ББК 74.262.22
Ф 50

Рецензент:

Авторский коллектив:
Л. М. Монастырский, А. С. Богатин, В. Г. Крыштоп, А. Л. Цветянский, В. П. Филиппенко

Физика. Олимпиады Учебно-методическое пособие. — Ростов-на-Дону. Легион, 2009. — ??? с.

ISBN 978-5-902806-84-4

ББК 74.262.22

ISBN 978-5-902806-84-4

© Издательство «Легион», 2009

Оглавление

Предисловие авторов **4**

Глава 1 Школьные олимпиады **10**
§1. Механика 10
§2. Молекулярная физика 21
§3. Электродинамика 26

Глава 2 Муниципальные олимпиады **32**
§1. Механика 32
§2. Молекулярная физика 92
§3. Электродинамика 113
§4. Оптика 139

Глава 3 Региональные олимпиады **148**
§1. Механика 148
§2. Молекулярная физика 172
§3. Электродинамика 183
§4. Оптика 190

Глава 4 Эксперимент **192**
§1. Наблюдаемые явления 192
§2. Экспериментальные задания 196

Глава 5 Универсиада физического факультета **202**
§1. Механика 202
§2. Молекулярная физика 209
§3. Электродинамика 213
§4. Оптика 219

Предисловие авторов

Талантливые дети являют собой великое общечеловеческое богатство, бесценное национальное достояние, составляют тот ресурс, из которого рекрутируются когорты национальной элиты. Сам факт их существования, если создать для них должные условия, гарантирует человечеству безопасное и достойное бытие. Очень трудно находить этих детей, выделять их из общей массы. Еще труднее обеспечить соответствующее их предназначению образование и воспитание, поскольку в этом случае необходимо принимать во внимание прежде всего интересы отдельной личности, индивидуальные цели. По своей сути подготовка элиты — это развитие ярких индивидуальностей, которые с самого начала жизненного пути демонстрируют стремление к удовлетворению познавательных потребностей и из которых при правильной образовательной практике вырастают общественно полезные деятели.

Сложно обстоит дело с одобрением и стимулированием одаренности в области фундаментальных наук. Дети, особенно подростки, тянущиеся к наукам, фанатично отдающие свое время и энергию образовательным усилиям, выглядят дико в глазах своих сверстников, часто в глазах родителей, иногда и в глазах учителей. Интересы общества требуют специальных мер поддержки одаренных молодых людей повсюду, где бы они не обнаруживались. Важно, чтобы не только сами дети стремились к источнику света, но чтобы их родители и школа и общество и власть видели, что путь этот светел и перспективен. Одна из важных вех на этом пути вовлечение таких детей в олимпиадное движение. Роль олимпиадного движения в создании

соответствующего психологического климата очевидна.

Олимпиадное движение в России имеет многолетнюю историю. Начало Всероссийских предметных олимпиад в их современном виде связано со становлением России как суверенного государства в 1991 году. Однако история образовательного олимпийского движения в России начинается существенно раньше. Еще в 19 веке "Олимпиады для учащейся молодежи"проводило Астрономическое общество Российской Империи. История олимпиадного движения позволяет увидеть, как расставлялись акценты в системе образования России на протяжении более чем полувека. По истории олимпиадного движения можно проследить, какие учебные предметы считались главными. Эта история отражает эволюцию подходов к определению содержания образования в средней школе. В 1934 году по инициативе выдающегося математика Б.Н.Делоне в Ленинграде была организована первая математическая олимпиада, с тех пор она стала традиционной. В 1938 году Московский университет провел первую олимпиаду по физике. Олимпиады проходили ежегодно и завоевали популярность. Сразу после Великой отечественной войны олимпиады возродились, но проходили только в больших университетских городах. В 1964 году Министр просвещения РСФСР М.А.Прокофьев, химик, основатель кафедры химии природных соединений химфака МГУ, подписал приказ об утверждении государственной системы предметных олимпиад школьников. Это дало мощный толчок развитию олимпиадного движения. С 1967 года ежегодно организовывались Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады школьников. Их победители участвовали в международных олимпиадах. Международные олимпиады ведут отсчет с 1959 года, когда по инициативе Румынского математического и физического общества была проведена первая Международная математическая олимпиада.

