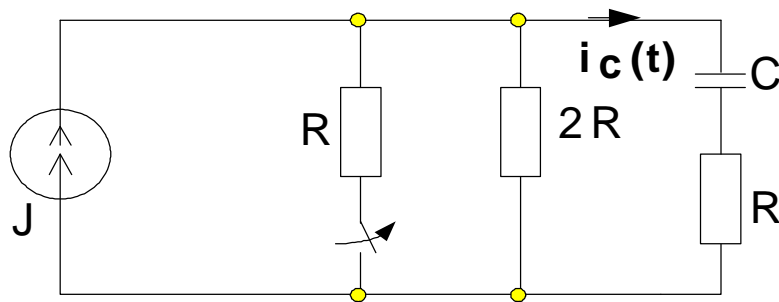


Рис. 2.3

1. Определим независимое начальное условие. Для этого рассчитаем схему до коммутации в установившемся режиме (рис. 2.4, а). Заметим, что до коммутации ключ был замкнут. Определим эквивалентное сопротивление:

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R \cdot 2R}{3R} = \frac{200}{3} \text{ Ом.}$$

В результате схема (рис. 2.4, а) преобразуется к эквивалентной схеме (рис. 2.4, б). Напряжение на емкости определяется следующим образом:

$$U_c = u_c(0) = J R_{\text{ЭКВ}} = 1 \cdot \frac{200}{3} = \frac{200}{3} \text{ В.}$$

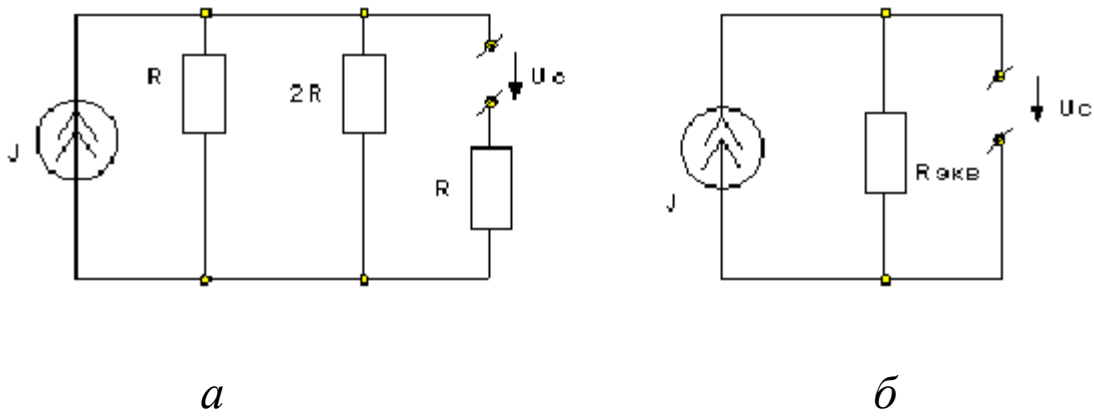


Рис. 2.4

2. Перейдем к операторной схеме замещения. Для этого в схеме после коммутации, когда ключ разомкнут (рис. 2.5, а), заменим все элементы их операторными схемами замещения.

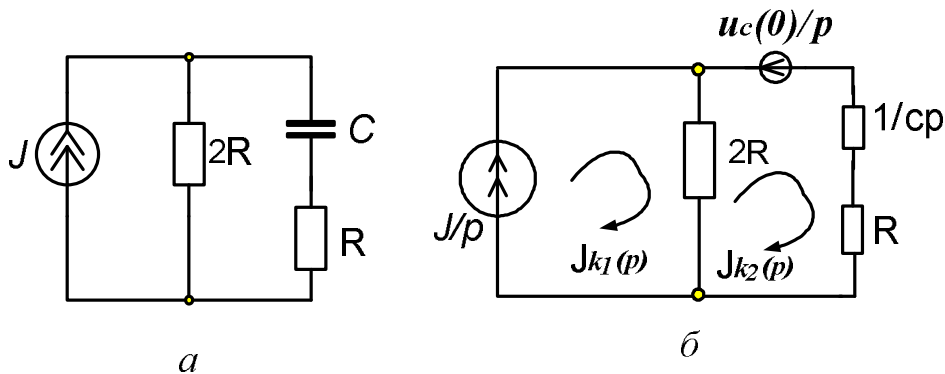


Рис. 2.5

В результате получим операторную схему замещения (рис. 2.5, б). Полученную схему рассчитаем методом контурных токов. В результате получим следующую систему уравнений:

$$J_{k_2}(p)\left(2R + R + \frac{1}{Cp}\right) - J_{k_1}(p) \cdot 2R = -\frac{U_C(0)}{p};$$

$$J_{k_1}(p) = \frac{J}{p}.$$

При указанных параметрах схемы имеем:

$$J_{k_2}(p)\left(200 + 100 + \frac{1}{10^{-6}p}\right) - \frac{1 \cdot 200}{p} = -\frac{200}{3p}.$$

После несложных преобразований определяем операторное изображение искомого контурного тока:

$$J_{k_2}(p) = \frac{4}{9p + 3 \cdot 10^4}.$$

Зная контурный ток, найдем операторное изображение тока:

$$I_c(p) = J_{k_2}(p) = \frac{4}{9p + 3 \cdot 10^4}.$$

Определим полюсы. Для этого приравняем к нулю знаменатель:

$$9p + 3 \cdot 10^4 = 0,$$

откуда найдем полюс

$$p_1 = -\frac{1}{3} \cdot 10^4 \frac{1}{c}.$$

Так как полюс не равен нулю, то используем общий случай теоремы разложения:

$$i_c(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t}.$$

После несложных вычислений определяем ток:

$$i_c(t) = \frac{4}{9} e^{-\frac{1}{3} \cdot 10^4 t} \text{ А.}$$

**2.3.** Рассчитать напряжение  $u_{R_1}(t)$  в схеме (рис. 2.6) операторным методом при следующих параметрах:  $E = 10 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ кОм}$ ;  $L = 10 \text{ мГн}$ .

1. Определим независимое начальное условие. Для этого рассчитаем схему до коммутации в установившемся режиме (рис. 2.7), когда ключ был разомкнут, а индуктивность представляла собой идеальный проводник.

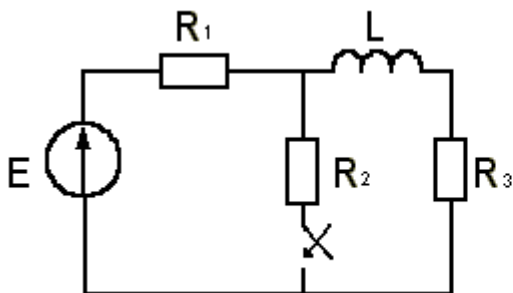


Рис. 2.6

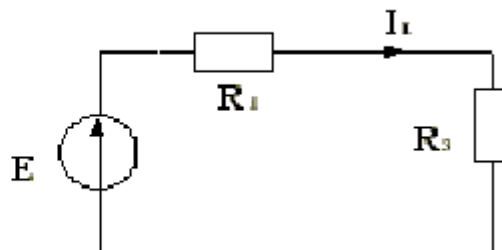


Рис. 2.7

Ток через индуктивность определяется следующим образом:

$$I_L = i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_3} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

2. Перейдем к операторной схеме замещения. Для этого в схеме после коммутации, когда ключ замкнут (рис. 2.8, а), заменим все элементы их операторными схемами замещения. Полученную операторную схему (рис. 2.8, б) рассчитаем методом контурных токов, для которого справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} J_{K1}(p)(R_1 + R_2) - J_{K2}(p) \cdot R_2 = \frac{E}{p}; \\ J_{K2}(p)(R_3 + Lp) - J_{K1}(p) R_2 = Li_L(0). \end{cases}$$

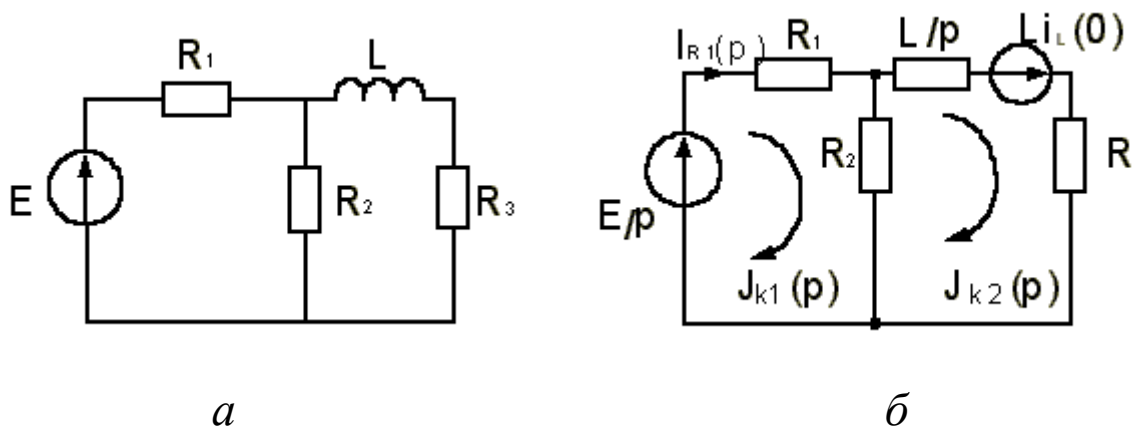


Рис. 2.8

При указанных параметрах схемы полученная система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} J_{K1}(p) \cdot 2 \cdot 10^3 - J_{K2}(p) \cdot 10^3 = \frac{10}{p}; \\ J_{K2}(p) \cdot (10^3 + 10 \cdot 10^{-3} p) - J_{K1}(p) \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, определим операторное изображение контурного тока

$$J_{K2}(p) = \frac{20 + 0,15 \cdot 10^3 p}{p(2 \cdot 10^2 p + 3 \cdot 10^3)}.$$

Из схемы (см. рис. 2.8, б) видно, что  $I_{R1}(p) = J_{k2}(p)$ . Зная ток  $I_{R1}(p)$ , найдем операторное изображение напряжения

$$U_{R1}(p) = I_{R1}(p) R = \frac{2 \cdot 10^4 + 0,15p}{p(2 \cdot 10^{-2} p + 3 \cdot 10^3)}.$$

Определим полюсы. Для этого приравняем к нулю знаменатель:

$$p(2 \cdot 10^{-2} p + 3 \cdot 10^3) = 0,$$

откуда найдем полюсы:

$$p_1 = 0, p_2 = -1,5 \cdot 10^5 \frac{1}{c}.$$

Так как один из полюсов равен нулю, то используем частный случай теоремы разложения:

$$u_{R1}(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + \frac{N(p_2)}{p_2 M_1'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

После несложных вычислений определяем напряжение:

$$u_{R1}(t) = \frac{20}{3} + \frac{5}{6} e^{-1,5 \cdot 10^5 t} \text{ В}.$$

**2.4.** Определить  $i_{R1}(t)$  в схеме (рис. 2.9) операторным методом при следующих параметрах схемы:  $E=10$  В;  $J = 0,2$  А;  $R=10$  Ом;  $L=1$  мГн.

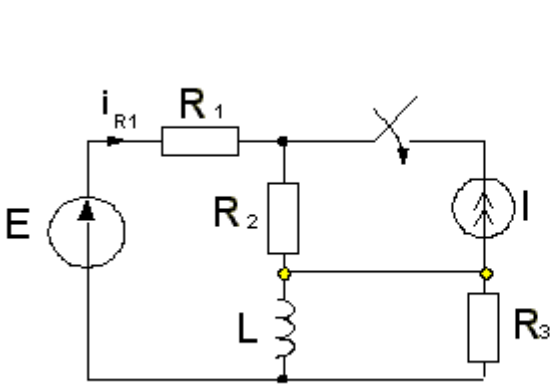


Рис. 2.9

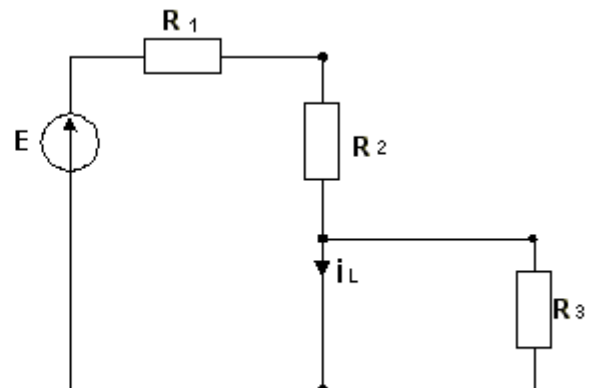


Рис. 2.10

1. Определим независимое начальное условие. Для этого рассчитаем схему до коммутации в установившемся режиме (рис. 2.10), когда ключ был разомкнут, а индуктивность на постоянном токе представляла собой идеальный проводник, следовательно, элемент  $R_3$  замкнут.

Ток через индуктивность определяется следующим образом:

$$I_L = i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ A} .$$

2. Перейдем к операторной схеме замещения. Для этого в схеме после коммутации, когда ключ замкнут (рис. 2.11, а), заменим все элементы их операторными схемами замещения.

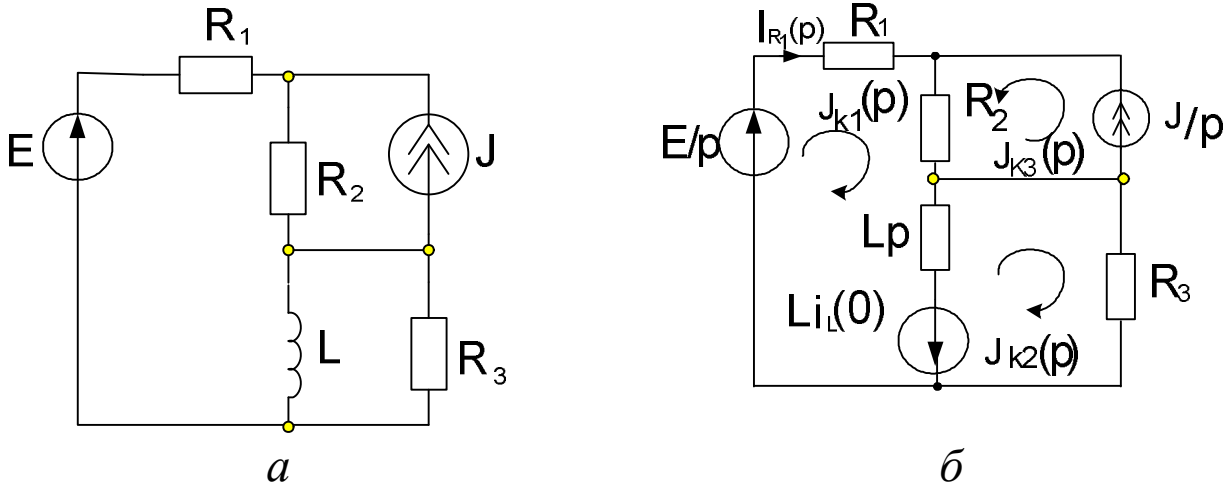


Рис. 2.11

Полученную операторную схему (рис. 2.11, б) рассчитаем методом контурных токов. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} J_{k_1}(p) \cdot (R_1 + R_2 + Lp) + J_{k_3} R_2 - J_{k_2}(p) Lp = \frac{E}{p} + Li_L(0); \\ J_{k_2}(p) \cdot (R_3 + Lp) - J_{k_1}(p) \cdot Lp = -Li_L(0); \\ J_{k_3}(p) = \frac{J}{p}. \end{cases}$$

При указанных параметрах схемы полученная система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} J_{k_1}(p)(20+10^{-3}p) + \frac{0,2 \cdot 10}{p} - J_{k_2}(p)10^{-3}p = \frac{10}{P} + 10^{-3} \cdot 0,5; \\ J_{k_2}(p)(10+10^{-3}p) - J_{k_1}(p) \cdot 10^{-3}p = -10^{-3} \cdot 0,5. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, определим операторное изображение контурного тока:

$$J_{k_1}(p) = \frac{13 \cdot 10^{-3}p + 80}{p(200 + 3 \cdot 10^{-2}p)},$$

тогда операторное изображение искомого тока:

$$J_{k_1}(p) = I_{R_1}(p) = \frac{13 \cdot 10^{-3}p + 80}{p(200 + 3 \cdot 10^{-2}p)}.$$

Определим полюсы. Для этого приравняем к нулю знаменатель:

$$p M_1(p) = (200 + 3 \cdot 10^{-2}p)p = 0,$$

откуда найдем полюсы

$$p_1 = 0; p_2 = -\frac{2}{3} \cdot 10^4 \frac{1}{c}.$$

Так как один из полюсов равен нулю, то используем частный случай теоремы разложения:

$$i_{R_1}(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + \frac{N(p_2)}{p_2 M_1'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

После несложных вычислений определяем ток:

$$i_{R_1}(t) = 0,4 + \frac{1}{30} e^{-2/3 \cdot 10^4 t} \text{ A.}$$

**2.5.** Рассчитать напряжение  $u_{R_1}(t)$  в схеме (рис. 2.12) операторным методом при следующих параметрах схемы:

$E = 100 \text{ В (const)}$ ;  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $L = 1 \text{ Гн}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ .

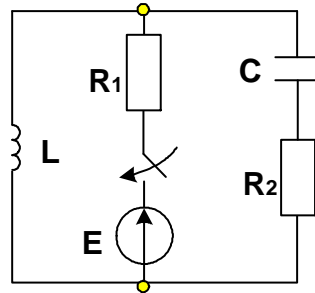


Рис. 2.12

1. Определим независимые начальные условия. Так как до коммутации схема была отключена от всех источников напряжения и тока, то все токи и напряжения были равны нулю. Следовательно,

$$i_L(0) = 0; u_C(0) = 0.$$

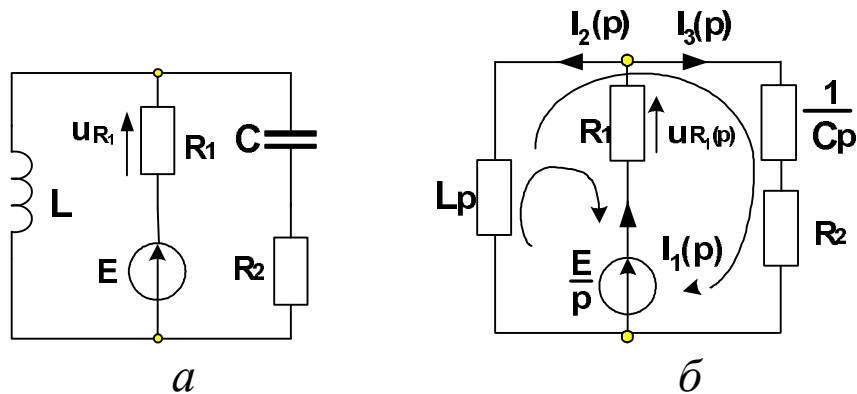


Рис. 2.13

2. Перейдем к операторной схеме замещения. Для этого в схеме после коммутации, когда ключ замкнут (рис. 2.13, а), заменим все элементы их операторными схемами замещения. Заметим, что все независимые источники напряжения имеют нулевую величину, заменяем их внутренними сопротивлениями (идеальными проводниками). Полученную операторную схему (рис. 2.13, б) рассчитаем на основе законов Кирхгофа. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0; \\ -I_3(p) \left( \frac{1}{Cp} + R_2 \right) - I_2(p)Lp = 0; \\ -I_1(p)R_1 - I_2(p)Lp = -\frac{E}{P}. \end{cases}$$

При указанных параметрах схемы полученная система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} -I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0; \\ I_3(p) \left( \frac{1}{10^{-6}} + 10^3 \right) - I_2(p)p = 0; \\ -I_1(p) \cdot 10^3 - I_2(p)p = -\frac{100}{P}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, определим операторное изображение тока, протекающего через сопротивление  $R_1$ :

$$I_1(p) = -\frac{100(p^2 + 10^3 p + 10^6)}{p(10^9 + 2 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^3 p^2)}.$$

Тогда на основе закона Ома в операторной форме операторное изображение искомого напряжения определяется следующим выражением:

$$U_{R_1}(p) = I_1(p)R_1 = \frac{10^5 \cdot (p^2 + 10^3 p + 10^6)}{p(10^9 + 2 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^3 p^2)}.$$

Для нахождения полюсов приравняем к нулю знаменатель

$$p(10^9 + 2 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^3 p^2) = 0,$$

откуда найдем полюсы:

$$p_1 = 0; p_{2,3} = -500 \pm j500 \text{ 1/с.}$$

Так как один из полюсов равен нулю, то используем частный случай теоремы разложения:

$$u_{R_1}(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + \frac{N(p_2)}{M_1'(p_2) \cdot p_2} \cdot e^{p_2 t} + \frac{N(p_3)}{M_1'(p_3) \cdot p_3} \cdot e^{p_3 t}.$$

В результате определим искомое напряжение:

$$u_{R_1}(t) = 100 + e^{-500t} (-50 \cos 500t - 50 \sin 500t) \text{ В.}$$

**2.6.** Рассчитать операторным методом переходной процесс в схеме (рис. 2.14) при следующих параметрах:

$E=20\text{В}; C=10 \text{ мкФ}; R_3=2R_2=4R_1=200 \text{ Ом}$ . Определить  $u_{R_3}(t)$ .

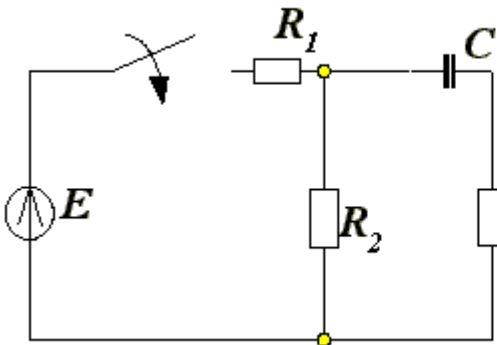


Рис. 2.14

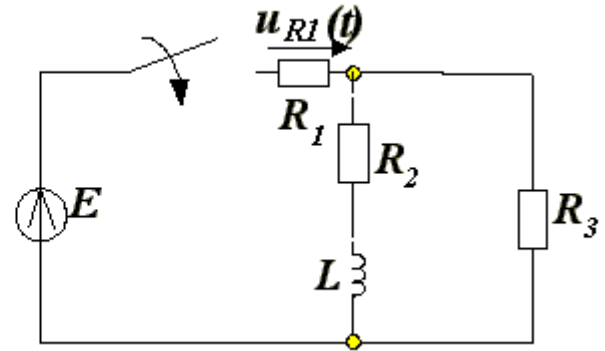


Рис. 2.15

**2.7.** Рассчитать операторным методом переходной процесс в схеме (рис. 2.15) для следующих параметров схемы:  $E=50 \text{ В}; L=0,1 \text{ Гн}; R_1=R_2=R_3=100 \text{ Ом}$ . Определить  $u_{R_1}(t)$ .

**2.8.** Рассчитать операторным методом переходный процесс в схеме (рис. 2.16) для следующих параметров схемы:  $E=15 \text{ В}; R_1=R_2=R_3=100 \text{ Ом}; L=0,1 \text{ Гн}$ .

Определить  $u_{R_3}(t)$ .

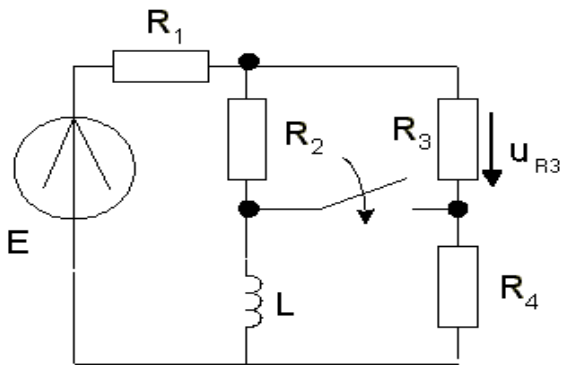


Рис. 2.16

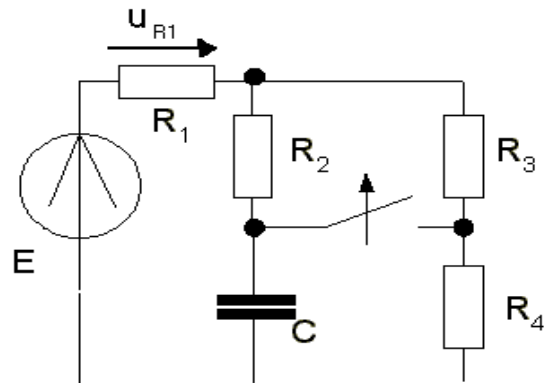


Рис. 2.17

**2.9.** Рассчитать операторным методом переходный процесс в схеме (рис. 2.17), если ее параметры:  $E=2$  В;  $R_1 = R_2 = R_3 = 100$  Ом;  $C=2$  мкФ.

Определить  $u_{R1}(t)$ .

**2.10.** Рассчитать операторным методом переходный процесс в схеме (рис. 2.18), если ее параметры:  $J=0,5$  А,  $R_1=R_2=R_3=100$  Ом;  $L=0,2$  Гн. Определить  $i_{R2}(t)$ .

**2.11.** Рассчитать переходный процесс в схеме (рис. 2.19), если ее параметры:  $J = 0,1$  А,  $R_1 = R_2 = R_3 = 100$  Ом;  $C=1,5$  мкФ. Определить  $i_{R3}(t)$ .

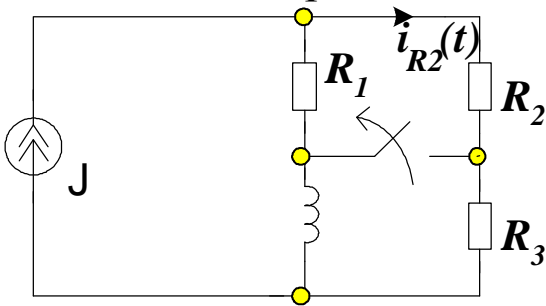


Рис. 2.18

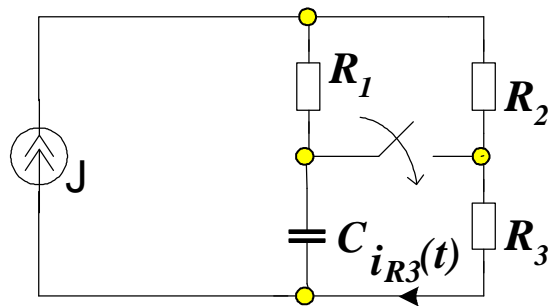


Рис. 2.19

**2.12.** Определить  $i_C(t)$  и построить график переходного процесса в схеме (рис. 2.20), если ее параметры следующие:  $E=200$  В;  $J = 2$  А,  $R_1 = 200$  Ом,  $R_2 = R_3 = 100$  Ом;  $C = 10$  мкФ.

**2.13.** Определить  $u_{R2}(t)$  и построить график изменения напряжения  $u_{R2}(t)$  во времени для схемы (рис. 2.21), имеющей следующие параметры:  $J = 1$  А;  $E = 200$  В;  $R_1 = R_2 = R_3 = 100$  Ом,  $L=0,1$  Гн.

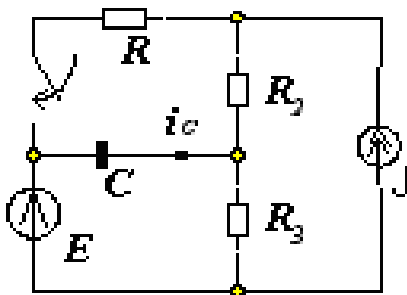


Рис. 2.20

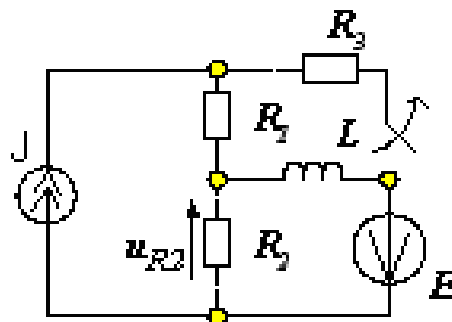


Рис. 2.21

**2.14.** Определить  $i(t)$ , если схема (рис. 2.22) имеет следующие параметры:  $E=12$  В;  $L=1$  мГн;  $C=1$  мкФ;  $R_1=50$  Ом;  $R_2=100$  Ом.

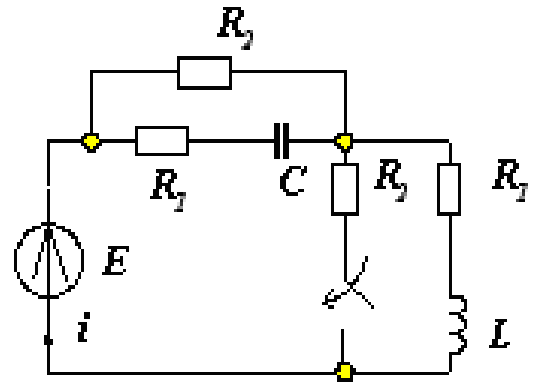


Рис. 2.22

**2.15.** В момент времени  $t = 0$  рубильник переключают из положения 1 в положение 2 (рис. 2.23). Определить  $i(t)$ , если схема имеет следующие параметры:  $R_1=R_2=100$  Ом;  $L=10$  нГн;  $C=10$  пФ;  $E_2=30$  В;  $E_1=10$  В.

Построить график  $i(t)$ .

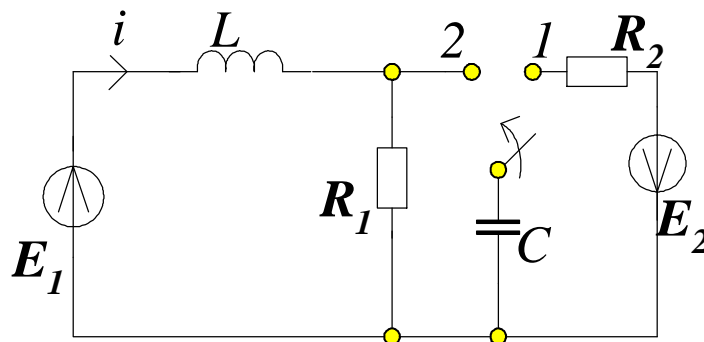


Рис. 2.23

### 3. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

#### Алгоритм расчета схемы с помощью интеграла Дюамеля

1. Определяем переходную характеристику  $h(t)$  для конкретной искомой функции тока или напряжения.
2. По виду функции источника (э.д.с. или тока) определяем количество интервалов и производные функций на каждом интервале.
3. Записываем исходную функцию по интервалам. Делаем замену переменных  $h(t-\tau)$ ,  $h(t-t_1)$ ,  $h(t-t_2)$  и подставляем их в выражения искомой функции. Вычисляем искомую функцию по интервалам.
4. Строим график искомой функции по интервалам.

**3.1.** В схеме (рис. 3.1) включается источник э.д.с. вида, представленного на рис 3.2. Параметры схемы:  $R=100$  Ом,  $L=0,1$  Гн.

Определить функцию тока индуктивности  $i_L(t)$  и построить её график.

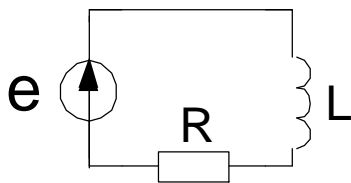


Рис. 3.1

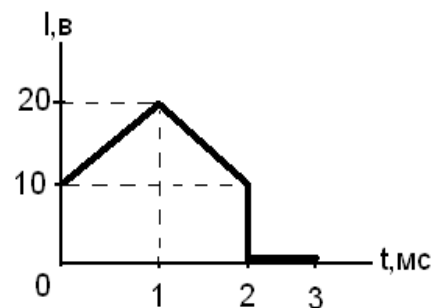


Рис. 3.2

#### Решение

**1.** Определим переходную характеристику  $h(t)$ , которая есть реакция схемы на включение единичного источника. Под реакцией схемы понимаем искомую функцию, т.е.  $i_L(t)$ . Единичный источник – это источник, э.д.с. которого равна

одному вольту постоянного напряжения, т.е.  $e(t) = 1B = const$ , или источник тока, ток которого равен одному амперу постоянного тока, т.е.  $i_0(t) = 1A = const$ .

Следовательно, необходимо решить задачу расчета переходного процесса в схеме (см. рис. 3.1) по определению  $h(t) = i_L(t)$  при условии, что включается  $e(t) = 1B = const$ .

Решим задачу классическим методом.

– Записываем общий вид искомой функции:

$$i_L(t) = A_1 e^{P_1 t} + i_{Lnp}(t). \quad (3.1)$$

Определяем независимое начальное условие (ННУ)

$i_L(0) = 0$ , так как до коммутации источник был отключен.

Зависимое начальное условие (ЗНУ) определять не надо, так как искомая функция  $i_L(t)$ , для нее начальное условие  $i_L(0)$  уже определено.

Корень характеристического уравнения  $P_1$  определяем из схемы после коммутации (см. рис. 3.1).

Для составления характеристического уравнения  $Z(p) = 0$  исключим источник из схемы, заменим его внутренним сопротивлением, которое равно нулю. Получим схему, показанную на рис. 3.3.

Заменим индуктивность  $L$  ее операторным сопротивлением  $Lp$  (рис. 3.4). Свернем операторное эквивалентное сопротивление  $Z(p)$  относительно полюсов разрыва в ветви с реактивным сопротивлением (рис. 3.5), тогда:

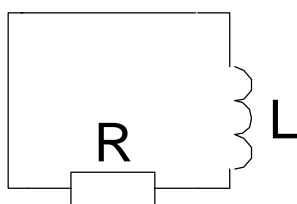


Рис. 3.3

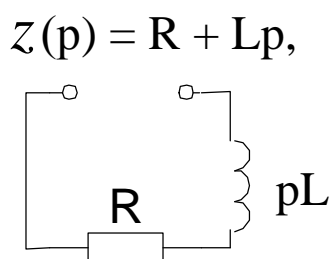


Рис. 3.4

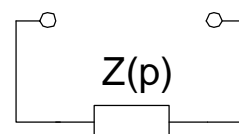


Рис. 3.5

так как элементы  $R$  и  $L_p$  включены последовательно.

Приравнявая  $Z(p)$  к нулю, получим характеристическое уравнение, корень которого  $P_1$ :

$$Z(p) = 0; Lp + R = 0;$$

$$Lp = -R; \quad P_1 = -\frac{R}{L} = -\frac{100}{0.1} = -1000 \text{ 1/с};$$

$$P_1 = -1000 \text{ 1/с}.$$

Определим принужденную составляющую  $i_{Lnp}(t)$  искомой функции  $i_L(t)$ .

Так как в схеме после коммутации включен источник постоянной э.д.с., необходимо перейти к эквивалентной схеме по постоянному току (рис. 3.6), из которой ток

$$i_{Lnp}(t) = i_{Lnp}(0) = \frac{1}{R} = 0,01 \text{ А}.$$

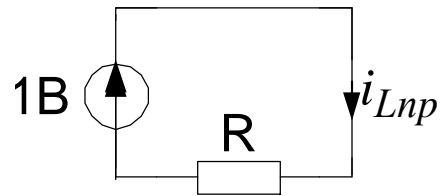


Рис. 3.6

Определим постоянную интегрирования  $A_1$  из уравнения

$$i_L(0) = A_1 + i_{Lnp}(0),$$

тогда  $A_1 = i_L(0) - i_{Lnp}(0) = -i_{Lnp}(0)$ .

$$A_1 = -0,01.$$

Подставим найденные значения параметров  $A_1$ ,  $p_1$  и  $i_{Lnp}$  в общий вид искомой функции (3.1), в результате получим

$$h(t) = -0,01e^{-1000t} + 0,01. \quad (3.2)$$

**2.** После того как определена переходная характеристика  $h(t)$ , исследуем функцию заданной э.д.с.  $e(t)$  (см. рис. 3.2). Необходимо по виду функции определить, сколько интервалов она имеет и чему равны производные этой функции на каждом интервале.

Из графика функции  $e(t)$  (см. рис. 3.2) видно, что она имеет три интервала, на каждом из которых изменяется по разным законам:

I интервал  $0 \leq t < t_1 = 1 \text{ мс} = 10^{-3} \text{ с}$ ;

II интервал  $t_1 \leq t < t_2 = 2 \text{ мс} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ;

III интервал  $t_2 \leq t < \infty$ .

На I интервале функция  $e_I(t)$  изменяется по линейному закону:

$$e_I(t) = kt = b;$$

Производная функции  $e'_I(t) = k$ .

Для определения  $k$  достаточно рассмотреть любой треугольник в координатах  $e(t)$  и взять отношение приращения э.д.с. к приращению времени, за которое произошло приращение э.д.с., т.е.

$$k = \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

Причем приращение  $\Delta e$  может быть положительным, если функция  $e(t)$  возрастающая, или отрицательным, если функция  $e(t)$  убывающая на данном отрезке времени  $\Delta t$ .

Для заданной функции (рис. 3.7) производная функции на

I интервале

$$e'_I(t) = \frac{\Delta e_I}{\Delta t_I} = \frac{20 - 10}{1 \cdot 10^{-3}} = \frac{10}{10^{-3}} = 10^4 \text{ в/с}.$$

На II интервале (см. рис. 3.7)

$$e'_{II}(t) = \frac{\Delta e_{II}}{\Delta t_{II}} = \frac{10 - 20}{(2 - 1) \cdot 10^{-3}} = -10^4 \text{ в/с}.$$

На III интервале нет приращения функции:

$$e'_{III}(t) = 0.$$

**3.** Выражений искомой функции  $i_L(t)$  с помощью интеграла Дюамеля будет столько, сколько интервалов имеет функция источника э.д.с.  $e(t)$ , т.е. всего три.

На I интервале

$$i_{LI}(t) = e(0)h(t) + \int_0^t e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

На II интервале

$$i_{LII}(t) = e(0)h(t) + \int_0^{t_1} e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_{II}(t_1) - e_I(t_1)] \times \\ \times h(t-t_1) + \int_{t_1}^t e'_{II}(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.4)$$

На III интервале

$$i_{LIII}(t) = e(0)h(t) + \int_0^{t_1} e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_{II}(t_1) - e_I(t_1)] \times \\ \times h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e'_{II}(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_{III}(t_2) - e_{II}(t_2)]h(t-t_2) + \\ + \int_{t_2}^t e'_{III}(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.5)$$

Исходя из графика  $e(t)$  (см. рис. 3.2), видим, что  $e(0) = 10B$ .

Для определения функции  $h(t-\tau)$  необходимо сделать замену переменной в переходной характеристике, т.е. вместо  $t$  подставить  $t-\tau$ :

$$h(t-\tau) = -0,01e^{-1000(t-\tau)} + 0,01.$$

$$\text{Представим } -0,01e^{-1000(t-\tau)} = -0,01e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau}.$$

Подставим все найденные выражения в (3.3) и получим выражение для  $i_{LI}(t)$  :

$$i_{LI}(t) = 10(-0,01e^{-1000t} + 0,01) + \\ + \int_0^t 10^4(-0,01e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau} + 0,01)d\tau.$$

Интеграл суммы представим как сумму интегралов, тогда

$$i_{LI}(t) = -0,1e^{-1000t} + 0,1 + \int_0^t (-100e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau} d\tau + \int_0^t 100 d\tau.$$

Сомножитель  $e^{-1000t}$  вынесем за интеграл как независимую переменную, так как интегрируем по  $\tau$ , тогда

$$\begin{aligned} i_{LI}(t) &= -0,1e^{-1000t} + 0,1 - 100e^{-1000t} \frac{1}{1000} e^{1000\tau} \Big|_0^t + 100\tau \Big|_0^t = \\ &= -0,1e^{-1000t} + 0,1 - 0,1e^{-1000t} (e^{1000t} - e^0) + 100t = \\ &= -0,1e^{-1000t} + 0,1 - 0,1 + 0,1e^{-1000t} + 100t \text{ А.} \end{aligned}$$

$$i_{LI}(t) = 100t \text{ А.} \quad (3.6)$$

Для определения  $i_{LII}(t)$  обратимся к выражению (3.4) и графику функции  $e(t)$  (см. рис. 3.2). Из графика видно, что в момент  $t_1$  нет скачка э.д.с., т.е.  $e_I(t_1) = e_{II}(t_1)$ . Следовательно, в выражении (3.4) слагаемое  $[e_{II}(t_1) - e(t_1)]h(t - t_1)$  обращается в ноль.

Тогда искомую функцию  $i_{LII}(t)$  можно вычислить, исходя из (3.4):

$$\begin{aligned} i_{LII}(t) &= 10(-0,001e^{-1000t} + 0,01) + \\ &+ \int_0^{10^{-3}} 10^4 (-0,01e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau}) d\tau + \\ &+ \int_0^{10^{-3}} 10^4 \cdot 0,01 d\tau + \int_{10^{-3}}^t (-10^4) (-0,01e^{-1000\tau} \cdot e^{1000\tau}) dt + \int_{10^{-3}}^t (-10^4) \times \\ &\times 0,01 d\tau = -0,1e^{-1000t} + 0,1 - 100e^{-1000t} \cdot \frac{1}{1000} e^{1000\tau} \Big|_0^{10^{-3}} + 100\tau \Big|_0^{10^{-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 100e^{-1000t} \cdot \frac{1}{1000} e^{1000\tau} \Big|_{10^{-3}}^t - 100\tau \Big|_{10^{-3}}^t = -0,1e^{-1000t} + 0,1 - 0,1e^{-1000t} \times \\
& \times e^1 + 0,1e^{-1000t} + 0,1 + 0,1e^{-1000t} \cdot e^{1000t} - 0,1e^{-1000t} \cdot e^1 - 100t + \\
& + 0,1 = 0,4 + 0,2 \cdot 2,72e^{-1000t} - 100t = 0,4 - 0,544e^{-1000t} - 100t \text{ А.}
\end{aligned}$$

$$i_{LII}(t) = 0,4 - 0,544e^{-1000t} - 100t \text{ А.} \quad (3.7)$$

Сделаем проверку вычислений. Значение функции  $i_{LI}(t_1)$  должно равняться значению  $i_{LII}(t_1)$ , так как ток индуктивности подчиняется закону коммутации, которая происходит в момент времени  $t_1$ :

$$i_{LI}(t_1) = 100 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ А};$$

$$i_{LII}(t_1) = 0,4 - 0,544e^{-1} - 0,1 = 0,4 - 0,2 - 0,1 = 0,1 \text{ А.}$$

Следовательно,  $i_{LI}(t_1) = i_{LII}(t_1) = 0,1 \text{ А}$ . Функция  $i_{LIII}(t)$  в общем виде определяется выражением (3.5). Исходя из графика функции  $e(t)$  (см. рис. 3.2), на третьем интервале функция  $e_{III}(t) = 0$  и её производная  $e'_{III}(t) = 0$ . Но между вторым и третьим интервалами существует скачок э.д.с.:

$$e_{III}(t_2) - e_{II}(t_2) = 0 - 10 = -10 \text{ В.}$$

Следовательно, в формуле (3.5) будет слагаемое вида:

$$[e_{III}(t_2) - e_{II}(t_2)]h(t - t_2).$$

Необходимо определить  $h(t - t_2)$ , для чего сделаем замену в переходной характеристике  $h(t)$  при  $t_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ :

$$h(t - t_2) = -0,01 \cdot e^{-1000(t-t_2)} + 0,01 = -0,01 \cdot e^{-1000t} \cdot e^2 +$$

$$+ 0,01 = -0,01 \cdot e^{-1000t} \cdot 7,381 + 0,01 = -0,07389 \cdot e^{-1000t} + 0,01.$$

Подставляем полученное выражение  $h(t - t_2)$  в (3.5):

$$\begin{aligned}
i_{LIII}(t) &= -0,1 \cdot e^{-1000t} + 0,1 + \int_0^{10^{-3}} 10^4 (-0,01 e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau} \cdot d\tau) + \\
&+ \int_0^{10^{-3}} 10^4 \cdot 0,01 \cdot d\tau + \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} (-10^4) \cdot (-0,01 e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau} \cdot d\tau) + \\
&+ \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} (-10^4) \cdot 0,01 d\tau + (-10)(-0,07389 e^{-1000t} + 0,01) = -0,1 \times \\
&\times e^{-1000t} + 0,1 - 100 \cdot e^{-1000t} \cdot \frac{1}{1000} (e^{1000 \cdot 10^{-3}} - e^0) + 100 \cdot 10^{-3} + \\
&+ 100 \cdot e^{-1000t} \cdot \frac{1}{1000} (e^{1000 \cdot 10^{-3}} - e^0) + 100 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot e^{-1000t} \times \\
&\times \frac{1}{1000} (e^{1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} - e^{1000 \cdot 10^{-3}}) - 100 \cdot (2 \cdot 10^{-3} - 10^{-3}) + 0,7389 \times \\
&\times e^{-1000t} - 0,1 = \underline{-0,1 \cdot e^{-1000t}} + 0,1 - \underline{0,1 \cdot e^{-1000t} \cdot e^1} + \underline{0,1 \times} \\
&\underline{\times e^{-1000t}} + 0,1 + \underline{0,1 \cdot e^{-1000t} \cdot e^2} - 0,1 + 0,7389 e^{-1000t} - 0,1 = \\
&= (-0,2718 + 0,46707 + 0,7389) \cdot e^{-1000t} = 0,93417 \cdot e^{-1000t} \text{ A.} \\
i_{LIII}(t) &= 0,93417 \cdot e^{-1000t} \text{ A.} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Сделаем проверку вычислений на границе II и III интервалов.

Ток  $i_{LII}(t_2)$  должен равняться току  $i_{LIII}(t_2)$ :

$$\begin{aligned}
i_{LII}(t_2) &= 0,4 - 0,544 \cdot e^{-1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} - 100 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,4 - 0,544 \cdot e^{-2} - \\
&- 0,2 = 0,4 - 0,544 \cdot 0,1353 - 0,2 = 0,4 - 0,0736 - 0,2 = 0,1266 \text{ A.}
\end{aligned}$$

$$i_{LIII}(t_2) = 0,93417 \cdot e^{-1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,1264 \text{ A.}$$

Погрешность вычислений:

$$\delta = \frac{0,1266 - 0,1264}{0,1260} \cdot 100\% = 0,14\%,$$

что является допустимой величиной.

4. Строим график рассчитанной функции по интервалам (рис. 3.8).

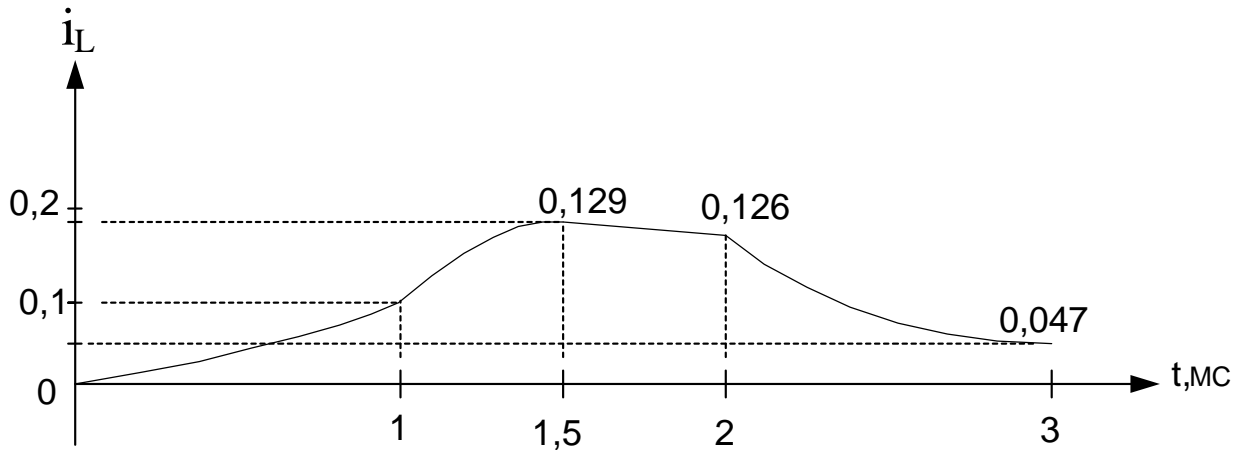


Рис. 3.8

Итак рассчитана функция:

$$i_{LI}(t) = 100t \text{ A};$$

$$i_{LII}(t) = 0,4 - 0,544 \cdot e^{-1000t} - 100t \text{ A};$$

$$i_{LIII}(t) = 0,934 \cdot e^{-1000t} \text{ A}.$$

Для построения графика  $i_{LI}(t)$  достаточно рассчитанных значений в двух точках:  $i_{LI}(t=1\text{мс})=0,1 \text{ A}$ , так как  $i_{LI}(t)$  – прямая.

Для построения  $i_{LII}(t)$  рассчитанных значений  $i_{LII}(t_1)=0,1 \text{ A}$  и  $i_{LII}(t_2=2\text{мс})=0,126 \text{ A}$  недостаточно, необходима хотя бы ещё одна точка на графике:

$$\begin{aligned} i_{LII}(t=1,5\text{мс}) &= 0,4 - 0,54 \cdot 0,233 - 0,15 = 0,4 - 0,121 - 0,15 = \\ &= 0,1286 \approx 0,129 \text{ A}. \end{aligned}$$

Итак, есть три точки для построения графика  $i_{LII}(t)$  (см. рис.3.8):

$$i_{LII}(1 \text{ мс}) = 0,1 \text{ A};$$

$$i_{LII}(1,5 \text{ мс}) = 0,129 \text{ A};$$

$$i_{LII}(2 \text{ мс}) = 0,126 \text{ A}.$$

Для построения графика  $i_{LIII}(t)$  необходимо рассчитать значение  $i_{LIII}(t=3 \text{ мс})$ :

$$i_{LIII}(t = 3\text{мс}) = 0,934 \cdot e^{-1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 0,934 e^{-3} = 0,934 \cdot 0,0498 = \\ = 0,047 \text{ А.}$$

Более точно можно рассчитать и построить график с помощью ПК.

**3.2.** В схеме (рис. 3.9) включается источник э.д.с., график функции которой представлен на рис. 3.10.

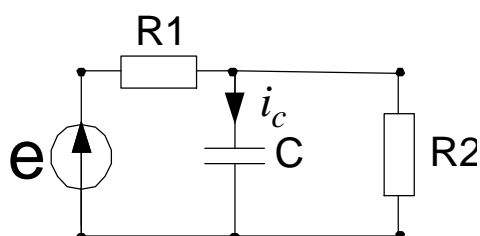


Рис. 3.9

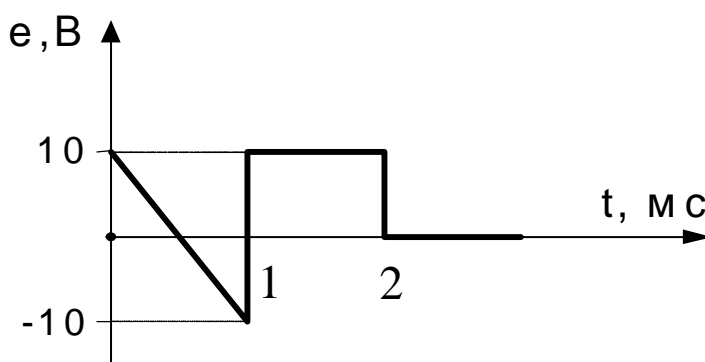


Рис. 3.10

Параметры схемы:  $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $C = 20 \text{ мкФ}$ .

Определить функцию тока емкости  $i_C(t)$  и построить её график.

### Решение

**1.** Определяем переходную характеристику  $h(t)$  любым известным методом расчёта переходных процессов (классическим или операторным), которая численно равна искомой функции тока ёмкости  $i_C(t)$  при условии, что включается источник э.д.с.  $e = 1\text{В} = \text{const}$ .

Решим задачу операторным методом.

Независимое начальное условие (ННУ)  $u_C(0) = 0$ , так как до коммутации источник был отключён.

Операторная схема замещения представлена на рис. 3.11.

Так как  $u_C(0)=0$ , то источник э.д.с.  $\frac{u_C(0)}{p} = 0$ .

Операторное изображение источника э.д.с.  $e = 1B = const$  определяется выражением  $E(p) = \frac{1}{p}$ . Тогда операторная схема принимает вид, представленный на рис. 3.12.

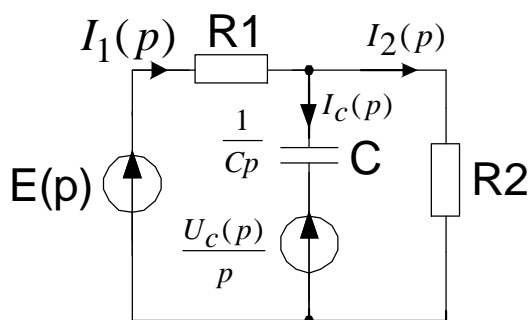


Рис. 3.11

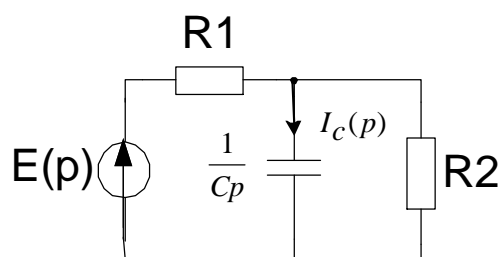


Рис. 3.12

На основании теоремы взаимности определим ток ёмкости  $I_C(p)$ :

$$I_C(p) = \frac{1/P}{R_1 + \frac{1}{CP} + \frac{R_1 \cdot 1/CP}{R_2}}.$$

Преобразуем полученное выражение к виду отношения двух полиномов, учитывая, что  $R_1=R_2$ :

$$I_C(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{1 \cdot Cp}{p(R_1 \cdot Cp + 2)} = \frac{C}{2 + R_1 Cp}.$$

Следовательно,  $N(p)=C$ ;  $M(p)=2+R_1Cp$ . Определим корень  $M(p)$ :

$$M(p) = 2 + R_1 Cp = 0;$$

$$p_1 = -\frac{2}{R_1 C} = -\frac{2}{100 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = -1000 \frac{1}{c}.$$

На основании теоремы разложения:

$$i_C(t) = \left( \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \right) \cdot e^{p_K t} = \frac{C}{R_1 C} \cdot e^{-1000t};$$

$$h(t) = \frac{1}{R_1} \cdot e^{-1000t} = 0,01e^{-1000t},$$

$$h(t) = 0,01 \cdot e^{-1000t}. \quad (3.9)$$

2. Исследуем заданную функцию э.д.с.  $e(t)$  (см. рис. 3.10).

Функция  $e(t)$  имеет три интервала:

I.  $0 \leq t < t_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с};$

II.  $t_1 \leq t < t_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с};$

III.  $t_2 \leq t < \infty.$

На первом интервале производная функции имеет отрицательный знак, так как сама функция монотонно убывает:

$$e'_I(t) = \frac{e(t_1) - e(0)}{\Delta t} = \frac{-10 - 10}{10^{-3}} = -20 \cdot 10^{-3} \text{ В/с}.$$

На втором интервале производная равна нулю, так как  $e_{II}(t) = \text{const}$ :  $e'_{II}(t) = 0$ .

На третьем интервале производная функции  $e'_{III}(t) = 0$ , так как  $e_{III}(t) = 0$ .

3. Общий вид искомой функции тока  $i_C(t)$  на трех интервалах:

$$i_{cI}(t) = e(0)h(t) + \int_0^t e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad (3.10)$$

$$i_{cII}(t) = e(0)h(t) + \int_0^{t_1} e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_{II}(t) - e_I(t)] \times \times h(t-t_1) \\ + \int_{t_1}^t e'_{II}(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
i_{cIII}(t) = e(0)h(t) &= \int_0^{t_1} e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_{II}(t_1) - e_I(t_1)] \times \\
&\times h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e'_{II}(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_{III}(t_2) - e_{II}(t_2)]h(t-t_2) + \\
&+ \int_{t_2}^t e'_{III}(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Исходя из графика  $e(t)$ ,  $e(0)=10$  В, вычислим функцию искомого тока на I интервале (3.10):

$$\begin{aligned}
i_{cI}(t) &= 10(-0,01e^{-1000t}) + \int_0^t (-20 \cdot 10^3) \cdot (-0,01e^{-1000(t-\tau)})d\tau = \\
&= -0,1e^{-1000t} + \int_0^t 200e^{-1000t} \cdot e^{1000\tau}d\tau = -0,1e^{-1000t} + 200e^{-1000t} \times \\
&\times 200e^{-1000t} \cdot \frac{1}{1000} e^{1000\tau} \Big|_0^t = -0,1e^{-1000t} + 0,2e^{-1000t}(e^{1000t} - e^0) = \\
&= -0,1e^{-1000t} + 0,2 - 0,2e^{-1000t};
\end{aligned}$$

$$i_{cI}(t) = 0,2 - 0,3e^{-1000t} \text{ А.} \quad (3.13)$$

Для определения искомой функции на II интервале  $i_{cII}(t)$  необходимо прежде вычислить  $h(t-t_1)$  и скачок э.д.с. в момент  $t_1$ .

$$\begin{aligned}
h(t-t_1) &= 0,01e^{-1000(t-t_1)} = -0,01e^{-1000t} \cdot e^{1000 \cdot 10^{-3}} = \\
&= -0,01e^{-1000t} \cdot e^1 = -0,0272e^{-1000t}.
\end{aligned}$$

Скачок э.д.с. определяется из графика  $e(t)$  (см. рис.3.10)

$$\Delta e(t_1) = e_{II}(t_1) - e_I(t_1) = 10 - (-10) = 20 \text{ В.}$$

Подставим значения  $h(t-t_1)$ ,  $\Delta e(t_1)$  и ранее найденное  $e'_I(t)$  в выражение (3.11), определим искомую функцию тока на II интервале, учитывая, что  $e'_{II}(t) = 0$ .

$$\begin{aligned}
i_{cII}(t) &= 10(-0,01e^{-1000t}) + \int_0^{10^{-3}} (-20 \cdot 10^3)(-0,01e^{-1000(t-\tau)}) d\tau + \\
&+ 20(-0,0272e^{-1000t}) = -0,0272e^{-1000t} + 200e^{-1000t} \cdot \frac{1}{1000} \times \\
&\times e^{1000\tau} \Big|_0^{10^{-3}} - 0,544e^{-1000t} = -0,272e^{-1000t} + 0,2e^{-1000t} \cdot e^1 - 0,2 \times \\
&\times e^{-1000t} \cdot e^0 - 0,544e^{-1000t} = -1,016e^{-1000t} + 0,544e^{-1000t}. \\
i_{cII}(t) &= -0,472e^{-1000t} \text{ А.} \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Для определения функции  $i_{cIII}(t)$  необходимо найти  $h(t-t_1)$

$$\begin{aligned}
h(t-t_2) &= -0,01e^{-1000(t-t_2)} = -0,01e^{-1000t} \cdot e^{1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \\
&= -0,01e^{-1000t} \cdot e^2; \\
h(t-t_2) &= -0,074e^{-1000t}.
\end{aligned}$$

Скачок э.д.с. в момент времени  $t_2$ :

$$\Delta e(t_2) = e_{III}(t_2) - e_{II}(t_2) = 0 - 10 = -10 \text{ В.}$$

Учитывая, что  $e_{III}(t) = 0$  и  $e'_{III}(t) = 0$ , в выражении (3.12) последний интеграл равен нулю.

Выражение искомой функции  $i_{cIII}(t)$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
i_{cIII}(t) &= 10(-0,01e^{-1000t}) + \int_0^{10^{-3}} (-20 \cdot 10^3)(-0,01e^{-1000t}) d\tau + 20 \times \\
&\times (-0,0272e^{-1000t}) + (-10)(-0,074e^{-1000t}) = -0,1e^{-1000t} + 0,2 \times \\
&\times e^{-1000t} (e^1 - e^0) - 0,0544e^{-1000t} + 0,74e^{-1000t} = -0,472e^{-1000t} + \\
&+ 0,74e^{-1000t} = 0,268e^{-1000t} \text{ А.} \\
i_{cIII}(t) &= 0,268e^{-1000t} \text{ А.} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

3. Построим график искомой функции  $i_c(t)$  по интервалам, исходя из выражений (3.13), (3.14), (3.15).

На первом интервале:  $i_{cI}(t) = 0,2 - 0,3e^{-1000t}$  А,

следовательно, при  $t = 0$   $i_{cI}(0) = 0,2 - 0,3 = -0,1$  А; при  $t = 10^{-3}$  с  $i_{cI}(10^{-3}) = 0,2 - 0,3e^{-1} = 0,2 - 0,3 \cdot 0,37 = 0,089$  А.

Нанесем полученные значения  $i_c(t)$  на график (рис. 3.13).

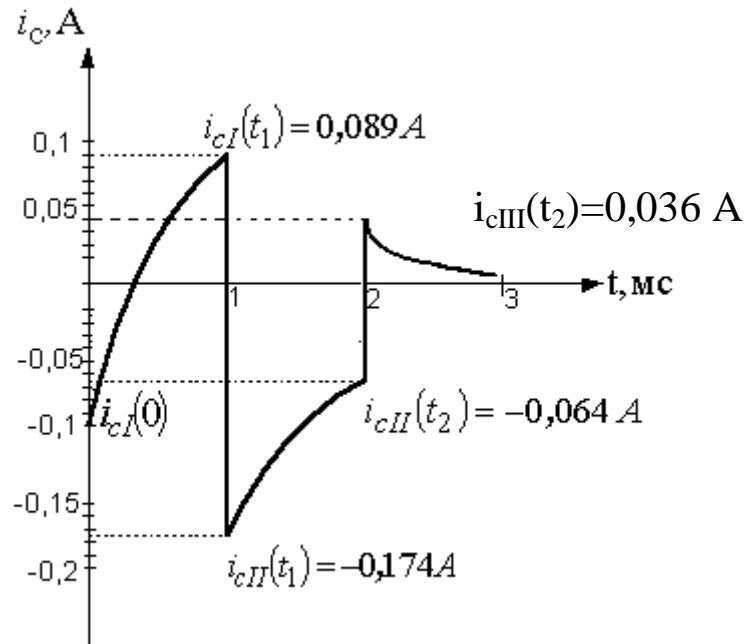


Рис. 3.13

На втором интервале  $i_{cII}(t) = -0,472e^{-1000t}$  А.

При  $t = 10^{-3}$  с  $i_{cII}(10^{-3}) = -0,472e^{-1} = -0,174$  А.

При  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  с  $i_{cII}(2 \cdot 10^{-3}) = -0,472e^{-2} = -0,064$  А.

На третьем интервале искомый ток тоже изменяется по закону экспоненты:

$$i_{cIII} = 0,268 \cdot e^{-1000t} \text{ А.}$$

При  $t = 2 \cdot 10^{-3}$  с  $i_{cIII}(2 \cdot 10^{-3}) = 0,268 \cdot e^{-2} = 0,036$  А.

При  $t=3 \cdot 10^{-3}$  с  $i_{\text{сш}}(3 \cdot 10^{-3}) = 0,268 \cdot e^{-3} = 0,0133$  А.

Более точный график функции  $i_C(t)$  можно построить с помощью ПК.

Но следует помнить, что график функции строится только по интервалам, исходя из полученных аналитических функций.

**3.3.** В схеме (рис. 3.14) включается источник э.д.с., изменяющейся по синусоидальному закону (рис. 3.15). Параметры схемы:  $R_1 = R_2 = R_3 = 50$  Ом,  $L = 0,1$  Гн.

Определить функцию тока индуктивности  $i_L(t)$  и построить её график.

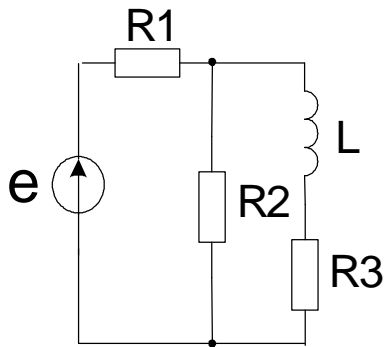


Рис. 3.14

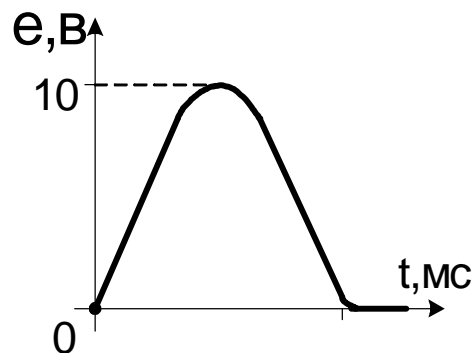


Рис. 3.15

### Решение

**1.** Определяем переходную характеристику  $h(t)$ , которая численно равна искомой функции тока индуктивности  $i_L(t)$  при условии включения единичного источника э.д.с., т.е.  $e(t) = 1\text{В} = \text{const}$ .

Решаем задачу расчёта переходного процесса классическим методом:  $i_L(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + i_{L\text{пр}}(t)$ .

ННУ:  $i_L(0) = 0$ .

ЗНУ не надо, так как определяем  $i_L(t)$ .

Определяем корень характеристического уравнения  $P_1$ , для чего составим характеристическое уравнение для схемы на рис. 3.16:

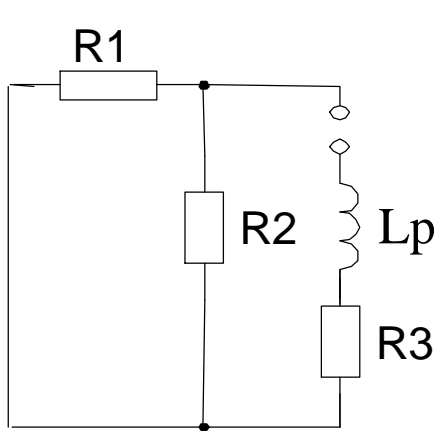


Рис. 3.16

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + Lp = 0;$$

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = R_{\text{ЭКВ}} = \frac{50 \cdot 50}{100} + 50 = 75 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{ЭКВ}} + Lp = 0;$$

$$P_1 = -\frac{R_{\text{ЭКВ}}}{L} = -\frac{75}{0,1} = -750 \text{ 1/C};$$

$$P_1 = -750 \text{ 1/C}.$$

Принуждённую оставляющую тока индуктивности  $i_L(t)$  определим из эквивалентной схемы по постоянному току (рис. 3.17).

Взаимное сопротивление между первой и третьей ветвями

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = 50 + 50 + \frac{50 \cdot 50}{50} = 150 \text{ Ом}.$$

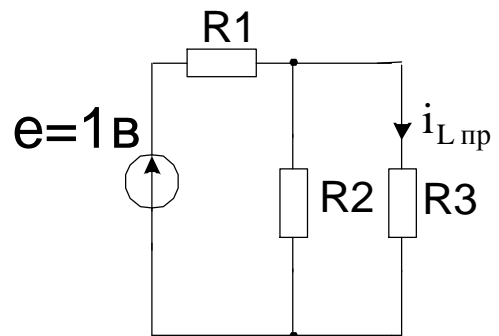


Рис. 3.17

Тогда ток третьей ветви  $i_{L\text{пр}}(t) = \frac{e}{R_{13}} = \frac{1}{150} = 0,0067 \text{ А}.$

$$i_{L\text{пр}}(t) = i_{L\text{пр}}(0) = 0,0067 \text{ А}.$$

Постоянная интегрирования  $A_1 = i_{L\text{пр}}(0) = -0,0067 \text{ А}.$

Переходная характеристика имеет вид

$$h(t) = -0,0067 \cdot e^{-750t} + 0,0067. \quad (3.16)$$

2. По виду функции э.д.с. источника (см. рис. 3.15) определяем, что она имеет два интервала.

На I интервале:

$$0 \leq t < t_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad e_I(t) = E_m \sin \omega t. \quad (3.17)$$

Из графика (см. рис. 3.15) следует, что амплитуда э.д.с. равна 10 В, т.е.  $E_m = 10 \text{ В}$ , а изображённые полпериода равны одной миллисекунде, т.е.  $T/2 = 10^{-3} \text{ с}$ , следовательно,  $T = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

Учитывая, что  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-3}} = \pi \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

Подставим полученные значения  $E_m$  и  $\omega$  в (3.17):

$$e_I(t) = 10 \cdot \sin(\pi \cdot 10^3 t) = 10 \sin(3142t) \text{ В}.$$

Производная э.д.с. на первом интервале:

$$e'_I(t) = 10 \cdot 3142 \cos(3142t) = 3,14 \cdot 10^4 \cos(3142t).$$

На II интервале (см. рис. 3.15):

$$e_{II}(t) = 0, \text{ следовательно, } e'_{II}(t) = 0.$$

Общий вид искомой функции тока  $i_L(t)$  по интервалам:

$$i_{LI}(t) = e(0)h(t) + \int_0^t e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad (3.18)$$

$$i_{LII}(t) = e(0)h(t) + \int_0^{t_1} e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau + [e_I(t) - e_I(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t e'_{II}(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.19)$$

Так как  $e(0)=0$ , то слагаемое  $e(0)h(t)$  в выражениях (3.18) и (3.19) обращается в ноль.

Кроме того, так как производная функции э.д.с. на втором интервале равна нулю:  $e'_{II}(t)=0$ , то последнее слагаемое выражения (3.19) тоже обращается в ноль.

Наконец, между интервалами нет скачка э.д.с., тогда  $e_I(t_1) - e_{II}(t_1) = 0$ . С учетом выказанного ток  $i_L(t)$  по интервалам определяется следующими выражениями:

$$i_{LI}(t) = \int_0^t e'_I(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad (3.20)$$

$$i_{LI}(t) = \int_0^{t_1} e_I'(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

3. Определим функцию по интервалам.

$$\begin{aligned} i_{LI}(t) &= \int_0^t 3,14 \cdot 10^4 \cos(3142\tau) \cdot (-0,0067e^{-750(t-\tau)} + 0,0067) d\tau = \\ &= \int_0^t (-210,4 \cos(3142\tau) \cdot e^{-750(t-\tau)}) d\tau + \int_0^t 210,4 \cos(3142\tau) d\tau = \\ &= -210,4 \cdot e^{-750t} \int_0^t \cos(3142\tau) \cdot e^{750\tau} d\tau + 210,4 \int_0^t \cos(3142\tau) d\tau = \\ &= -210,4e^{-750t} \left[ \frac{e^{750\tau}}{750^2 + 3142^2} [750 \cos(3142\tau) + 3142 \sin(3142\tau)] \right] \Big|_0^t + \\ &+ \frac{210,4}{3142} \sin(3142\tau) \Big|_0^t = -210,4e^{-750t} \left[ \frac{e^{750t}}{104,347 \cdot 10^5} (750 \cos(3142t) + \right. \\ &\left. + 3142 \sin(3142t)) - \frac{e^0}{104,347 \cdot 10^5} \cdot 750 \right] + 0,06696 \sin(3142t) = \\ &= -0,01512 \cos(3142t) - 0,063238 \sin(3142t) + 0,01512e^{-750t} + \\ &+ 0,06684 \sin(3142t) = -0,01512 \cos(3142t) + 0,0036025 \times \\ &\quad \times \sin(3142t) + 0,01512e^{-750t}. \\ i_{LI}(t) &= -0,01512 \cos(3142t) + 0,0036025 \sin(3142t) + \\ &\quad + 0,01512 e^{-750t} A. \end{aligned}$$

На втором интервале функция тока индуктивности определяется из выражения (3.21), которое отличается от (3.20) только верхним пределом интеграла. Следовательно, используем выкладки для  $i_{LI}(t)$ , но учтем новые пределы интеграла:

$$i_{LI}(t) = \int_0^{t_1} e_I'(\tau) h(t-\tau) d\tau = -210,4e^{-750t} \left[ \frac{e^{750\tau}}{750^2 + 3142^2} \times \right.$$



$$i_{LII}(t) = 0,0471e^{-750t} \text{ A.}$$

Построим график  $i_L(t)$  на отрезке времени  $0 \leq t \leq 2 \text{ мс}$  по интервалам. Период функций  $\sin 3142$  и  $\cos 3112$  равен 2 мс. Выберем масштаб по оси времени и по оси тока (рис. 3.18)

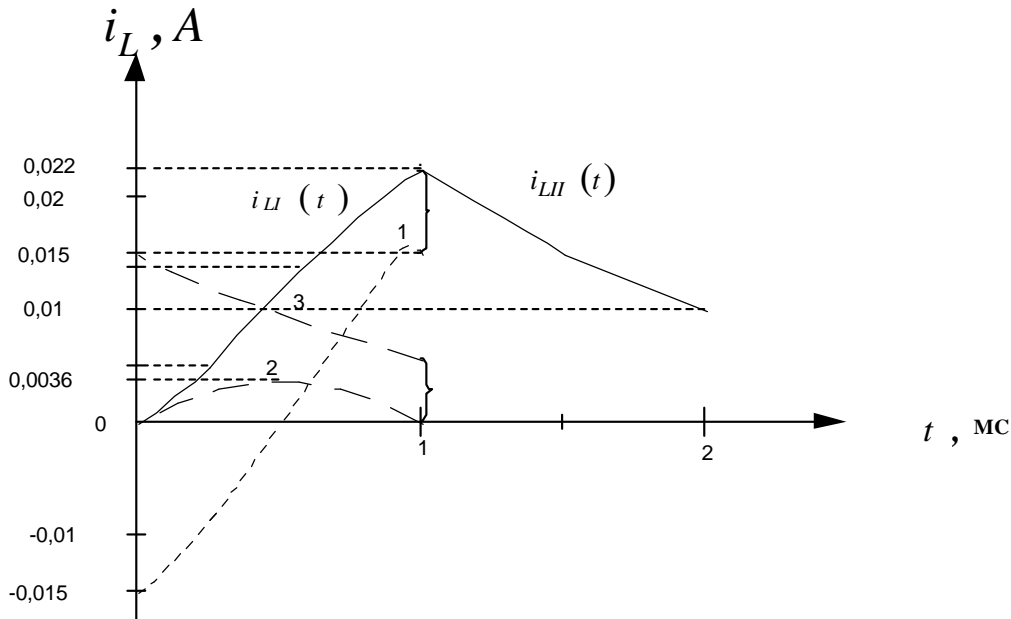


Рис 3.18

Построим функции  $-0,015 \cos(3142t)$  (кривая 1, см. рис. 3.18) и функцию  $0,0036 \sin(3142t)$  (кривая 2, см. рис 3.18), а также экспоненту  $0,015e^{-750t}$  (кривая 3, см. рис 3.18). Сложим графики трех функций на I интервале:  $0 \leq t < t_1$  и получим кривую  $i_{LI}(t)$ .

Затем построим функцию  $i_{LII}(t)$  на интервале  $1 \text{ мс} \leq t < 2 \text{ мс}$ .

Более точно график можно построить на ПК.

**3.4.** В схеме (рис. 3.19) включается источник тока  $i_0(t)$  вида, представленного на рис. 3.20.

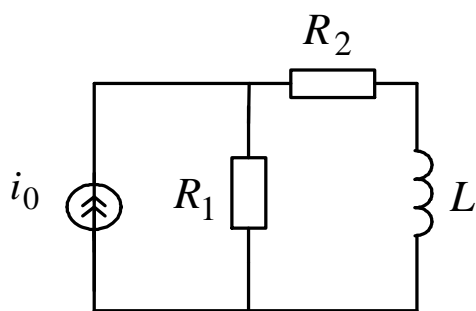


Рис. 3.19

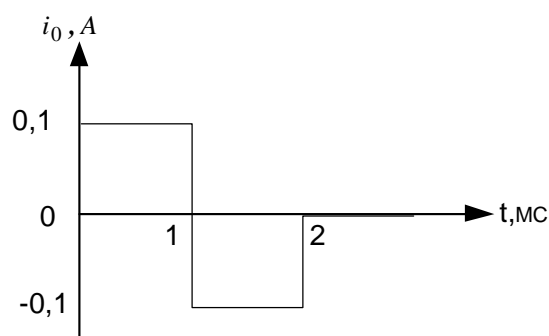


Рис. 3.20

Параметры схемы:  $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ .

Определить функцию напряжения на индуктивности  $u_L(t)$  и построить ее график.

### Решение

1. Определяем переходную характеристику  $h(t)$ , которая численно равна искомой функции  $u_L(t)$  при условии, что включается источник тока  $i_0(t) = 1 \text{ А} = \text{const}$ .

Решаем задачу классическим методом:

$$u_L(t) = A_1 e^{P_1 t} + u_{Lnp}(t).$$

Независимое начальное условие ННУ:  $i_L(0) = 0$ .

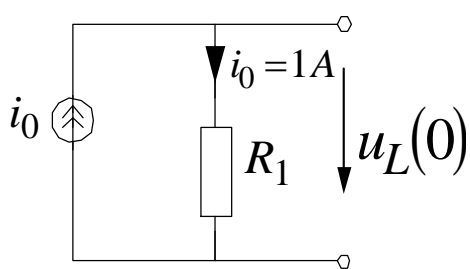


Рис. 3.21

Зависимое начальное условие ЗНУ  $u_L(0)$  определяем из схемы для момента коммутации  $t = 0$ . Учитывая, что  $i_L(0) = 0$ , в месте включения индуктивности в момент коммутации будет обрыв (рис. 3.21).

Тогда  $u_L(0) = R_1 \cdot i_0 = 50 \cdot 1 = 50 \text{ В}$ .  $u_L(0) = 50 \text{ В}$ .

Корень характеристического уравнения  $P_1$  определяем из схемы (рис. 3.22), в которой источник тока заменили его внутренним сопротивлением, т.е. обрывом, а индуктивность  $L$  – операторным сопротивлением  $LP$ .

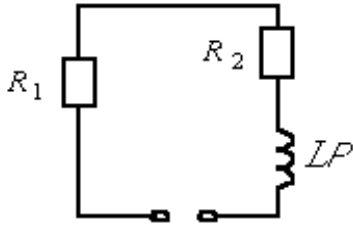


Рис. 3.22

Входное сопротивление

$$Z(p) = R_1 + R_2 + LP = 0;$$

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{L} = -\frac{100}{0,1} = -1000 \text{ 1/с.};$$

$$R_1 = -1000 \text{ 1/с.}$$

Принужденная составляющая искомого напряжения  $u_{Lnp}(t)$  равна нулю, так как сопротивление индуктивности на постоянном токе равно нулю,  $u_{Lnp}(t) = 0$ .

Постоянную интегрирования определяем из уравнения

$$u_L(0) = A_1 + u_{Lnn}(0);$$

$$A_1 = u_L(0) - u_{Lnn}(0);$$

$$A_1 = 50.$$

Переходная характеристика  $h(t) = 50e^{-1000t}$ .

2. По виду функции  $i_0(t)$  (см. рис. 3.20) определяем, что она состоит из трех интервалов:

I интервал  $0 \leq t < t_1 = 10^{-3} \text{ с};$

II интервал  $t_1 = 10^{-3} \text{ с} \leq t < t_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с};$

III интервал  $t_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с} \leq t < \infty.$

На всех трех интервалах производная функции  $i_0'(t) = 0$ , так как сама функция постоянна.

Общий вид искомой функции  $u_L(t)$  по интервалам имеет следующий вид:

$$u_{LI}(t) = i_0(0)h(t) + \int_0^t i_0'(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad (3.22)$$

$$u_{LII}(t) = i_0(0)h(t) + \int_0^{t_1} i_0'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [i_{0II}(t_1) - i_{0I}(t_1)] \times$$

$$\times h(t - t_1) + \int_{t_1}^t i'_{0II}(\tau) h(t - \tau) d\tau; \quad (3.23)$$

$$u_{LIII}(t) = i_0(0)h(t) + \int_0^{t_1} i'_{0I}(\tau)h(t - \tau) d\tau + [i_{0II}(t_1) - i_{0I}(t_1)] \times \\ \times h(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} i'_{0II}(\tau)h(t - \tau) d\tau + [i_{0III}(t_2) - i_{0II}(t_2)]h(t - t_2) + \\ + \int_{t_2}^t i'_{0III}(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (3.24)$$

**3.** С учетом равенства нулю производной тока источника тока на I интервале из (3.22) получим выражение

$$u_{LI}(t) = i_0(0)h(t) = 0,1 \cdot 50e^{-1000t} = 5e^{-1000t} \text{ В};$$

$$u_{LI}(t) = 5e^{-1000t} \text{ В}. \quad (3.25)$$

На II интервале из (3.23) получим выражение

$$u_{LII}(t) = i_0(0)h(t) + [i_{0II}(t_1) - i_{0I}(t_1)]h(t - t_1) = 0,1 \cdot 0,5e^{-1000t} + \\ + [-0,1 - 0,1] \cdot 50e^{-1000(t-10^{-3})} = 5e^{-1000t} - 10e^{-1000t} \cdot e^1 = 5e^{-1000t} - \\ - 27,18e^{-1000t} = 22,18e^{-1000t} \text{ В};$$

$$u_{LII}(t) = -22,18e^{-1000t} \text{ В}. \quad (3.26)$$

На III интервале из (3.24) получим выражение

$$u_{LIII}(t) = i_0(0)h(t) + [i_{0II}(t_1) - i_{0I}(t_1)]h(t - t_1) + [i_{0III}(t_2) - i_{0II}(t_2)] \times \\ \times h(t - t_2) = 0,1 \cdot 50e^{-1000t} + (-0,2) \cdot 50e^{-1000(t-10^3)} + [0 - (0,1)] \times \\ \times 50e^{-1000(t-2 \cdot 10^{-3})} = 5e^{-1000t} - 10e^{-1000t} \cdot e + 5e^{-1000t} \cdot e^2 = \\ = 5e^{-1000t} - 27,18e^{-1000t} + 36,95e^{-1000t} = 14,76e^{-1000t} \text{ В};$$

$$u_{LIII}(t) = 14,76e^{-1000t} \text{ В}. \quad (3.27)$$

**4.** Построим график функции  $u_L(t)$  по трем интервалам, исходя из выражений (3.25), (3.26), (3.27). На всех трех

интервалах функция  $u_L(t)$  изменяется по экспоненциальному закону.

Вычислим значения функции:

$$t = 0, \quad u_{LI}(0) = 5e^0 = 5 \text{ В};$$

$$t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}, u_{LI}(10^{-3}) = 5e^{-1} = 1,84 \text{ В};$$

$$t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}, u_{LII}(10^{-3}) = -22,18e^{-1} = -8,16 \text{ В};$$

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}, u_{LII}(2 \cdot 10^{-3}) = -22,18e^{-2} = -3 \text{ В};$$

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}, u_{LIII}(2 \cdot 10^{-3}) = 14,76e^{-2} = 2 \text{ В};$$

$$t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}, u_{LIII}(3 \cdot 10^{-3}) = 14,76e^{-3} = 0,73 \text{ В}.$$

По полученным значениям строим график  $u_L(t)$  (рис. 3.23).

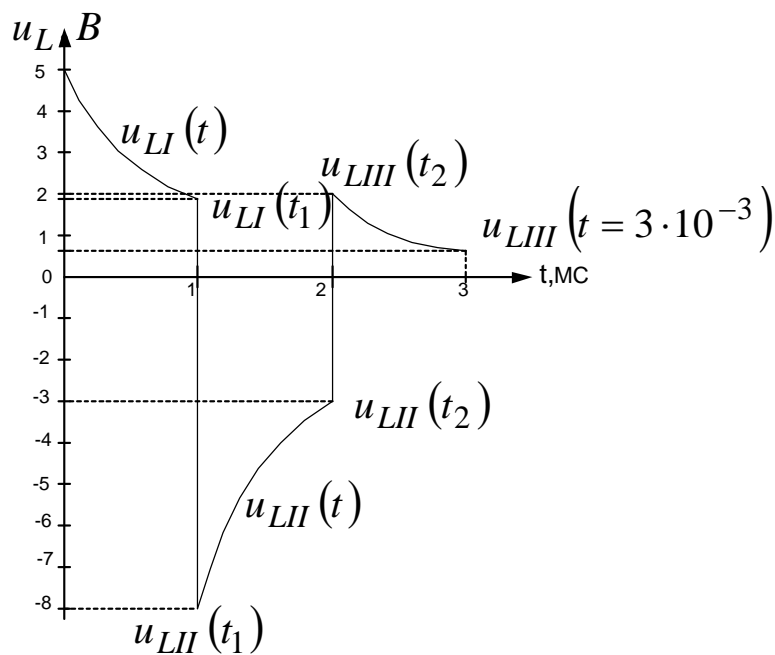


Рис.3.23

**3.5.** В схеме (рис. 3.24) включается источник э.д.с.  $e(t)$ , график функции которой представлен на рис 3.25.

Параметры схемы:  $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 100 \text{ Ом}$ ,  
 $C = 20 \text{ мкФ}$ .

Определить функцию тока  $i_1(t)$ , построить ее график.

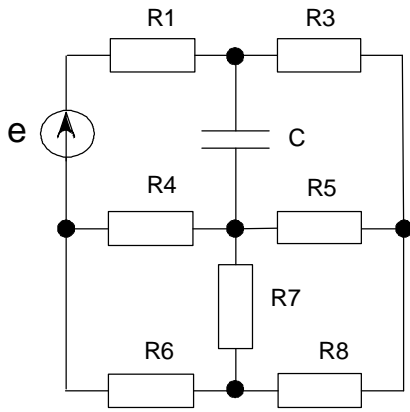


Рис. 3.24

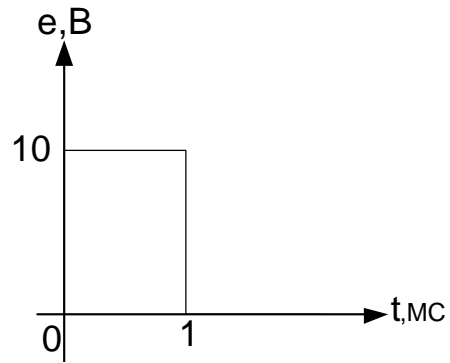


Рис. 3.25

### Решение

1. Определяем переходную характеристику  $h(t)$ , которая численно равна искомой функции  $i_1(t)$  при условии, что включается источник э.д.с.  $e = 1\text{ В} = \text{const}$ .

Решаем задачу классическим методом:

$$i_1(t) = A_1 e^{P_1 t} + i_{1np}(t).$$

$$\text{ННУ: } u_c(0) = 0.$$

$$\text{ЗНУ: } i_1(0) = ?$$

Для определения  $i_1(0)$  используем схему для момента коммутации  $t = 0$ , в которой емкость заменяем короткой, так как  $u_c(0) = 0$  (рис. 3.26).

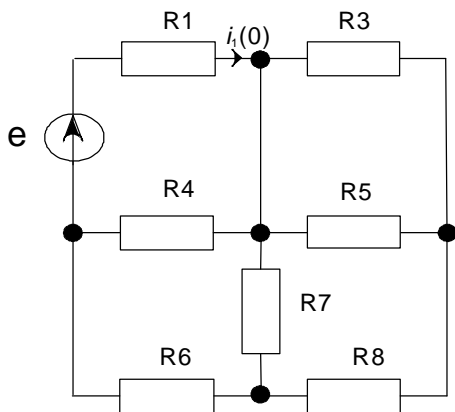


Рис. 3.26

Полученная схема простая, поэтому для определения тока  $i_1(0)$  воспользуемся методом эквивалентных преобразований.

Теперь сопротивления  $R_3$  и  $R_5$  включены параллельно. Заменяем их соединение эквивалентным  $R_{\text{ЭКВ1}}$ , (рис. 3.27).

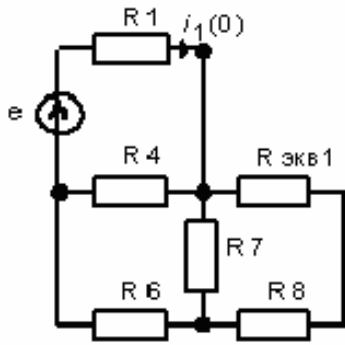


Рис. 3.27

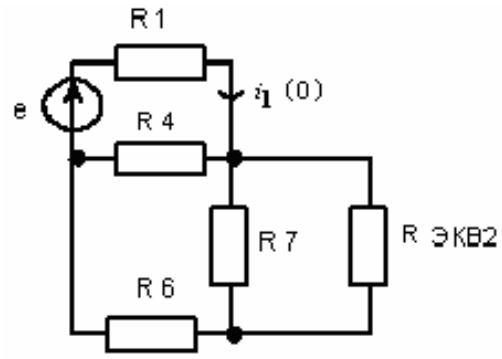


Рис. 3.28

Теперь  $R_{экв1}$  и  $R_8$  включены последовательно, следовательно, их соединение заменим  $R_{экв2}$  (рис. 3.28):

$$R_{экв1} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} = \frac{100 \cdot 100}{200} = 50 \text{ Ом};$$

$$R_{экв2} = R_{экв1} + R_8 = 50 + 100 + 150 \text{ Ом}.$$

В схеме (см. рис. 3.28)  $R_{экв2}$  и  $R_7$  включены параллельно, заменим их соединение  $R_{экв3}$ :

$$R_{экв3} = \frac{R_7 \cdot R_{экв2}}{R_7 + R_{экв2}} = \frac{100 \cdot 150}{250} = 60 \text{ Ом}.$$

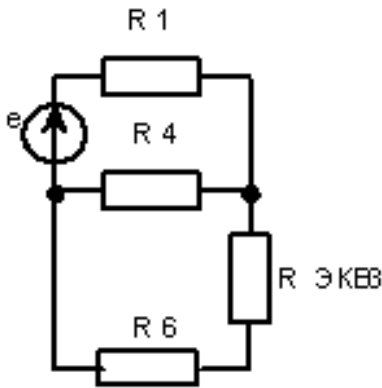


Рис. 3.29

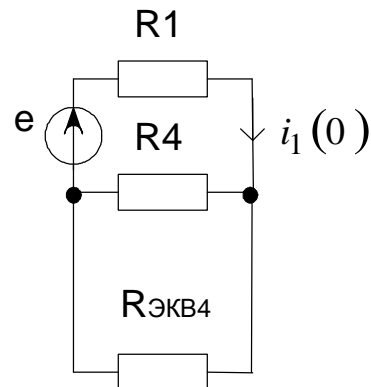


Рис. 3.30

Из схемы на рис. 3.29 следует, что  $R_{экв3}$  и  $R_6$  включены последовательно.

$$R_{экв4} = R_{экв3} + R_6 = 100 + 60 = 160 \text{ Ом}.$$

В схеме на рис. 3.30  $R_{экв4}$  и  $R_4$  включены параллельно и  $R_1$  последовательно.