Чуть больше года назад при поддержке Минобрнауки России, Российской академии наук и Российского союза ректоров был образован Российский совет олимпиад школьников. Возглавил совет ректор МГУ, президент Российского союза ректоров, вице-президент РАН, академик В.А. Садовничий. Задача совета олимпиад сделать олимпиадное движение национально значимым и системным. Совет, состоящий из ученых, представителей культуры . известных общественных деятелей своей совестью будет гарантировать объективность отбора талантливых людей по стране. Идея олимпиад не является противопоставлением ЕГЭ, а важное добавление к нему. Усредненным способом талантливых ребят не отличишь, их надо искать специальным инструментом. Олимпиада и есть инструмент такого поиска. В принятых Минобрнауки Правилах приема граждан в государственные и муниципальные образовательные учреждения высшего профессионального образования на 2009/2010 учебный год говорится, что результаты победителей и призеров заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников, членов сборных команд Российской Федерации, участвовавших в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам признаются вузами как имеющие высший балл («100» баллов)по этим общеобразовательным предметам.

Каковы же цели и задачи олимпиад?

— пропаганда научных знаний, развитие у учащегося интереса к научной деятельности, углубленному изучению предмета;

— создание условий для выявления одаренных детей, их дальнейшего интеллектуального роста, участие одаренных детей в областных, Всероссийских, международных олимпиадах;

— активизация работы научных обществ и других объединений учащихся.

Что представляют собой олимпиадные задачи по физике? Это задачи повышенной трудности. Такие задачи предлагаются школьникам на олимпиадах различного уровня. Знаний школьников по физике и математике, содержащихся в стандартных школьных курсах, должно быть достаточно для решения таких задач. Трудность задач связана с необходимостью чувствовать предлагаемое явление, понимать какие из изученных законов, надо применять в предложенных ситуациях. Можно привести некоторую классификацию олимпиадных задач.

Задачи на применение формул. Может оказаться, что какая-либо тема очень проста с точки зрения физики, ее изучают в школе очень подробно, на множестве примеров и со множеством простых формул. При этом учащийся зачастую не понимает, какие именно формулы работают

в рассматриваемой ситуации: после разбора ситуации и записи нужных уравнений задача решается быстро. Трудность заключается в прочувствовании ситуации, и ее адекватном математическом описании.

Задачи на физический смысл и применимость законов. Как правило, некоторые физические законы и соотношения выполняются только при соблюдении некоторых условий. Зачастую школьник забывает эти условия и помнит только некоторые формулы. Подобные задачи как раз и являются задачами на проверку того, как школьники понимают физический смысл и границы применимости законов. Часто такие задачи формулируются в виде парадокса. От школьников требуется его распутать.

Задачи, в которых почти ничего не дано (непоставленные задачи). Такие задачи встречаются довольно часто. Задачи легко ставят школьника в тупик. Как решать, если нет части казалось бы необходимых данных? Метод решения стандартен. В начале решения надо ввести все необходимые величины. Они не даны, ответ выражать через них нельзя, но ничто не мешает использовать эти величины в процессе решения. Если условие сформулировано верно, введенные величины к моменту получения ответа сокращаются.

Задачи, требующие почувствовать явление целиком. В некоторых задачах идет речь о нестандартных ситуациях. Часто для решения таких задач требуется в деталях представить, что происходит, что для ситуации существенно, а что нет. При попытке справиться с задачей пошагово, решение может оказаться весьма громоздким, в нем легко допустить ошибки. Решать такие задачи рациональным путем учащийся научается после прорешивания большого количества задач и приобретения определенного опыта.

Задачи, звучащие, как передний край науки. Некоторые задачи современной физики, удается сформулировать на школьном уровне. Формулировки задач могут содержать слова, выходящие за рамки школьного курса, однако методы решения опираются только на школьные навыки. Единственная трудность здесь — не бояться новых терминов, легко включаться в нешкольную физическую систему.

Согласно Положению о Всероссийских физических олимпиадах, они проводятся в четыре этапа.

Первый этап — школьный этап организуется учителями.

Второй этап — муниципальные олимпиады. Он проводится по заданиям, составленным областными (краевыми) оргкомитетами олимпиад.

Третий этап — региональные олимпиады. Базовый комплект заданий готовит методическая комиссия при Центральном оргкомитете.

Четвертый этап — Всероссийская олимпиада, заключительный этап. В нём участвуют победители региональных олимпиад.

В предлагаемом вашему вниманию сборнике олимпиадных задач приведены задачи из числа тех, которые предлагались за последние 10 лет школьникам 8 — 11 классах на городских (Ростов-на-Дону), региональных (Ростовская область), зональных (более 20 территорий РФ) олимпиадах, олимпиадах физического факультета РГУ. При этом задачи снабжены вариантами возможных решений, в которых особое внимание уделяется физике обсуждаемых процессов.

В заключение авторы сборника желают школьникам, знакомящихся с задачами и их решениями, творческих успехов и значимых достижений на олимпиадах всех уровней.

Глава 1

Школьные олимпиады

§ 1. Механика

8 класс

Задача 1

Ранней весной, шагая по скользкой дорожке, Вы внезапно поскользнулись и начинаете падать на спину. Совершенно машинально Вы взмахиваете руками, и таким образом избегаете падения (или, увы нет). Опишите, какие движения руками наиболее оптимальны в этой ситуации, и объясните, почему они помогают восстановить равновесие.

Решение

Если Вы поскользнулись и падаете назад, то помочь Вам восстановить равновесие может направленная вперед сила, приложенная к верхней части корпуса. Роль такой силы выполняет сила взаимодействия Ваших рук с корпусом. Действительно, в первый момент Ваши руки после взмаха вверх резко двигаются назад и вниз, поэтому со стороны корпуса на руки действует сила, создающая необходимое(и довольно значительное) ускорение, направленное назад и вниз. Противоположно направленная сила, действующая на корпус со стороны рук, позволяет Вам восстановить равновесие и прекратить начавшееся скольжение. В следующий момент сила трения покоя, заметно превышая силу трения скольжения по льду, обеспечивает погашение количества движения, приобретённого руками в момент взмаха.

Задача 2

То, что пассажиры любого транспортного средства в момент торможения наклоняются вперед по инерции, хорошо известно. Если быть внимательным, то можно заметить, что в момент торможения наклон пассажира вперед сменяется наклоном назад. Таких толчков вперед и назад может быть несколько. С чем это связано?

Решение

Салон любого транспортного средства прикреплен к шасси с помощью рессор или амортизаторов, которые можно рассматривать как пружины с большим коэффициентом жесткости. В момент торможения салон уходит вперед, растягивая рессоры. Сила упругости возвращает салон обратно, он по инерции «проскакивает» положение равновесия, затем останавливается, а пассажиры в момент остановки по инерции наклоняются назад. Салон совершает на рессорах затухающие колебания; толчки с уменьшающейся силой испытывает пассажир.

Задача 3

Как определить площадь однородной плоской пластины неправильной формы с помощью треугольника, имеющего деления, ножниц и весов с набором гирь?

Решение

Вначале с помощью весов определим массу m всей пластины. Затем при помощи угольника построим на нем прямоугольник с известными сторонами, вырежем его ножницами и определим на весах его массу. Если пластина везде одинакова по толщине, ее масса m_0 во столько раз превышает массу m_0, во сколько раз площадь S всей пластины больше площади S_0 прямоугольника:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{S}{S_0} \quad \Rightarrow \quad S = S_0\frac{m}{m_0}$$

Площадь S_0 находим перемножением длин сторон. Если пластину разрезать нежелательно, следует обвести ее контур карандашом на листе картона или плотной бумаги, вырезать полученную фигуру и проделать все описанные измерения на ней.

9 класс

Задача 1

На длинном шоссе на расстоянии 1 км друг от друга установлены светофоры. Красный сигнал каждого светофора горит в течение 30 секунд, зеленый — в течение следующих 30 секунд. При этом все автомобили, движущиеся со скоростью 40 км/час, проехав один из светофоров на зеленый свет, проезжают без остановки, т.е. тоже на зеленый свет, и все следующие светофоры. С какими другими скоростями могут двигаться автомобили, чтобы, проехав один светофор на зеленый свет, далее нигде не останавливаться?