Тогда искомый ток  $i_1(0)$  (см. рис. 3.30)

$$i_1(0) = \frac{e}{R_1 + \frac{R_4 \cdot R_{\text{экв4}}}{R_4 + R_{\text{экв4}}}} = \frac{1}{100 + \frac{100 \cdot 160}{100 + 160}} = \frac{1}{100 + \frac{16000}{260}} = \frac{1}{161,54} =$$

$$= 0,00619 \text{ A.}$$

$$i_1(0) = 0,00619 \text{ A.}$$

Для определения корня характеристического уравнения необходимо заменить источник э.д.с. его внутренним сопротивлением, емкость – операторным сопротивлением  $1/Cp$ , тогда схема (см. рис. 3.24) будет выглядеть так, как показано на (рис. 3.31).

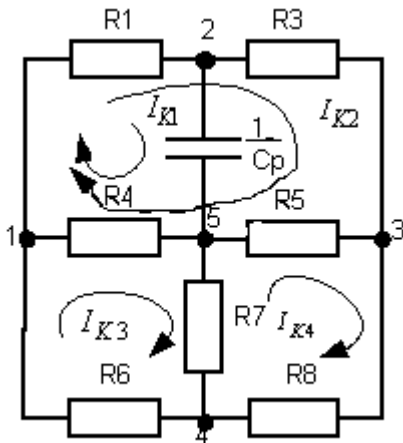


Рис.3.31

Составить характеристическое уравнение  $Z(p) = 0$  в сложных схемах можно двумя путями.

1. Преобразуем сложную схему в простую, используя формулы эквивалентного преобразования звезды в треугольник или треугольника в звезду.

Например, для схемы на рис. 3.31 можно сделать дважды преобразование звезды в треугольник. Звезду сопротивлений  $R_3, R_5, R_8$  преобразуем в треугольник сопротивлений  $R_{35}, R_{58}, R_{38}$ , а звезду  $R_1, R_4, R_6$  – в треугольник сопротивлений  $R_{14}, R_{46}, R_{16}$  (рис. 3.32).

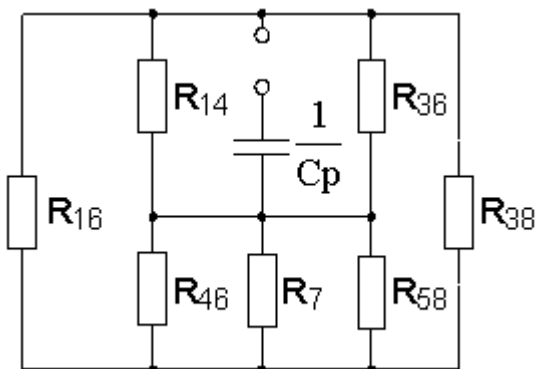


Рис. 3.32

Формулы эквивалентных сопротивлений следующие:

$$R_{14} = R_1 + R_4 + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_6};$$

$$R_{46} = R_4 + R_6 + \frac{R_4 \cdot R_6}{R_1};$$

$$R_{16} = R_1 + R_6 + \frac{R_1 \cdot R_6}{R_4};$$

$$R_{35} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 \cdot R_5}{R_8}; \quad R_{58} = R_5 + R_8 + \frac{R_5 \cdot R_8}{R_3};$$

$$R_{38} = R_3 + R_8 + \frac{R_3 \cdot R_8}{R_5}.$$

Полученная схема (см. рис. 3.32) простая, т.е. соединение сопротивлений в ней параллельно-последовательное:  $R_{14}$  и  $R_{35}$  – параллельны;  $R_{46}$ ,  $R_7$ ,  $R_{58}$  – параллельны;  $R_{16}$ ,  $R_{38}$  – параллельны. После замены этих сопротивлений эквивалентными получим схему, представленную на (рис. 3.33):

$$R_{\text{экв1}} = \frac{R_{14} \cdot R_{35}}{R_{14} + R_{35}}; \quad R_{\text{экв3}} = \frac{R_{16} \cdot R_{38}}{R_{16} + R_{38}};$$

$$R_{\text{экв2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{46}} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_{58}}}.$$

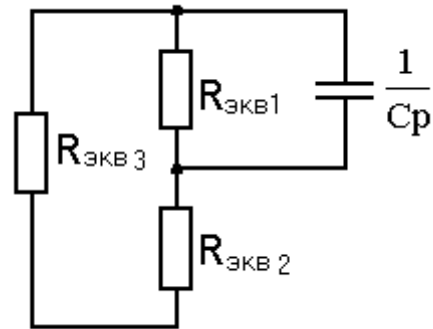


Рис. 3.33

В полученной схеме (см. рис. 3.33)  $R_{\text{экв2}}$  и  $R_{\text{экв3}}$  соединены последовательно, их эквивалентное сопротивление

$R_{\text{экв4}} = R_{\text{экв2}} + R_{\text{экв3}}$ . Наконец,  $R_{\text{экв4}}$  и  $R_{\text{экв1}}$  соединены параллельно, поэтому

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_{\text{экв4}} \cdot R_{\text{экв1}}}{R_{\text{экв4}} + R_{\text{экв1}}}$$

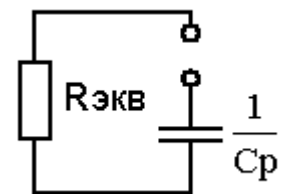


Рис. 3.34

Для полученной схемы (рис. 3.34) можно составить характеристическое уравнение

$\frac{1}{Cp} + R_{экв} = 0$ . Решив полученное уравнение, определим корень  $P_1$ .

$$P_1 = -\frac{1}{R_{экв} C}.$$

**2.** Составить систему уравнений по методу контурных токов для операторной схемы, в которой источник заменён его внутренним сопротивлением, а реактивный элемент – его операторным сопротивлением (см. рис. 3.31).

Затем составить определитель системы, который необходимо приравнять к нулю, и найти корень  $P_1$ , решая уравнение  $\Delta(p) = 0$ .

Решим данную задачу вторым способом (см. рис. 3.31), т.е. составим систему:

$$\begin{cases} I_{K1}(R_1 + \frac{1}{Cp} + R_4) + I_{K2}(R_1 + R_4) - I_{K3} \cdot R_4 + I_{K4} \cdot 0 = 0; \\ I_{K1}(R_1 + R_4) + I_{K2}(R_1 + R_3 + R_4 + R_5) - I_{K3} \cdot R_4 - I_{K4} \cdot R_5 = 0; \\ -I_{K1} \cdot R_4 - I_{K2} \cdot R_4 + I_{K3}(R_4 + R_6 + R_7) - I_{K4} \cdot R_7 = 0; \\ I_{K1} \cdot 0 - I_{K2} \cdot R_5 - I_{K3} \cdot R_7 + I_{K4}(R_5 + R_7 + R_8) = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{Cp} + R_4 & R_1 + R_4 & -R_4 & 0 \\ R_1 + R_4 & R_1 + R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 & -R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4 + R_6 + R_7 & -R_7 \\ 0 & -R_5 & -R_7 & R_5 + R_7 + R_8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 200 + \frac{1}{Cp} & 200 & -100 & 0 \\ 200 & 400 & -100 & -100 \\ -100 & -100 & 300 & -100 \\ 0 & -100 & -100 & 300 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.28)$$

Для решения определителя воспользуемся его свойствами: определитель можно разложить по элементам любой ( $i$ -й) строки по формуле [3]

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}.$$

Положим  $i = 1$ , тогда

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = 0, \quad (3.29)$$

где  $a_{1j}$  – элемент определителя первой строки;

$$a_{11} = 200 + \frac{1}{C_p}; \quad a_{12} = 200; \quad a_{13} = -100; \quad a_{14} = 0.$$

**Минором** элемента  $a_{ij}$  называется определитель  $(n - 1)$  порядка, образованный из данного определителя зачёркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

**Адьюнктой**  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называется его минор со знаком плюс или минус, определяемый по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.30)$$

Тогда, исходя из (3.30) и (3.28), определим  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$ :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 400 & -100 & -100 \\ -100 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 200 & -100 & -100 \\ -100 & 300 & -100 \\ 0 & -100 & 300 \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 200 & 400 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \\ 0 & -100 & 300 \end{vmatrix}.$$

Вычислим значения адьюнктов по формулам Саррюса [3]:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 400 & -100 & -100 & 400 & -100 \\ -100 & 300 & -100 & -100 & 300 \\ -100 & -100 & 300 & -100 & -100 \end{vmatrix} = 400 \cdot 300 \cdot 300 +$$

$$+ (-100)^3 + (-100)^3 - 300 \cdot (-100)^2 - (-100)^2 \cdot 400 -$$

$$- 300 \cdot (-100)^2 = 48 \cdot 10^6 - 10^6 - 10^6 - 3 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^6 =$$

$$= 36 \cdot 10^6.$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 200 & -100 & -100 & 200 & -100 \\ -100 & 300 & -100 & -100 & 300 \\ 0 & -100 & 300 & 0 & -100 \end{vmatrix} = -(200 \cdot 300 \cdot 300) + 0 +$$

$$+ (-100)^3 - 0 - (-100)^2 \cdot 200 - 300 \cdot (-100)^2 = -(18 \cdot 10^6 - 10^6 -$$

$$- 2 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^6) = -12 \cdot 10^6.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 200 & 400 & -100 & 200 & 400 \\ -100 & -100 & -100 & -100 & -100 \\ 0 & -100 & 300 & 0 & -100 \end{vmatrix} = 200 \cdot (-100) \cdot 300 + 0 +$$

$$+ (-100)^3 - 0 - (-100)^2 \cdot 200 - 300 \cdot (-100) \cdot 400 = -6 \cdot 10^6 - 10^6 -$$

$$- 2 \cdot 10^6 + 12 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^6.$$

Подставим значения всех трёх адьюнктов и элементов в формулу (3.29):

$$\Delta = \left(200 + \frac{1}{C_p}\right) \cdot 36 \cdot 10^6 + 200 \cdot (-12 \cdot 10^6) + (-100) \cdot 3 \cdot 10^6 = 0;$$

$$200 \cdot 36 + \frac{36}{C_p} - 2400 - 300 = 0; \quad \frac{36}{C_p} = 4500. \quad \text{Учитывая, что}$$

$$\text{ёмкость } C = 20 \text{ мкФ, определим: } P_1 = \frac{36}{4500 \cdot 20 \cdot 10^{-6}};$$

$$P_1 = -400 \frac{1}{C}. \quad (3.31)$$

Для определения принуждённой составляющей искомого тока  $i_1$  перейдём к эквивалентной схеме по постоянному току (рис. 3.35). Преобразуем треугольник сопротивлений  $R_7, R_5, R_8$  в звезду  $R_{58}, R_{87}, R_{57}$  (рис. 3.36):

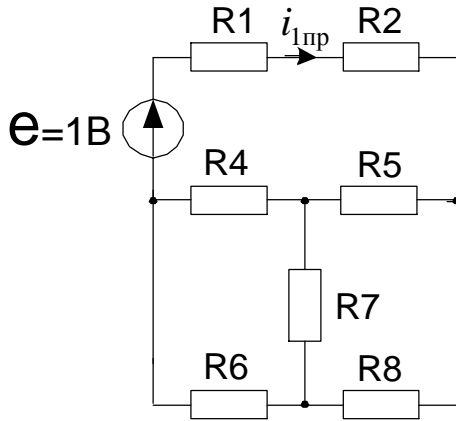


Рис. 3.35

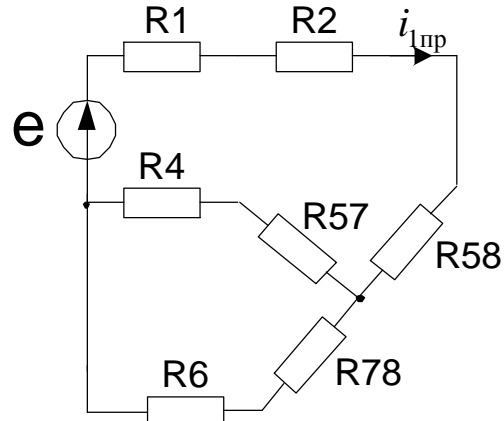


Рис. 3.36

$$R_{58} = \frac{R_5 \cdot R_8}{R_5 + R_7 + R_8} = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100 + 100} = 33,3 \text{ Ом};$$

$R_{58} = R_{87} = R_{57}$ , так как все сопротивления равны. В схеме (см. рис. 3.36) соединение сопротивлений параллельно-последовательное, поэтому

$$\begin{aligned} i_{1np} &= \frac{1}{R_{ЭКВ}} = \frac{1}{R_{58} + R_1 + R_2 + \frac{(R_4 + R_{57})(R_6 + R_{78})}{R_4 + R_{57} + R_6 + R_{78}}} = \\ &= \frac{1}{33,3 + 100 + 100 + \frac{133,3 \cdot 133,3}{266,6}} = \frac{1}{299,97} = 0,00333 \text{ А}; \end{aligned}$$

$$i_{np}(t) = i_{1np}(0) = 0,00333 \text{ А}.$$

Определим постоянную интегрирования:

$$A_1 = i_1(0) - i_{1np}(0) = 0,00619 - 0,00333 = 0,00286.$$

Подставим найденные значения  $A_1, P_1$  (3.31) и  $i_{1np}$  в общий вид переходной характеристики:

$$h(t) = 0,00286 \cdot e^{-400t} + 0,00333.$$

2. Исследуем функцию источника э.д.с. (см. рис. 3.6). Функция имеет два интервала, на которых её производная равна нулю:  $e_I'(t) = 0$ ,  $e_{II}'(t) = 0$ .

Запишем полный вид искомой функции  $i_I(t)$  по интервалам.

$$i_{II}(t) = e(0)h(t); \quad (3.32)$$

$$i_{III}(t) = e(0)h(t) + [e_{II}(t_1) - e_I(t_1)]h(t - t_1). \quad (3.33)$$

3. Вычислим функции (3.32) и (3.33).

$$\begin{aligned} i_{II}(t) &= 10 \cdot (0,00286 \cdot e^{-400t} + 0,00333) = \\ &= \mathbf{0,00286 \cdot e^{-400t} + 0,00333 \text{ А.}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} i_{III}(t) &= 0,00286 \cdot e^{-400t} + 0,0333 + (0 - 10)(0,00286 \times \\ &\times e^{-400(t-10^{-3})} + 0,00333) = 0,0286 \cdot e^{-400t} + 0,0333 - \\ &- 0,0286 \cdot e^{-400t} \cdot e^{0,4} - 0,0333 = 0,0286 \cdot e^{-400t} - \\ &- 0,0427 \cdot e^{-400t} = -0,0141 \cdot e^{-400t} \text{ А;} \end{aligned}$$

$$i_{III}(t) = \mathbf{-0,0141 \cdot e^{-400t} \text{ А.}} \quad (3.35)$$

4. Построим график функции  $i_I(t)$  по интервалам (рис. 3.37).

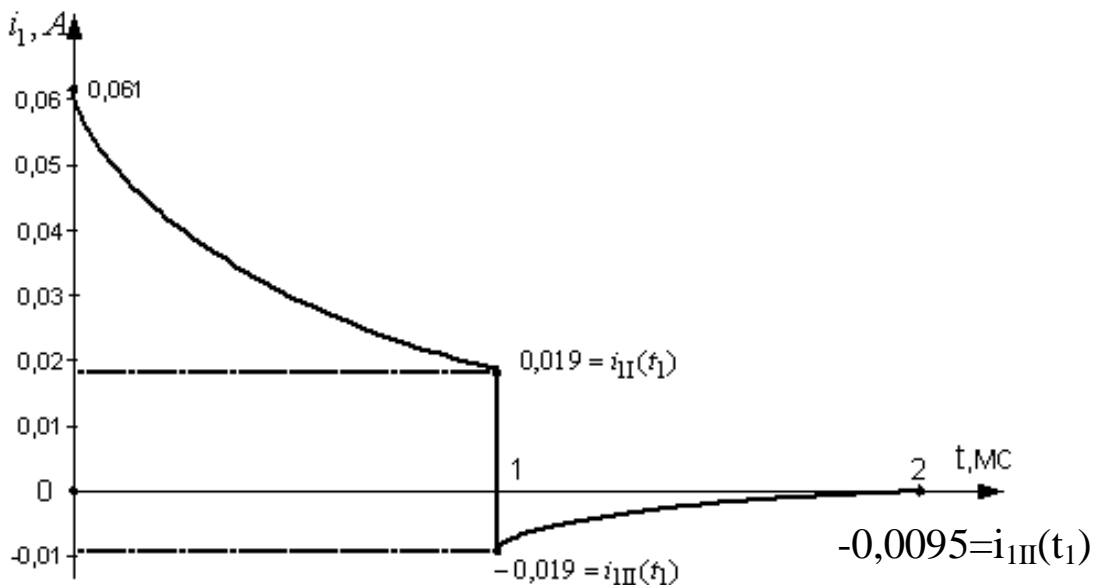


Рис. 3.37

Точно график  $i_L(t)$  можно построить с помощью ПК.

**3.6.** В схеме (рис. 3.38) включается источник э.д.с., функция которой представлена на рис. 3.39. Параметры схемы:  $R_1=R_2=100$  Ом;  $L=0,2$  Гн.

Определить функцию тока индуктивности  $i_L(t)$  и построить её график.

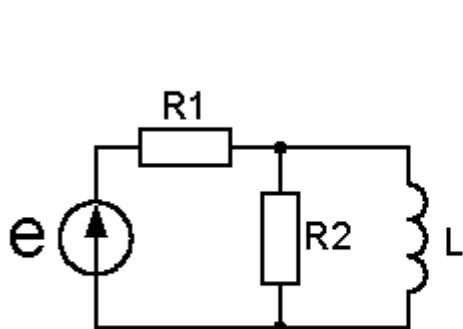


Рис. 3.38

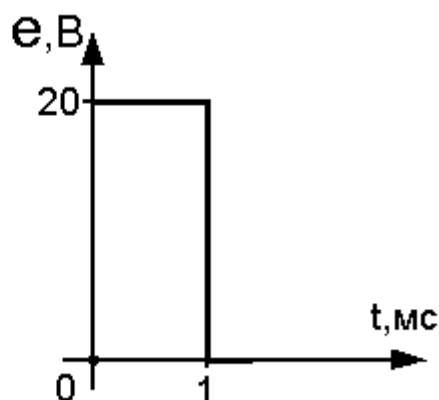


Рис. 3.39

**3.7.** В схеме (рис. 3.40) включается источник э.д.с., функция которой представлена на рис. 3.41. Параметры схемы:  $R_1=R_2=R_3=100$  Ом,  $C=10$  мкФ.

Определить функцию тока ёмкости  $i_C(t)$  и построить её график.

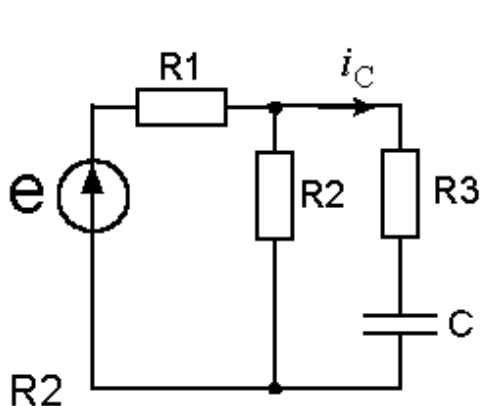


Рис. 3.40

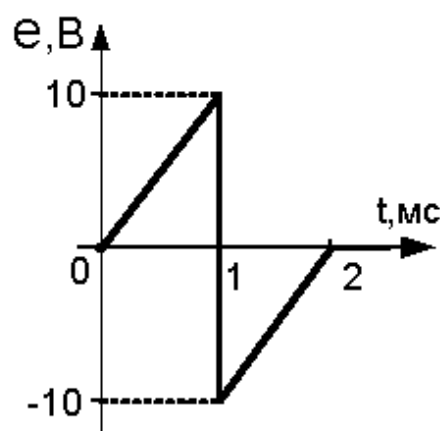


Рис. 3.41

**3.8.** В схеме (рис. 3.42) включается источник, э.д.с. которого изменяется по синусоидальному закону (рис. 3.43).

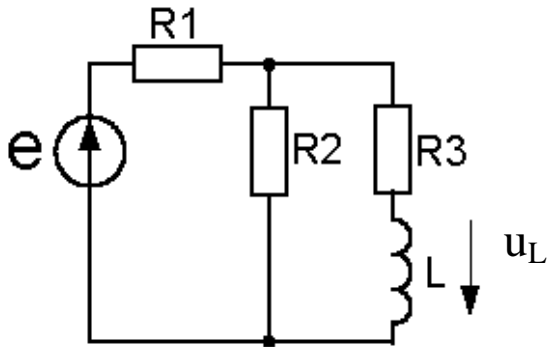


Рис. 3.42

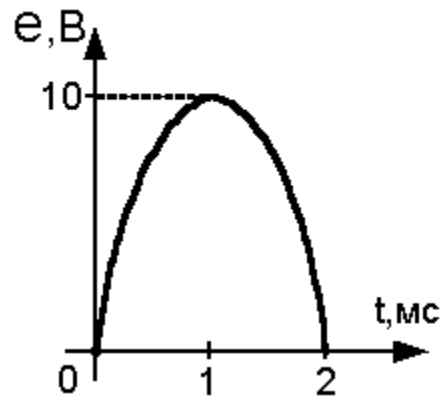


Рис. 3.43

Параметры схемы:  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,15 \text{ Гн}$ .  
Определить функцию напряжения на индуктивности  $u_L(t)$  и построить её график.

**3.9.** В схеме (рис. 3.44) включается источник тока, ток которого изменяется по закону, изображённому на рис. 3.45.  
Параметры схемы:  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$ ;  $C = 30 \text{ мкФ}$ .

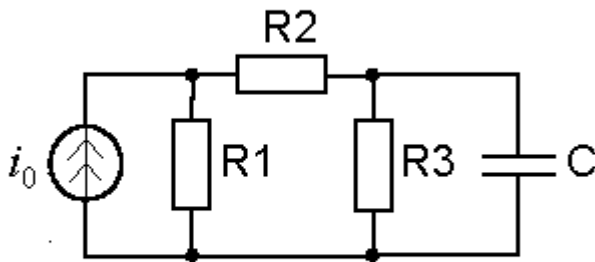


Рис.3.44

Определить функцию  $u_C(t)$ .

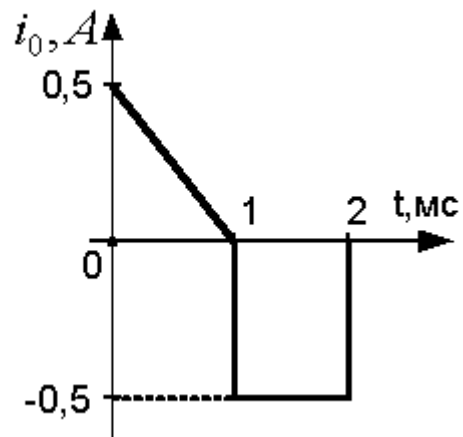


Рис.3.45

**3.10.** В схеме (рис. 3.46) включается источник, э.д.с. которого изменяется по закону, изображённому на рис. 3.47.  
Параметры схемы:  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = R_6 = R_7 =$

$= 200 \text{ Ом}; L=0,2 \text{ Гн}.$

Определить функцию тока индуктивности  $i_L(t)$ .

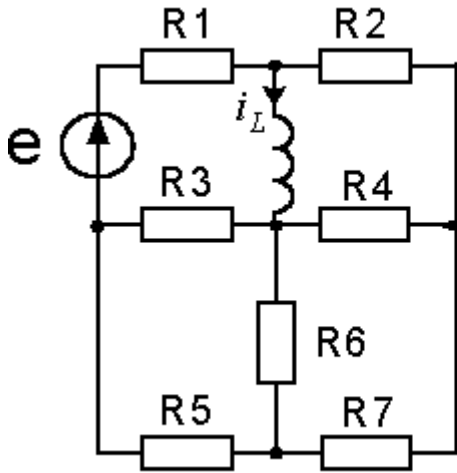


Рис. 3.46

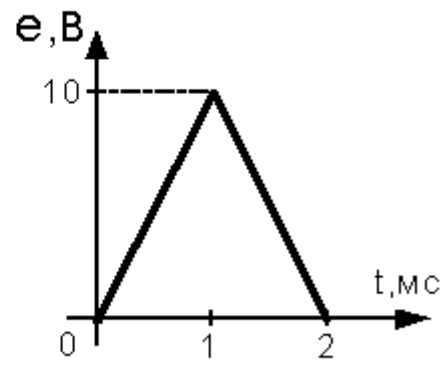


Рис. 3.47

## 4. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

### 4.1. Общие понятия и определения

Анализ переходных процессов в линейных цепях классическим или операторным методом сводился к решению дифференциального уравнения:

$$\frac{a_n d^n x(t)}{dt^n} + \frac{a_{n-1} d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = F(t). \quad (4.1)$$

где  $x(t)$  – это ток или напряжение в элементе или ветви;

$n$  – порядок цепи после коммутации, который определяется количеством емкостей и индуктивностей;

$F(t)$  – это источники электрической энергии, в цепи после коммутации.

Классический и операторный методы помогают найти точное решение дифференциального уравнения (4.1), если порядок цепи не выше второго, если выше второго – корни характеристического уравнения определяются приближенными методами.

Основной недостаток классического метода – это нахождение зависимых начальных условий, а основной недостаток операторного – получение операторного изображения искомой величины и переход от изображения к оригиналу, если корни характеристического уравнения – кратные.

Кроме того, эти методы практически не поддаются автоматизации на ПЭВМ. Поэтому в 50-х годах XX века был предложен метод переменных состояний, с помощью которого рассчитываются переходные процессы в цепях путем решения системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Таким образом, *методом переменных состояния* назовем анализ схемы, основанный на решении системы дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений состояния), записанных в форме Коши.

Введением переменных  $x_1=x$ ;  $x_2 = \frac{dx}{dt}$ ;  $x_3 = \frac{d^2 x}{dt^2}$ ; ... ;  $x_n = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}$  уравнение (4.1) сводится к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3; \\ \dots; \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n; \\ \frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{F(t)}{a_n}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

В системе (4.2) переменная  $x$  и ее производные называются ***переменными состояния***.

Как известно, переходный процесс в любой схеме определяется параметрами  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $M$  и функциями источников  $e(t)$  и  $j(t)$ , а также независимыми начальными условиями при  $t=0$ : токами в индуктивных элементах  $i_L(0)$  и напряжениями на емкостных элементах  $u_C(0)$ , которые должны быть известны или рассчитаны. Через  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$  выражаются искомые величины во время переходного процесса. Они же определяют энергетическое состояние схемы. Поэтому в качестве переменных состояния целесообразно выбирать ***токи  $i_L(t)$  и напряжения  $u_C(t)$*** . Источники, включенные в схему, можно назвать входными

величинами  $[F_1(t), \dots, F_m(t)]$ , искомые величины – выходными величинами  $[y_1(t), \dots, y_l(t)]$ . Для цепи с  $n$  независимыми токами  $i_L(t)$  и напряжениями  $u_C(t)$  должны быть заданы еще  $n$  независимых начальных условий.

Сокращенно дифференциальные уравнения состояния запишем в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + BF(t),$$

или

$$\dot{X} = AX + BF, \quad (4.3)$$

где  $X$  – матрица-столбец (размера  $n \times 1$ ) переменных состояния (*вектор переменных состояния*);  $F$  – матрица-столбец (размера  $m \times 1$ ) э.д.с. и токов источников (внешних возмущений);  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$  (основная);  $B$  – матрица размера  $n \times m$  (матрица связи). Элементы этих матриц определяются топологией и параметрами цепи.

Для выходных величин (если определяются не токи в индуктивных элементах и напряжения на емкостных элементах) в матричной форме система алгебраических уравнений имеет вид

$$Y(t) = MX(t) + NF(t),$$

или короче

$$W = MX + NF, \quad (4.4)$$

где  $Y$  – матрица-столбец (размера  $l \times 1$ );  $M$  – матрица связи (размера  $l \times n$ );  $N$  – матрица связи (размера  $l \times m$ ).

Элементы матриц зависят от топологии и параметров схемы. Для уравнений состояния разработаны и машинные алгоритмы формирования на основе топологии и значений параметров.

## 4.2. Формирование уравнения в матричной форме по методу наложения

Уравнения в матричной форме (4.3), (4.4) можно составить, например, с применением *метода наложения*. Для получения зависимостей между производными переменных

состояния, т. е.  $\frac{di_L}{dt}$ ,  $\frac{du_C}{dt}$ , и переменными состояниями  $i_L(t)$ ,  $u_C(t)$ , а также э.д.с. и токами источников, включенных в схему, будем считать, что переменные состояния заданы. Рассматриваемую схему, например на рис. 4.1, заменим после коммутации эквивалентной (рис.4.2), у которой каждый заданный ток  $i_L(t)$  представлен источником тока  $i_L(t)$ , а каждое заданное напряжение  $u_C(t)$  – источником напряжения (э.д.с.)  $u_C(t)$ .

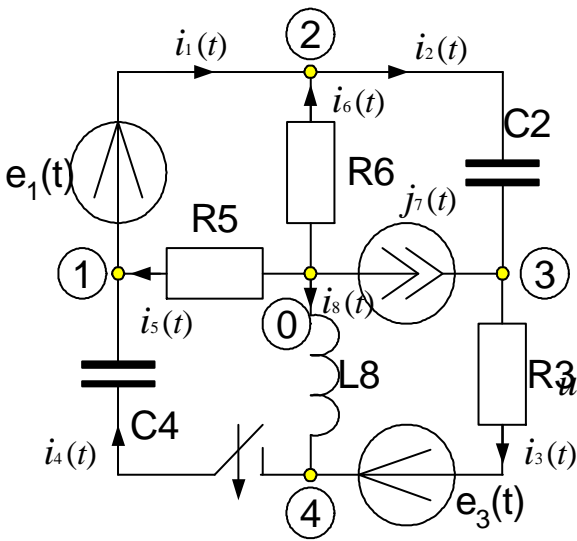


Рис. 4.1

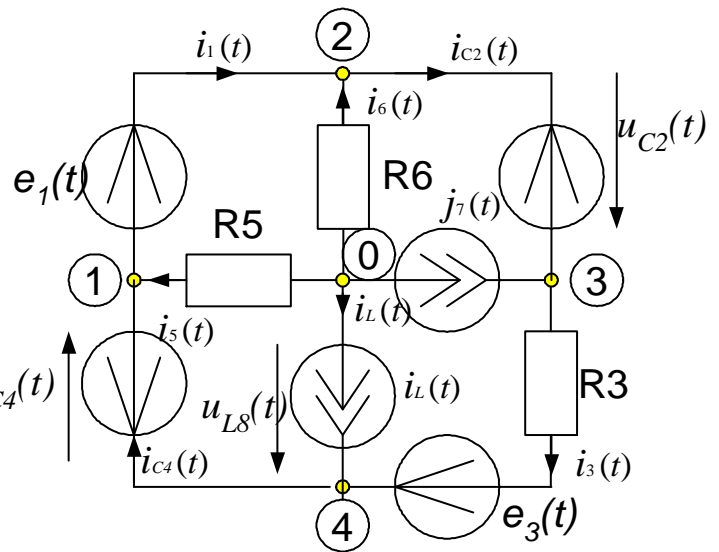


Рис. 4.2

Таблица 4.1

	$i_L(t)$	$u_{C2}(t)$	$u_{C2}(t)$	$e_1(t)$	$e_3(t)$	$j_7(t)$
$u_L(t)$	$-\frac{R_6 R_5}{R_5 + R_6}$	$0$	$-1$	$\frac{R_5}{R_5 + R_6}$	$0$	$-\frac{R_6 R_5}{R_5 + R_6}$
$i_{C2}(t)$	$0$	$-\frac{1}{R_3}$	$-\frac{1}{R_3}$	$\frac{1}{R_3}$	$\frac{1}{R_3}$	$-1$
$i_{C3}(t)$	$1$	$-\frac{1}{R_3}$	$-\frac{1}{R_3}$	$\frac{1}{R_3}$	$\frac{1}{R_3}$	$0$
$i_6(t)$	$-\frac{R_5}{R_5 + R_6}$	$0$	$0$	$-\frac{1}{R_5 + R_6}$	$0$	$-\frac{R_5}{R_5 + R_6}$

Применив метод наложения (положительные направления выбраны), запишем напряжения  $u_L(t)$  и токи  $i_C(t)$  (сначала учитываем действие источников  $i_L(t)$ , затем  $u_C(t)$  и далее источников, включенных в схеме).

Результаты использования метода наложения представлены в табл. 4.1.

По данным табл. 4.1 запишем системы уравнений в виде (4.3) и (4.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_L(t) = -\frac{R_6 R_5}{R_5 + R_6} i_L(t) + 0u_{C_2}(t) - 1u_{C_4}(t) + \frac{R_5}{R_5 + R_6} e_1(t) + 0e_3(t) - \frac{R_6 R_5}{R_5 + R_6} j_7(t); \\ u_L(t) = 0i_L(t) - \frac{1}{R_3} u_{C_2}(t) - \frac{1}{R_3} u_{C_4}(t) + \frac{1}{R_3} e_1(t) + \frac{1}{R_3} e_3(t) - 1j_7(t); \\ i_{C_4}(t) = 1i_L(t) - \frac{1}{R_3} u_{C_2}(t) - \frac{1}{R_3} u_{C_4}(t) + \frac{1}{R_3} e_1(t) + \frac{1}{R_3} e_3(t) - 0j_7(t); \\ i_6(t) = \frac{R_5}{R_5 + R_6} i_L(t) + 0u_{C_2}(t) + 0u_{C_4}(t) + \frac{1}{R_5 + R_6} e_1(t) + 0e_3(t) - \frac{R_5}{R_5 + R_6} j_7(t). \end{array} \right.$$

Так как  $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$  и  $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ , то

получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} i_L(t) + 0u_{C_2}(t) - \frac{1}{L} u_{C_4}(t) + \frac{R_5}{L(R_5 + R_6)} e_1(t) + 0e_3(t) - \frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} j_7(t); \\ \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = 0i_L(t) - \frac{1}{C_2 R_3} u_{C_2}(t) - \frac{1}{C_2 R_3} u_{C_4}(t) + \frac{1}{C_2 R_3} e_1(t) + \frac{1}{C_2 R_3} e_3(t) - \frac{1}{C_2} j_7(t); \\ \frac{du_{C_4}(t)}{dt} = \frac{1}{C_4} i_L(t) - \frac{1}{C_4 R_3} u_{C_2}(t) - \frac{1}{C_4 R_3} u_{C_4}(t) + \frac{1}{C_4 R_3} e_1(t) + \frac{1}{C_4 R_3} e_3(t) - 0j_7(t); \\ i_6(t) = \frac{R_5}{R_5 + R_6} i_L(t) + 0u_{C_2}(t) + 0u_{C_4}(t) + \frac{1}{R_5 + R_6} e_1(t) + 0e_3(t) - \frac{R_5}{R_5 + R_6} j_7(t). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Следовательно:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_{C_2}(t)}{dt} \\ \frac{du_{C_4}(t)}{dt} \end{bmatrix}; \quad X(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_{C_2}(t) \\ u_{C_4}(t) \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_3(t) \\ j_7(t) \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} & 0 & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{C_2 R_3} & \frac{-1}{C_2 R_3} \\ \frac{1}{C_4} & \frac{-1}{C_4 R_3} & \frac{-1}{C_4 R_3} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{R_5}{L(R_5 + R_6)} & 0 & \frac{-R_5 R_6}{L(R_5 + R_6)} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & \frac{1}{C_2 R_3} & \frac{-1}{C_2} \\ \frac{1}{C_4 R_3} & \frac{1}{C_4 R_3} & 0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{R_5}{R_5 + R_6} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{-R_5}{R_5 + R_6} \end{bmatrix}.$$

Конечно, уравнения (4.5) можно получить и из уравнений Кирхгофа, исключая токи и напряжения резистивных элементов. Однако совместное решение уравнений Кирхгофа с увеличением числа ветвей цепи становится все более громоздким.

### 4.3. Аналитическое решение уравнений состояния

Если источников тока и э.д.с. нет, т. е.  $F = 0$ , то уравнения (4.1) упрощаются, т.е. имеют вид

$$\frac{d}{dt} X(t) - AX(t) = 0, \quad (4.6)$$

и характеризуют свободные процессы в схеме. Решение запишем в виде

$$X(t) = X(0)e^{At}, \quad (4.7)$$

где  $X(0)$  – матрица-столбец начальных значений переменных состояния;

$e^{At}$  – матричная экспоненциальная функция.

Подставив (4.7) в (4.6), убедимся, что получается тождество.

При  $F \neq 0$  решение уравнения (4.1) представим в виде

$$X(t) = e^{At} \Phi(t), \quad (4.8)$$

где  $\Phi(t)$  – некоторая матричная функция схемы. После

дифференцирования (4.8) получим

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + e^{At} \frac{d}{dt} \Phi(t). \quad (4.9)$$

Сравнивая (4.9) с (4.3), получим выражение

$$e^{At} \frac{d}{dt} \Phi(t) = BF(t),$$

и, умножив которое на  $e^{-At}$ , после интегрирования найдем, что

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta,$$

где  $\Theta$  – переменная интегрирования. Тогда

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta + \int_0^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta.$$

Подставим это выражение в (4.8), получим

$$X(t) = e^{At} \int_{-\infty}^0 e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta + \int_0^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta.$$

В частности, при  $t = 0$  имеем

$$X(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta.$$

Следовательно, решение для переменных состояния записывается в виде

$$X(t) = e^{At} X(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta. \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) говорит о том, что реакция схемы равна сумме реакций при нулевом входе и при нулевом начальном состоянии.

Это решение можно также получить, применив операторный метод расчета переходных процессов.

Выходные величины можно найти, используя выражение по (4.4).

Если состояние схемы задано не при  $t = 0$ , а при  $0 < \tau < t$ , то (4.10) преобразуется к виду

$$X(t) = e^{A(t-\tau)} X(\tau) + e^{At} \int_{\tau}^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta.$$

Главная трудность расчета заключается в вычислении матричной экспоненциальной функции. Один из путей следующий.

Сначала находим собственные значения  $\lambda$  матрицы  $A$ , т. е. корни уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (4.11)$$

где  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Корни определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.12)$$

где  $a_{jk}$  – элементы матрицы  $A$ .

Собственные значения совпадают с корнями  $p_k$  характеристического уравнения цепи.

Матричная экспонента, аргумент которой – матрица  $At$ , имеющая порядок  $n$ , представима **конечным** числом  $n$  слагаемых. Если собственные значения различны, то

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}, \quad (4.13)$$

где  $\alpha_k$  – функции времени;  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA$  и т. д.

Далее для определения  $\alpha_k$  составляем алгебраическую систему  $n$  уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_1^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_1^{n-1} \alpha_{n-1} = e^{\lambda_1 t}; \\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_2^{n-1} \alpha_{n-1} = e^{\lambda_2 t}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \alpha_0 + \lambda_n \alpha_1 + \lambda_n^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} \alpha_{n-1} = e^{\lambda_n t}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Наконец, определив  $\alpha_k$  из (4.14), находим  $e^{-At}$  по (4.13) и затем  $X(t)$  по (4.10).

**Пример. 4.1.** Определить ток  $i_L(t)$  и напряжение  $u_C(t)$  в схеме на (рис. 4.3) после коммутации путем аналитического решения уравнений переменных состояния, если  $R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 100$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 10$  мкФ;  $E_1 = E_3 = 100$  В;  $J_7 = 1$  А.

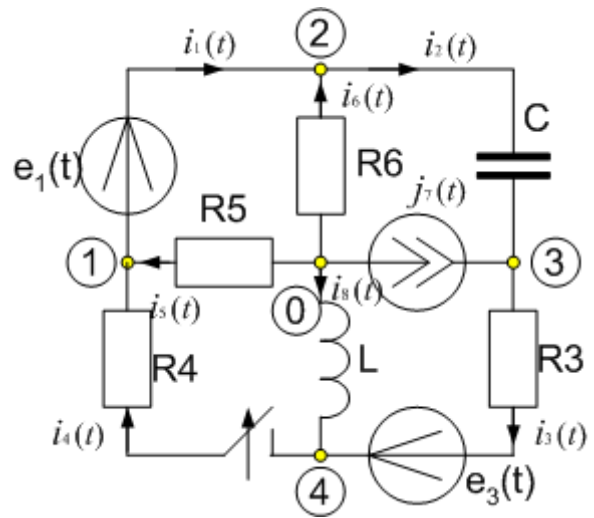


Рис. 4.3

### Решение

Выбираем положительные направления токов и напряжения. Независимые начальные условия в схеме до коммутации:

$$i_L(0_-) = \frac{-2}{3} \text{ А} \quad \text{и} \quad u_C(0_-) = \frac{200}{3} \text{ В}.$$

Дифференциальные уравнения схемы составляем по методу наложения:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L} \left( R_3 + \frac{R_6 R_5}{R_5 + R_6} \right) i_L(t) + \frac{1}{L} u_C(t) - \frac{R_5}{L(R_5 + R_6)} e_1(t) - \frac{1}{L} e_3(t) - \frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} j_7(t); \\ \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{C} u_C(t) + \frac{1}{C} e_1(t) + \frac{1}{C} e_3(t) - \frac{1}{C} j_7(t). \end{cases}$$

Подставив численные значения, получим:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -1500 i_L(t) + 10 u_C(t) - 5 e_1(t) - 10 e_3(t) - 500 j_7(t); \\ \frac{du_C(t)}{dt} = -10^5 i_L(t) - 0 u_C(t) + 0 e_1(t) + 0 e_3(t) - 10^5 j_7(t). \end{cases}$$

Следовательно:

$$A = \begin{bmatrix} -1500 & 10 \\ -10^5 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -500 \\ 0 & 0 & -10^5 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix}; BF = \begin{bmatrix} -2000 \\ -10^5 \end{bmatrix}$$

и матрица-столбец начальных значений

$$X(\mathbf{0}_+) = \begin{bmatrix} i_L(\mathbf{0}_-) \\ u_C(\mathbf{0}_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 200/3 \end{bmatrix}.$$

Вычислим собственные значения по (4.11):

$$\begin{vmatrix} -1500 - \lambda & 10 \\ -10^5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = -750 + j661,438$ ;  $\lambda_2 = -750 - j661,438$ .

Находим коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  по (4.14), т. е. из системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 = e^{\lambda_1 t}; \\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 = e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} \alpha_0 = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \alpha_1 = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{cases}$$

Вычисляем матричную экспоненту по (4.13):

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} - e^{\lambda_2 t} \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

или

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 0,5 + j0,567 & -j7,559 \cdot 10^{-3} \\ j75,593 & 0,5 - j0,567 \end{bmatrix} - e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} -0,5 + j0,567 & -j7,559 \cdot 10^{-3} \\ j75,593 & -0,5 - j0,567 \end{bmatrix}.$$

Так как решение для переменных состояния

записывается в виде

$$X(t) = e^{At} X(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta,$$

ТО ВЫЧИСЛИМ ИХ СОСТАВЛЯЮЩИЕ:

$$e^{At} X(0_+) = \begin{bmatrix} -0,333 - j0,882 \\ 33,333 - j88,192 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} - \begin{bmatrix} 0,333 - j0,882 \\ -33,333 - j88,192 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t};$$

$$\begin{aligned} e^{At} \int_0^t e^{-A\Theta} BF(\Theta) d\Theta &= \\ &= \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} -1000 - j377,964 \\ -5 \cdot 10^4 - j9,449 \cdot 10^4 \end{bmatrix} e^{\lambda_1(t-\Theta)} - \begin{bmatrix} 1000 - j377,964 \\ 5 \cdot 10^4 - j9,449 \cdot 10^4 \end{bmatrix} e^{\lambda_2(t-\Theta)} \right\} d\Theta = \\ &= \begin{bmatrix} -1000 - j377,964 \\ -5 \cdot 10^4 - j9,449 \cdot 10^4 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{-\lambda_1 \Theta} d\Theta - \begin{bmatrix} 1000 - j377,964 \\ 5 \cdot 10^4 - j9,449 \cdot 10^4 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 \Theta} d\Theta = \\ &= \begin{bmatrix} -0,5 - j0,945 \\ 25 - j103,94 \end{bmatrix} (1 - e^{\lambda_1 t}) - \begin{bmatrix} 0,5 - j0,945 \\ -25 - j103,94 \end{bmatrix} (1 - e^{\lambda_2 t}). \end{aligned}$$

Следовательно, ток в индуктивности:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= (-0,333 - j0,882)e^{\lambda_1 t} - (0,333 - j0,882)e^{\lambda_2 t} + \\ &+ (-0,5 - j0,945) + (0,5 + j0,945)e^{\lambda_1 t} - \left( (0,5 - j0,945) - (0,5 - j0,945)e^{\lambda_2 t} \right) = \\ &= -1 + (0,167 + j0,063)e^{\lambda_1 t} + (0,167 - j0,063)e^{\lambda_2 t} = \\ &= -1 + 0,179e^{-750t} \left[ e^{j(661,438t + 20,7^\circ)} + e^{-j(661,438t - 20,7^\circ)} \right] = \\ &= -1 + 0,358e^{-750t} \cos(661,438t + 20,7^\circ) \text{ A}. \end{aligned}$$

Напряжение на емкости:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= (33,333 - j88,192)e^{\lambda_1 t} - (-33,333 - j88,192)e^{\lambda_2 t} + \\ &+ (25 - j103,94) + (25 + j103,94)e^{\lambda_1 t} - \left( (-25 - j103,94) - (-25 - j103,94)e^{\lambda_2 t} \right) = \\ &= 50 + (8,33 + j15,748)e^{\lambda_1 t} + (8,33 - j15,748)e^{\lambda_2 t} = \\ &= 50 + 17,815e^{-750t} \left[ e^{j(661,438t + 62,1^\circ)} + e^{-j(661,438t + 62,1^\circ)} \right] = \\ &= 50 + 35,63e^{-750t} \cos(661,438t + 62,1^\circ) \text{ B}. \end{aligned}$$

Значения тока в индуктивности и напряжения на емкости, вычисленные в моменты  $t_k = kh = 0,0005k$  с для интервала времени  $0 - 0,01$  с, приведены в табл. 4.2.



$$W(t) = M(e^{At} - 1)A^{-1}B + N.$$

Полученные выражения  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{w}(t)$  будут переходные функции схемы  $\mathbf{h}(t)$ .