Решение

Нарисуем график движения автомобиля (см. рис. 1). По горизонтальной оси будем откладывать время t в секундах, по вертикальной — пройденный путь S в километрах. Изобразим на этом графике запрещающие сигналы каждого из светофоров — красные — в виде темных полосок, а разрешающие — зеленые — в виде светлых промежутков между ними. Тогда график движения любого автомобиля, движущегося без остановок, должен проходить только через светлые промежутки.

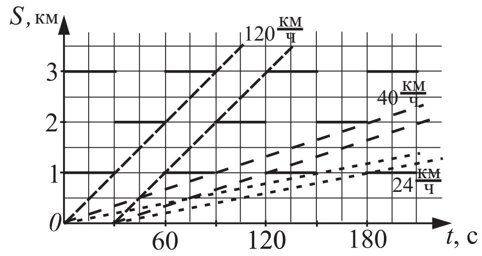


Рис. 1.

Заметим, что расстояние 1 км между соседними светофорами автомобиль, движущийся со скоростью 40 км/час, проедет за 1/40 часа $=$ 90 секунд. Таким образом, он сможет проехать следующий светофор без остановки, только если разрешающие и запрещающие сигналы светофоров будут распределены так, как показано на рисунке. Из графика видно, что автомобиль будет двигаться без остановок на светофорах в том случае, если он будет преодолевать 1 км за 30 с, 90 с, 150 с, $\ldots$, $30 + 60n$ с, $\ldots$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Следовательно, скорость автомобиля, требующаяся для движения по шоссе без остановок на светофорах, может быть равна

$$\frac{1\ \text{км}}{30 + 60n\ \text{с}} = \frac{1\ \text{км} \cdot 3600}{30 + 60n\ \text{час}} = \frac{120}{2n+1} = 120\,\frac{\text{км}}{\text{час}},\ 40\,\frac{\text{км}}{\text{час}}, 24\,\frac{\text{км}}{\text{час}}, \ldots$$

Задача 2

Для того, чтобы измерить подъемную силу воздушного шарика, Вася использовал два тонких невесомых рычага I и II, оси которых O_1 и O_2 параллельны. Рычаги горизонтальны и имеют область «перекрытия» длиной x (см. рисунок 2). К свободному концу рычага I Вася привязал шарик, а на свободный конец рычага II поставил гирю массы M. Какой должна быть подъемная сила F шарика, чтобы он мог перетянуть гирю? А какой она должна быть, чтобы гиря перетянула шарик? Расстояния l_1, l_2, l_3 и l_4 считать известными.

Решение

1. *Шарик перетягивает гирю.* При этом рычаг I касается рычага II в точке, находящейся на расстоянии x от левого конца рычага II, и левое плечо рычага II становится равным $l_3 - x$ (см. рис. 3). В точке касания рычаги действуют друг на друга силами $f = f_1$, равными по величине и противоположными по направлению. Используя правило рычага, получим условия, которые должны выполняться для того, чтобы шарик мог перетянуть гирю:

$Fl_1 > fl_2$ — для рычага I;

$f(l_3 - x) > Mgl_4$ — для рычага II.

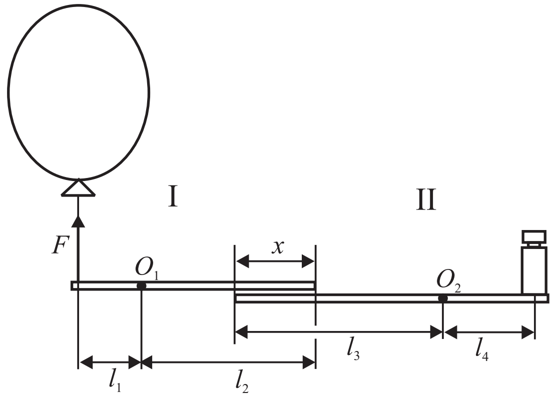


Рис. 2.