Уравнения состояния схем, порядок которых больше двух-трех, проще решаются не аналитическими, а численными методами, дающими возможность автоматизировать расчет в случае применения ЭВМ.

#### 4.4. Численные методы решения уравнений состояния

Интегрирование дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния в форме Коши (4.2), чаще выполняется численными методами на ПЭВМ. Интервал времени, в течение которого необходимо найти значения искомых величин, разделяется на малые промежутки – шаги  $\Delta t = h$ . В результате расчета получают значения этих величин в отдельные (дискретные) моменты времени  $t_k = kh$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Предполагается, что значения искомых величин в начальный момент времени  $t_0 = 0$  известны (начальные условия задачи).

Математиками разработаны различные методы численного решения уравнений, записанных в форме Коши, из которых далее рассматриваются более простые – одношаговые. В одношаговых методах искомые величины в момент времени  $t_k$  определяются по уже найденным значениям на предыдущем одном шаге.

Наиболее простой из одношаговых методов – *явный метод Эйлера* записывается следующим образом:

$$X_{k+1}(t) = X_k(t) + h\dot{X}_k(t), \quad (4.15)$$

где  $X_{k+1}(t)$  – матрица-столбец переменных состояния для  $(k+1)$ -го шага;

$X_k(t)$  – то же для  $k$ -го шага (в момент  $t_k$ );

$\dot{X}_k(t)$  – матрица-столбец производных (точнее, угловых

коэффициентов касательных) переменных состояния в момент  $t_k$  (в начале предыдущего шага).

Метод назван *явным*, так как искомое решение для  $(k+1)$ -го шага не входит в правую часть матричного уравнения (4.15), связывающего значения на последующем и предыдущем шагах.

После подстановки (4.3), записанного для  $k$ -го шага, в (4.15) получим

$$X_{k+1}(t) = (1 + hA)X_k(t) + hBF_k(t). \quad (4.16)$$

Формула (4.16) – это рекуррентное соотношение, которое дает возможность непосредственно определять последующие значения переменных состояния по найденным на предыдущем шаге. Чем меньше шаг  $h$ , тем точнее расчет, но больше объем вычислений. Погрешность расчета пропорциональна  $h^2$ .

Если в правой части (4.15) производные для предыдущего  $k$ -го шага заменить производными для данного  $(k+1)$ -го шага, то получим

$$X_{k+1}(t) = X_k(t) + h\dot{X}_{k+1}(t). \quad (4.17)$$

Алгоритм называется *неявным методом Эйлера*, так как правая часть (4.17) содержит производные для того же шага, для которого определяются переменные состояния.

После подстановки (4.3), записанного для момента  $t_{k+1}$ , в (4.17) получим

$$(1 - hA)X_{k+1}(t) = X_k(t) + hBF_{k+1}(t),$$

откуда

$$X_{k+1}(t) = (1 - hA)^{-1}(X_k(t) + hBF_{k+1}(t)). \quad (4.18)$$

Погрешность расчета того же порядка, что и для явного метода Эйлера.

Лучшую точность обеспечивает *метод трапеций* (относится к неявным), так как в правой части выражения содержатся средние значения производных  $k$ -го и  $(k+1)$ -го

шагов:

$$X_{k+1}(t) = X_k + \frac{h}{2} \dot{X}_k(t) + \frac{h}{2} \dot{X}_{k+1}(t). \quad (4.19)$$

После подстановки уравнений (4.3), записанных для моментов  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , в (4.19), получим

$$X_{k+1}(t) = X_k + \frac{h}{2} A(X_k(t) + X_{k+1}(t)) + \frac{h}{2} B(F_k(t) + F_{k+1}(t)),$$

откуда

$$X_{k+1}(t) = (1 - \frac{h}{2} A)^{-1} \left[ (1 + \frac{h}{2} A)(X_k(t) + \frac{h}{2} B(F_k(t) + F_{k+1}(t))) \right]. \quad (4.20)$$

Погрешность расчета пропорциональна  $h^3$ .

Полная погрешность зависит не только от выбранного метода расчета, т. е. от методической погрешности (алгоритмической), но и от погрешности округления из-за ограниченного количества разрядов цифровых значений величин, что относится, конечно, к любым расчетам электрических цепей.

С ростом числа шагов погрешность интегрирования может увеличиваться, т. е. численное решение может давать значения, все более отличающиеся от истинных. В этом случае получается численно неустойчивый алгоритм, который нельзя использовать для расчета переходного процесса. Устойчивость явного метода Эйлера зависит от шага  $h$ . Для схем с одним накопителем алгоритм получается устойчивым при  $h < 2\tau$ , где  $\tau$  – постоянная времени цепи. Для цепи с несколькими накопителями при действительных корнях характеристического уравнения необходимо выбрать  $h < 2\tau_{min} = 2/\alpha_{min}$ , где  $\alpha_{min}$  – минимальный коэффициент затухания, а при наличии и комплексных корней  $p_m = -\alpha \pm j\omega_m$  шаг  $h$  должен быть еще и меньше минимального значения  $-2\alpha_m / |p_m|^2$ .

*Неявный метод Эйлера и метод трапеций устойчивы при*



$$X(\mathbf{0}_+) = \begin{bmatrix} i_L(\mathbf{0}_+) \\ u_C(\mathbf{0}_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 200/3 \end{bmatrix},$$

тогда

$$A = \begin{bmatrix} -1500 & 10 \\ -10^5 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -500 \\ 0 & 0 & -10^5 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ а}$$

$$BF = \begin{bmatrix} -2000 \\ -10^5 \end{bmatrix}.$$

**Явный метод Эйлера.** Согласно матричному уравнению (4.16)

$$\begin{bmatrix} i_{L,k+1} \\ u_{C,k+1} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} -1500 & 10 \\ -10^5 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i_{L,k} \\ u_{C,k} \end{bmatrix} + 5 \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} -2000 \\ -10^5 \end{bmatrix}$$

и после выполнения операций сложения и умножения матриц получим

$$\begin{cases} i_{L,k+1} = 0.25i_{L,k} + 5 \cdot 10^{-3}u_{C,k} - 1; \\ u_{C,k+1} = -50i_{L,k} + 1u_{C,k} - 50. \end{cases}$$

Результаты расчета приведены в табл. 4.3

Таблица. 4.3

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$i_{L,k}, A$	-0,667	-0,833	-0,958	-1,031	-1,060	-1,059	-1,044	-1,026
$u_{C,k}, B$	66,667	50,000	41,667	39,583	41,146	44,141	47,103	49,308

Продолжение табл. 4.3

$k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$i_{L,k}, A$	-1,010	-1,000	-0,995	-0,993	-0,994	-0,996	-0,998	-1,000
$u_{C,k}, B$	50,584	51,076	51,053	50,778	50,446	50,169	49,988	49,900

Окончание табл. 4.3

$k$	16	17	18	19	20	21
$i_{L,k}, A$	-1,000	-1,001	-1,001	-1,000	-1,000	-1,000
$u_{C,k}, B$	49,882	49,902	49,936	49,970	49,994	50,007

**Неявный метод Эйлера.** В матричное уравнение для неявного метода (4.18) входит обратная матрица  $(I - hA)^{-1}$

$$\begin{bmatrix} i_{L,k+1} \\ u_{C,k+1} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,0005 \begin{bmatrix} -1500 & 10 \\ -10^5 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \left( \begin{bmatrix} i_{L,k} \\ u_{C,k} \end{bmatrix} + 0,0005 \begin{bmatrix} -2000 \\ -10^5 \end{bmatrix} \right).$$

$$\begin{cases} i_{L,k+1} = 0,5i_{L,k} + 2,5 \cdot 10^{-3} u_{C,k} - 1; \\ u_{C,k+1} = -25i_{L,k} + 0,875u_{C,k} - 50. \end{cases}$$

Результаты расчета приведены в табл. 4.4

Табл. 4.4

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$i_{L,k}, A$	-0,667	-0,792	-0,880	-0,939	-0,977	-0,998	-1,009	-1,013
$u_{C,k}, B$	66,667	56,250	50,260	47,233	46,065	45,973	46,431	47,105

Продолжение табл. 4.4

$k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$i_{L,k}, A$	-1,014	-1,012	-1,010	-1,008	-1,006	-1,004	-1,002	-1,001
$u_{C,k}, B$	47,805	48,429	48,937	49,324	49,602	49,791	49,911	49,983

Окончание табл. 4.4

$k$	16	17	18	19	20	21
$i_{L,k}, A$	-1,001	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
$u_{C,k}, B$	50,021	50,037	50,040	50,037	50,031	50,024

### **Метод трапеций.**

Матричное уравнение (4.20) для метода трапеций имеет вид

$$\begin{bmatrix} i_{L,k+1} \\ u_{C2,k+1} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0,00025 \begin{bmatrix} -1500 & 10 \\ -10^5 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \\ \times \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,00025 \begin{bmatrix} -1500 & 10 \\ -10^5 & 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} i_{L,k} \\ u_{C2,k} \end{bmatrix} + 0,0005 \begin{bmatrix} -2000 \\ -10^5 \end{bmatrix} \right); \\ \begin{cases} i_{L,k+1} = 0,391i_{L,k} + 3,478 \cdot 10^{-3} u_{C,k} - 0,783; \\ u_{C,k+1} = -34,783i_{L,k} + 0,913u_{C,k} - 30,435. \end{cases}$$

Результаты расчета приведены в табл. 4.5

Таблица 4.5

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$i_{L,k}, A$	-0,667	-0,812	-0,914	-0,978	-1,012	-1,026	-1,029	-1,025
$u_{C,k}, B$	66,667	53,623	46,755	44,034	43,771	44,728	46,103	47,438

Продолжение табл. 4.5

$k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$i_{L,k}, A$	-1,019	-1,012	-1,007	-1,004	-1,001	-1,000	-0,999	-0,999
$u_{C,k}, B$	48,522	49,298	49,791	50,063	50,182	50,208	50,184	50,140

Окончание табл. 4.5

$k$	16	17	18	19	20	21
$i_{L,k}, A$	-0,999	-0,999	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
$u_{C,k}, B$	50,095	50,057	50,029	50,010	50,000	49,995

По табл: 4.2 – 4.5 построены графики переходных процессов для тока в индуктивности (рис. 4.5) и напряжения на емкости (рис. 4.6).

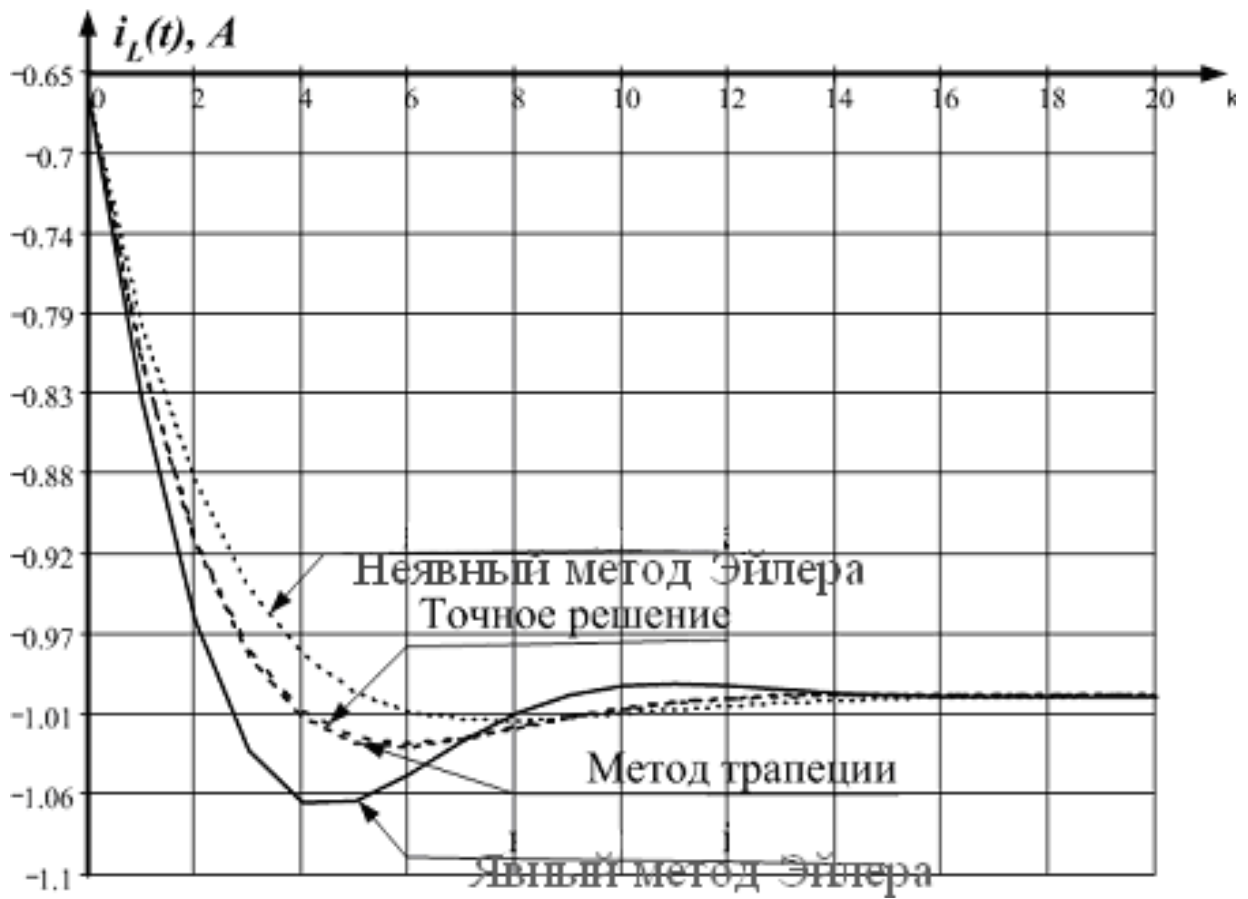


Рис. 4.5

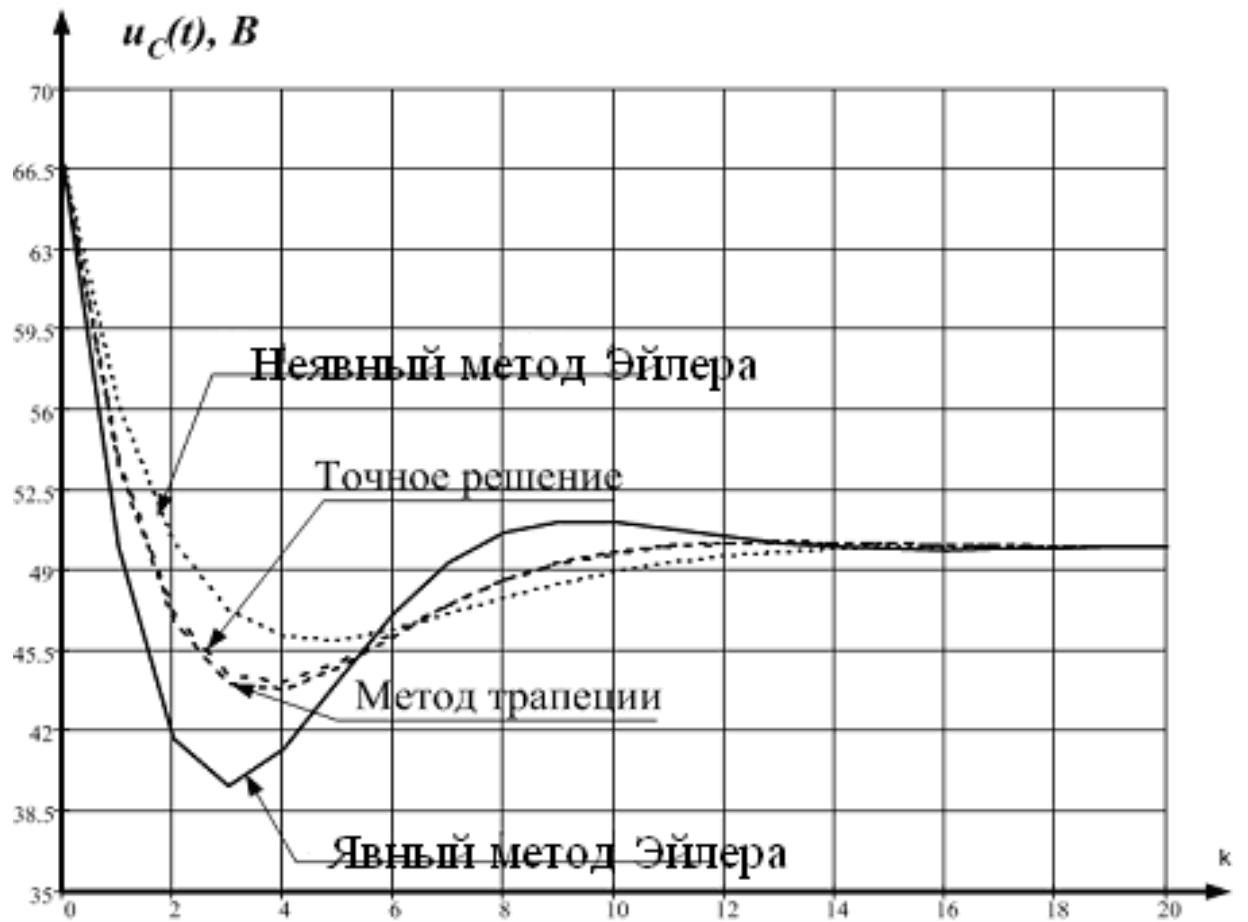


Рис. 4.6

Сравнение значений тока  $i_L(k)$ , рассчитанных аналитическим методом (см. табл. 4.2) и численными методами (табл. 4.3–4.5), показывает, что, как и должно быть, наиболее близкие к приведенным в табл. 4.2 значения тока  $i_L(k)$  получаются при расчете методом трапеций (отличие не более 0,8 %, а начиная с  $k = 3$  – не более 0,2%).

При использовании неявных методов точность решения повышается в случае уменьшения шага  $h$ , однако при этом возрастает время решения и увеличивается погрешность, связанная с округлением результатов вычисления на ЭВМ. Поэтому существующие стандартные программы решения дифференциальных уравнений снабжены автоматическим выбором шага интегрирования: шаг увеличивается, если обеспечена заданная точность решения, в противном случае он дробится до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

#### **4.5. Анализ переходных процессов в электрических цепях путем дискретизации непрерывной математической модели цепи**

До недавнего времени расчет переходных процессов в линейных электронных схемах сводился, как правило, к решению систем дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BF(t),$$

заданных в форме Коши, когда производные  $\dot{X}(t)$  переменных состояний  $X(t)$  выражены через переменные состояния и аргумент  $t$ .

Недостатки метода переменных состояния при использовании аналитических и численных методов решения системы дифференциальных уравнений, заданных в форме Коши следующие :

- 1) громоздкость процедуры получения уравнений переменных состояния;

- 2) наличие схемных вырождений;
- 3) ограничение максимального шага интегрирования, обусловленное малой постоянной времени [1].

Чтобы устранить эти недостатки и упростить задачу расчета переходных процессов на ПЭВМ, нужно прибегнуть к дискретизации непрерывной математической модели схемы. Дискретные схемы описываются не системой дифференциальных уравнений, а системой алгебраических уравнений, которые составляются и решаются методами уравнений Кирхгофа, контурных токов или узловых напряжений.

### Построение дискретной модели

Численные методы расчета переходных процессов предлагают заменить искомую функцию  $x(t)$  (рис. 4.7) приближенными значениями  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$  в дискретных временных точках  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_n$  (рис. 4.8).

Разность  $x_k - x(t_k)$  между вычисленным и точным значениями  $x$  в точке  $t_k$  должна обеспечить заданную точность расчета. Дискретизация переходного процесса требует построения *дискретных моделей элементов электрической цепи*, отражающих свойства дифференциальных уравнений элементов в области изменения независимой переменной  $t$ .

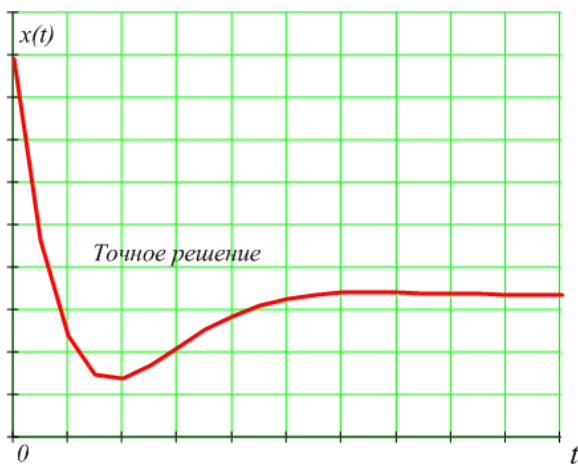


Рис. 4.7

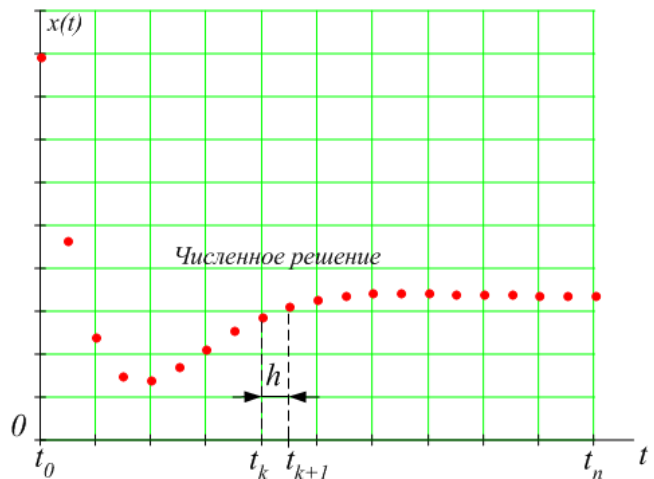


Рис. 4.8

**Дискретная модель обобщенного элемента электрической цепи.** Рассмотрим дифференциальное уравнение обобщенного элемента схемы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad (4.21)$$

где  $x$  – зависимая от  $t$  переменная;  $f$  – заданная функция этих переменных  $x(t)$  и  $t$ . Если известны приближенные значения  $x_0, x_1, \dots, x_k$  в дискретных точках  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , то значение  $x_{k+1}$  в конце шага  $t_{k+1} = h t_k$  можно вычислить, интегрируя правую часть уравнения (4.21):

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t), t) dt. \quad (4.22)$$

Таким образом, расчет по формуле (4.22) выполняется шаг за шагом, а численные методы интегрирования называют *пошаговыми методами*. Однако в любом случае процесс интегрирования означает переход от непрерывной модели (4.21) к дискретной (4.22).

Самый простой метод численного интегрирования – неявный метод Эйлера. Суть его состоит в том, что на временном интервале  $h$  подынтегральную функцию  $f(x(t), t)$  в уравнении (4.22) полагают постоянной и равной ее приближенному значению  $x'(t_{k+1}) \sim f(x(t_{k+1}), t_{k+1})$  в точке  $t_{k+1}$ . Тогда интеграл будет равен  $h x'(t_{k+1})$ , так что

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'_{k+1}(t) dt = x_k + h x'_{k+1}. \quad (4.23)$$

Полученный результат можно трактовать как аппроксимацию исходного дифференциального уравнения (4.21) алгебраическим уравнением относительно искомой переменной  $x_{k+1}$ .

Для получения лучшей точности используют метод трапеций

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} (x'_{k+1} + x'_k). \quad (4.24)$$

**Дискретные модели R-, C-, L-компонентов** анализируемой схемы могут быть построены с помощью

неявной формулы Эйлера. Уравнения схемных компонентов:

$$u_R(t) = Ri_R(t); \quad u'_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t); \quad i'_L(t) = \frac{1}{L}u_L(t).$$

На основании формулы Эйлера (4.23) получают дискретное представление элементов:

$$u_{R,k+1} = Ri_{R,k+1}; \quad u_{C,k+1} = u_{C,k} + hu'_{C,k+1}; \quad i_{L,k+1} = i_{L,k} + hi'_{L,k+1},$$

или

$$u_{R,k+1} = Ri_{R,k+1}; \quad u_{C,k+1} = u_{C,k} + \frac{h}{C}i_{C,k+1}; \quad i_{L,k+1} = i_{L,k} + \frac{h}{L}u_{L,k+1}. \quad (4.25)$$

Дискретные схемы замещения уравнений (4.25) можно представить в виде уравнений активного двухполюсника [1, 3]:

$$u_{R,k+1} = Ri_{R,k+1} + e_{R,k}; \quad u_{C,k+1} = R_C i_{C,k+1} + e_{C,k}; \quad i_{L,k+1} = Y_L u_{L,k+1} + j_{L,k};$$

$$\text{где } R_C = \frac{h}{C}, \quad Y_L = \frac{h}{L}, \quad e_{R,k} = 0, \quad e_{C,k} = u_{C,k}, \quad j_{L,k} = i_{L,k}.$$

Этим соотношениям между током и напряжением на элементах R, L, C для *k-го* шага соответствуют эквивалентные схемы или дискретные модели в табл. 4.6.

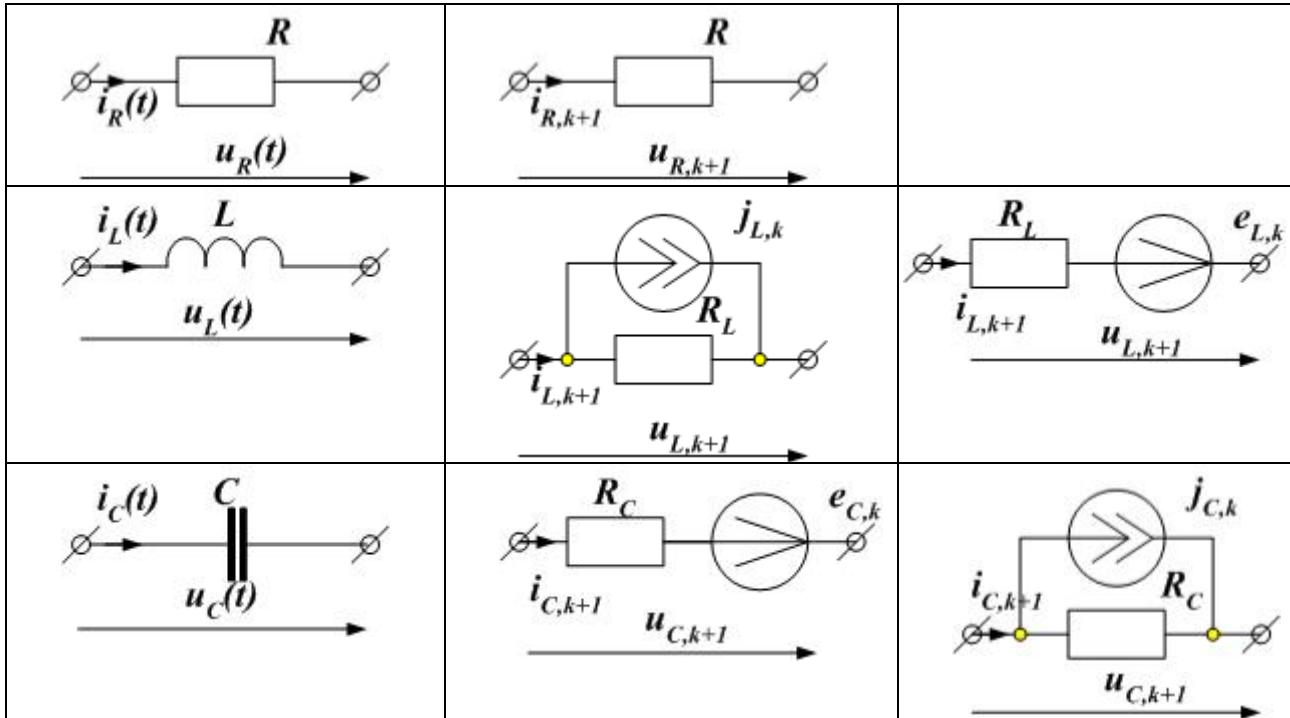
При постоянном шаге *h* сопротивление  $R_C$  и проводимость  $Y_L$  не изменяются от шага к шагу, а значения источников  $(e_{C,k}, j_{L,k})$  зависят от значений тока и напряжения элемента на предыдущем шаге. Источник тока  $j_{L,k}$  можно по известному

правилу заменить источником э.д.с.  $e_{L,k} = \frac{1}{Y_L} j_{L,k} = R_L j_{L,k}$  (табл. 4.6).

Источник э.д.с.  $e_{C,k}$  можно по известному правилу

заменить источником тока  $j_{L,k} = \frac{1}{R_C} e_{C,k} = Y_C e_{C,k}$  (табл. 4.6).

Табл. 4.6



Аналогично можно получить уравнения для дискретных схем замещения элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , используя метод трапеций:

$$\mathbf{u}_{R,k+1} = \mathbf{R}i_{R,k+1} + \mathbf{e}_{R,k}; \quad \mathbf{u}_{C,k+1} = \mathbf{R}_C i_{C,k+1} + \mathbf{e}_{C,k}; \quad i_{L,k+1} = \mathbf{Y}_L \mathbf{u}_{L,k+1} + \mathbf{j}_{L,k}, \quad (4.26)$$

где  $\mathbf{R}_C = \frac{h}{2C}$ ,  $\mathbf{Y}_L = \frac{h}{2L}$ ,  $\mathbf{e}_{R,k} = 0$ ,  $\mathbf{e}_{C,k} = \mathbf{u}_{C,k} + \mathbf{R}_{C,k} i_{C,k}$ ,

$$\mathbf{j}_{L,k} = i_{L,k} + \mathbf{Y}_L \mathbf{u}_{L,k}.$$

Отличие метода Эйлера от метода трапеций состоит только в определении источников  $\mathbf{e}_{C,k}$  и  $\mathbf{j}_{L,k}$ .

Таким образом, вследствие дискретизации переходного процесса заданная электронная схема приводится к *резистивной дискретной схеме*, соответствующей точке  $t_{k+i}$  и включающей в себя:

- 1) независимые источники энергии (напряжения и тока), заданные в схеме после коммутации, и автономные источники дискретных схем замещения элементов  $R, L, C$ ;
- 2) зависимые источники напряжения и тока, управляемые любым током или напряжением схемы;

3) линейные сопротивления исходной схемы и линейные (зависящие от величины шага  $h$ ) сопротивления дискретных моделей компонентов.

Чтобы составить дискретные модели для момента времени  $t_0 = 0$ , необходимо знать начальные значения всех величин, входящих в составляемую систему уравнений.

**Пример 4.3.** Определить токи  $i_4(t)$ ,  $i_6(t)$ ,  $i_7(t)$  в цепи (рис. 4.9) после коммутации при  $R_2 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_4 = L_6 = L_7 = 0,5 \text{ Гн}$ ,  $E_1 = E_2 = 100 \text{ В}$ ;  $J_5 = 2 \text{ А}$ .

### Решение

Выбираем положительное направление токов ветвей и определяем независимые начальные условия в схеме до коммутации:  $i_4(0) = 2 \text{ А}$ ,  $i_6(0) = -4 \text{ А}$ ,  $i_7(0) = 1 \text{ А}$ .

Для схемы после коммутации составляем дискретную схему замещения, используя метод трапеций, с источниками э.д.с.

для

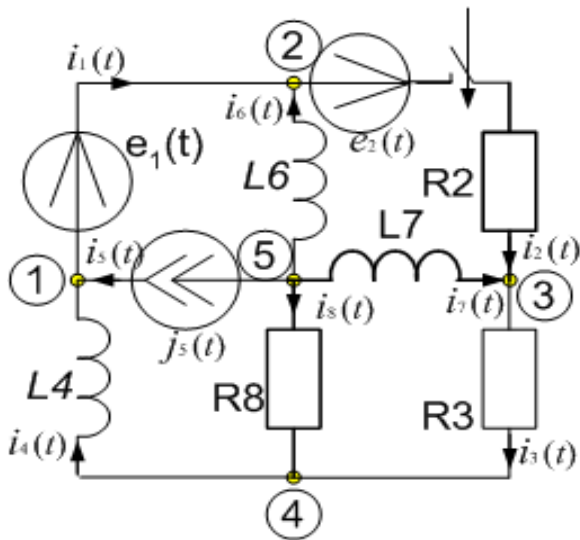


Рис.4.9

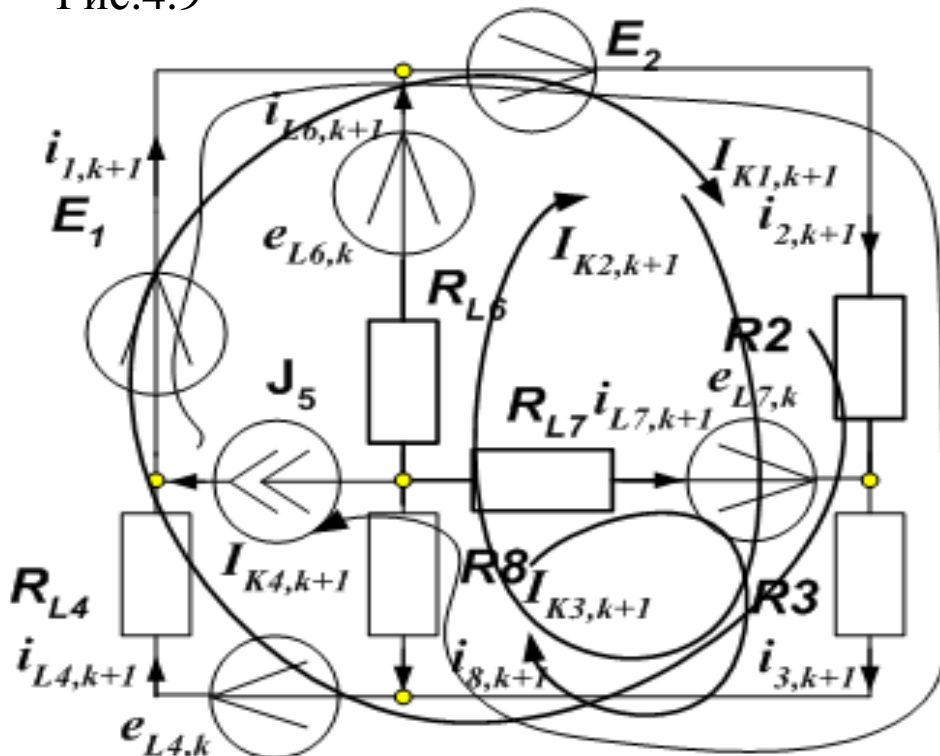


Рис.4.10

индуктивных элементов (рис. 4.10). Запишем уравнения, используя метод контурных токов.

В дискретной схеме замещения (см. рис. 4.10):

$$R_L = \frac{2L}{h}; e_{L,k} = u_{L,k} + R_L i_{L,k}; I_{K4,k+1} = J_5; h=0,002;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_2 + R_3 + R_{L4})I_{K1,k+1} + (R_2 + R_3)I_{K2,k+1} + R_3 I_{K3,k+1} = \\ = E_1 + E_2 - J_5(R_2 + R_3) + e_{L4,k}; \\ (R_2 + R_3)I_{K1,k+1} + (R_2 + R_3 + R_8 + R_{L6})I_{K2,k+1} + (R_3 + R_8)I_{K3,k+1} = \\ = E_2 - J_5(R_2 + R_3 + R_8) + e_{L6,k}; \\ R_3 I_{K1,k+1} + (R_3 + R_8)I_{K2,k+1} + (R_3 + R_8 + R_{L7})I_{K3,k+1} = \\ = -J_5(R_2 + R_8) + e_{L7,k}, \end{array} \right.$$

где, согласно (4.26), на предыдущем шаге:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{L4,k} = R_{L4} + E_1 + E_2 - J_5(R_2 + R_3) - (R_2 + R_3)I_{K1,k} - (R_2 + R_3)I_{K2,k} - R_3 I_{K3,k}; \\ e_{L6,k} = R_{L6} + E_2 - J_5(R_2 + R_3 + R_8) - (R_2 + R_3)I_{K1,k} - (R_2 + R_3 + R_8)I_{K2,k} - (R_3 + R_8)I_{K3,k}; \\ e_{L7,k} = R_{L7} - J_5(R_8 + R_3) - (R_8 + R_3)I_{K3,k} - (R_8 + R_3)I_{K2,k} - R_3 I_{K3,k}. \end{array} \right.$$

После подстановки этих выражений и их численных значений в уравнения контурных токов получаем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 700 & 200 & 100 \\ 200 & 800 & 200 \\ 100 & 200 & 700 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{K1,k+1} \\ I_{K2,k+1} \\ I_{K3,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ -1000 \\ -800 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 & -200 & -100 \\ -200 & 200 & -200 \\ -100 & -200 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{K1,k} \\ I_{K2,k} \\ I_{K3,k} \end{pmatrix}.$$

Решение полученной системы приведено в табл. 4.7 и в виде графиков на рис. 4.11.

Таблица. 4.7

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$I_{K1}$	2	2.238	2.303	2.343	2.36	2.362	2.356	2.344	2.329	2.312	2.295	2.278	2.261	2.245	2.229
$I_{K2}$	-4	-3.786	-3.745	-3.695	-3.649	-3.606	-3.565	-3.528	-3.493	-3.46	-3.43	-3.401	-3.374	-3.35	-3.326
$I_{K3}$	1	0.905	0.748	0.639	0.557	0.494	0.444	0.403	0.368	0.338	0.312	0.289	0.269	0.25	0.233

$k$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$I_{K1}$	2.214	2.2	2.187	2.175	2.164	2.153	2.143	2.133	2.124	2.116	2.108	2.101	2.095	2.088	2.082
$I_{K2}$	-3.305	-3.285	-3.266	-3.248	-3.232	-3.216	-3.202	-3.188	-3.176	-3.164	-3.153	-3.143	-3.134	-3.125	-3.117
$I_{K3}$	0.217	0.202	0.188	0.176	0.164	0.153	0.143	0.133	0.124	0.116	0.108	0.101	0.095	0.088	0.082

$k$	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
$I_{K1}$	2.077	2.072	2.067	2.063	2.058	2.055	2.051	2.048	2.044	2.041	2.039	2.036	2.034	2.032
$I_{K2}$	-3.109	-3.102	-3.095	-3.089	-3.083	-3.077	-3.072	-3.067	-3.063	-3.059	-3.055	-3.051	-3.048	-3.045
$I_{K3}$	0.077	0.072	0.067	0.063	0.058	0.055	0.051	0.048	0.044	0.041	0.039	0.036	0.034	0.032

Таким образом, получаем:  $i_4(t) = I_{K1}$ ;  $i_6(t) = I_{K2}$ ;  $i_7(t) = I_{K3}$ .

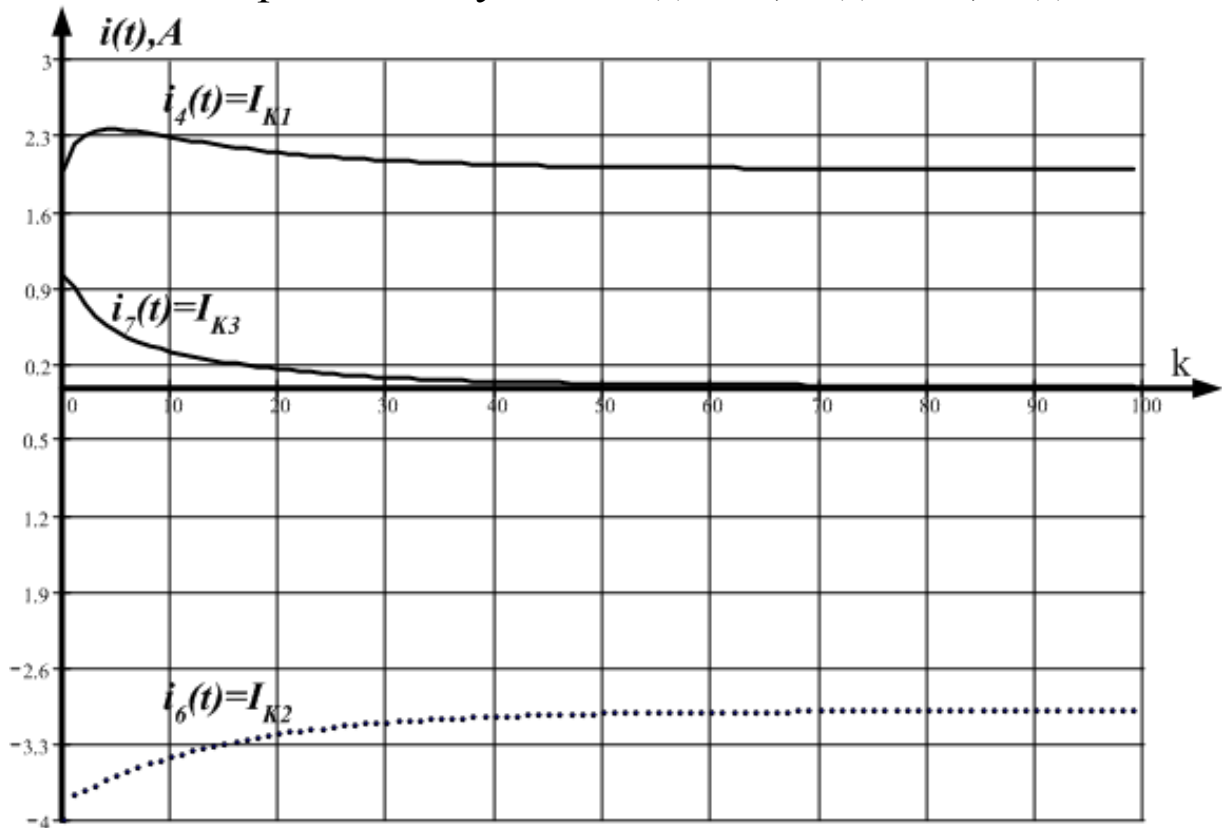


Рис. 4.11

#### 4.6. Решение дифференциальных уравнений численными методами с помощью ППП Mathcad в схеме с источниками постоянного тока и напряжения

**Пример 4.4.** Для схемы (рис. 4.12) после коммутации при

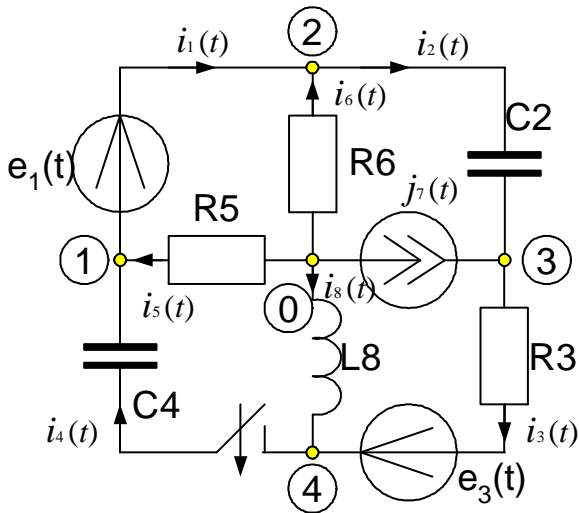


Рис. 4.12.

$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_8 = 0,15 \text{ Гн}$ ;  $C_2 = C_4 = 10 \text{ мкФ}$ ;  $E_1 = E_3 = 100 \text{ В}$ ;  $J_7 = 1 \text{ А}$  определить токи  $i_{L8}(t)$ ,  $i_{R6}(t)$  и напряжения  $u_{C2}(t)$ ,  $u_{C4}(t)$  методом трапеций и используя системную функцию Mathcad *Rkadapt* при шаге  $h = 0,0002 \text{ с}$ .

#### Решение

Выбираем положительные направления токов и напряжений и вычисляем независимые начальные условия:

$$i_{L8}(0_-) = -1 \text{ А};$$

$$u_{C2}(0_-) = 50 \text{ В}; u_{C4}(0_-) = 0 \text{ В}.$$

Уравнения переменных состояния записываем в виде:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} i_L(t) + 0u_{C2}(t) - \frac{1}{L} u_{C4}(t) + \frac{R_5}{L(R_5 + R_6)} e_1(t) + 0e_3(t) - \frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} j_7(t); \\ \frac{du_{C2}(t)}{dt} = 0i_L(t) - \frac{1}{C_2 R_3} u_{C2}(t) - \frac{1}{C_2 R_3} u_{C4}(t) + \frac{1}{C_2 R_3} e_1(t) + \frac{1}{C_2 R_3} e_3(t) - \frac{1}{C_2} j_7(t); \\ \frac{du_{C4}(t)}{dt} = \frac{1}{C_4} i_L(t) - \frac{1}{C_4 R_3} u_{C2}(t) - \frac{1}{C_4 R_3} u_{C4}(t) + \frac{1}{C_4 R_3} e_1(t) + \frac{1}{C_4 R_3} e_3(t) - 0j_7(t); \\ i_6(t) = \frac{R_5}{R_5 + R_6} i_L(t) + 0u_{C2}(t) + 0u_{C4}(t) + \frac{1}{R_5 + R_6} e_1(t) + 0e_3(t) - \frac{R_5}{R_5 + R_6} j_7(t). \end{cases}$$

Определяем матрицы:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_{C_2}(t)}{dt} \\ \frac{du_{C_4}(t)}{dt} \end{bmatrix}; \quad X(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_{C_2}(t) \\ u_{C_4}(t) \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_3(t) \\ j_7(t) \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_6 R_5}{L(R_5 + R_6)} & 0 & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{C_2 R_3} & \frac{-1}{C_2 R_3} \\ \frac{1}{C_4} & \frac{-1}{C_4 R_3} & \frac{-1}{C_4 R_3} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{R_5}{L(R_5 + R_6)} & 0 & \frac{-R_5 R_6}{L(R_5 + R_6)} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & \frac{1}{C_2 R_3} & \frac{-1}{C_2} \\ \frac{1}{C_4 R_3} & \frac{1}{C_4 R_3} & 0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{R_5}{R_5 + R_6} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{-R_5}{R_5 + R_6} \end{bmatrix}.$$

Введем исходные данные в Mathcad (рис. 4.13) и выполним расчет. Результаты вычисления приведены на рис. 4.14 и 4.15.

Результаты расчета методом трапеций и с использованием системной функции Mathcad *Rkadapt* полностью совпадают (рис. 4.14).

Mathcad Профессиональная версия - [Прим\_Рис1\_1]

Файл Правка Просмотр Вставка Форматирование Математика Символика Окно Помощь

Normal Arial 10 B I U

$N := 100 \quad k := 0..N \quad h := 0.0002 \quad l := 0..N+1$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} \frac{-1 \cdot R}{2L} & 0 & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{R \cdot C2} & \frac{-1}{R \cdot C2} \\ \frac{1}{C4} & \frac{-1}{R \cdot C4} & \frac{-1}{R \cdot C4} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{R}{2 \cdot R \cdot L} & 0 & \frac{-R}{2 \cdot L} \\ \frac{1}{R \cdot C2} & \frac{1}{R \cdot C2} & \frac{-1}{C2} \\ \frac{1}{R \cdot C4} & \frac{1}{R \cdot C4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F1(l) := \begin{pmatrix} E1 \cdot \cos(w \theta \cdot l \cdot h) \\ E3 \cdot \cos(w \theta \cdot l \cdot h) \\ J7 \cdot \cos(w \theta \cdot l \cdot h) \end{pmatrix} \quad F^{(l)} := F1(l) \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Метод трапеций**

$$X^{(k+1)} := \left( E - \frac{h}{2} \cdot A \right)^{-1} \cdot \left[ \left( E + \frac{h}{2} \cdot A \right) \cdot X^{(k)} + \frac{h}{2} \cdot B \cdot \left( F^{(k)} + F^{(k+1)} \right) \right]$$

$$iL8(k) := X_{0,k} \quad uC2(k) := X_{1,k} \quad uC4(k) := X_{2,k}$$

$$M6 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N6 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot R} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \quad I6^{(k)} := N6 \cdot F^{(k)} + M6 \cdot X^{(k)}$$

$$I6r(k) := I6_{0,k} \quad k := 0..99$$

**Решение системы диф. уравнений с помощью функции Rkadapt системы Mathcad**

$$X0 := \begin{pmatrix} Re(IL8) \\ Re(UC2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad F0(t) := \begin{pmatrix} E1 \cdot \cos(w \cdot t) \\ E3 \cdot \cos(w \cdot t) \\ J7 \cdot \cos(w \cdot t) \end{pmatrix}$$

$$D1(t, X0) := A \cdot X0 + B \cdot F0(t) \quad Z0 := Rkadapt(X0, 0, 0.02, 100, D1)$$

Press F1 for help. Авто NUM Page 1

Рис. 4.13

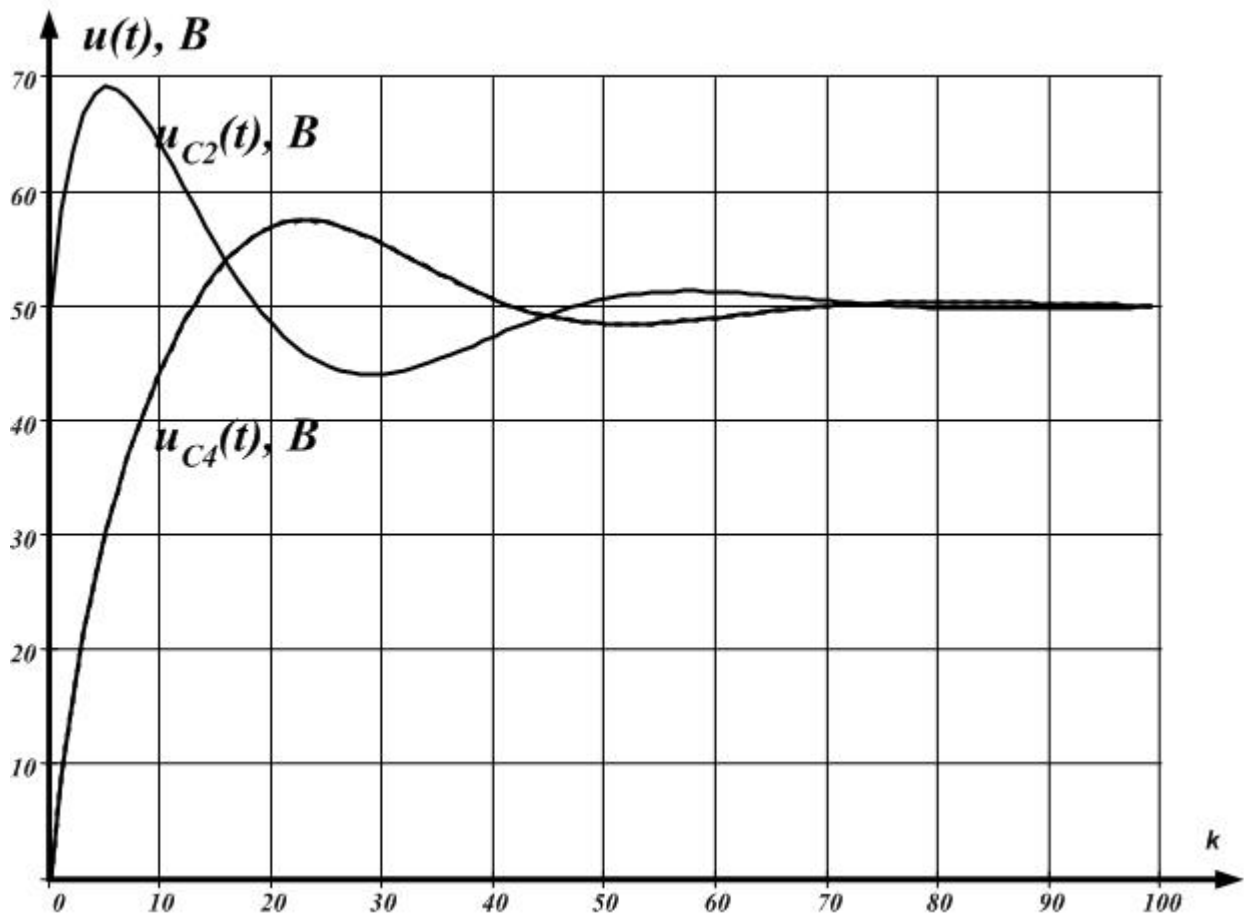


Рис. 4.14

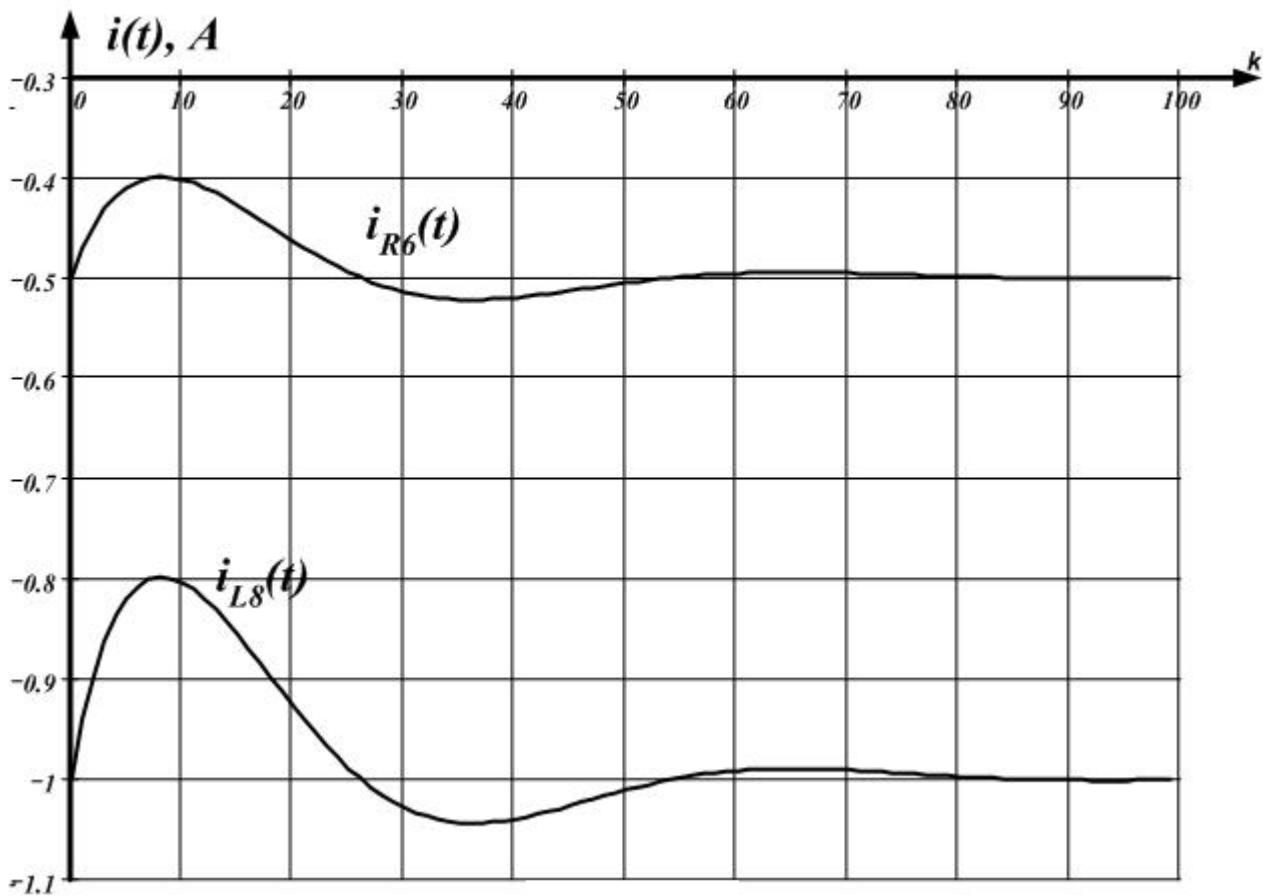


Рис 4.15

## 4.7. Задачи анализа переходных процессов численными методами

Решим задачи 4.5 – 4.10 методом трапеций для численного решения уравнений переменных состояния. Интервал времени, в котором необходимо найти значения искомых величин, разделяется на малые равные промежутки – шаги  $\Delta t = h = 0,0002$  с. В результате расчета получаются значения этих величин в отдельные (дискретные) моменты времени  $t_k = kh$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 99$ . Предполагается, что значения искомых величин в начальный момент времени  $t_0 = 0$  предварительно определены в схеме до коммутации [начальные независимые условия – токи в индуктивностях  $i_L(0_-)$  и напряжения на емкостях  $u_C(0_-)$ ].

### Задачи

4.5. Вычислить и построить графики переходных процессов для токов в индуктивностях и для напряжения на емкости в схеме после коммутации (рис. 4.16), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

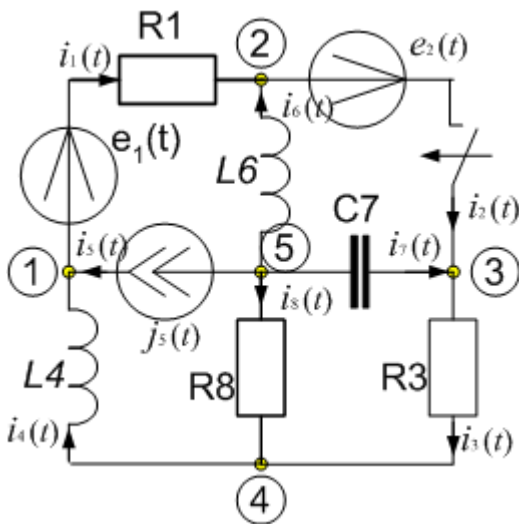


Рис. 4.16

для токов в индуктивностях и для напряжения на емкости в схеме после коммутации (рис. 4.16), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн};$$

$$L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$E_1 = E_2 = 100 \text{ В}; J_5 = 2 \text{ А}.$$

4.6. Рассчитать переходной процесс для схемы после коммутации (рис. 4.16), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн}; L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$E_1 = 100 \text{ В}; J_5 = 2 \text{ А}; e_2(t) = 50 \cos(2500t) \text{ В}.$$

**Пример 4.7.** Рассчитать переходной процесс в схеме после коммутации (см. рис. 4.16), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн}; L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \\ e_1(t) = 100 \cos(2500t) \text{ В}; j_5(t) = \cos(2500t) \text{ А}; e_2(t) = 50 \cos(2500t) \text{ В}.$$

**4.8.** Рассчитать переходной процесс в схеме после коммутации (см. рис. 4.16), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн}; L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \\ e_1(t) = 100 \cos(2500t) \text{ В}; j_5(t) = 2 \cos(2500t) \text{ А}; E_2 = 50 \text{ В}.$$

**4.9.** Рассчитать переходной процесс для схемы после коммутации (см. рис. 4.16), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн}; L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \\ e_1(t) = 100 \cos(2500t) \text{ В}; j_5(t) = 2 \cos(2500t) \text{ А};$$

$$e_2(t) = \left( \begin{array}{ll} 50 \text{ В}, & \text{если } 0 \leq t \leq 0,01 \text{ или } k \leq 50; \\ 50 \cos(2500t) \text{ В}, & \text{если } t > 0,01 \text{ или } k > 50. \end{array} \right)$$

**4.10.** Рассчитать переходной процесс для цепи после коммутации (см. рис. 4.16.), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн}; L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \\ e_1(t) = 100 \cos(2500t) \text{ В}; j_5(t) = 2 \cos(2500t) \text{ А};$$

$$e_2(t) = \left( \begin{array}{ll} 50, & \text{если } 0 \leq t \leq 0,01 \text{ или } k \leq 50; \\ -50, & \text{если } t > 0,01 \text{ или } k > 50. \end{array} \right)$$

**4.11.** Рассчитать переходной процесс в схеме после коммутации (см. рис. 4.16.), используя численные методы решения уравнений состояния, если известно:

$R_1 = R_3 = R_8 = 100 \text{ Ом}; L_4 = 0,1 \text{ Гн}; L_6 = 0,05 \text{ Гн}; C_7 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$

$e_1(t) = 100 \text{ В}; j_5(t) = 5 \text{ А};$

$$e_2(t) = \left( \begin{array}{ll} -50, & \text{если } 0 \leq t \leq 0,01, \text{ или } k \leq 50; \\ 50 \cos(2500t), & \text{если } t > 0,01 \text{ или } k > 50. \end{array} \right)$$

## 5. РАСЧЕТ СХЕМ СО ВЗАИМОИНДУКТИВНЫМИ СВЯЗЯМИ

### Задачи

**5.1.** Составить систему расчетных уравнений используя законы Кирхгофа, по схеме, представленной на рис. 5.1.

Особенности составления уравнений связаны с необходимостью учета напряжений взаимной индукции. Алгоритм составления уравнений Кирхгофа следующий.

1. Задать условно положительное направление тока в каждой ветви.

2. Выбрать систему независимых узлов ( $q-1$ ).

3. Для каждого независимого узла составить уравнение по первому закону Кирхгофа, при этом токи, направленные от узла, записываются со знаком «плюс», направленные к узлу – со знаком «минус» или наоборот.

4. Построить дерево и граф схемы, на который взаимноиндуктивные связи не влияют.

5. Выбрать направление обхода каждого независимого контура и составить для него уравнения, используя второй закон Кирхгофа, при этом напряжения, направление которых совпадает с направлением обхода контура, записываются со знаком «плюс».

6. Для учета влияния взаимной индукции необходимо прежде всего определить тип включения катушек: согласное или встречное. При согласном включении напряжение взаимной индукции имеет тот же знак, что и напряжение самоиндукции. При встречном включении катушек напряжение взаимной индукции имеет знак, обратный знаку напряжения самоиндукции.

### Решение

Составим уравнения Кирхгофа для схемы на рис. 5.1. В качестве независимых выбраны узлы a, b, c; направления обхода независимых контуров указаны на рис. 5.1.

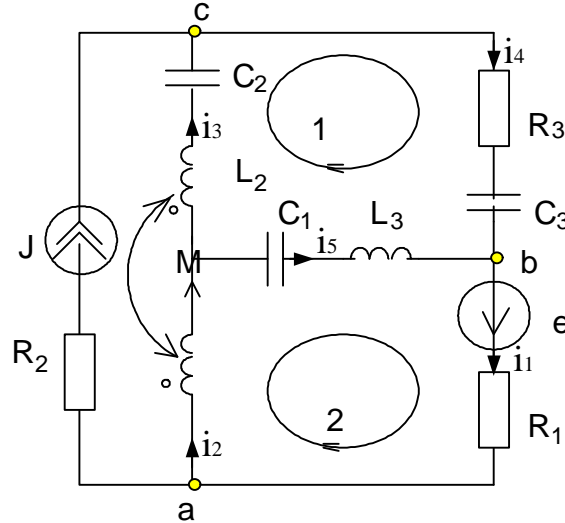


Рис. 5.1

Катушки включены согласно, так как токи  $i_2$  и  $i_1$  одинаково ориентированы относительно одноименных полюсов, обозначенных точками (см. рис. 5.1).

Уравнения Кирхгофа в дифференциальной форме имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -i_1 + i_2 + J = 0; \\ i_1 - i_4 - i_5 = 0; \\ -i_3 + i_4 - J = 0; \\ R_1 i_1 + L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_2 + M \frac{d}{dt} i_3 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_5 dt + L_3 \cdot \frac{d}{dt} i_5 = 0; \\ L_3 \cdot \frac{d}{dt} i_5 - \frac{1}{C_1} \cdot \int i_5 dt + L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_3 + M \cdot \frac{d}{dt} i_2 + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_3 dt + \\ + R_3 i_4 + \frac{1}{C_3} \cdot \int i_4 dt = 0. \end{array} \right.$$

В комплексной форме эти уравнения имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{J} = 0; \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0; \\ -\dot{I} + \dot{I}_4 - \dot{J} = 0; \\ R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3 - \frac{j\dot{I}_5}{\omega C_1} + j\omega L_3 \dot{I}_5 = \dot{E}; \\ -j\omega L_3 \cdot \dot{I}_5 - \frac{1}{\omega C_1} \cdot \dot{I}_5 + j\omega L_2 \cdot \dot{I}_3 + j\omega M \cdot \dot{I}_2 - \frac{1}{\omega C_2} \cdot \dot{I}_3 + \\ + R_3 \cdot \dot{I}_4 - \frac{j}{\omega C_3} \cdot \dot{I}_4 = 0. \end{array} \right.$$

**5.2.** Для схемы (рис. 5.2) составить систему расчетных уравнений методом контурных токов.

1. Выбрать систему независимых контуров и в каждом из этих контуров задать условно положительное направление контурного тока. Для выбора независимых контуров следует начертить граф схемы и любое дерево графа. Каждая хорда (т.е. ветвь, дополняющая дерево до графа) совместно с ветвями дерева образуют независимый контур. Ветви, содержащие источники тока, на графе не показываются, а ветви, содержащие только источники э.д.с., стягиваются в узлы. Наличие индуктивных связей между ветвями на графе не отражается.

2. Для каждого источника тока следует ввести дополнительный контурный ток, равный току этого источника по величине и совпадающий с ним по направлению. Целесообразно независимые дополнительные контуры выбирать так, чтобы число контурных токов в каждой из индуктивно связанных катушек было минимальным.

3. В индуктивно связанных катушках указать направления напряжений взаимной индукции, возникающих от действия каждого из контурных токов.

4. Составить для независимых контуров уравнения по методу контурных токов.

5. Задать условно положительные направления токов в ветвях и выразить эти токи через контурные. При этом контурные токи, совпадающие по направлению с током ветви, записываются со знаком «плюс», противоположного направления – со знаком «минус».

### Решение

Схема на рис. 5.2 содержит два независимых контура,

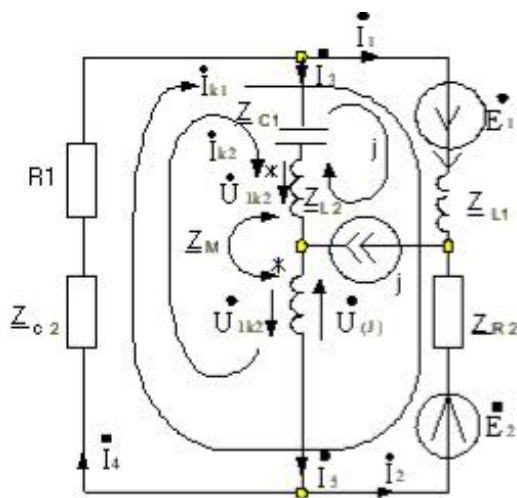


Рис. 5.2

направление контурных токов в которых указано на рисунке. Для источника тока введём дополнительный контурный ток  $J$ , равный току этого источника.

Направление напряжений взаимной индукции  $Z_{L2}$  и  $Z_{L3}$  указаны стрелками (напряжение взаимной индукции в  $Z_{L3}$  имеет две составляющие: от действия тока  $I_{k2}$  и тока  $J$ , протекающих в катушке  $Z_{L2}$ ). Контурный ток  $I_{k2}$ ,

проходя по катушке  $Z_{L2}$ , наведет напряжение взаимной индукции в катушке  $Z_{L3}$ , а проходя по катушке  $Z_{L3}$ , наведет точно такое же напряжение в катушке  $Z_{L2}$ . Так как ток  $I_{k2}$  входит в одноименные полюсы катушек « $Z_{L2}$ » и  $Z_{L3}$ , то напряжение взаимной индукции имеет знак плюс:  $j\omega M \cdot I_{k2}$ .

Контурный ток  $I$ , равный току источника тока, проходя по катушке  $Z_{L2}$ , наведет напряжение взаимной индукции в сопротивлении  $Z_{L3}$ . Так как ток  $J$  входит в условный конец катушки  $Z_{L2}$ , а  $I_{k2}$  входит в условное начало катушки  $Z_{L3}$ , то напряжение взаимной индукции будет иметь знак «минус»:  $-Jj\omega M$ .

Составим систему уравнений для контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_{k1} \left( j\omega L_1 + R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} + R_2 \right) + \dot{I}_{k2} \left( R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) + j\omega L_1 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ \dot{I}_{k1} \left( R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_{k2} \left( R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + j\omega L_3 + j2\omega M \right) - j\omega M = 0. \end{cases}$$

Задаем произвольное направление токов в ветвях и выражаем эти токи через контурные:  $\dot{I}_1 = \dot{I}_{k1} + \dot{J}$ ;  $\dot{I}_2 = -\dot{I}_{k2}$ ;  $\dot{I}_3 = \dot{I}_{k2} - \dot{J}$ ;  $\dot{I}_4 = \dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2}$ ;  $\dot{I}_5 = \dot{I}_{k2}$ .

**5.3.** Определить комплексное входное сопротивление  $\underline{Z}$  и входной ток  $i$  двухполюсника (рис. 5.3). Проверить выполнение баланса мощностей, если параметры схемы следующие:

$$\begin{aligned} u &= 10\sqrt{2} \cos 10^6 t \text{ В}; \\ R &= 5 \text{ кОм}; C = 500 \text{ пФ}; \\ L_1 &= 3 \text{ мГн}; L_2 = 5 \text{ мГн}; \\ M &= 2 \text{ мГн}. \end{aligned}$$

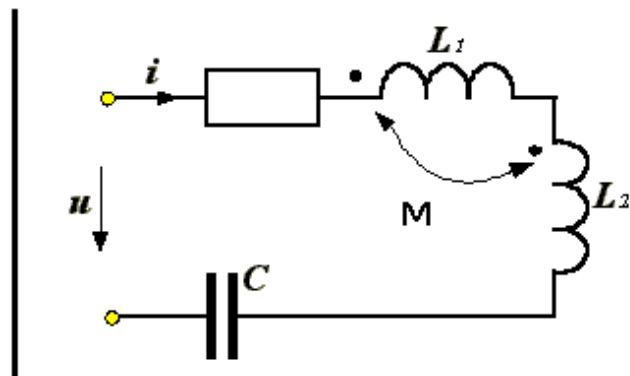


Рис. 5.3

### Решение

Так как катушки  $L_1$  и  $L_2$  соединены согласно, то комплексное входное сопротивление рассматриваемого двухполюсника (см. рис.5.3) определяется из выражения:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + j\omega L_1 + j\omega L_2 + j\omega 2M + \frac{1}{j\omega C} = 5 \cdot 10^3 + j10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + j10^6 \times \\ &\times 5 \cdot 10^{-3} + j10^6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{j10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-12}} = 5 \cdot 10^3 + j10 \cdot 10^3 = \\ &= 5 + j10 \text{ кОм}. \end{aligned}$$

Комплексное действующее значение тока  $\dot{I}$  определим, используя закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z} = \frac{10}{(5 + j10) \cdot 10^3} = 0,894 \cdot 10^{-3} e^{-j63,43^\circ} = (0,4 - j0,8) 10^{-3} \text{ А.}$$

Тогда мгновенное значение тока  $i$  примет вид

$$i = \sqrt{2} \cdot 0,894 \cos(10^6 t - 63,43^\circ) \text{ мА.}$$

Комплексная мощность источника, питающего схему (см. рис. 5.3), равна

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 10 \cdot (0,4 + j0,8) \cdot 10^{-3} = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ ВА,}$$

где  $\dot{I}^*$  – комплексный сопряженный ток.

Комплексная мощность всех потребителей определяется из выражения

$$\underline{S}_{\text{потр}} = I^2 R + jI^2 \left( \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - \frac{1}{\omega C} \right) = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ В А.}$$

$\underline{S}_{\text{потр}} = \underline{S}_{\text{ист}}$ , – т.е. условие баланса мощностей выполняется.

**5.4.** Вычислить выходное сопротивление идеального трансформатора (рис. 5.4), нагруженного на сопротивление  $\underline{Z}_H = 1,5e^{j50^\circ}$  Ом, а также комплексные действующие значения напряжения  $\dot{U}_1$  и тока  $\dot{I}_1$  на зажимах первичной обмотки, если ток вторичной обмотки  $\dot{I}_2 = 10e^{j25^\circ}$  А.

Число витков первичной обмотки  $N_1 = 2000$ , число витков вторичной обмотки  $N_2 = 200$ .

### Решение

Определим коэффициент трансформации:

$$n = N_2 / N_1 = 0,1.$$

Входное сопротивление идеального трансформатора

имеет тот же характер, что и сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_H$ , и отличается от него в  $n^2$  раз:

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = \underline{Z}_H / n^2 = 150e^{j50^\circ} \text{ Ом.}$$

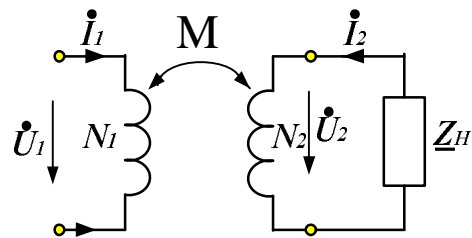


Рис. 5.4

Напряжение вторичной обмотки трансформатора равно

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_H \cdot \dot{I}_2 = 15e^{j75^\circ} \text{ В.}$$

Используя основные уравнения идеального трансформатора, определим входные ток и напряжение:

$$\dot{I}_1 = n\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = 1,0e^{j25^\circ} \text{ А; } \dot{U}_1 = \frac{1}{n}\dot{U}_2, \quad \dot{U}_1 = 150e^{j75^\circ} \text{ В.}$$

**5.5.** Для схемы на рис. 5.5 определить, при какой взаимной индуктивности  $M$  коэффициент связи равен 0,05, если известны параметры:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 9 \text{ МГц;} \\ f_2 &= 12 \text{ МГц;} \\ C_1 &= 70 \text{ нФ;} \\ C_2 &= 85 \text{ нФ.} \end{aligned} \right\}$$

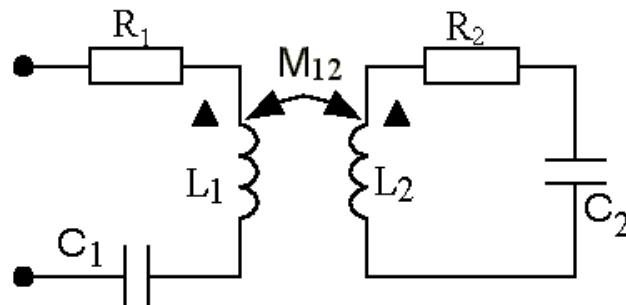


Рис. 5.5

### Решение

Резонансная частота первого контура:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 \cdot C_1}}; \quad \sqrt{L_1} = \frac{1}{2\pi f_1 \sqrt{C_1}};$$

Для второго контура запишем:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 \cdot C_2}}; \quad \sqrt{L_2} = \frac{1}{2\pi f_2 \sqrt{C_2}};$$

Коэффициент связи определяется формулой:

$$k_{св} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (5.1)$$

Подставляя значения  $\sqrt{L_1}$ ,  $\sqrt{L_2}$  в (5.1), получим

$$k_{св} = M \cdot 4\pi^2 f_1 \cdot f_2 \sqrt{C_1 \cdot C_2},$$

откуда коэффициент взаимной индуктивности определяется равенством

$$M = \frac{k_{св}}{4\pi^2 f_1 \cdot f_2 \sqrt{C_1 \cdot C_2}} = \frac{0,05}{4 \cdot (3,14)^2 \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{70 \cdot 85 \cdot 10^{-24}}} = 1,52 \text{ мкГн.}$$

**5.6.** Для схемы, приведенной на рис. 5.6, определить токи во всех ветвях, если ее параметры:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 100 \text{ В;} \\ R_1 &= 8 \text{ Ом}; R_2 = 5 \text{ Ом;} \\ X_1 &= 15 \text{ Ом}; X_2 = 18 \text{ Ом;} \\ X_3 &= 11 \text{ Ом}; X_c = 24 \text{ Ом;} \\ X_{M12} &= 6 \text{ Ом}; X_{M23} = 7 \text{ Ом;} \\ X_{M31} &= 6 \text{ Ом}; E = 100 \text{ В.} \end{aligned}$$

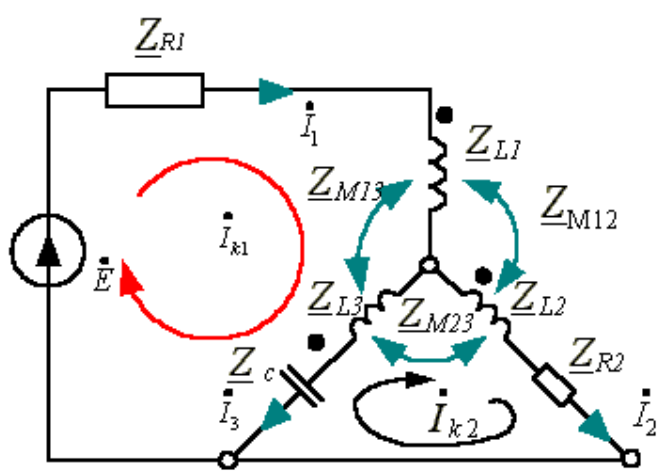


Рис. 5.6

### Решение

Пользуясь методом контурных токов, составим систему расчетных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_{k1} \left( \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{31} + \dot{I}_{k1} (-\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{31} - \underline{Z}_{23}) \right) = \dot{E}; \\ \dot{I}_{k1} (-\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23}) + \dot{I}_{k2} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + 2\underline{Z}_{23}) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\text{где } \underline{Z}_1 = R_1 + jX_1; \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2; \underline{Z}_3 = jX_3 + jX_c;$$

$$\underline{Z}_{M12} = jX_{M12}; \underline{Z}_{M23} = jX_{M23}; \underline{Z}_{M31} = jX_{M31}.$$

Решая систему уравнений (5.2), получим значения контурных токов:

$$\overset{\circ}{I}_{k1} = 3,48e^{j64,82^\circ} \text{ A};$$

$$\overset{\circ}{I}_{k2} = 3,2e^{-j100,43^\circ} \text{ A}.$$

Выразив токи ветвей через контурные токи, получим:

$$\overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{I}_{k1} = 3,48e^{j64,48^\circ} \text{ A};$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \overset{\circ}{I}_{k2} = 3,2e^{-j100,43^\circ} \text{ A};$$

$$\overset{\circ}{I}_3 = \overset{\circ}{I}_{k1} - \overset{\circ}{I}_{k2} = 6,63e^{j71,87^\circ} \text{ A}.$$

**5.7.** Определить сопротивление  $X_c$ , при котором в схеме (рис. 5.7) наступит резонанс напряжений, если известны параметры:

$$\dot{E} = 120 \text{ В}; \quad \omega L_1 = 2\omega M = 20 \text{ Ом} = \omega L_2; \quad R_2 = R_3 = 45 \text{ Ом}; \quad R_1 = 30 \text{ Ом}.$$

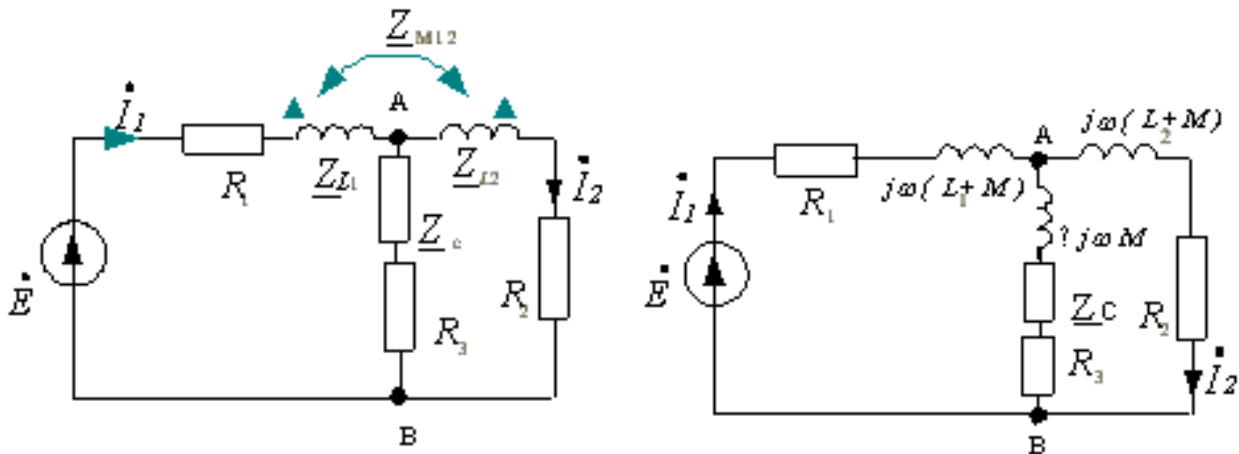


Рис. 5.7

### Решение

Значение  $X_c$  можно определить из условия резонанса

$$I_m[\underline{Z}_{ex}] = 0.$$

Выполним схемную развязку в схеме, изображенной на рис. 5.7,а и получим ее новый вид (рис. 5.7, б). Параллельно соединенные ветви заменим одной ветвью с сопротивлением:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{(R_3 - jX_c - jX_M)(R_2 + j(X_M + X_2))}{R_2 + R_3 - jX_c - jX_M + j(X_M + X_2)} = \frac{(45 - jX_c - j10)(45 - j30)}{90 - j(X_c - 20)}. \quad (5.3)$$

Умножив числитель и знаменатель в (5.3) на сопряженное знаменателя, получим:

$$\frac{22061650 + 3300X_c - 45(X_c)^2 + j(60(X_c)^2 - 3575X_c + 46500)}{90 + (X_c - 20)^2}.$$

Входное сопротивление для схемы на рис. 5.7,б равно

$$\underline{Z}_{ex} = R_1 + j(X_M + X_1) + \frac{22061650 + 3300X_c - 45(X_c)^2 - 3575X_c + 46500}{90 + (X_c - 20)^2}$$

Приведем слагаемые к общему знаменателю и выразим мнимую составляющую, которую приравняем к нулю:

$$90(X_c)^2 - 4775X_c + 61200 = 0; \quad X_{c1} = 22 \text{ Ом}; \quad X_{c2} = 31 \text{ Ом}.$$

**5.8.** Для колебательного контура без потерь с индуктивной связью (рис. 5.8,а) определить резонансную частоту, если параметры схемы следующие:  $L_1 = 8 \text{ мГн}$ ;  $L_2 = 2 \text{ мГн}$ ;  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ .

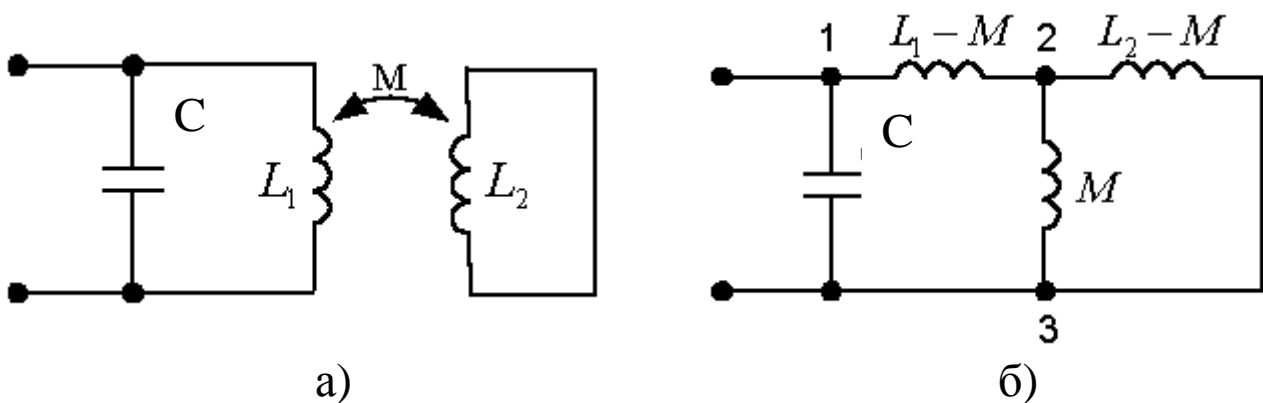


Рис. 5.8

### Решение

Запишем условие резонанса. Для схемы (рис. 5.8,а) выполним схемную развязку. В результате преобразования

параллельно и последовательно соединенных ветвей получим:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{j\omega M \cdot j\omega(L_2 - M)}{j\omega M + j\omega L_2 - j\omega M} = \frac{j\omega(L_2 - M)M}{L_2};$$

$$\underline{Z}_{13} = j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)M}{L_2} = \frac{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}{L_2}.$$

Входная проводимость цепи определится следующим образом:

$$Y_{\text{эк}} = Y_c + Y_{13} = j\omega C + \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}.$$

$$\text{Так как } I_m[Y_{\text{эк}}] = 0, \text{ то } \omega_0 C + \frac{L_2}{\omega_0(L_1 \cdot L_2 - M^2)} = 0,$$

$$\text{откуда } \omega_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C(L_1 \cdot L_2 - M^2)}} = 3,849 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

**5.9.** Определить емкость  $C$ , если в схеме (рис. 5.9), по которой протекает ток, с частотой тока  $40 \text{ кГц}$  вольтметр и амперметр показали  $U_V = 80 \cdot 10^{-3} \text{ В}$ ,  $I_A = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ А}$ . Параметры элементов равны:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1,8 \text{ Ом}; \\ R_2 &= 14 \text{ Ом}; \\ X_1 &= 14 \text{ Ом}; \\ X_2 &= 17 \text{ Ом}; \\ X_M &= 3,5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

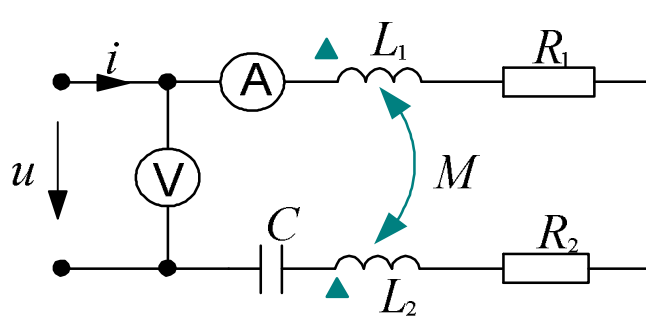


Рис. 5.9

### Решение

Определяем модуль комплексного входного сопротивления схемы.

Из закона Ома

$$Z = \frac{U_V}{I_A} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 10^{-3}} = 36,36 \text{ Ом};$$

$$\text{или } Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2 - 2X_M - X_c)^2}.$$

Приравняв первое и второе выражения модулей комплексного входного сопротивления, получим

$$(36,36) = \sqrt{32^2 + (24 - X_c)^2}.$$

Выразим:

$$24 - X_c = \sqrt{|36,36|^2 - 32^2} = 17,76;$$

$$X_c = 24 - 17,76 = 6,24 = \frac{1}{\omega \cdot C};$$

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot X_c} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 6,24} = 0,637 \text{ мкФ}.$$

**5.10.** Две взаимноиндуктивно связанные катушки соединили последовательно (рис. 5.10) и измерили показания приборов  $U_1 = 120 \text{ В}$ ,  $I_1 = 10 \text{ А}$ ,  $P_{w1} = 860 \text{ Вт}$ . Затем зажимы второй катушки поменяли местами. Приборы показали:  $U_2 = 110 \text{ В}$ ,  $I_2 = 10 \text{ А}$ ,  $P_{w2} = 600 \text{ Вт}$ . Определить взаимную индуктивность  $M$ . В каком из двух случаев катушки были соединены согласованно, если  $f = 50 \text{ Гц}$ ?

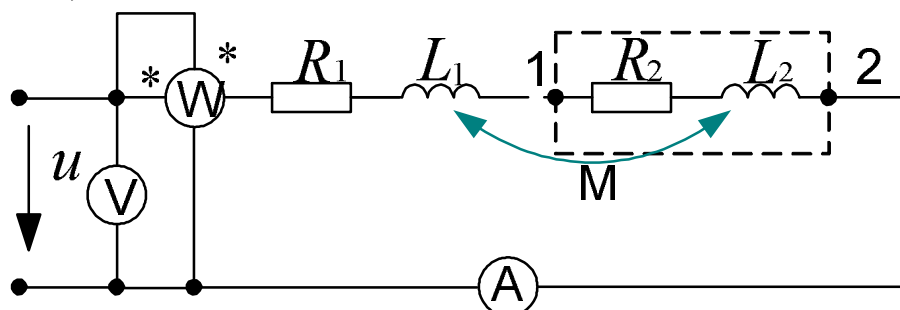


Рис. 5.10

### Решение

**Первый случай.** Катушки соединены так, как показано на рис. 5.10.

Модуль комплексного входного сопротивления

$$Z_1 = \frac{U_{V1}}{I_{A1}} = 12 \text{ Ом}.$$

Активное сопротивление схемы равно

$$R_{\varepsilon 1} = \frac{P_{w1}}{I_{A1}^2} = 8,8 \text{ Ом}.$$

Реактивное эквивалентное сопротивление схемы определим по формуле  $X_{\varepsilon 1} = \sqrt{Z_1^2 - R_{\varepsilon 1}^2} = 8,369 \text{ Ом}.$

**Второй случай.** Зажимы второй катушки 1–2 поменяли местами. Соответственно определим модуль, активное и реактивное сопротивления комплексного:

$$Z_2 = \frac{U_{V2}}{I_{A2}} = 11 \text{ Ом}; \quad R_{\varepsilon 2} = \frac{P_{w2}}{I_{A2}^2} = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{\varepsilon 2} = \sqrt{Z_2^2 - R_{\varepsilon 2}^2} = 9,2 \text{ Ом}.$$

При согласном включении катушек

$$X_{\varepsilon C} = X_{L1} + X_M + X_{L2} + X_M = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M;$$

при встречном включении

$$X_{\varepsilon BC} = X_{L1} - X_M + X_{L2} - X_M = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M;$$

т.е.  $X_{\varepsilon C} > X_{\varepsilon B}$ , а  $X_{\varepsilon C} - X_{\varepsilon B} = 2X_M + 2X_M = 4X_M = 4\omega M.$

Так как  $X_{\varepsilon 2} > X_{\varepsilon 1}$ , вторая схема соединения катушек соответствует их **согласному** включению.