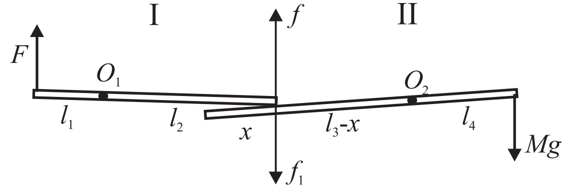


Рис. 3.

Отсюда: $F > \dfrac{l_2}{l_1} f > \dfrac{l_2}{l_1} \cdot \dfrac{l_4}{l_3 - x} Mg.$

2. *Гиря перетягивает шарик.* В этом случае рычаг II касается рычага I в точке, находящейся на расстоянии x от правого конца рычага I, и правое плечо рычага I становится равным $l_2 - x$ (см. рис. 4). При этом неравенства, полученные из правила рычага, выглядят так:

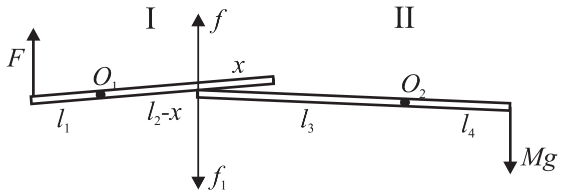


Рис. 4.

$Fl_1 < f(l_2 - x)$ — для рычага I;

$fl_3 < Mgl_4$ — для рычага II.

Отсюда: $F < \dfrac{l_2 - x}{l_1} f < \dfrac{l_4}{l_1} \cdot \dfrac{l_2 - x}{l_3} Mg$.

Задача 3

Система из двух сообщающихся вертикальных цилиндров, заполненных жидкостью плотности ρ, закрыта поршнями массы M_1 и M_2. В положении равновесия поршни находятся на одной высоте. Если на поршень массы M_1 положить груз массы m, то поршень массы M_2 поднимется после установления равновесия на высоту h относительно начального положения. На какую высоту поднимется относительно начального положения равновесия поршень массы M_1, если груз массы m переложить на поршень массы M_2?

Решение

Пусть после того, как на поршень массы M_1 положили груз массы m, этот поршень опустился на расстояние h_1, а второй поршень поднялся на высоту h_2 относительно начального положения. При этом перепад уровней жидкости в сосудах будет равен $h_1 + h_2$, а разность давлений, создаваемая этим перепадом уровней, будет компенсироваться добавочным давлением, которое создает груз m, лежащий на первом поршне. Отсюда получаем уравнение:

$$\rho g(h_1 + h_2) = \frac{mg}{S_1}.$$

Здесь S_1 — площадь поршня массы M_1. Далее, так как объем жидкости под поршнями не изменился, то справедливо соотношение:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

где S_2 — площадь поршня массы M_2. Выражая из второго уравнения величину h_1 и подставляя ее в первое уравнение, найдем высоту, на которую поднимется поршень массы M_2:

$$h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)}.$$

По условию задачи эта величина равна h.

Пусть теперь груз массы m положили на поршень массы M_2. Проводя аналогичные рассуждения, можно тем же путем найти высоту, на которую при этом поднимется поршень массы M_1. Однако, зная выражение для h_2, ответ можно просто угадать. Действительно, в рассматриваемой системе все равно, какой поршень считать «первым», а какой — «вторым». Значит, для того, чтобы получить ответ, можно просто перенумеровать все величины в последней формуле, то есть заменить все индексы «1» на индексы «2» и наоборот. В итоге получим

$$h_1' = \frac{m}{\rho(S_2 + S_1)} = h_2 = h.$$

Итак, если положить груз массы m на поршень массы M_2, то поршень массы M_1 поднимется относительно начального положения на такую же высоту h, на какую поднимался поршень массы M_2, когда груз m клали на поршень массы M_1.

10 класс

Задача 1

Тело бросили вертикально вверх с поверхности земли. Расстояние l между этим телом и неподвижным наблюдателем изменяется со временем t по закону, показанному на графике (см. рис. 5). На какой высоте над землей и на каком расстоянии от линии, по которой движется тело, находится наблюдатель? Чему равна начальная скорость тела? Величины l_0, l_1 и l_2 считать известными, ускорение свободного падения равно g.