Взаимная индуктивность определится из соотношения

$$M = \frac{X_{\varepsilon 2} - X_{\varepsilon 1}}{4\omega} = \frac{9,2 - 8,369}{4 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 6,768 \cdot 10^{-4} \text{ мГн}.$$

**5.11.** В схеме (рис. 5.11) коэффициент связи между первичной и вторичной обмотками  $k_{св} = 0,5$  и ток во

вторичной обмотке  $I_2 = 0,5$  А. Определить комплексные значение  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$ , если параметры схемы следующие:

$$\begin{aligned} R_1 &= 80 \text{ Ом}; \\ R_2 &= 1,5 \text{ Ом}; \\ \omega L_1 &= 75 \text{ Ом}; \\ \omega L_2 &= 45 \text{ Ом}; \\ \frac{1}{\omega \cdot c} &= 200 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

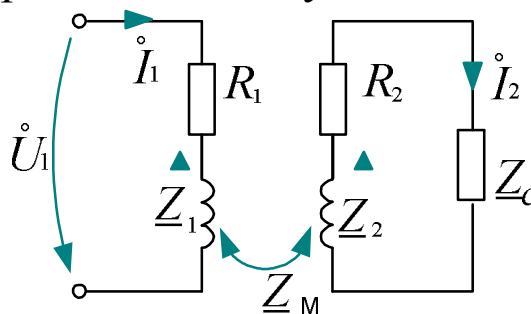


Рис. 5.11

### Решение

Коэффициент связи  $k_{св} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}}$ ,

откуда  $\omega M = k_{св} \cdot \sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = 0,5 \sqrt{75 \cdot 45} = 29,047 \text{ Ом}$ .

По второму закону Кирхгофа составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2 j\omega M; \\ -\dot{I}_1 j\omega M + \dot{I}_2 \left( R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C} \right) = 0. \end{cases}$$

Выразим ток  $\dot{I}_1$  из второго уравнения:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_2 \left( R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega M} = \frac{0,5(1,5 + j45 - j200)}{j29,047} = 2,67 e^{-j179,45} \text{ А}.$$

Входное напряжение  $\dot{U}_1$  найдем из первого уравнения, подставив в него  $\dot{I}_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left( R_1 + j\omega L_1 - \frac{j\omega M \left( R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega M} \right) &= 2,67e^{-j179,45} \times \\ \times \left[ 80 + j75 - \frac{j29,047(1,5 + j45 - j200)}{j29,047} \right] &= 304,91e^{j136,08} \text{ В.} \end{aligned}$$

**5.12.** В приведенной на рис.5.12,а схеме определить:

а) входное сопротивление;

б) при каком сопротивлении  $X_C$  в цепи будет резонанс,

если даны параметры элементов:

$$X_1 = 20 \text{ Ом}; X_2 = 35 \text{ Ом}; X_3 = 4X_{12} = 60 = 5X_{23} \text{ Ом}; X_{31} = 2X_C = 20 \text{ Ом.}$$

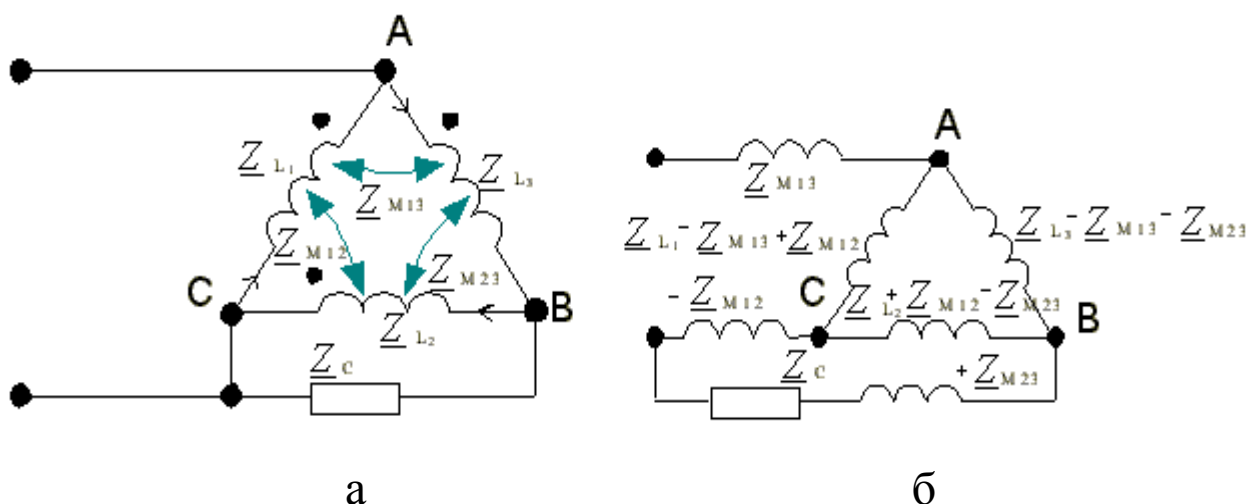


Рис. 5.12

### Решение

Для схемы на рис. 5.12,а выполним схемную развязку.

Обозначим:  $Z_{L1} - Z_{M13} + Z_{M12} = Z_5$ ;  $Z_{L3} - Z_{M13} - Z_{M23} = Z_6$ ;

$$Z_{L2} + Z_{M12} - Z_{M23} = Z_7.$$

Соединение типа «треугольник» (АВС) заменим эквивалентной звездой, схема примет вид, изображенный на рис. 5.12,в, где:

$$\underline{Z}_{\mathcal{E}1} = \frac{\underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7}; \quad \underline{Z}_{\mathcal{E}2} = \frac{\underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_7}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7}; \quad \underline{Z}_{\mathcal{E}3} = \frac{\underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_7}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7}.$$

Запишем комплексное входное сопротивление схемы (рис.5.12, в):

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = jX_{31} + jX_{\mathcal{E}1} + \frac{(jX_{\mathcal{E}2} - jX_{12}) \cdot (jX_{\mathcal{E}3} + jX_{23} - jX_c)}{jX_{\mathcal{E}2} - jX_{12} + jX_{\mathcal{E}3} + jX_{23} - jX_c}.$$

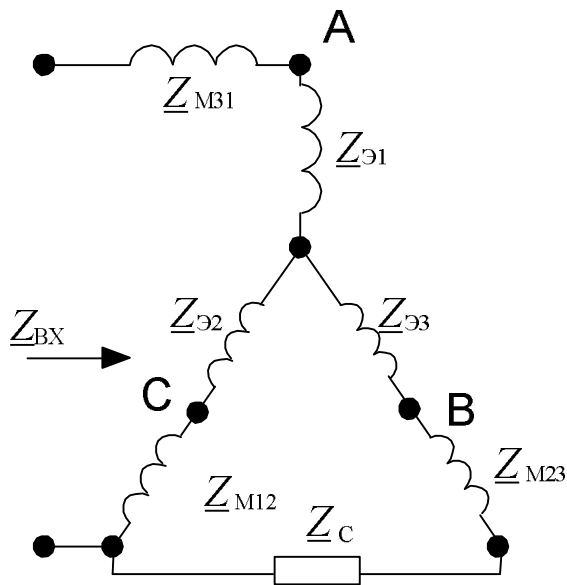


Рис. 5.12,в

После подстановки и расчета получим  $\underline{Z}_{\text{вх}} = 18,917 j \text{ Ом}$ .

Запишем условие резонанса  $I_m[\underline{Z}_{\text{вх}}] = 0$ , т.е. в выражении  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  выделим мнимую составляющую и приравняем ее к нулю. В результате получим  $X_c = 20,81 \text{ Ом}$ .

**5.13.** Для схемы на рис. 5.13 определить напряжение  $\overset{\circ}{U}_2$ , если известны следующие параметры:

### Решение

$$U_1 = 120 \text{ В};$$

$$R_1 = X_{c3} = 10 \text{ Ом};$$

$$X_1 = 45 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 3R_3 = 12 \text{ Ом};$$

$$X_2 = 70 \text{ Ом};$$

$$X_M = 25 \text{ Ом}.$$

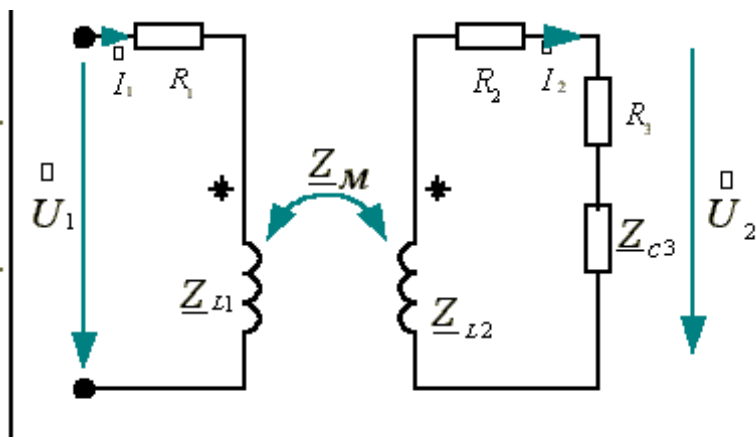


Рис. 5.13

По второму закону Кирхгофа запишем систему, учитывая, что включение катушек  $\underline{Z}_{L1}$  и  $\underline{Z}_{L2}$  встречное:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 - \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_m; \\ 0 = -\dot{I}_1 \underline{Z}_m + \dot{I}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2), \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j45 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 15 + j70 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - j \frac{1}{\omega C} = 5 - j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_m = j\omega M = j20 \text{ Ом}.$$

Решение системы (5.4) имеет вид

$$\dot{I}_1 = 1,077 - 3,017 j \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = 0,732 - 1,062 j \text{ А}.$$

Напряжение  $\dot{U}_2$  определим по формуле

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_3 = 13,892 e^{-j123,62^\circ} \text{ В}.$$

**5.14.** Определить одноименные зажимы катушек изображенных на рис.5.14.

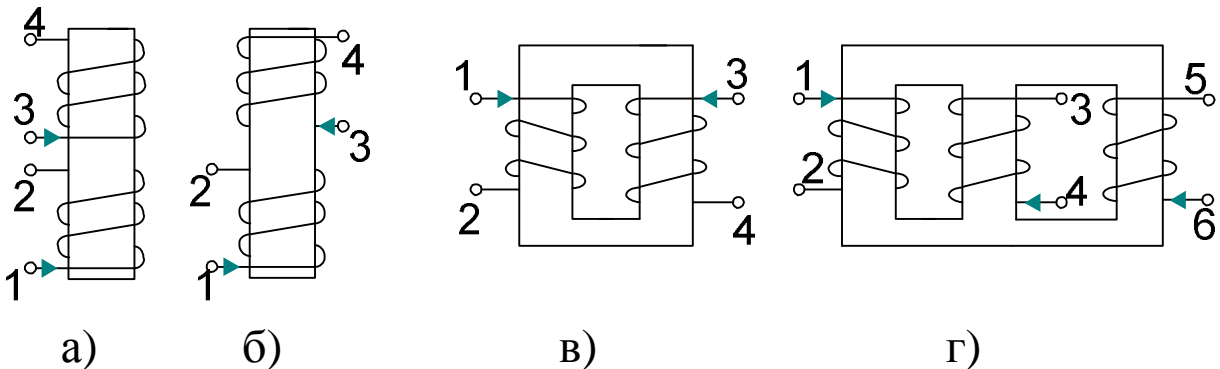


Рис. 5.14

**5.15.** Составить уравнения в комплексной форме по законам Кирхгофа для схем, приведенных на рис. 5.15.

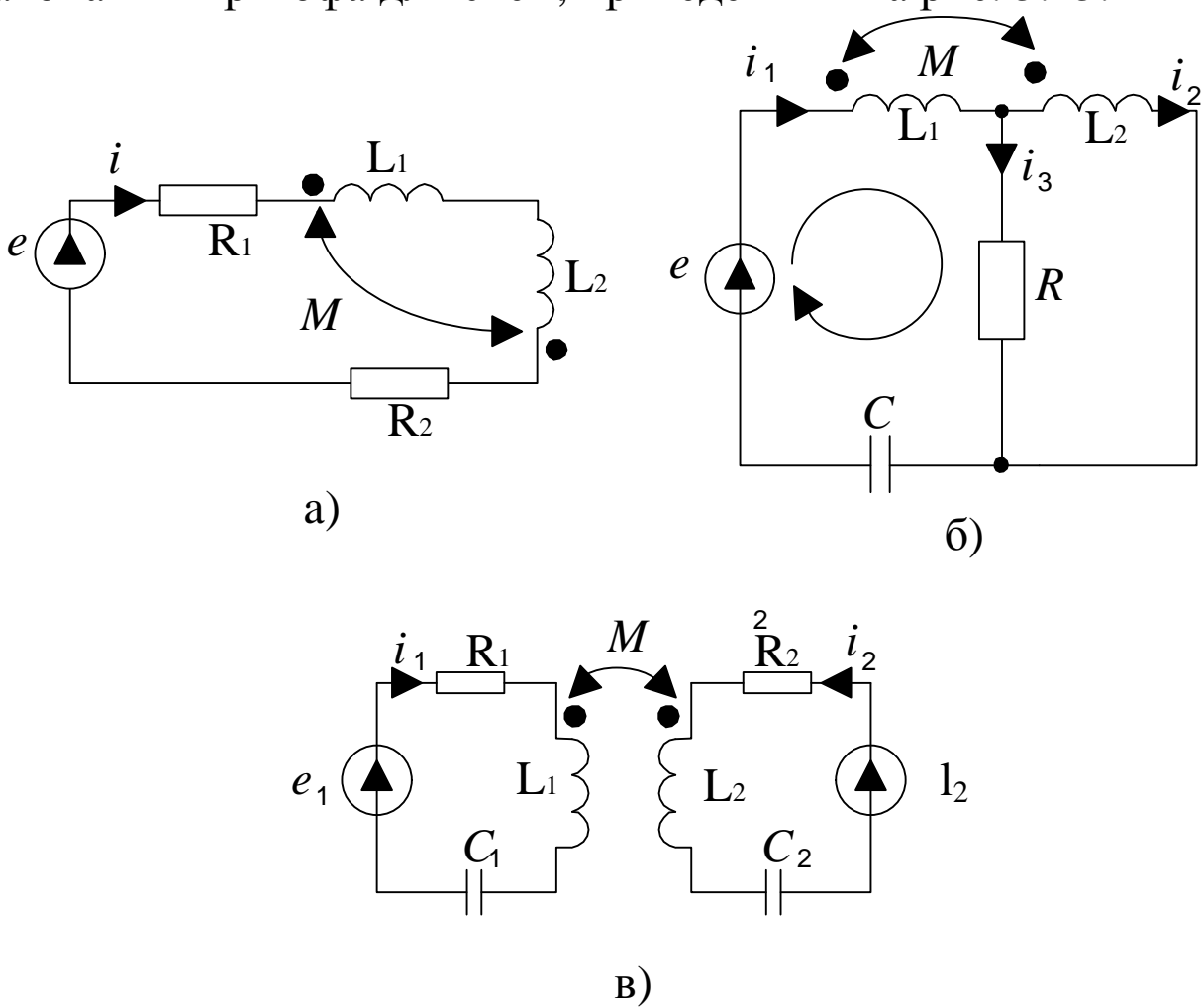


Рис. 5.15

**5.16.** Для схемы (рис. 5.16) определить коэффициент связи между контурами  $k_{св}$ , если резонансная частота первого контура равна  $4 \text{ МГц}$ , а параметры элементов схемы следующие:

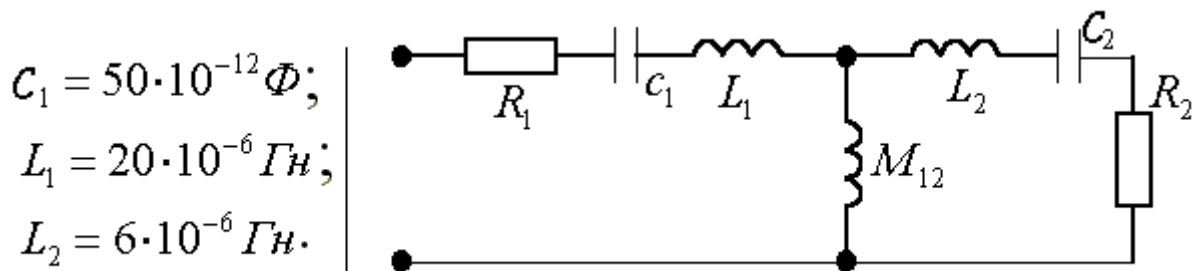


Рис. 5.16

Коэффициент связи определяется по формуле

$$k_{св} = \sqrt{k_1 \cdot k_2}, \text{ где } k_1 = \frac{M_{12}}{L_1 + M_{12}}; k_2 = \frac{M_{12}}{L_2 + M_{12}}.$$

**5.17.** Для схемы на рис. 5.17 определить напряжение  $\overset{\circ}{U}_{12}$  и ток  $\overset{\circ}{I}_1$ , если параметры схемы следующие:

$$\begin{aligned} \omega L_2 = \omega M &= 2 \text{ Ом}; \\ R_1 &= 5 \text{ Ом}; \\ R_2 &= 3 \text{ Ом}; \\ \frac{1}{\omega C} &= \omega L_1 = 4 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

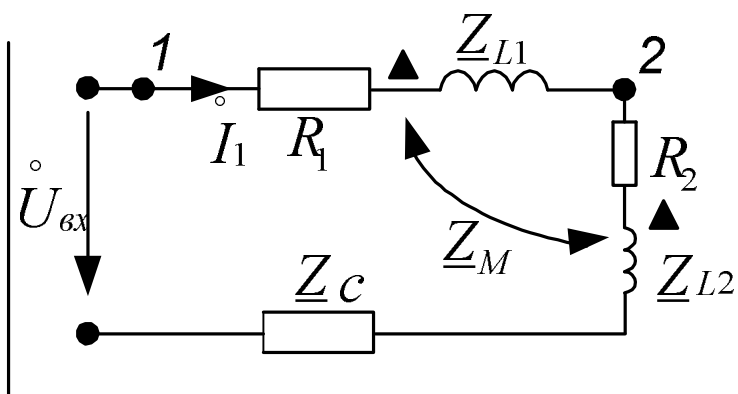


Рис. 5.17

**5.18.** Для схемы на рис. 5.18 определить токи всех ветвей, если параметры схемы следующие:

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 &= 20 \text{ Ом}; \\ \omega L_2 = 2\omega L_1 &= 20 \text{ Ом}; \\ \omega M &= 10 \text{ Ом}; \\ \overset{\circ}{U}_{ex} &= 150 \text{ В}. \end{aligned}$$

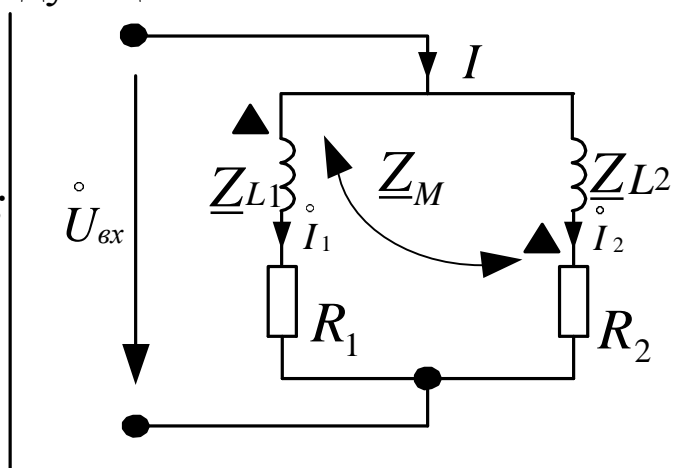


Рис. 5.18

**5.19.** В схеме (рис. 5.19) при частоте резонанса  $\omega_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$  наблюдается резонанс напряжений. Требуется подобрать емкость  $C$ , соответствующую резонансу, и найти токи всех ветвей, если известны параметры схемы:

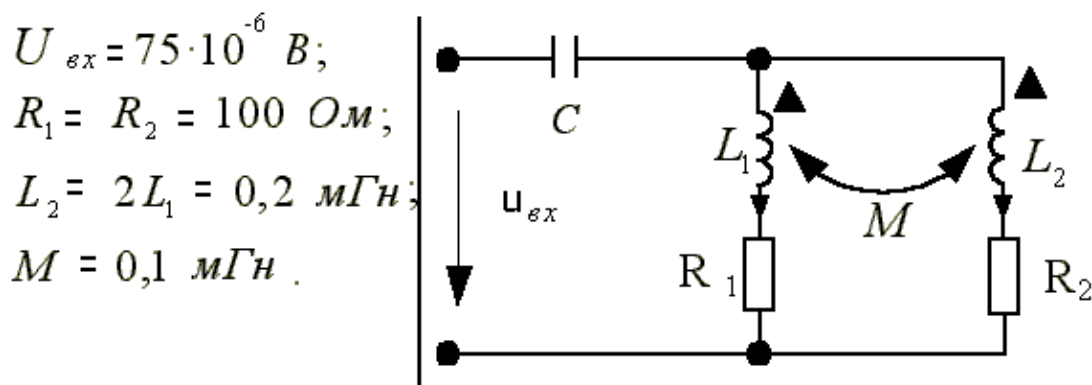


Рис. 5.19

**5.20.** В схеме (рис. 5.20) будет наблюдаться резонанс токов на частоте  $f_0 = 1 \cdot 10^4 \text{ Гц}$ . Определить емкость  $C$ , соответствующую резонансу, и вычислить комплексные действующие токи всех ветвей, если параметры схемы следующие:

$$L_1 = 2L_2 = 318 \cdot 10^{-6} \text{ Гн};$$

$$M = 124 \cdot 10^{-6} \text{ Гн};$$

$$U_{\text{ex}} = 0,04 \text{ В}.$$

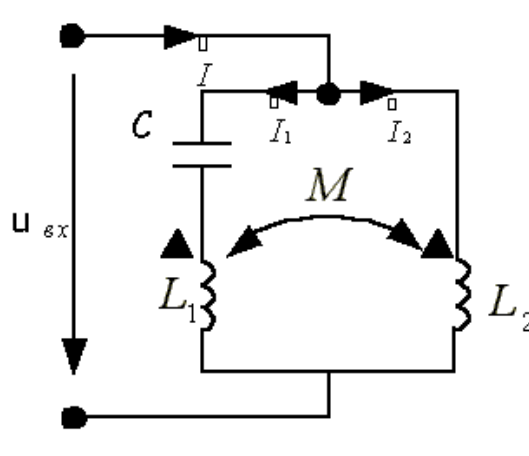


Рис. 5.20

**5.21.** Для схемы (рис. 5.21) составить систему расчетных уравнений:

а) по законам Кирхгофа;

б) по методу контурных токов.

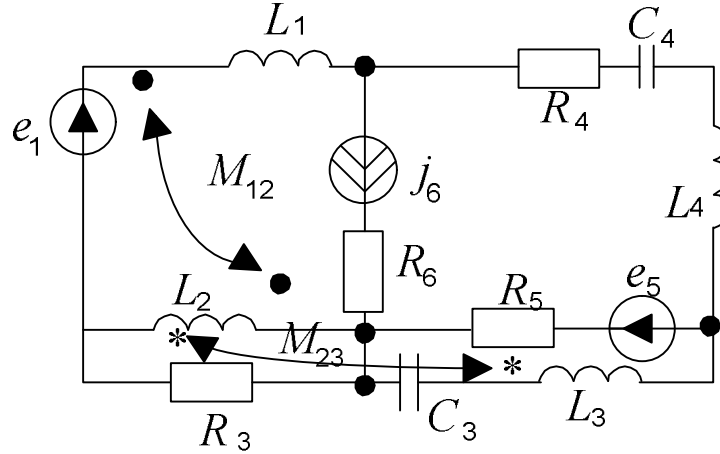


Рис. 5.21

**5.22.** Для схемы (рис. 5.22) составить систему расчетных уравнений:

а) по законам Кирхгофа;

б) по методу контурных токов.

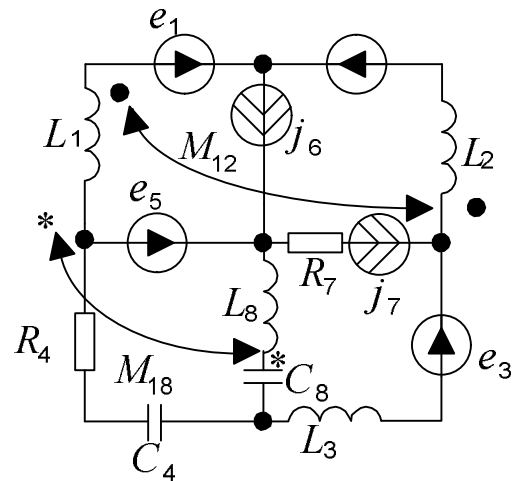


Рис. 5.22

**5.23.** В схеме (рис. 5.23) определить комплексные действующие токи всех ветвей, если заданы следующие параметры:

$$U_{\text{вх}} = 110 \text{ В}; f = 50 \text{ Гц};$$

$$R_1 = 2R_3 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 15 \text{ Ом};$$

$$L_1 = 2M = 0,4 \text{ Гн};$$

$$L_2 = 0,3 \text{ Гн}.$$

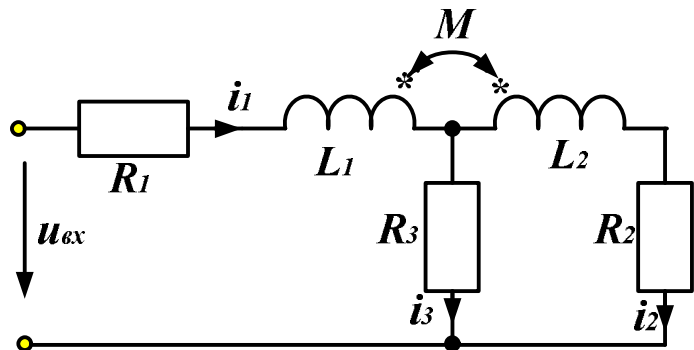


Рис. 5.23

**5.24.** В схеме (рис. 5.24) определить комплексные действующие токи всех ветвей, если заданы следующие параметры:

$$U_{\text{вх}}=100 \text{ В}; R_1=8 \text{ Ом};$$

$$R_2=2R_4=10 \text{ Ом};$$

$$R_3=15 \text{ Ом}; \omega L_1=56 \text{ Ом};$$

$$\omega L_2=\omega L_3=20 \text{ Ом};$$

$$\omega M_{12}=\omega M_{13}=10 \text{ Ом}.$$

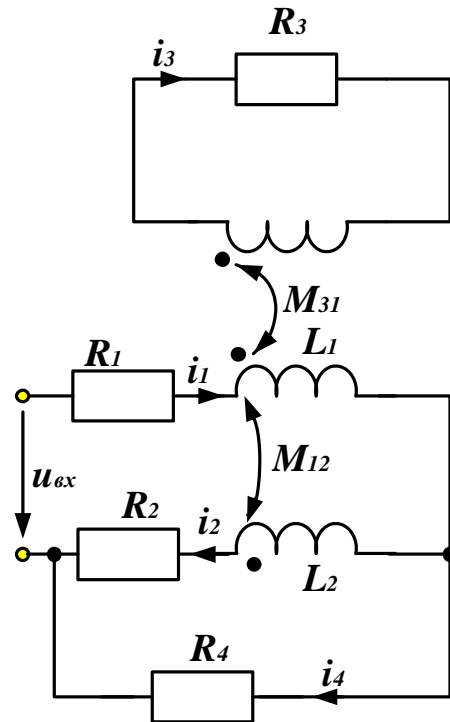


Рис. 5.24

## 6. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ФИЛЬТРЫ

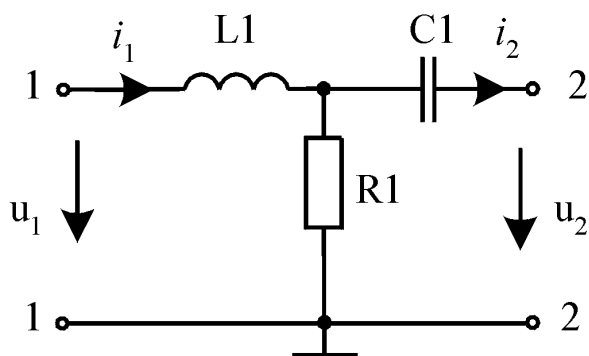
### 6.1. Четырехполюсники

6.1. На рис. 6.1 дана схема четырехполюсника, в которой

$$L_1 = 1 \text{ Гн}; C_1 = 10 \text{ мкФ};$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}; f = 50 \text{ Гц}.$$

Найти матрицы параметров  $[\underline{A}]$ ,  $[\underline{Y}]$ ,  $[\underline{H}]$  на заданной частоте.



#### Решение

Коэффициенты матрицы  $[\underline{A}]$  - параметров находим, используя режимы короткого замыкания (КЗ) и холостого хода (ХХ) на выходе четырехполюсника.

Для решения выполним следующие шаги.

1. Расставим направления токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника (см. рис. 6.1).
2. Запишем систему уравнений в форме А:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{I}_2. \end{cases} \quad (6.1)$$

3. Применяя режимы холостого хода (ХХ) короткого замыкания (КЗ) на выходе четырехполюсника, получаем выражения для элементов матрицы  $[\underline{A}]$  из (6.1):

$$\left. \begin{array}{l} \text{В режиме хх, когда } \dot{I}_2 = 0, \\ \begin{cases} \underline{A}_{11} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2; \\ \underline{A}_{21} = \dot{I}_1 / \dot{U}_2. \end{cases} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{В режиме КЗ, когда } \dot{U}_2 = 0, \\ \begin{cases} \underline{A}_{12} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2; \\ \underline{A}_{22} = \dot{I}_1 / \dot{I}_2. \end{cases} \end{array} \quad (6.2)$$

Переходим к комплексным схемам замещения четырехполюсника, в которых вместо  $\dot{U}_1$  подключаем источник э.д.с. с  $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ , в режиме ХХ (рис. 6.2) и в режиме КЗ (рис. 6.3).

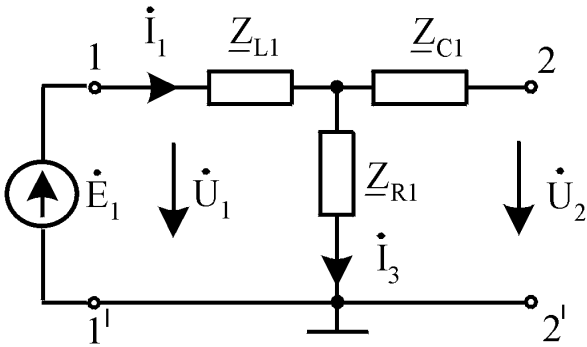


Рис. 6.2

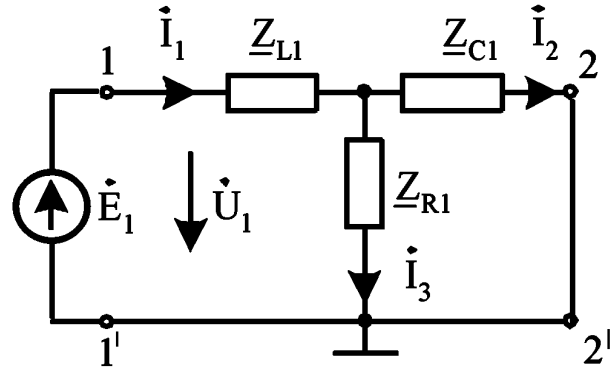


Рис. 6.3

Используя метод эквивалентных преобразований, выражаем токи и напряжения четырехполюсника.

При  $\dot{I}_2 = 0$  (см. рис. 6.2)  $\dot{I}_1 = \dot{I}_3$ ,  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{R3} = \dot{I}_3 \underline{Z}_{R1}$ , а сопротивления  $\underline{Z}_{L1}$  и  $\underline{Z}_{R1}$  включены последовательно:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{R1}}, \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{R1} = \frac{\dot{U}_1 \underline{Z}_{R1}}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{R1}};$$

При  $\dot{U}_2 = 0$  (см. рис. 6.3) получим выражение для тока  $\dot{I}_1$ , свернув сопротивления схемы относительно полюсов 1-1'. Ток  $\dot{I}_2$  определим по формуле разброса, зная ток  $\dot{I}_1$ .

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{L1} + \frac{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{R1}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1}}} = \frac{\dot{U}_1 (\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1})}{\underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{R1}};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{R1} = \frac{\dot{U}_1 \underline{Z}_{R1}}{\underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{R1}};$$

Подставив значения  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  в (6.2), получим матрицу

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{R1}}{\underline{Z}_{R1}} & \frac{\underline{Z}_{L1}\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{L1}\underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{R1}}{\underline{Z}_{R1}} \\ 1 & \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1} \\ \underline{Z}_{R1} & \underline{Z}_{R1} \end{bmatrix}.$$

Подставив числовые значения сопротивлений, вычислим элементы матрицы:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 + j31,416 & 1 \cdot 10^4 - j4,151 \\ 0,1 & 1 - j31,831 \end{bmatrix}.$$

4. Зная элементы матрицы  $[\underline{A}]$  и формулы перехода от матрицы  $[\underline{A}]$  к матрицам  $[\underline{H}]$  (6.3) и  $[\underline{Y}]$  (6.4), находим элементы искомых матриц

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} & \frac{|\underline{A}|}{\underline{A}_{21}} \\ -1 & \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \end{bmatrix}; \quad (6.3)$$

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} & \frac{-|\underline{A}|}{\underline{A}_{11}} \\ -1 & \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}} \end{bmatrix}; \quad (6.4)$$

**Ответ:**  $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 + j31,416 & 1 \cdot 10^4 - j4,151 \\ 0,1 & 1 - j31,831 \end{bmatrix};$

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} 9,99 + j313,845 & 9,86 \cdot 10^{-4} - j0,031 \\ -9,86 \cdot 10^{-4} - j0,031 & 9,86 \cdot 10^{-5} + j3,138 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix};$$

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} 1,013 \cdot 10^{-4} - j3,183 \cdot 10^{-3} & -10 \cdot 10^{-5} - j4,151 \cdot 10^{-8} \\ -10 \cdot 10^{-5} - j4,151 \cdot 10^{-8} & 9,87 \cdot 10^{-5} - j3,142 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

**6.2.** Для четырехполюсника, изображенного на рис. 6.4, определить матрицы  $[\underline{A}]$ ,  $[\underline{B}]$ ,  $[\underline{G}]$  при  $\underline{Z}_1 = 10 - j150$  Ом;

$\underline{Z}_2 = 100 + j350$  Ом. Использовать алгоритм решения задачи 6.1.

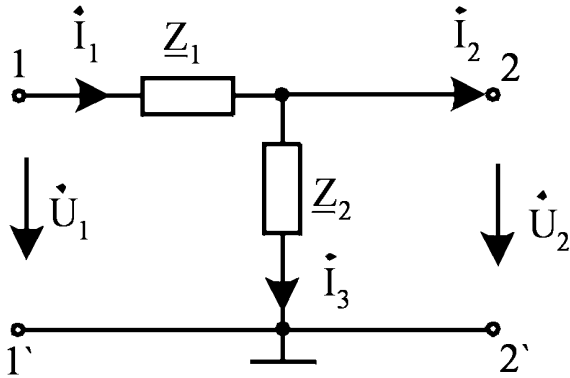


Рис. 6.4

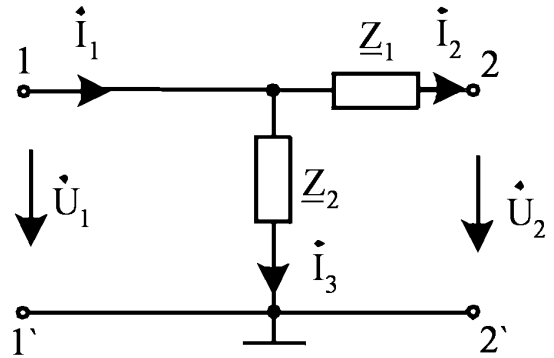


Рис. 6.5

**6.3.** Для четырехполюсника, изображенного на рис. 6.5, определить матрицы  $[\underline{A}]$ ,  $[\underline{H}]$ ,  $[\underline{Z}]$  при  $\underline{Z}_1 = 100 + j120$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 10 - j250$  Ом. Используйте алгоритм решения задачи 6.1.

**6.4.** Для четырехполюсника, изображенного на рис. 6.6, определить матрицы  $[\underline{A}]$ ,  $[\underline{H}]$ ,  $[\underline{Y}]$  при  $\underline{Z}_1 = 500 + j10$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 300 + j400$  Ом;  $\underline{Z}_3 = 800 + j1550$  Ом.

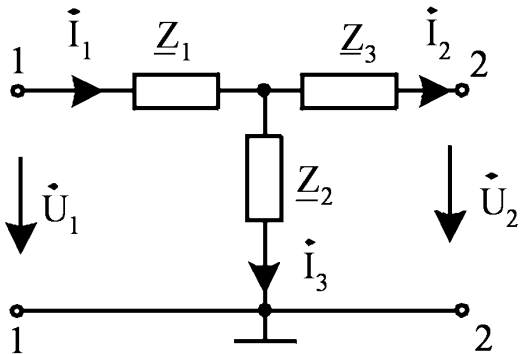


Рис. 6.6

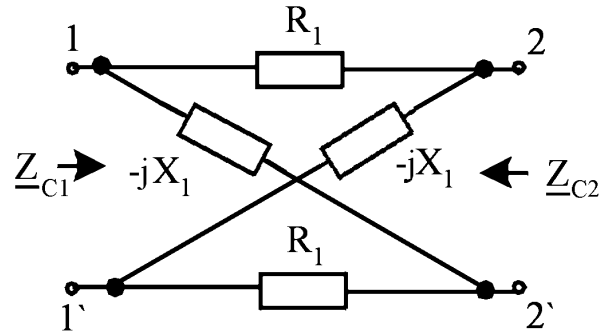


Рис. 6.7

**6.5.** На некоторой рабочей частоте задана матрица четырехполюсника вида

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} -1,222 & -j111,111 \\ j4,444 \cdot 10^{-3} & -1,222 - j3 \end{bmatrix};$$

Необходимо определить характеристические параметры четырехполюсника.

**Решение**

Характеристические сопротивления четырехполюсника определяются следующими формулами:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}, \quad (6.5)$$

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{(-1,222) \cdot (-j111,111)}{j4,444 \cdot 10^{-3} \cdot (-1,222 - j3)}} = 54,193 + j80,591 \text{ Ом} ;$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}, \quad (6.6)$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{(-1,222 - j3) \cdot (-j111,111)}{j4,444 \cdot 10^{-3} \cdot (-1,222)}} = 143,658 + j213,635 \text{ Ом}.$$

Мера передачи  $\underline{g}$  определится из соотношения

$$\underline{g} = 0,5 \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \right). \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \underline{g} &= 0,5 \ln \left( \sqrt{(-1,222) \cdot (-1,222 - j3)} + \sqrt{(-j111,111) \cdot (j4,444 \cdot 10^{-3})} \right) = \\ &= 0,478 + j0,22. \end{aligned}$$

**Примечание.** Если параметры четырехполюсника заданы матрицей, отличной от  $[\underline{A}]$ , то по формулам перехода необходимо перейти к матрице  $[\underline{A}]$ , а затем произвести расчет по формулам (6.5) – (6.7).

**Ответ:**  $\underline{Z}_{C1} = 54,193 + j80,591 \text{ Ом};$

$$\underline{Z}_{C2} = 143,658 + j213,635 \text{ Ом};$$

$$\underline{g} = 0,478 + j0,22.$$

**6.6.** Определить матрицу  $[\underline{A}]$  и характеристические параметры (меру передачи  $\underline{g}$  и сопротивление  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2}$ ) для

четыреполюсника (рис. 6.8) на частоте  $f = 50\text{Гц}$ , если  $R = 50\text{ Ом}$ ;  $C = 31,831\text{ мкФ}$ ;  $L = 0,637\text{ Гн}$ .

**6.7.** Определить матрицу  $[\underline{A}]$  и характеристические параметры (меру передачи  $\underline{g}$  и сопротивление  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2}$ ) для четырехполюсника (рис. 6.9) на частоте  $f = 50\text{Гц}$ , если  $C = 6,366\text{ мкФ}$ ;  $L = 0,159\text{ Гн}$ .

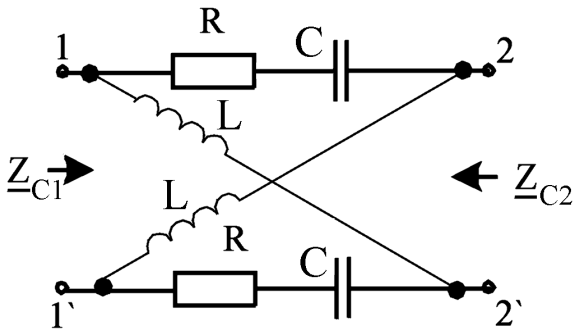


Рис. 6.8

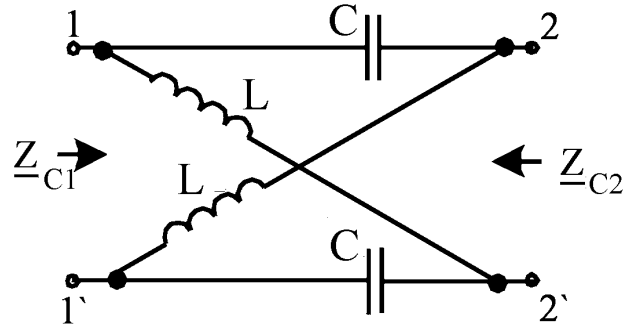


Рис. 6.9

**6.8.** Определить матрицу  $[\underline{A}]$  и характеристические параметры (меру передачи  $\underline{g}$  и сопротивление  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2}$ ) мостового симметричного четырехполюсника (см. рис. 6.7), если  $R_1 = 150\text{ Ом}$ ;  $X_1 = 300\text{ Ом}$ .

**6.9.** На некоторой рабочей частоте задана матрица четырехполюсника:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1+j & 20 \\ 0,05 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Определить характеристические параметры четырехполюсника: сопротивления  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$  и меру передачи  $\underline{g}$ .

**6.10.** На некоторой рабочей частоте задана матрица четырехполюсника вида

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} 100 & 1-j \\ 1-j & 0,01-j0,01 \end{bmatrix}.$$

Определить характеристические параметры четырехполюсника: сопротивления  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$  и меру передачи  $\underline{g}$ .

**6.11.** На некоторой рабочей частоте задана матрица четырехполюсника вида

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} 50 & 50+j \\ 30-j10 & 0,5-j0,8 \end{bmatrix}.$$

Определить характеристические параметры четырехполюсника: сопротивления  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$  и меру передачи  $\underline{g}$ .

**6.12.** К выходу четырехполюсника, заданного матрицей  $[\underline{A}]$ , подключена нагрузка  $\underline{Z}_2 = 100+j100$  Ом. Определить показания идеального амперметра, подключенного на входе последовательно с идеальным источником переменного напряжения  $\dot{U}_1 = 10$  В.

Матрица  $[\underline{A}]$  имеет вид

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1000 & 350-j5 \\ 20+j20 & 10+j10 \end{bmatrix};$$

### Решение

Для решения необходимо найти входное сопротивление нагруженного четырехполюсника  $\underline{Z}_{1ВХ}$  по формуле

$$\underline{Z}_{1ВХ} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}; \quad (6.8)$$

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{(1000) \cdot + (350 - j5)}{(20 + j20) \cdot (100 + j100) + (10 + j10)} = 24,999 - j24,963 \text{ Ом}$$

Если ко входу четырехполюсника подключен идеальный источник напряжения, то его внутреннее сопротивление равно нулю. Идеальный амперметр имеет сопротивление, равное нулю. Поэтому источник подключен ко входу четырехполюсника непосредственно, а амперметр покажет модуль комплексного действующего значения входного тока четырехполюсника  $\dot{I}_1$ . Зная входные сопротивление и напряжение источника на входе, по закону Ома определим входной ток:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{\text{ВХ}} ; \quad (6.9)$$

$$\dot{I}_1 = 10 / (24,999 - j24,963) = 0,2 + j0,2 \text{ А.}$$

Амперметр покажет модуль комплексного действующего значения тока, который равен  $I_A = 0,283 \text{ А}$ .

**Ответ:**  $I_A = 0,283 \text{ А}$ .

**6.13.** К выходу четырехполюсника, заданного матрицей  $[\underline{A}]$  подключена нагрузка  $\underline{Z}_2 = -j100 \text{ Ом}$ . Определить показания идеального амперметра, подключенного ко входу последовательно с идеальным источником переменного напряжения  $\dot{U}_1 = 1000 \text{ В}$ .

Матрица  $[\underline{A}]$  имеет вид

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1000 & 15 - j50 \\ 10 - j20 & 10 + j10 \end{bmatrix}.$$

**6.14.** К выходу четырехполюсника, заданного матрицей  $[\underline{A}]$ , подключена нагрузка  $\underline{Z}_2 = 1 - j100 \text{ Ом}$ . Определить показания идеального амперметра, включенного ко входу четырехполюсника последовательно с идеальным источником переменного напряжения  $\dot{U}_1 = 1000 \text{ В}$ .

Матрица  $[\underline{A}]$  имеет вид

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 100 & 10 - j50 \\ 1 - j20 & 10 + j10 \end{bmatrix}.$$

**6.15.** К выходу четырехполюсника, заданного матрицей  $[\underline{A}]$ , подключена нагрузка  $\underline{Z}_2 = 50 + j10$  Ом. Определить показания идеального амперметра, включенного на входе последовательно с идеальным источником переменного напряжения  $\dot{U}_1 = 6000$  В.

Матрица  $[\underline{A}]$  имеет вид

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 100 & 100 - j50 \\ j50 & 100 + j50 \end{bmatrix}.$$

## 6.2. Фильтры

**6.16.** Определить параметры элементов фильтра, приведенного на рис. 6.10, при частоте среза  $f_c = 60$  Гц, сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_H = 50$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением,  $\underline{Z}_H$ .

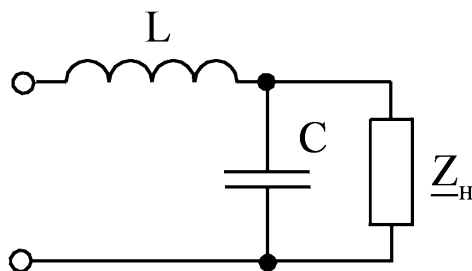


Рис. 6.10

Исходя из теории фильтров, необходимо рассчитать параметры простейшего фильтра низких частот типа  $k$ .

1. Необходимо определить  $k$  по формуле

$$k^2 = \underline{Z}_и \underline{Z}_H, \quad (6.10)$$

где  $\underline{Z}_и, \underline{Z}_H$  – сопротивления источника и нагрузки.

Считаем, что сопротивление источника равно сопротивлению нагрузки, следовательно,  $\underline{Z}_и = \underline{Z}_н$ .

Тогда

$$k = \sqrt{\underline{Z}_и \underline{Z}_н} = 50 \text{ Ом}.$$

2. По формулам для фильтра нижних частот типа  $k$  определяем параметры элементов фильтра:

$$L = \frac{0,5k}{\pi f_c}, \quad (6.11)$$

$$L = \frac{0,5 \cdot 50}{3,1415926 \cdot 60} = 0,133 \text{ Гн};$$

$$C = \frac{0,5}{\pi f_c k}, \quad (6.12)$$

$$C = \frac{0,5}{3,1415926 \cdot 60 \cdot 50} = 53,052 \text{ мкФ}.$$

Выбираем стандартное значение емкости  $C = 50 \text{ мкФ}$ .

Проверяем частоту среза с выбранной емкостью по формуле:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (6.13)$$

$$f_c = \frac{1}{2 \cdot 3,1415926 \cdot \sqrt{0,133 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = 61,84 \text{ Гц}.$$

Разница между требуемой и расчетной частотами мала, считаем расчет законченным.

**Ответ:**  $L = 0,133 \text{ Гн}$ ,  $C = 50 \text{ мкФ}$ .

**6.17.** Определить параметры элементов фильтра, приведенного на рис. 6.11, при частоте среза  $f_c = 100 \text{ Гц}$ , сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_н = 10 \text{ Ом}$ . Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $\underline{Z}_и$ .

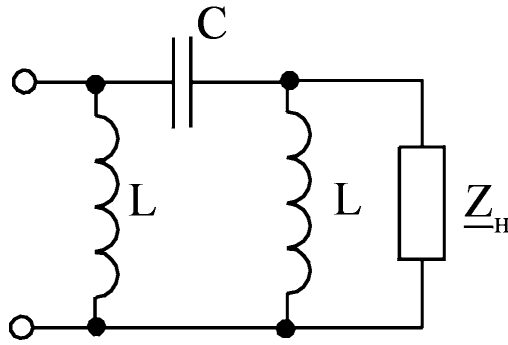


Рис. 6.11

**6.18.** Определить параметры элементов полосового фильтра, приведенного на рис. 6.12, при граничных частотах  $f_1 = 100$  Гц,  $f_2 = 200$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_H = 100$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_H$ .

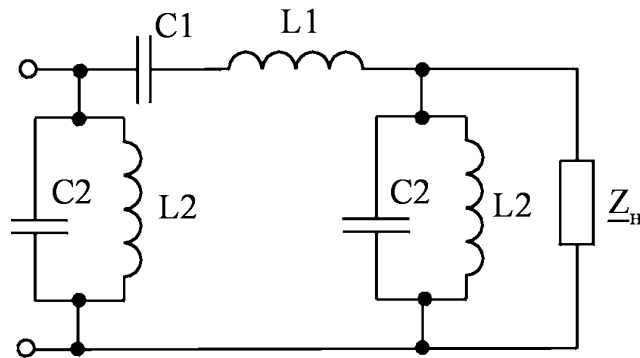


Рис. 6.12

**6.19.** Определить параметры элементов заграждающего фильтра, приведенного на рис. 6.13, при граничных частотах  $f_1 = 100$  Гц,  $f_2 = 300$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_H = 10$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_H$ .

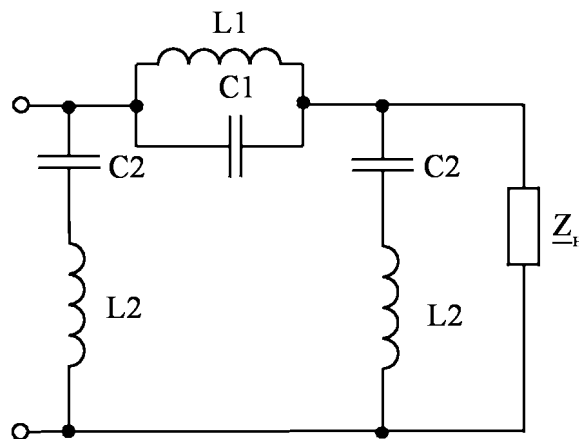


Рис. 6.13

**6.20.** Определить параметры элементов полосового фильтра, приведенного на рис.6.12, при граничных частотах  $f_1 = 50$  Гц,  $f_2 = 400$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_{\text{н}} = 10$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н}}$ .

**6.21.** Определить параметры элементов фильтра, приведенного на рис. 6.10, при частоте среза  $f_c = 300$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_{\text{н}} = 4$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н}}$ .

**6.22.** Определить параметры элементов полосового фильтра, приведенного на рис. 6.12, при граничных частотах  $f_1 = 50$  Гц,  $f_2 = 500$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_{\text{н}} = 4$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н}}$ .

**6.23.** Определить параметры элементов фильтра, приведенного на рис. 6.11, при частоте среза  $f_c = 300$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_{\text{н}} = 4$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н}}$ .

**6.24.** Определить параметры элементов заграждающего фильтра, приведенного на рис. 6.13, при граничных частотах  $f_1 = 60$  Гц,  $f_2 = 200$  Гц, сопротивлении нагрузки  $Z_{\text{н}} = 50$  Ом. Фильтр подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н}}$ .

**Библиографический список**

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. – М.: Энергия, 1978. Ч. 1.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977.
3. Основы теории цепей: Учебник для вузов /Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989. –528 с.
4. Демирчан К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей.: – М.: Высшая школа, 1988. –335 с.

# Приложение 1

## Операторные схемы замещения идеализированных элементов

Элемент	Схема во временной области	Операторная схема
Независимый источник напряжения		
Независимый источник постоянного напряжения		
Независимый источник тока		
Независимый источник постоянного тока		
Сопротивление		
Индуктивность		
Емкость		

## Приложение 2

### Теоремы соответствия операций над оригиналами и изображениями

Таблица П 2.1

Номер теоремы	Операция	Оригинал	Изображение
1	Линейная, если $\alpha, \beta$ постоянные	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$
2	Дифференцирование	$f'(t)$	$pF(p) - f(0+0)$
3	Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
4	Изменение масштаба	$f(at)(a > 0)$	$\frac{1}{a} F \frac{p}{a}$
5	Сдвиг аргумента оригинала, если $f(t)=y$ для $t \leq 0$	$f(t-b)(b > 0)$	$e^{-bp} F(p)$

Теоремы справедливы, если преобразования Лапласа существуют в смысле абсолютной сходимости.

Номер теоремы	Операция	Оригинал	Изображение
6	Свертка оригинала	$f_1 f_2 =$ $= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_2 \cdot f_1$	$F_1(p) F_2(p)$
7	Соответствие пределов оригиналов и изображений (теорема непрерывности; $\alpha$ не зависит от $t$ и $p$ ).	$\lim_{\alpha \rightarrow a} f(t, \alpha)$	$\lim_{\alpha \rightarrow a} F(p, \alpha)$
8	Дифференцирование и интегрирование по параметру $\alpha$ , не зависящему от $t$ и $p$	а) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$ , б) $\int_{a_1}^{a_2} f(t, \alpha) d\alpha$	а) $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(p, \alpha)$ . б) $\int_{a_1}^{a_2} F(p, \alpha) d\alpha$
9а	Дифференцирование изображения	$-tf(t)$	$F'(p)$
9б		$(-1)^r t^r f(t)$	$F^{(r)}(p)$
10	Интегрирование изображения, если $\int_s^\infty F(p) dp$ сходится (путь интегрирования расположен справа от абсциссы абсолютной сходимости)	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^\infty F(p) dp$
11	Сдвиг аргумента у изображения	$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$

Таблица преобразований Лапласа  
(а, в и с – различные постоянные)

№	F (p)	F (t) (t>0)
1	$1/p$	$1$
2	$1/p^2$	$t$
3	$1/p^n (n=1,2\dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$1/\sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$p^{-3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
6	$p^{-(n+1/2)} (n=1,2\dots)$	$\frac{2^{ntn-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)\sqrt{\pi}}$
7	$\frac{\Gamma(k)}{p^k} (k>0)$	$t^{k-1}$
8	$\frac{1}{p-a}$	$e^{at}$
9	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$te^{at}$
10	$\frac{1}{(p-a)^n} (n=1,2\dots)$	$\frac{1}{(n-1)t} t^{n-1} e^{at}$
11	$\frac{\Gamma(k)}{(p-a)^k} (k>0)$	$t^{k-1} e^{at}$
12	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$

## Продолжение табл. П 2.2

№	F (p)	F (t) (t>0)
13	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
14	$\frac{1}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
15	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
16	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
17	$\frac{1}{(p-a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{at} \sin bt$
18	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
19	$\frac{1}{p} \text{th } kp$	$\frac{1}{2} M(k, t) + \frac{1}{2} = \frac{1 - (-1)^n}{2}$ если $(n-1)k < t < nk$
20	$\frac{1}{p(1 + e^{-kp})}$	$H(2k, t) \text{ (рис. П.2.1, б)}$
21	$\frac{1}{p^2} \text{th } ks$	$M(2k, t+3k) + 1 = 1 + (-1)^n,$ Если $(2n-3)k < t < (2n-1)k,$ $(t > 0)$

Таблица преобразований Лапласа для рациональных изображений  $F(p)$ 

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
1	$\frac{1}{p}$	$1$	
2	$\frac{1}{p-a}$	$e^{at}$	
3	$\frac{1}{p(p-a)}$	$Ae^{at} + K$	$A = \frac{1}{a}, K = -\frac{1}{a}$
4	$\frac{p+d}{p(p-a)}$		$A = (1 + \frac{d}{a}), K = -\frac{d}{a}$
5	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{1}{a-b}, B = \frac{1}{b-a}$
6	$\frac{p+d}{(p-a)(p-b)}$		$A = \frac{a+d}{a-b}, B = \frac{b+d}{b-a}$
7	$\frac{1}{p(p-a)(p-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + K$	$A = \frac{1}{a(a-b)}, B = \frac{1}{b(b-a)}, K = \frac{1}{ab}$
8	$\frac{p+d}{p(p-a)(p-b)}$		$A = \frac{a+d}{a(a-b)}, B = \frac{b+d}{b(b-a)}, K = \frac{d}{ab}$
9	$\frac{p^2 + gp + d}{p(p-a)(p-b)}$		$A = \frac{a^2 + ga + d}{a(a-b)}, B = \frac{b^2 + gb + d}{b(b-a)},$ $K = \frac{d}{ab}$
10	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + Ce^{ct}$	$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)}, B = \frac{1}{(b-a)(b-c)},$ $C = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

## Продолжение табл. П 3.2

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
12	$\frac{p^2+gp+d}{(p-a)(p-b)(p-c)}$		$A = \frac{a^2+ag+d}{(a-b)(a-c)}, B = \frac{b^2bg+d}{(b-a)(b-c)},$ $C = \frac{c^2+cg+d}{(c-a)(c-b)}$
13	$\frac{1}{(p-a)^2+\omega^2}$	$Ae^{at} \sin(\omega t + a)$	$A = \frac{1}{\omega}, d = 0$
14	$\frac{p+d}{(p-a)^2+\omega^2}$		$A = \frac{1}{\omega} [(a+d)^2 + \omega^2]^{1/2},$ $d = \arctg \frac{\omega}{a+d}$
15	$\frac{1}{p[(p-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at} \sin(\omega t + a) + K$	$A = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}}, K = \frac{1}{a^2+\omega^2},$ $d = -\arctg \frac{\omega}{a}$
16	$\frac{p+d}{p[(p-a)^2+\omega^2]}$		$A = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{(a+d)^2 + \omega^2}{a^2 + \omega^2} \right]^{1/2},$ $K = \frac{d}{a^2 + \omega^2},$ $a = \arctg \frac{\omega}{a+d} - \arctg \frac{\omega}{a}$
17	$\frac{p^2+gp+d}{p[(p-a)^2+\omega^2]}$		$A = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{(a^2 - \omega^2 + ag + d)^2 + \omega^2(2a+g)^2}{a^2 + \omega^2} \right]^{1/2}$ $K = \frac{d}{a^2 + \omega^2},$ $a = \arctg \frac{\omega(2a+g)}{a^2 - \omega^2 + ag + d} \arctg \frac{\omega}{a}$
18	$\frac{1}{(p-b)[(p-a)^2+\omega^2]}$ $\frac{1}{(p-b)[(p-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at} \sin(\omega t + a) + Be^{bt}$ $Ae^{at} \sin(\omega t + a) + Be^{bt}$	$A = \frac{1}{\omega} \frac{1}{[(a-b)^2 + \omega^2]^{1/2}},$ $B = \frac{1}{(a-b)^2 + \omega^2}, d = -\arctg \frac{\omega}{a-b}$

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
19	$\frac{p+d}{(p-b)[(p-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+a)$ $+Be^{bt}$	$A = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{(a+d)^2 + \omega^2}{(a-b)^2 + \omega^2} \right]^{1/2},$ $B = \frac{b+d}{(a-b)^2 + \omega^2},$ $d = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a+d} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a-b}$
20	$\frac{p^2+gp+d}{(p-b)[(p-a)^2+\omega^2]}$		$A = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{(a^2 - \omega^2 + ag + d)^2 + \omega^2(2a+g)^2}{(a-b)^2 + \omega^2} \right]^{1/2}$ $B = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2 + \omega^2},$ $a = \operatorname{arctg} \frac{\omega(2a+g)}{a^2 - \omega^2 + ag + d} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a-b}$
21	$\frac{1}{p(p-b)[(p-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+a)$ $+Be^{bt}+K$	$A = \frac{1}{\omega (a^2 + \omega^2)^{1/2} [(a-b)^2 + \omega^2]^{1/2}}.$ $B = \frac{1}{b[(b-a)^2 + \omega^2]}, K = \frac{1}{b(a^2 + \omega^2)},$ $d = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{a-b} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a},$
22	$\frac{d+d}{d(d-b)[(d-a)^2+\omega^2]}$		$A = \frac{1}{\omega(a^2 + \omega^2)^{1/2} [(a-b)^2 + \omega^2]^{1/2}},$ $B = \frac{b+d}{b[(b-a)^2 + \omega^2]}, K = -\frac{d}{b(a^2 + \omega^2)},$ $d = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a+d} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a-b} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a},$
23	$\frac{1}{[(p-a^2)+\omega_1^2](p^2+\omega_2^2)}$	$Ae^{at}\sin(\omega_1 t+a)$ $+B \times$ $\times \sin(\omega_2 t+\beta)$  $Ae^{at}\sin(\omega_1 t+a)$ $+B \times$ $\times \sin(\omega_2 t+\beta)$	$A = \frac{1}{\omega_1 [(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2]^{1/2}},$ $a = -\operatorname{arctg} \frac{2a\omega_1}{a^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2},$ $B = \frac{1}{\omega_2 [(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2]^{1/2}},$ $\beta = \operatorname{arctg} \frac{2a\omega_2}{a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$

## Продолжение табл. П 3.2

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
24	$\frac{p+d}{[(p-a^2)+\omega_1^2](p^2+\omega_2^2)}$		$A = \frac{1}{\omega_1} \left[ \frac{(a+d)^2 + \omega_1^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2}$ $\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{a+d} - \arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2},$ $B = \frac{1}{\omega_3} \left[ \frac{d^2 + \omega_2^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2},$ $\beta = \arctg \frac{\omega_2}{d} + \arctg \frac{2a\omega_2}{a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}.$
25	$\frac{p^2+gp+d}{[(p-a)^2+\omega_1^2](p^2+\omega_2^2)}$	$Ae^{at} \sin(\omega_1 t + a) + B \times \sin(\omega_2 t + \beta)$	$A = \frac{1}{\omega_1} \left[ \frac{(a^2 - \omega_1^2 + ag + d)^2 + \omega_1^2(2a + g)^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2}$ $a = \arctg \frac{\omega_1(2a + g)}{a^2 - \omega_1^2 + ag + d} - \arctg \frac{2a\omega_1}{a^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2},$ $B = \frac{1}{\omega_2} \left[ \frac{(d - \omega_2^2)^2 + g^2\omega_2^2}{(a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a^2\omega_2^2} \right]^{1/2},$ $\beta = \arctg \frac{g\omega_2}{d - \omega_2^2} + \arctg \frac{2a\omega_2}{a^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$
26	$\frac{1}{p^2}$	$t$	
27	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at}$	$A=0, A_1=1$
28	$\frac{p+d}{(p-a)^2}$		$A=1, A_1=a+d$
29	$\frac{1}{p^2(p-a)}$		$A = \frac{1}{a^2}, K = -A, K_1 = -\frac{1}{a}$
30	$\frac{p+d}{p(p-a)}$	$Ae^{at} + K + K_1 t$	$A = \frac{a+d}{a^2}, K = -A, K_1 = -\frac{d}{a},$

## Продолжение табл. П 3.2

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
31	$\frac{p^2 + gp + d}{p^2(p-a)}$		$A = \frac{a^2 + ag + d}{a^2}, K = 1 - A, K_1 = \frac{d}{a},$
32	$\frac{1}{p(p-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + K$	$A = -\frac{1}{a^2}, A_1 = \frac{1}{a}, K = -A,$
33	$\frac{p+d}{p(p-a)^2}$		$A = -\frac{d}{a^2}, A_1 = \frac{a+d}{a}, K = -A,$
34	$\frac{p^2 + gp + d}{p(p-a)^2}$		$A = \frac{a^2 - d}{a^2}, A_1 = \frac{a^2 + ag + a}{a},$ $K = 1 - A,$
35	$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)}$	$(A + A_1 t)e^{at} + Bt^{bt}$	$A = -\frac{1}{(a-b)^2}, A_1 = \frac{1}{a-b}, B = -A$
36	$\frac{p+d}{(p-a)^2(p-b)}$		$A = -\frac{b+d}{(a-b)^2}, A_1 = \frac{a+d}{a-b}, B = -A$
37	$\frac{p^2 + gp + a}{(p-a)^2(p-b)}$		$A = \frac{a^2 - 2ab - bg - d}{(a-b)^2}, A_1 = \frac{a^2 + ag + d}{a-b},$ $B = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2},$
38	$\frac{1}{p^2(p-a)(p-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + K + K_1 t$	$A = \frac{1}{a^2(a-b)}, B = \frac{1}{b^2(b-a)},$ $K = \frac{a+b}{a^2 b^2}, K_1 = \frac{1}{ab}$
39	$\frac{p+a}{p^2(p-a)(p-b)}$		$A = \frac{a+d}{a^2(a-b)}, B = \frac{b+d}{b^2(b-a)},$ $K = \frac{ab+d(a+b)}{a^2 b^2}, K_1 = \frac{d}{ab}$
40	$\frac{p^2 + gp + d}{p^2(p-a)(p-b)}$		$A = \frac{a^2 + ag + d}{a^2(a-b)}, B = \frac{b^2 + bg + d}{b^2(b-a)},$ $K = \frac{abg + d(a+b)}{a^2 b^2}, K_1 = \frac{d}{ab}$

## Продолжение табл. П 3.2

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
41	$\frac{1}{p(p-a)^2(p-b)}$	$(A+A_1t)e^{at}+B e^{bt}+K$	$A=\frac{b-2a}{a^2(a-b)^2}, A_1=\frac{1}{a(a-b)},$ $B=\frac{1}{b(a-b)^2}, K=-\frac{1}{a^2b}$
42	$\frac{p+d}{p(p-a)^2(p-b)}$		$A=-\frac{a^2+2ad-bd}{a^2(a-b)^2}, A_1=\frac{a+d}{a(a-b)},$ $B=\frac{b+d}{b(a-b)^2}, K=-\frac{d}{a^2b}$
43	$\frac{p^2+gp+d}{p(p-a)^2(p-b)}$		$A=-\frac{a^2(b+g)+d(2a-b)}{a^2(a-b)^2},$ $A_1=\frac{a^2+ag+d}{a(a-b)}, B=\frac{b^2+bg+d}{b(a-b)^2},$ $K=-\frac{d}{a^2b}$
44	$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)(p-c)}$	$(A+A_1t)e^{at}+Be^{bt}+Ce^{ct}$	$A=\frac{(b+c)-2a}{(a-b)^2(a-c)^2}, A_1=\frac{1}{(a-b)(a-c)},$ $B=\frac{1}{(b-a)^2(b-c)}, C=\frac{1}{(c-a)^2(c-b)}$
45	$\frac{p+d}{(p-a)^2(p-b)(p-c)}$	$(A+A_1t)e^{at}+Be^{bt}+Ce^{ct}$	$A=-\frac{a^2+2ad-d(b+c)-bc}{(a-b)^2(a-c)^2},$ $A_1=\frac{a+d}{(a-b)(a-c)}, B=\frac{b+d}{(b-a)^2(b-c)},$ $C=\frac{c+d}{(c-a)^2(c-b)}$
46	$\frac{1}{p^2(p-a)^2}$	$(A+A_1t)e^{at}+K+K_1t$	$A=-\frac{2}{a^3}, A_1=\frac{1}{a^2},$ $K=-A, K_1=\frac{1}{a^2}$
47	$\frac{p+d}{p^2(p-a)^2}$		$A=-\frac{a+2d}{a^3}, A_1=\frac{a+d}{a^2},$ $K=-A, K_1=\frac{d}{a^2}$
48	$\frac{p^2+gp+d}{p^2(p-a)^2}$		$A=-\frac{ag+2d}{a^3}, A_1=\frac{a^2+ag+d}{a^2},$ $K=-A, K_1=\frac{d}{a^2}$

## Продолжение табл. П 3.2

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
49	$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)^2}$	$(A+A_1t)e^{at}+(B+B_1t)e^{bt}$	$A=-\frac{2}{(a-b)^3}, \quad A_1=\frac{1}{(a-b)^2},$ $B=-A, \quad B_1=\frac{1}{(a-b)^2}$
50	$\frac{p+d}{(p-a)^2(p-b)^2}$		$A=-\frac{a+b+2d}{(a-b)^3}, \quad A_1=\frac{a+d}{(a-b)^2},$ $B=-A, \quad B_1=\frac{b+d}{(a-b)^2}$
51	$\frac{p^2+gp+d}{(p-a)^2(p-b)^2}$		$A=-\frac{(a+b)g+2(ab+d)}{(a-b)^3},$ $A_1=\frac{a^2+ag+d}{(a-b)^2}, B=-A,$ $B_1=\frac{b^2+bg+d}{(a-b)^2}$
52	$\frac{1}{(p-a)^3(p-b)}$	$(A+A_1t+A_2t^2)e^{at}+Be^{bt}$	$A=\frac{1}{(a-b)^3}, \quad A_1=-\frac{1}{(a-b)^2},$ $A_2=\frac{1}{2(a-b)}, \quad B=-A.$
53	$\frac{p+d}{(p-a)^3(p-b)}$		$A=\frac{b+d}{(a-b)^3}, \quad A_1=-\frac{b+d}{(a-b)^3},$ $A_2=\frac{a+d}{2(a-b)}, \quad B=-A.$
54	$\frac{p^2+gp+d}{p^2(p-a)^3}$	$(A+A_1t+A_3t^2)e^{at}+K+K_1t$	$A=\frac{ag+3d}{a^4}, \quad A_1=-\frac{ag+2d}{a^3},$ $A_2=\frac{a^2+ag+d}{2a^2}, \quad K=-A,$ $K_1=-\frac{d}{a^3}$
55	$\frac{1}{p^2[(p-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at} \sin(\omega t+a)+K+K_1t$	$A=\frac{1}{\omega(a^2+\omega^2)}, \quad a=-2 \arctg \frac{\omega}{a},$ $K=\frac{2a}{(a^2+\omega^2)^2}, \quad K_1=\frac{1}{a^2+\omega^2},$
56	$\frac{p+d}{p^2[(p-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{[(a+d)^2+\omega^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)},$ $a=\arctg \frac{\omega}{a+d} - 2 \arctg \frac{\omega}{a},$ $K=\frac{a^2+\omega^2+2ad}{(a^2+\omega^2)^2}, \quad K_1=\frac{d}{a^2+\omega^2},$

## Продолжение табл. П 3.2

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
57	$\frac{p^2 + gp + d}{p^2[(p-a)^2 + \omega^2]}$		$A = \frac{[(a^2 - \omega^2 + ag + d)^2 + \omega^2(2a + g)^2]^{1/2}}{\omega(a^2 + \omega^2)},$ $a = \arctg \frac{\omega(2a + g)}{a^2 - \omega^2 + ag + d} - 2 \arctg \frac{\omega}{a}$ $K = \frac{(a^2 + \omega^2)g + 2ad}{(a^2 + \omega^2)^2}, \quad K_I = \frac{d}{a^2 + \omega^2},$
58	$\frac{1}{(p-b)^2[(p-a)^2 + \omega^2]}$	$Ae^{at} \sin(\omega t + a) + (B + B_I t)e^{bt}$	$A = \frac{1}{\omega[(a-b)^2 + \omega^2]},$ $a = -2 \arctg \frac{\omega}{a-b}$ $B = \frac{2(a-b)}{[(a-b)^2 + \omega^2]^2}, \quad B_I = \frac{1}{(a-b)^2 + \omega^2},$
59	$\frac{p+d}{(p-b)^2[(p-a)^2 + \omega^2]}$		$A = \frac{[(a+d)^2 + \omega^2]^{1/2}}{\omega[(a-b)^2 + \omega^2]},$ $a = \arctg \frac{\omega}{a+d} - 2 \arctg \frac{\omega}{a-b},$ $B = \frac{(a-b)^2 + \omega^2 + 2(a-b)(b+d)}{[(a-b)^2 + \omega^2]^2},$ $B_I = \frac{b+d}{(a-b)^2 + \omega^2}$
60	$\frac{p^2 + gp + d}{(p-b)^2[(p-a)^2 + \omega^2]}$		$A = \frac{[(a^2 - \omega^2 + ag + d)^2 + \omega^2(2a + g)^2]^{1/2}}{\omega[(a-b)^2 + \omega^2]},$ $a = \arctg \frac{\omega(2a + g)}{a^2 + \omega^2 + ag + d} - 2 \arctg \frac{\omega}{a-b},$ $B = \frac{[(a-b)^2 + \omega^2](2b + g) + 2(a-b)(b^2 + bg + d)}{[(a-b)^2 + \omega^2]^2},$ $B_I = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2 + \omega^2}$
61	$\frac{1}{[(p-a)^2 + \omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^2} e^{at} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	
62	$\frac{p-a}{[(p-a)^2 + \omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega} t e^{at} \sin \omega t$	

№	$F(p)$	$f(t) (t>0)$	Параметры
63	$\frac{(p-a)^2 - \omega^2}{[(p-a)^2 + \omega^2]^2}$	$te^{at} \cos \omega t$	

Каждая формула, приводимая в таблице, справедлива для многочленов  $D_1(s)$  и  $D(s)$  как с комплексными, так и с действительными коэффициентами. Наибольший практический интерес представляет последний случай; при этом корни многочленов действительные и/или комплексно сопряженные, а корни функции  $f(t)$  – действительные.

Заметим, что:  $(s-a)^2 + \omega^2 = [s - (a+i\omega)][s - (a-i\omega)]$  и

$K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \sin(\omega t + a)$ , где  $a = \arctg(K_2/K_1)$ .

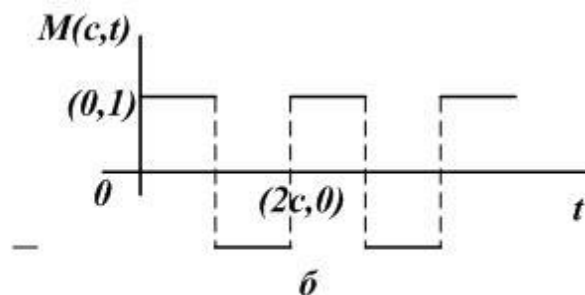
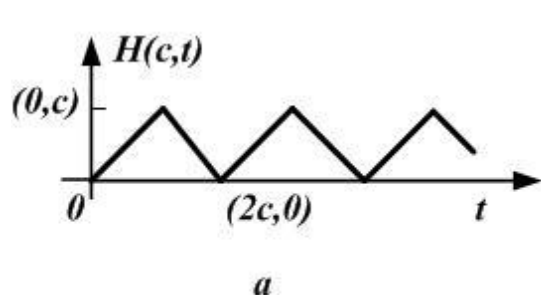


Рис. П2.1. Графики оригиналов к изображениям

## Приложение 3

### Теорема разложения (разложение Хевисайда)

Если изображение является рациональной алгебраической функцией, выраженной отношением двух многочленов

$$U(p) = \frac{N(p)}{M(p)},$$

то оригинал определяется как сумма вычетов по всем полюсам  $U(p)$ .

Заметим, что значения, обращающие в ноль знаменатель функции, называются ее полюсами

$$M(p) = 0 \Rightarrow p_1 \dots p_n.$$

Если все полюсы простые, то оригинал вычисляется следующим образом

$$u_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

В частном случае, если один из полюсов равен нулю  $p_1=0$ , то знаменатель можно представить в виде

$$M(p) = pM_1(p).$$

Оригинал для рассматриваемого частного случая определяется следующим образом

$$u_k(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{N(p_k)}{p_k M_1'(p_k)} e^{p_k t}.$$

**ОТВЕТЫ****Глава 1**

$$1.6. \quad i_{R1}(t) = 0,1 \sin(10^3 t + 87,1^\circ) - 8,7 \cdot 10^{-3} e^{-40000t} \text{ (A)} .$$

$$1.7. \quad i_1(t) = 1,2 \cdot 10^{-2} \sin(314t - 55,2^\circ) + 3,27 \cdot 10^{-2} e^{-1400t} \text{ (A)} .$$

$$1.8. \quad i_{R2}(t) = 8,3 \cdot 10^{-3} + 1,67 \cdot 10^{-2} e^{-600000t} \text{ (A)} .$$

$$1.9. \quad i_{R2}(t) = -0,75 - 0,25e^{-500t} \text{ (A)} .$$

$$1.10. \quad i_{R3}(t) = 5,4 \cdot 10^{-3} \sin(10^3 t - 83,38^\circ) - 6,33 \cdot 10^{-3} e^{-300t} + 3,53 \cdot 10^{-3} e^{-700t} \text{ (A)} .$$

$$1.11. \quad i_{R1}(t) = 0,18 - 0,182e^{-2200t} \text{ (A)} .$$

$$1.12. \quad i_C(t) = (4 \cos 500t - 4 \sin 500t) e^{-5000t} \text{ (A)} .$$

$$1.13. \quad i_{R3}(t) = 0,167 - 5,98 \cdot 10^{-2} e^{-192,3t} + 8,9 \cdot 10^{-4} e^{-21346,2t} \text{ (A)} .$$

$$1.14. \quad i_{R1}(t) = 0,16 \sin(100t - 63,7^\circ) + 0,1e^{-933,3t} + 6,2 \cdot 10^{-2} e^{-177,8t} \text{ (A)} .$$

**Глава 2**

$$2.6. \quad u_{R3}(t) = 11,428 e^{-428,57t} \text{ B.}$$

$$2.7. \quad u_{R1}(t) = 33,3 - 8,33 e^{-1500t} \text{ B.}$$

$$2.8. \quad u_{R3}(t) = 5 - 0,8 e^{-600t} \text{ B.}$$

$$2.9. \quad u_{R1}(t) = 0,667 + 0,213 e^{-300t} \text{ B.}$$

$$2.10. \quad i_{R2}(t) = 0,167 - 0,167e^{-1500t} \text{ A.}$$

$$2.11. \quad i_{R3}(t) = 0,1 + 0,1e^{-6666,67t} \text{ A.}$$

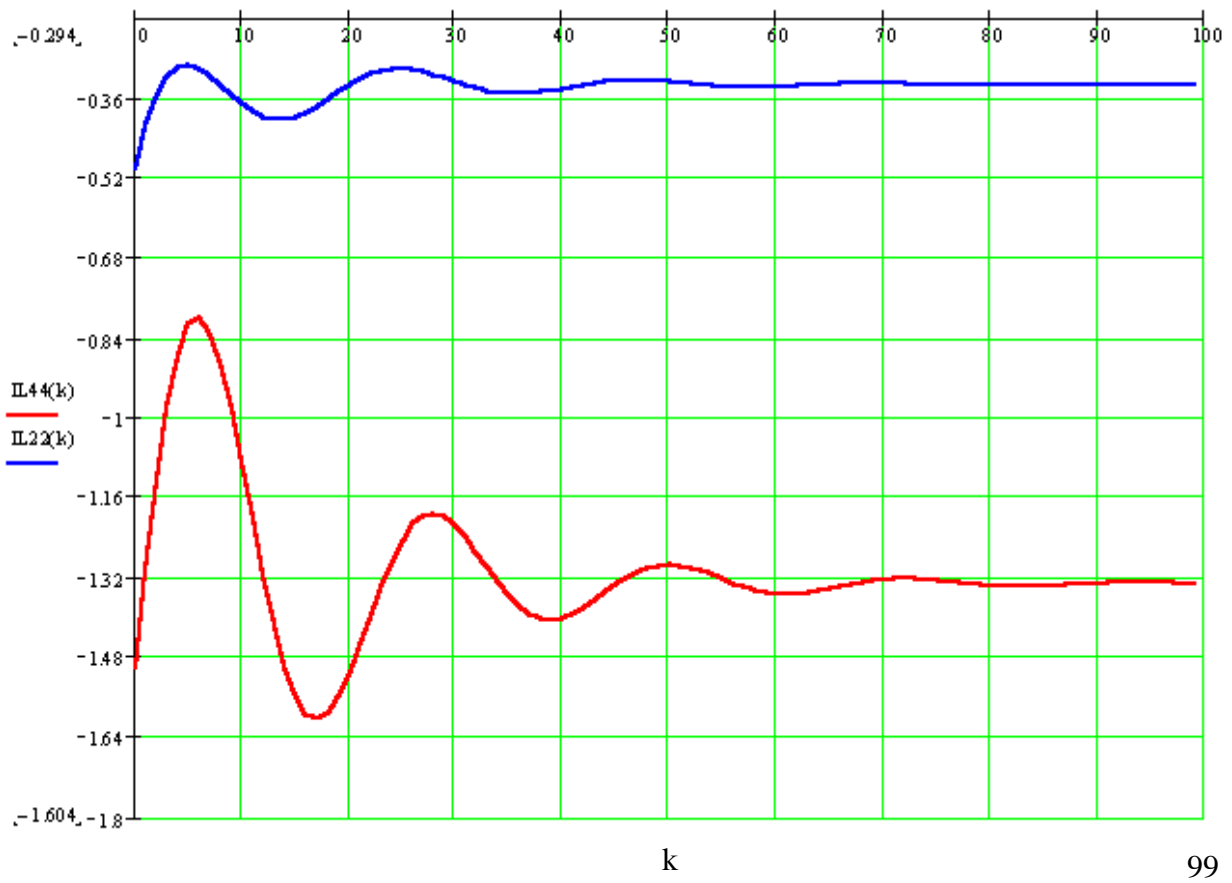
- 2.12.  $i_c(t) = -0,667 e^{-1333,3t} \text{ A.}$   
 2.13.  $u_{R2}(t) = -200 + 50 e^{-1000t} \text{ B.}$   
 2.14.  $i(t) = 0,09 + 0,02 e^{-42500t} \cos h(28394,5 t) \text{ A.}$   
 2.15.  $i(t) = 0,1 + 4,005 e^{-5 \cdot 10^8 t} \sin(9,987 \cdot 10^9 t) \text{ A.}$

### Глава 3

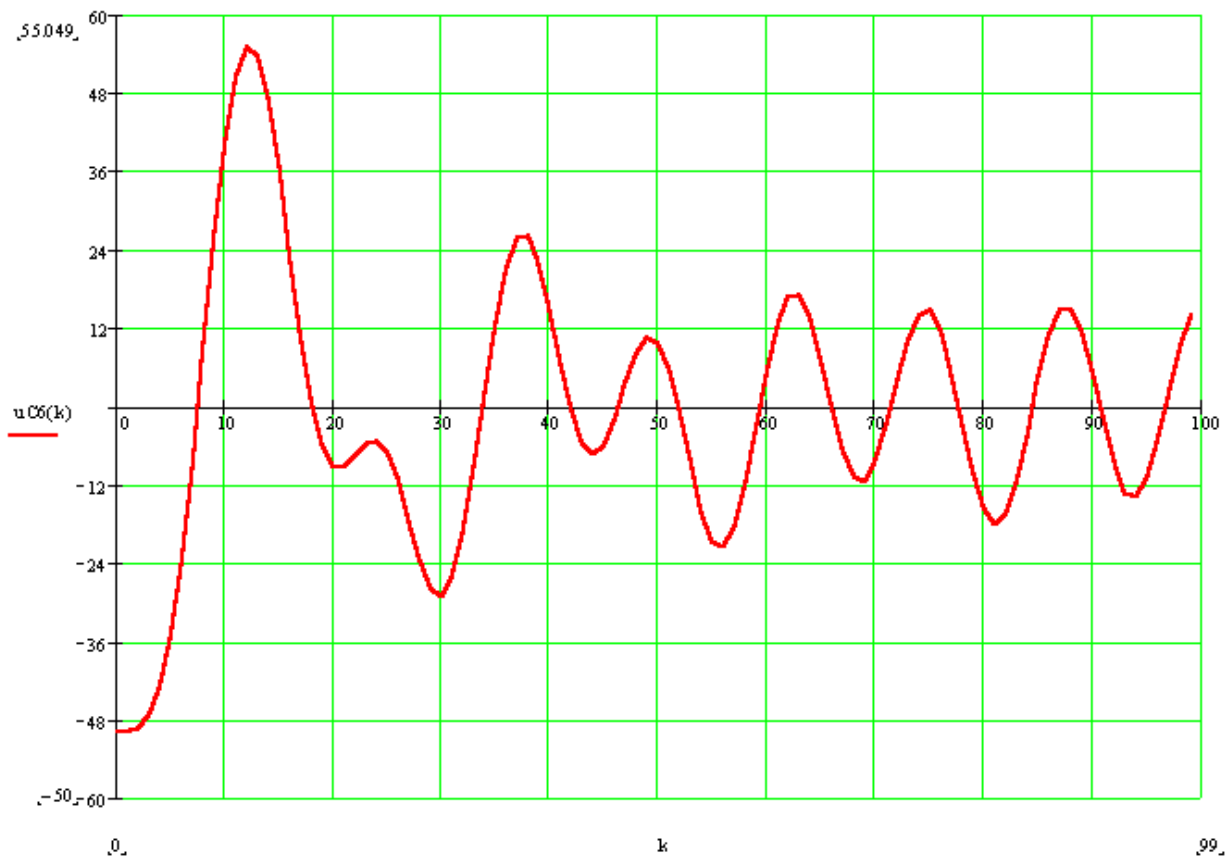
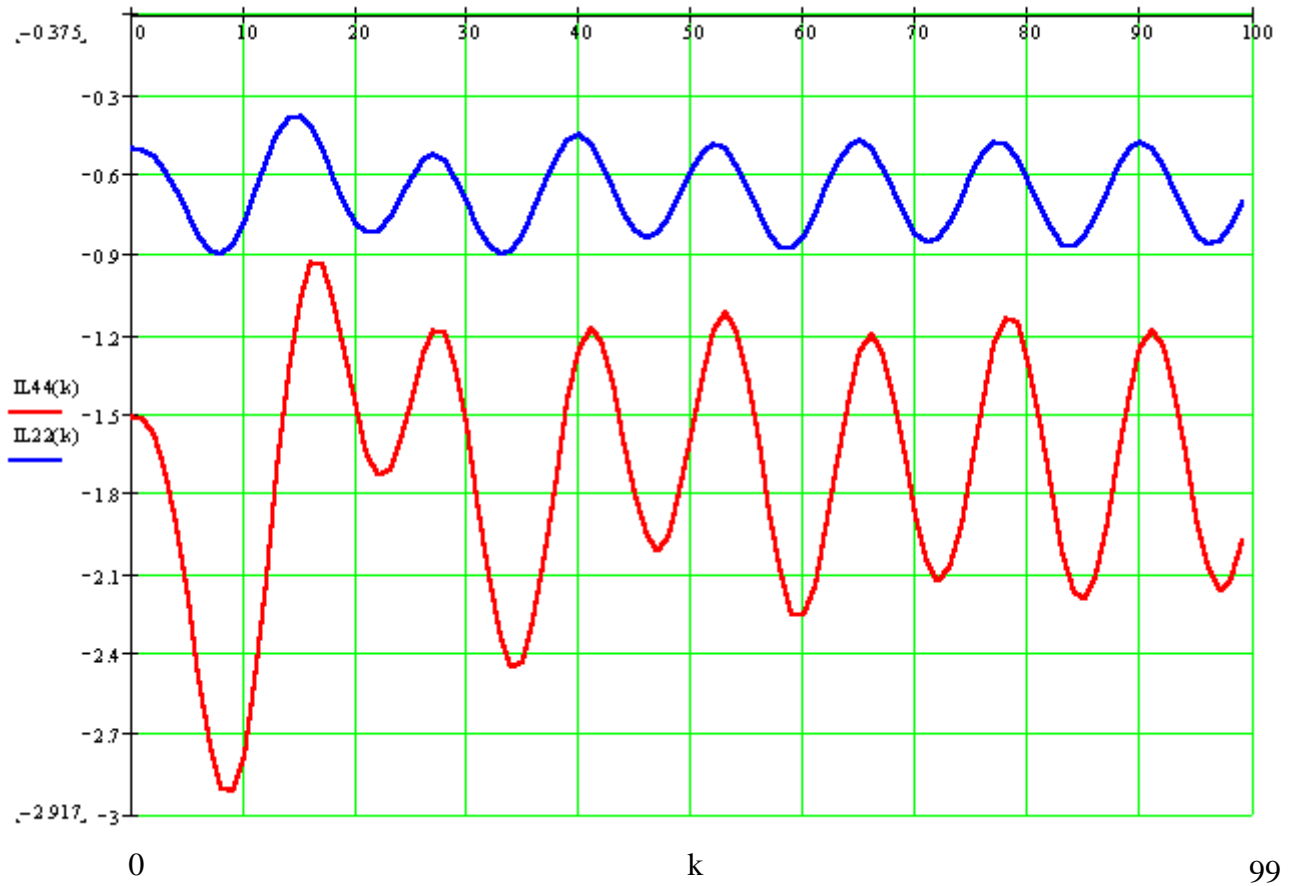
- 3.6.  $i_{II}(t) = -0,2 e^{-250t} + 0,2 \text{ A, } t \in [0; 10^3) \text{ с;}$   
 $i_{III}(t) = 0,0568 e^{-250t} \text{ A, } t \in [10^3; +\infty) \text{ с.}$
- 3.7.  $i_{CI}(t) = 0,05 - 0,05 e^{-667t} \text{ A, } t \in [0; 10^3) \text{ с;}$   
 $i_{CII}(t) = -0,182 e^{-667t} + 0,05 \text{ A, } t \in [10^3; 2 \cdot 10^{-3}) \text{ с;}$   
 $i_{CIII}(t) = 0,1078 e^{-667t} \text{ A, } t \in [2 \cdot 10^{-3}; +\infty) \text{ с.}$
- 3.8.  $u_{LI}(t) = 3,558 \sin 1571t + 2,265 \cos 1571t - 2,265 e^{-1000t} \text{ B,}$   
 $t \in [0; 2 \cdot 10^{-3}) \text{ с;}$   
 $u_{LI}(t) = 19,001 e^{-1000t} \text{ B, } t \in [2 \cdot 10^{-3}; +\infty) \text{ с.}$
- 3.9.  $u_{CI}(t) = 50 - 50 e^{-500t} - 16665t \text{ B, } t \in [0; 10^3) \text{ с;}$   
 $u_{CII}(t) = 32,44 e^{-500t} - 16665t \text{ B, } t \in [10^3; 2 \cdot 10^{-3}) \text{ с;}$   
 $u_{CIII}(t) = -12,86 e^{-500t} \text{ B, } t \in [2 \cdot 10^{-3}; +\infty) \text{ с.}$
- 3.10.  $i_{LI}(t) = 0,11689 e^{-642,5t} - 0,11689 + 75,1t \text{ A, } t \in [0; 10^3) \text{ с;}$   
 $i_{LII}(t) = -0,3275 e^{-642,5t} - 75,1t + 0,2671 \text{ A, } t \in [10^3; 2 \cdot 10^{-3}) \text{ с;}$   
 $i_{LIII}(t) = 0,0947 e^{-642,5t} \text{ A, } t \in [2 \cdot 10^{-3}; +\infty) \text{ с.}$