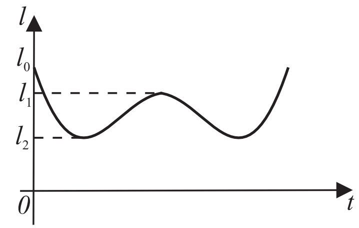


Рис. 5.

Решение

Пусть наблюдатель находится на высоте h и на расстоянии a от линии, по которой движется тело. При бросании тела возможны два случая:

а) тело не долетает до высоты, на которой находится наблюдатель — в этом случае расстояние l от тела до наблюдателя сначала уменьшается, а затем увеличивается;

б) тело поднимается выше наблюдателя — в этом случае расстояние l сначала уменьшается от $\sqrt{a^2+h^2}$ до a, затем увеличивается до $\sqrt{a^2+(H-h)^2}$, где H — высота подъема тела, а потом опять уменьшается до a и увеличивается до $\sqrt{a^2+h^2}$.

Как видно из приведенного в условии рисунка, реализуется именно второй случай.

При этом $l_0=\sqrt{a^2+h^2}$, $l_1=\sqrt{a^2+(H-h)^2}$.

Отсюда находим: $a=l_2$; $h=\sqrt{l_0^2-a^2}=\sqrt{l_0^2-l_2^2}$;

$H=h+\sqrt{l_1^2-l_2^2}=\sqrt{l_0^2-l_2^2}-\sqrt{l_1^2-l_2^2}$. Начальную скорость тела можно определить из соотношения $V_0^2=2gH$, откуда

$V_0=\sqrt{2g\left(\sqrt{l_0^2-l_2^2}-\sqrt{l_1^2-l_2^2}\right)}$.

Задача 2

В системе, изображенной на рисунке 6, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Вначале нить удерживают так, что груз m висит неподвижно, а груз $2m$ касается пола. Затем конец нити начинают тянуть вверх с постоянной скоростью v. Как при этом будут двигаться оба груза?

Решение

Из условия задачи следует, что сила натяжения нити F везде вдоль нити одна и та же (см. рис. 7). До начала движения, очевидно, эта сила равна $F_0=mg$, а груз $2m$ не давит на пол. В начале движения сила увеличивается на некоторую величину ΔF на короткое время Δt, за счет чего грузы начинают двигаться вверх со скоростями v_1 и v_2. По закону изменения импульса можно записать:

$$\Delta F\cdot\Delta t=mv_1;$$
$$2\Delta F\cdot\Delta t=2mv_2,$$

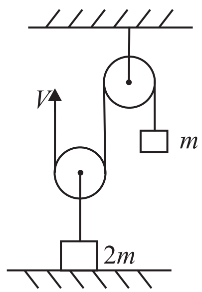


Рис. 6.

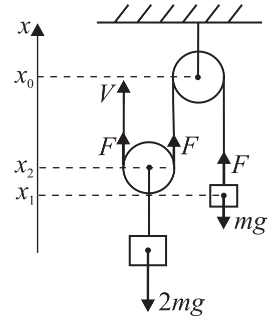


Рис. 7.

откуда следует, что $v_1=v_2$. В дальнейшем эти скорости будут оставаться постоянными, а сила натяжения снова станет равной $F_0=mg$. Поскольку конец нити вытягивают со скоростью v, а длина нити L, можно записать для двух моментов времени выражение для длины нити через координаты блоков и грузов:

$$x_k-x_2+x_0-x_2+x_0-x_1+2\pi R=L; \qquad (1)$$

x_k — координата, нуль выбран произвольно.

$$(x_k+vt)-(x_2+v_1t)+x_0-(x_2+v_1t)+x_0-(x_1+v_1t)+2\pi R=L.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$vt-3v_1t=0$$
$$v_1=v_2=\frac{v}{3}.$$