### Глава 4

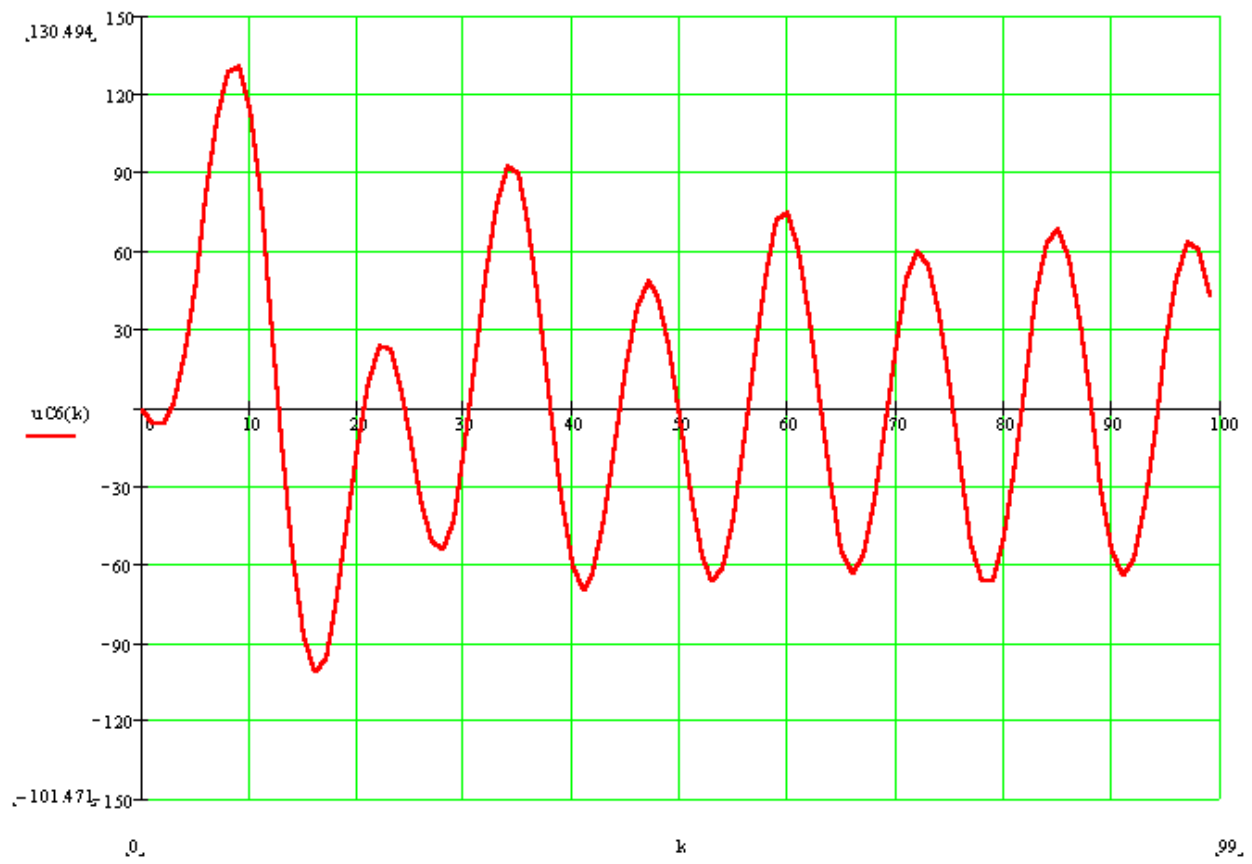
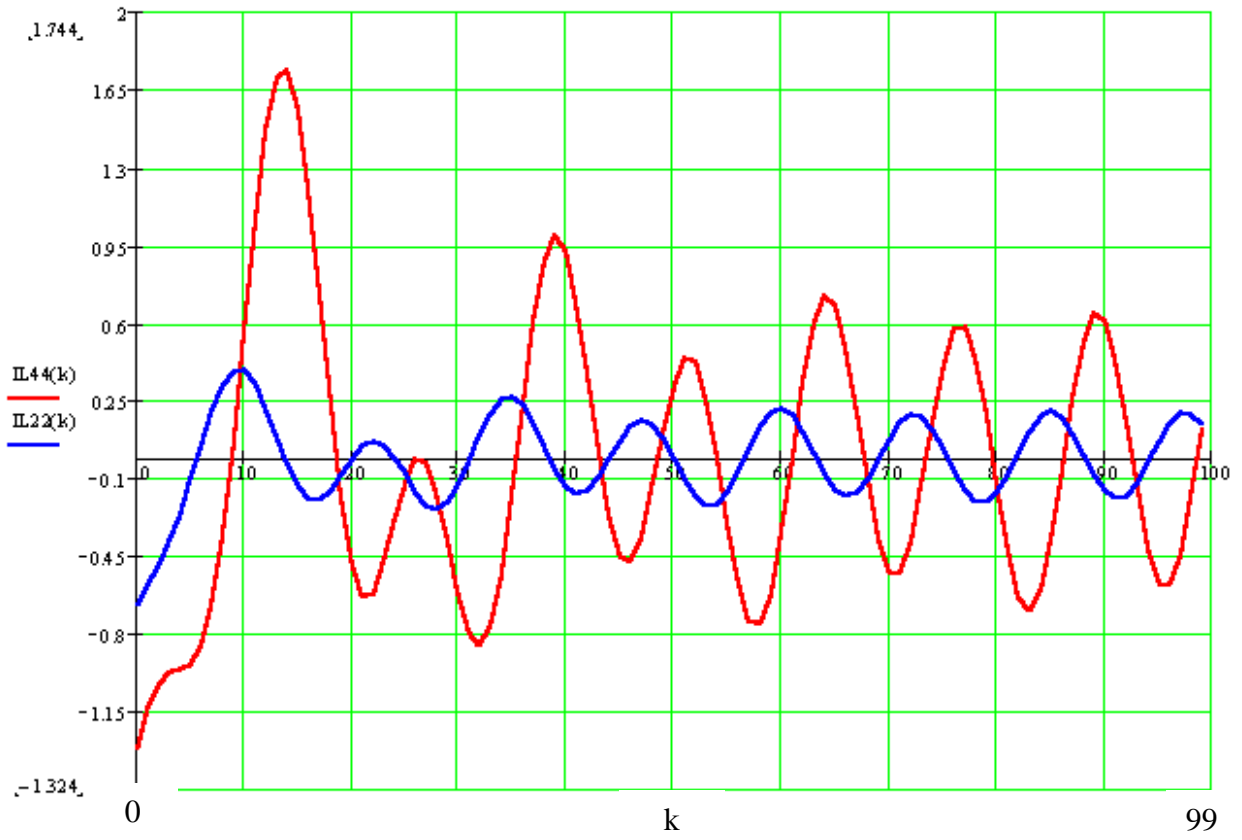
4.4.



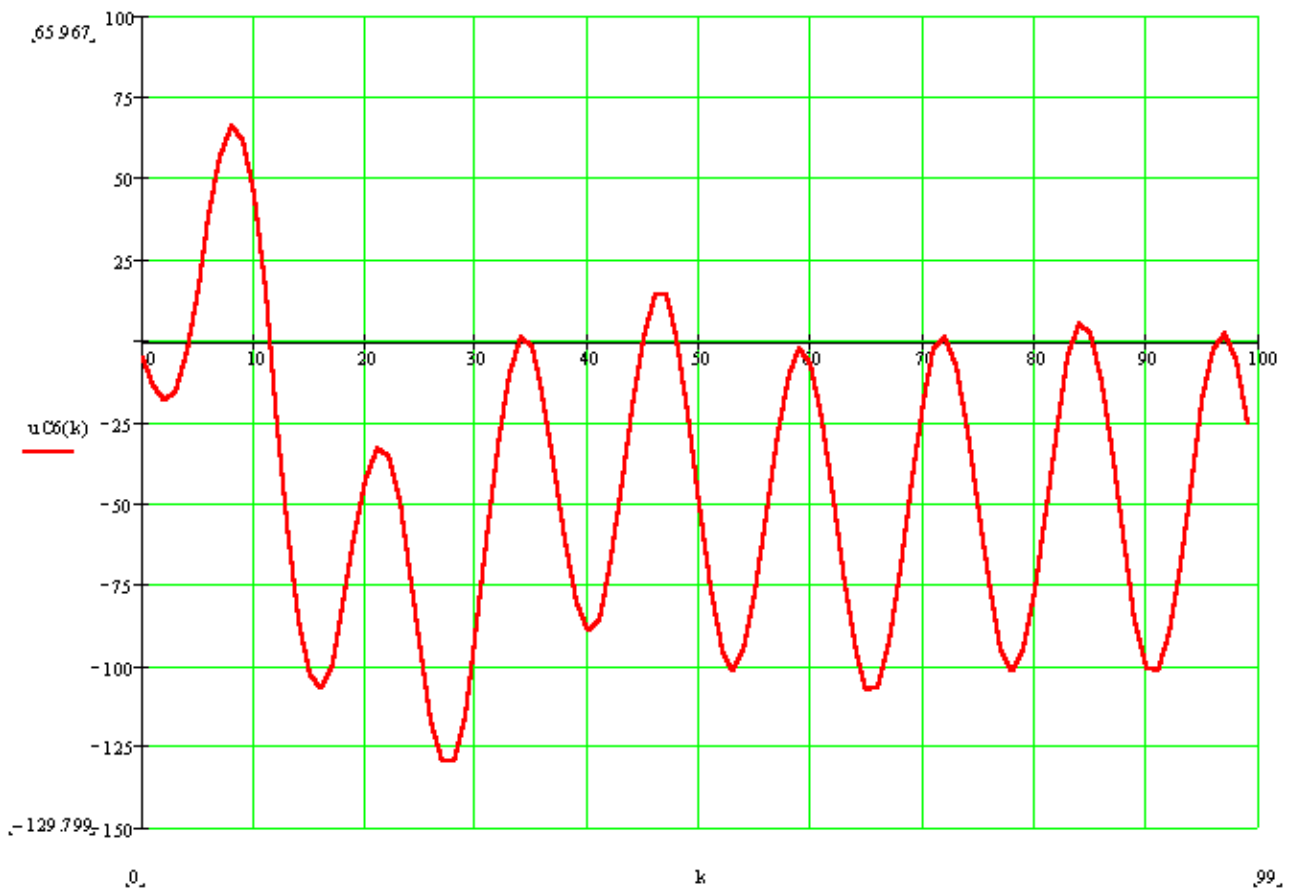
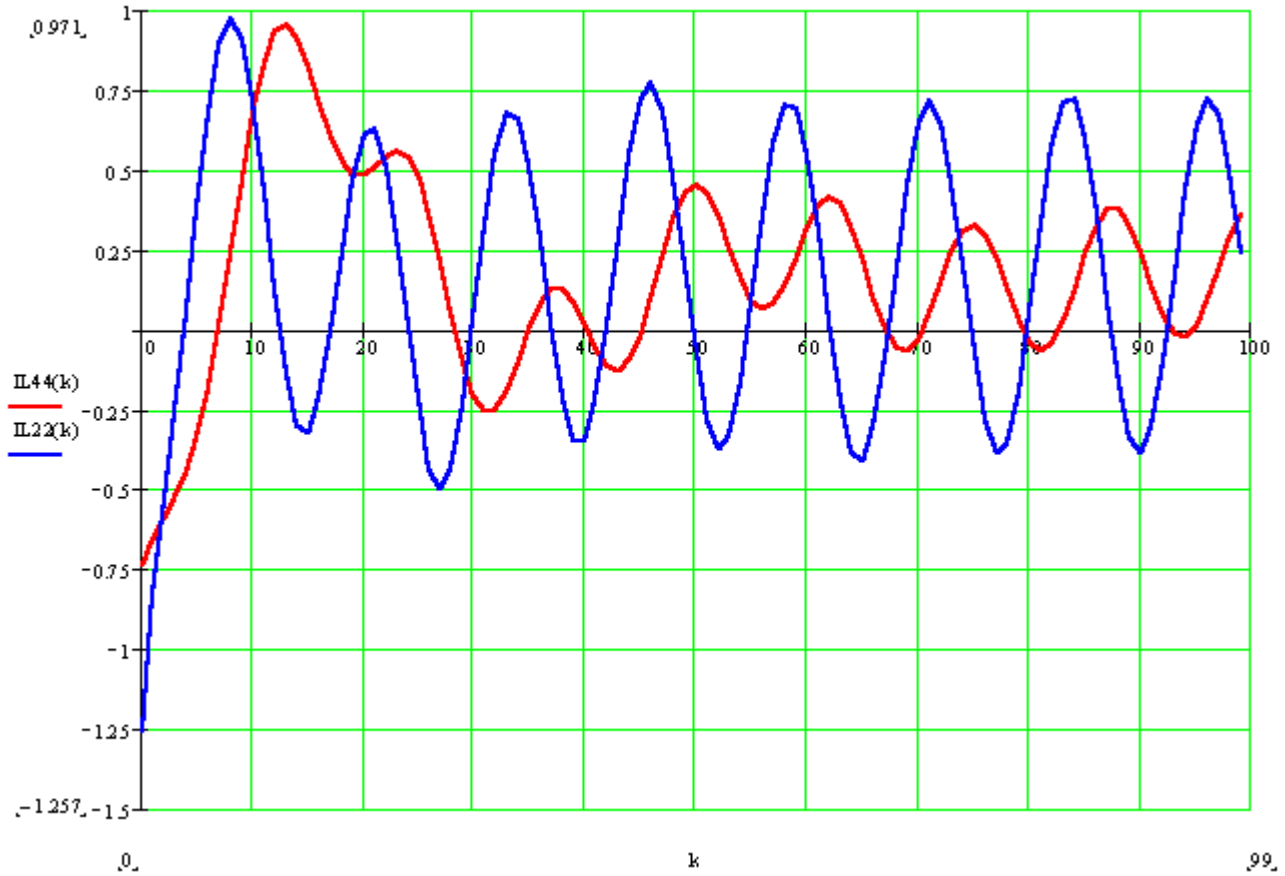
## 4.5.



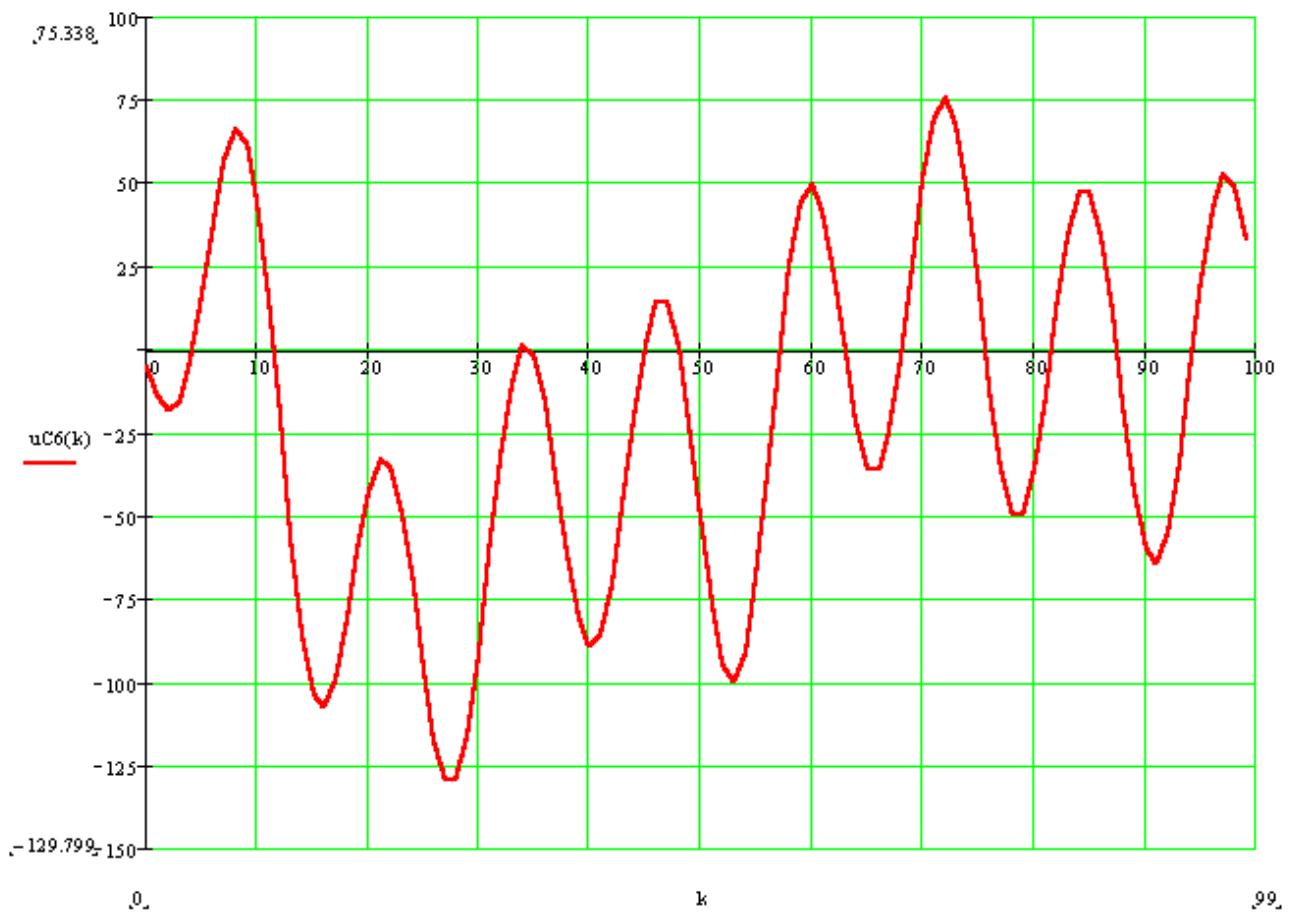
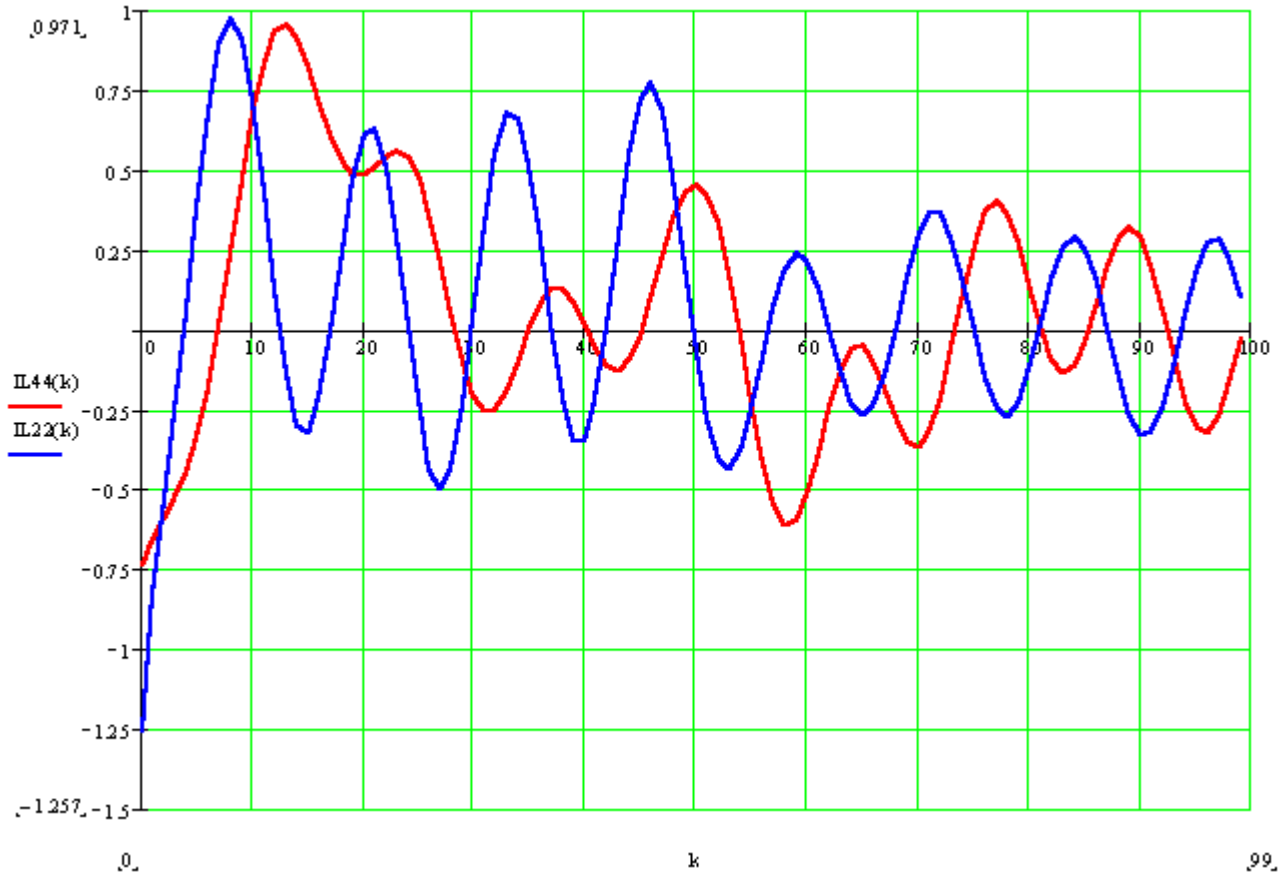
## 4.6.



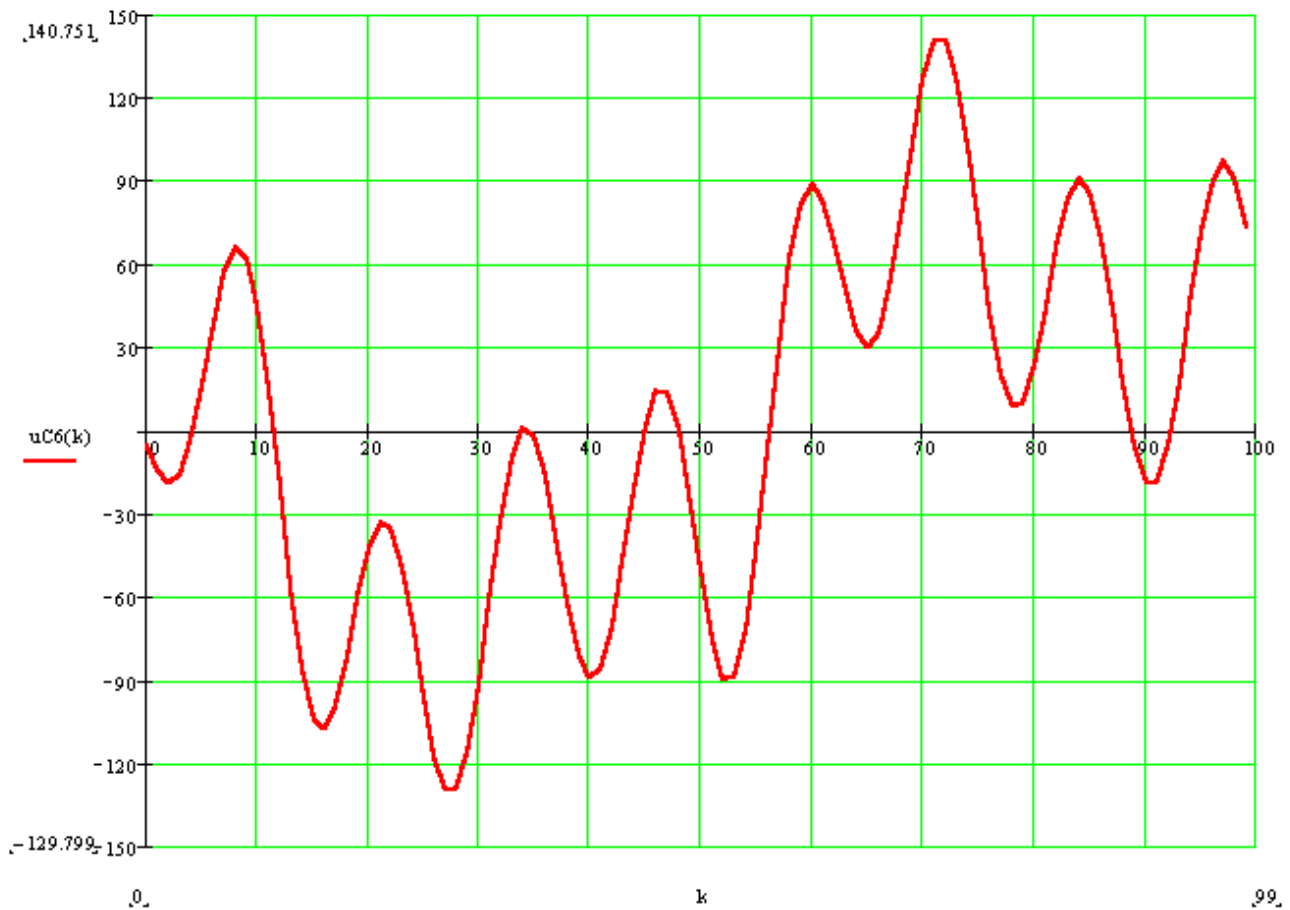
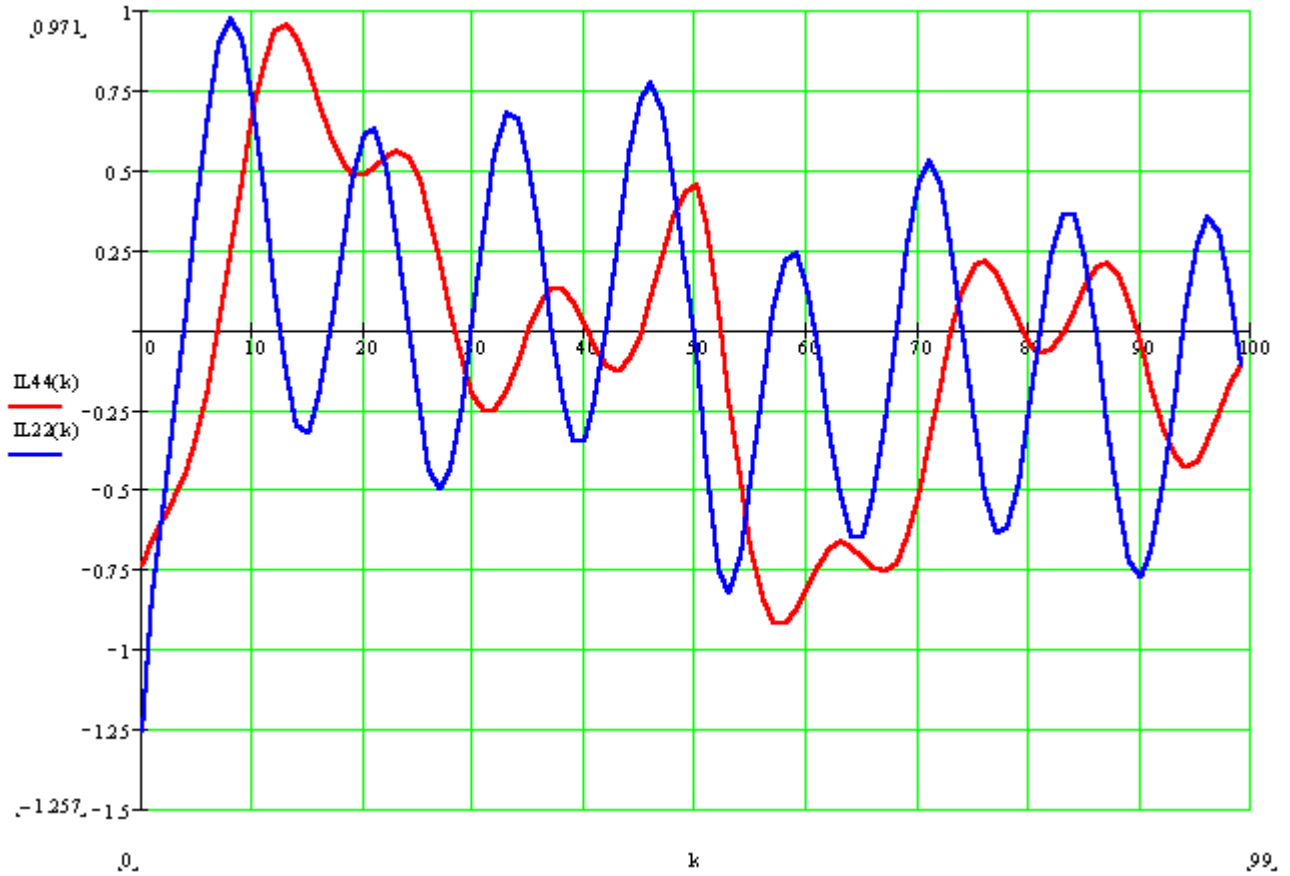
## 4.7.



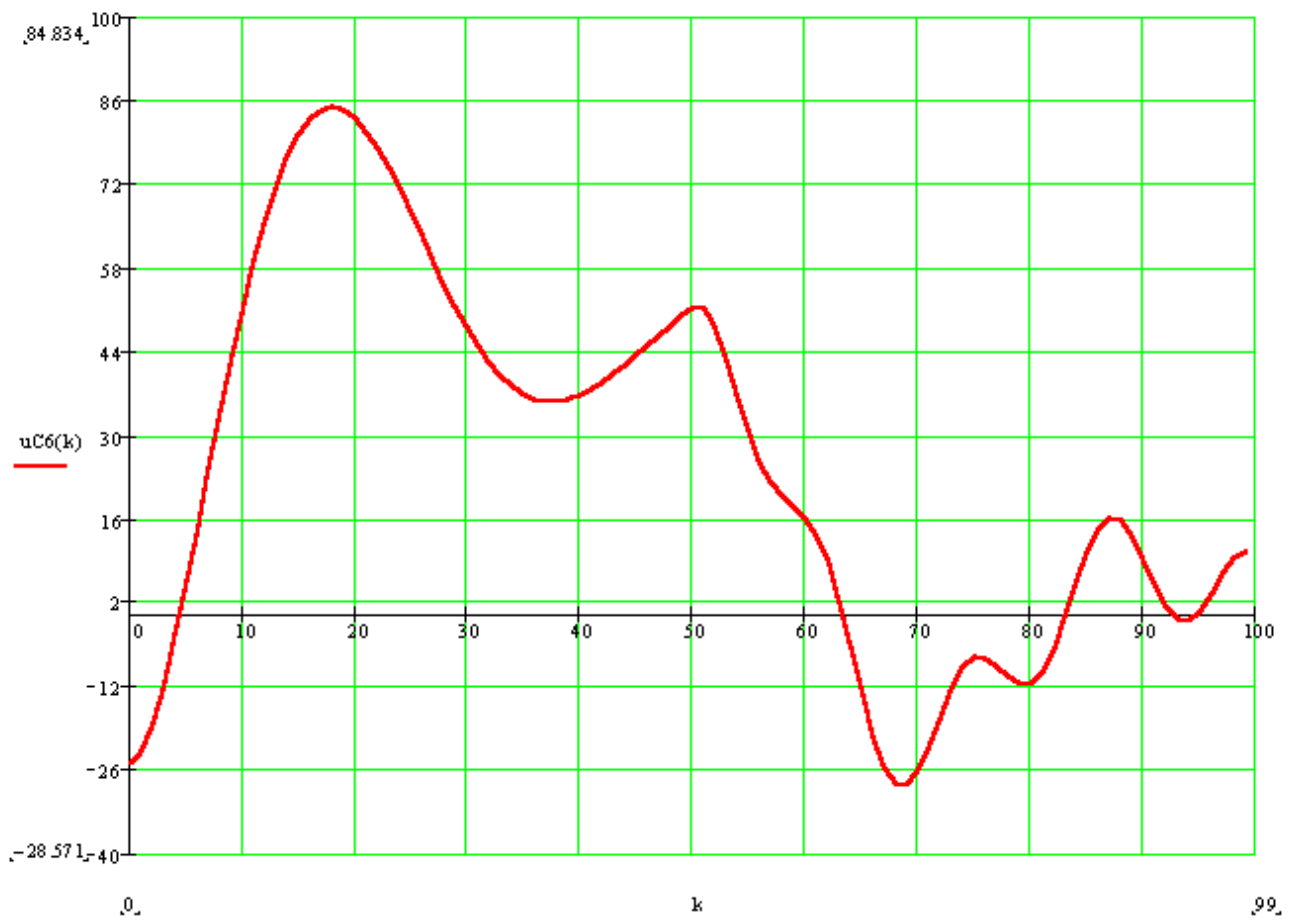
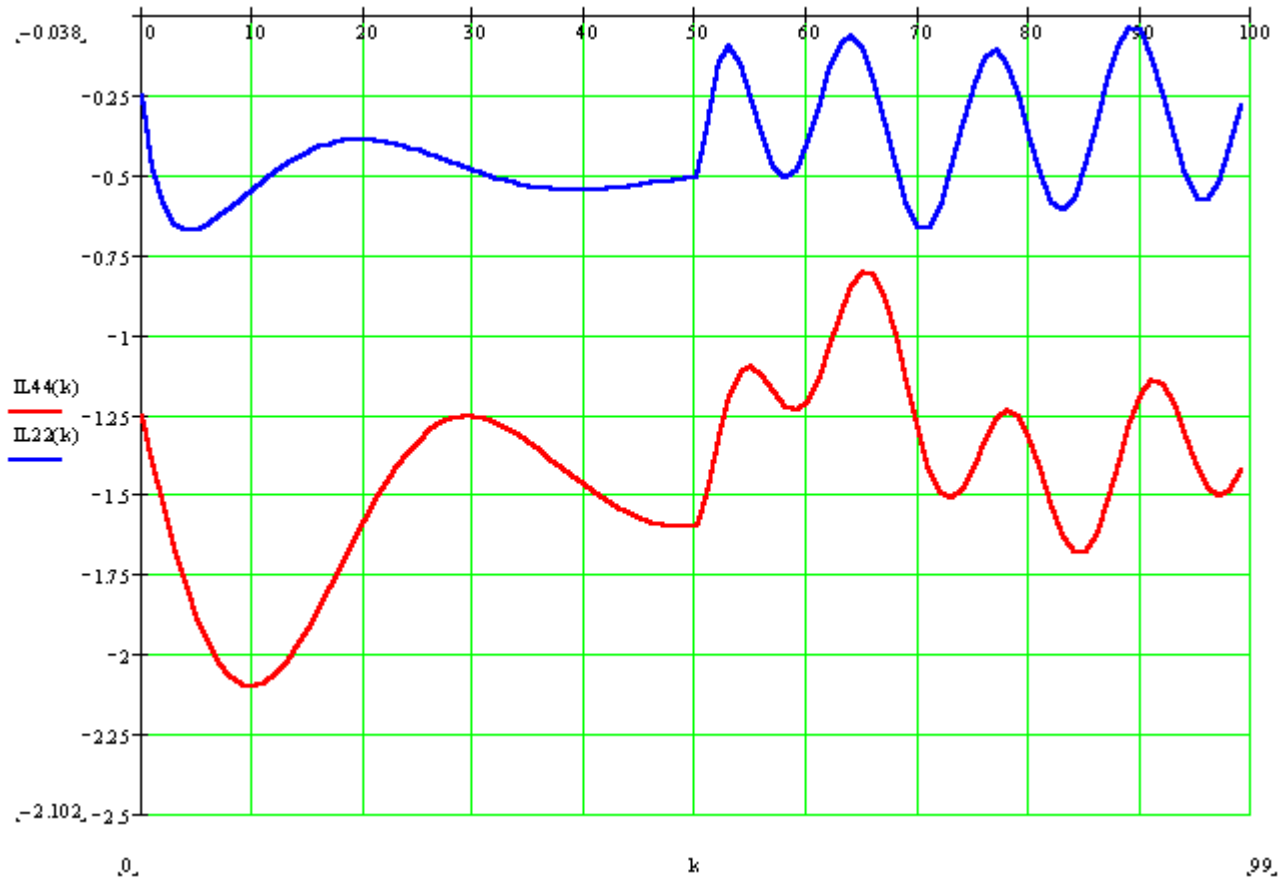
## 4.8.



## 4.9.



## 4.10.



## Глава 5

5.3.  $\underline{Z} = 5 + j10 \text{ кОм}; i = \sqrt{2} \cdot 0,894 \cos(10^6 t - 63,26^\circ) \text{ mA}; P_{\text{ucm}} =$   
 $= P_{\text{ном}} = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ ВА}.$

5.4.  $\dot{I}_1 = 1,0e^{j25^\circ} \text{ A}; \dot{U}_1 = 150e^{j75^\circ} \text{ В}.$

5.5.  $M = 1,52 \text{ мкГн}.$

5.6.  $\dot{I}_1 = 3,48e^{j64,48^\circ} \text{ A}; \dot{I}_2 = 3,2e^{-j100,43^\circ} \text{ A}; \dot{I}_3 = 6,63e^{j71,87^\circ} \text{ A}.$

5.7.  $X_{c1} = 22 \text{ Ом}; X_{c2} = 31 \text{ Ом}.$

5.8.  $\omega_0 = 3,849 \cdot 10^4 \text{ рад/с}.$

5.9.  $C = 4,746 \cdot 10^{-7} \text{ мкФ}.$

5.10.  $M = 6,768 \cdot 10^{-4} \text{ мГн}.$

5.11.  $\dot{I}_1 = -2,668e^{-j179,45^\circ} \text{ A}; \dot{U}_1 = 304,91e^{j136,08^\circ} \text{ В}.$

5.12.  $\underline{Z}_{\text{ex}} = 18,917j \text{ Ом}; X_c = 20,81 \text{ Ом}.$

5.13.  $\dot{U}_2 = 13,892e^{-j123,62^\circ} \text{ В}.$

5.14. а) 1 и 3, 2 и 4; б) 1 и 3, 2 и 4; в) 1 и 3, 2 и 4; г) 1 и 4, 3 и 6, 1 и 6.

5.15. а)  $R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - 2j\omega M \dot{I} + j\omega \dot{I} + R_2 \dot{I} = \dot{E}.$

б) 
$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - R \dot{I}_3 = 0; \\ j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + R \dot{I}_3 + \dot{I}_1 / j\omega C = E. \end{cases}$$

5.16.  $k_{\text{CB}} = 0,5.$

5.17.  $\dot{U}_{12} = 78e^{j13,2^\circ} \text{ В}; \dot{I}_1 = 10e^{-j36,5^\circ} \text{ А}.$

5.18.  $\dot{I}_1 = 8 - j1 \text{ А}; \dot{I}_2 = 6 - j2 \text{ А}.$

5.19.  $C = 32,4 \text{ нФ}; \dot{I} = 1,42 \text{ mA};$

$\dot{I}_1 = 0,75 + j0,17 \text{ mA}; \dot{I}_2 = j0,67 - j0,17 \text{ mA}.$

5.20.  $C = 1,1 \text{ мкФ}; \dot{I}_1 = j17,6 \text{ mA};$

5.21.  $\dot{I}_1 = 1,24e^{-j71,4^\circ} \text{ А}; \dot{I}_2 = 0,81e^{-j65,5^\circ} \text{ А}; \dot{I}_3 = 0,44e^{-j82,2^\circ} \text{ А}.$

**5.22.**  $\dot{I}_1 = 2,0e^{-j73,3^\circ}$  A;  $\dot{I}_2 = 0,89e^{-j63,3^\circ}$  A;  $\dot{I}_3 = 0,8e^{-j36,5^\circ}$  A;  
 $\dot{I}_4 = 1,13e^{-j82^\circ}$  A.

### Глава 6

**6.2.** 
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0,611 - j0,14 & 10 - j150 \\ 7,547 \cdot 10^{-4} - j2,642 \cdot 10^{-3} & 1 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 10 - j150 \\ 7,547 \cdot 10^{-4} - j2,642 \cdot 10^{-3} & 0,611 - j0,14 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{G}] = \begin{bmatrix} 2,111 \cdot 10^{-3} - j3,839 \cdot 10^{-3} & -1,555 - j0,355 \\ 1,555 + j0,355 & 68,81 - j229,655 \end{bmatrix}.$$

**6.3.** 
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 100 + j120 \\ 1,597 \cdot 10^{-4} + j3,994 \cdot 10^{-3} & 0,537 + j0,419 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} 224,276 + 48,69 & 1,159 - j0,903 \\ -1,159 + j0,903 & 3,793 \cdot 10^{-3} + j4,483 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix};$$

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 10 - j250 & 10 - j250 \\ 10 - j250 & 110 - j130 \end{bmatrix}.$$

**6.4.** 
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1,616 - j0,788 & 3,014 \cdot 10^3 + j1,884 \cdot 10^3 \\ 1,2 \cdot 10^{-3} - j1,6 \cdot 10^{-3} & 4,44 + j0,58 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} 721,995 + j330,1 & 0,221 + j0,029 \\ -0,221 + j0,029 & 2,195 \cdot 10^{-4} - j3,89 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix};$$

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} 1,146 \cdot 10^{-3} - j5,238 \cdot 10^{-4} & -2,385 \cdot 10^{-1} + j1,491 \cdot 10^{-4} \\ -2,385 \cdot 10^{-1} + j1,491 \cdot 10^{-4} & 2,68 \cdot 10^{-4} - j4,29 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

**6.6.** 
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0,297 - j0,216 & 43,243 - j140,541 \\ -1,081 \cdot 10^{-3} + j6,486 \cdot 10^{-3} & 0,297 - j0,216 \end{bmatrix};$$

$$\underline{Z}_{C1} = 145,535 + j34,356 \text{ Ом}, \underline{g} = 0,224 - j1,277.$$

$$6.7. \quad [A] = \begin{bmatrix} -1,222 & -j111,111 \\ j4,444 \cdot 10^{-3} & -1,222 \end{bmatrix};$$

$$\underline{Z}_{C1} = j158,114 \text{ Ом}, \underline{g} = 0,655 + j3,142.$$

$$6.8. \quad [A] = \begin{bmatrix} 0,6 + j0,8 & 240 + j120 \\ -2,667 \cdot 10^{-3} + j5,333 \cdot 10^{-3} & 0,6 + j0,8 \end{bmatrix};$$

$$\underline{Z}_{C1} = 150 - j150 \text{ Ом}; \underline{g} = 0,805 + j1,107.$$

$$6.9. \quad \underline{Z}_{C1} = 65,134 + j519,67 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{C2} = 0,092 - j0,043 \text{ Ом}; \underline{g} = 0,441.$$

$$6.10. \quad \underline{Z}_{C1} = 70,711 + j70,711 \text{ Ом}; \underline{Z}_{C2} = 70,711 \text{ Ом};$$

$$\underline{g} = 0,22 + j0,393.$$

$$6.11. \quad \underline{Z}_{C1} = 102,222 - j267,374 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{C2} = 0,112 - j0,148 \text{ Ом}, \underline{g} = 0,145 - j0,619.$$

$$6.13. \quad I_A = 22,215 \text{ А}.$$

$$6.14. \quad I_A = 198,655 \text{ А}.$$

$$6.15. \quad I_A = 303,202 \text{ А}.$$

$$6.17. \quad L = 0,016 \text{ Гн}; = 150 \text{ мкФ (стандартное значение)}, C = 159,155 \text{ мкФ (расчетное значение)}.$$

$$6.18. \quad L_1 = 0,318 \text{ Гн}; L_2 = 0,08 \text{ Гн}; C_1 = 9,979 \text{ мкФ}, C_2 = 15,915 \text{ мкФ}.$$

$$6.19. \quad L_1 = 21 \text{ мГн}; L_2 = 7,958 \text{ мГн}; C_1 = 39,789 \text{ мкФ}, C_2 = 106,103 \text{ мкФ}.$$

$$6.20. \quad L_1 = 9,095 \text{ мГн}; L_2 = 28 \text{ мГн}; C_1 = 139,261 \text{ мкФ}, C_2 = 45,473 \text{ мкФ}.$$

$$6.21. \quad L = 2,122 \text{ мГн}; C = 132,629 \text{ мкФ}.$$

$$6.22. \quad L_1 = 2,812 \text{ мГн}; L_2 = 11 \text{ мГн}; C_1 = 358,099 \text{ мкФ}, C_2 = 88,419 \text{ мкФ}.$$

$$6.23. \quad L = 0,0021 \text{ Гн}; C = 132,269 \text{ мкФ}.$$

**6.24.**  $L_1 = 186$  мГн;  $L_2 = 57$  мГн;  $C_1 = 11,368$  мкФ;  $C_2 = 37,136$  мкФ.

Бекетова Ирина Олеговна  
Горемыкин Евгений Викторович  
Зинченко Людмила Анатольевна  
Левина Марина Геннадьевна  
Полуянович Николай Константинович  
Рассоха Дмитрий Павлович

## **СБОРНИК ЗАДАЧ**

*по курсу*

*«Теоретические основы электротехники»*

Часть 2

Учебное пособие

Ответственный за выпуск	Бекетова И.О.
Редактор	Маныч Э.И.
Корректор	Надточий З.И.

ЛР №020565 от 23.06.2004 г.

Подписано к печати

Формат 60x84 1.16.2004

Офсетная печать

Бумага офсетная

Усл. п.л.- 11,5

Уч. – изд.л.-12,0

«С»

---

Издательство Таганрогского государственного  
Радиотехнического университета  
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44  
Типография Таганрогского государственного  
радиотехнического университета  
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1