Замечание

Задача может быть решена и другим способом, путем рассмотрения уравнений движения грузов на этапе их разгона от состояния покоя до конечной скорости. Обозначая ускорения грузов m и $2m$ через a_1 и a_2 соответственно, получаем уравнения движения:

$$F - mg = ma;$$
$$2F - 2mg = 2ma_2,$$

Отсюда $a_1 = a_2$. Из уравнения кинематической связи (1) следует, что

$$x_k - 2x_2 - x_1 = const,$$

следовательно скорости грузов v_1, v_2 и конца нити v_k связаны соотношением

$$v_k = 2v_2 + v_1,$$

а связь соответствующих ускорений имеет вид

$$a_k = 2a_2 + a_1.$$

С учетом равенства ускорений грузов получаем $a_1 = a_2 = \dfrac{a_k}{3}$. Поскольку ускорения грузов в каждый момент времени одинаковы, а в начальный момент времени грузы покоятся, то скорости грузов также одинаковы и равны $v_1 = v_2 = \dfrac{v}{3}$.

11 класс

Задача 1

U-образная трубка заполнена водой плотностью ρ (см. рис. 8). Узкое колено этой трубки с площадью сечения S закрыто невесомым поршнем, к которому привязана нить, перекинутая через неподвижный и подвижный блоки. Широкое колено трубки, площадь сечения которого в $n = 2$ раза больше, чем у узкого, открыто. К оси подвижного блока подвешен груз массой M, и система находится в равновесии. На какое расстояние сдвинется груз, если в открытое колено трубки долить воду массой m, а к грузу массы M прикрепить дополнительный груз массы m? Считать, что поршень все время касается поверхности воды, трения нет, нить и блоки невесомы.

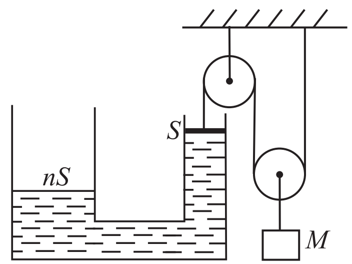


Рис. 8.

Решение

Поскольку подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза, то сила натяжения нити вдвое меньше веса груза Mg. В состоянии равновесия разность уровней воды h в коленах трубки определяется из условия: $\rho g h S = \dfrac{Mg}{2}$ и равна, таким образом, $h = \dfrac{M}{2\rho S}$. После увеличения массы груза на m разность уровней увеличится на $\Delta h = \dfrac{m}{2\rho S}$ (см. рис. 8). Пусть

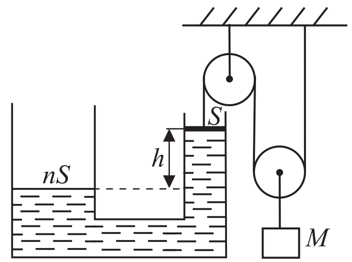


Рис. 9.

теперь после увеличения массы груза долили воду массой m в открытое колено трубки, и полное (по сравнению с начальным) повышение уровня воды в узком колене составило величину y. Тогда, поскольку при навешивании дополнительного груза разность уровней воды в коленах трубки увеличилась на Δh, в открытом широком колене уровень воды должен повыситься на $y - \Delta h$. При этом изменение объема воды равно

$$nS(y-\Delta h)+Sy=\frac{m}{\rho}.$$

Отсюда

$$y=\frac{\dfrac{m}{\rho S}+n\Delta h}{n+1}=\frac{\dfrac{m}{\rho S}+n\dfrac{m}{2\rho S}}{n+1}=\frac{m}{\rho S}\cdot\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Груз, очевидно, опустится вниз на расстояние

$$H=\frac{y}{2}=\frac{m}{\rho S}\cdot\frac{n+2}{4(n+1)}=\frac{m}{\rho S}\cdot\frac{2+2}{4(2+1)}=\frac{m}{3\rho S}.$$

§2. Молекулярная физика

9 класс

Задача 1

В стоящий на столе калориметр налита вода комнатной температуры t_0. С большой высоты h в калориметр падают одинаковые капли воды той же температуры t_0. На уровне поверхности воды в калориметре имеется небольшое отверстие, через которое вытекает лишняя вода. Какая температура установится в калориметре спустя большое время после начала падения капель? Удельная теплоемкость воды равна c, ускорение свободного падения капель равно g. Теплоемкостью калориметра, отдачей тепла от его стенок и испарением воды можно пренебречь (см. рис. 10).

Решение

При падении капли массы m в калориметр сила тяжести совершает работу mgh, которая превращается в теплоту. Эта теплота идет на нагревание капли: $mgh=cm\Delta t$, где Δt — изменение температуры капли. Ясно, что по прошествии большого времени, когда весь начальный запас воды с температурой t_0 вытечет из калориметра, в нем установится температура $t=t_0+\Delta t=t_0+\dfrac{gh}{c}$, и в дальнейшем она меняться не будет.

10 класс

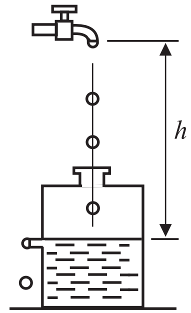


Рис. 10.

Задача 1

В калориметре с некоторым количеством воды находится электронагреватель постоянной мощности. Если включить нагреватель в сеть, а в калориметр добавлять воду с температурой 0°С со скоростью 1 г/с, то установившаяся температура воды в калориметре будет равна 50°С. Какая температура установится в калориметре, если в него вместо воды добавлять лед с температурой 0°С со скоростью 0,5 г/с? Теплообменом калориметра с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды равна 4,2 $\dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$, удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

Решение

Найдем сначала мощность электронагревателя. В установившемся режиме за 1 секунду $m_1=1$ грамм воды нагревается на $t_1=50°$С, получая при этом количество теплоты

$$Q=m_1\Delta t_1=4200\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}\cdot 10^{-3}\text{кг}\cdot 50°C=210\ \text{Дж}.$$

Следовательно, мощность электронагревателя составляет 210 Вт.

Обозначим установившуюся температуру воды в калориметре во втором случае через t_2. Тогда при той же мощности нагревателя за 1 секунду количество теплоты 210 Дж будет тратиться на плавление $m_2=0{,}5$ г льда и нагревание получившейся при этом воды от 0°С до температуры t_2. Отсюда $Q=m_1\Delta t_1=\lambda m_2+m_2t_2$, и

$$t_2 = \frac{m_1\Delta t_1 - \lambda m_2}{m_2} = \frac{210\text{ Дж} - 335\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{г}}\cdot 0{,}5\text{ г}}{4{,}2\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{г}\cdot\text{град}}\cdot 0{,}5\text{ г}} =$$

$$= \frac{210\text{ Дж} - 167{,}5\text{ Дж}}{2{,}1\,\dfrac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}}} \approx 20\text{град}$$

11 класс

Задача 1

Горизонтально расположенный сосуд закрыт легким подвижным поршнем и содержит по одному молю гелия и кислорода. Наружное давление равно нулю, поршень удерживают пружиной, длина которой в недеформированном состоянии пренебрежимо мала. Какое количество тепла нужно сообщить газу, чтобы увеличить его температуру на ΔT. Теплоемкостью стенок сосуда и поршня можно пренебречь.

Решение

Из первого начала термодинамики следует

$$Q = \Delta U + A \qquad (1)$$

Q — количество подведенного тепла.

ΔU — изменение внутренней энергии системы

$\Delta U = (\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2})\Delta T = \nu[C_{V1} + C_{V2}]\Delta T.$

$C_{V1} = \frac{3}{2}R$ — молярная теплоемкость одноатомного газа гелия.

$C_{V2} = \frac{5}{2}R$ — молярная теплоемкость двухатомного газа кислорода.

$$\Delta U = \nu\left[\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}R\right]\Delta T = 4\nu R\Delta T \qquad (2)$$

A — работа, совершаемая газом против внешних сил. В данном случае работа совершается против сил упругости пружины. На рис. 11 представлена зависимость силы упругости от величины деформации пружины $\Delta l = (l - l_0)$, где l — длина недеформированной пружины, по условию задачи $l_0 \approx 0$.

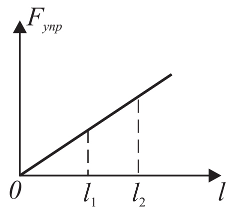


Рис. 11.

Площадь на этом графике равна работе по растягиванию пружины от l_1 до l_2.

$$A = \frac{1}{2}k(l_2^2 - l_1^2) \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1)

$$Q = 4\nu R\Delta T + \frac{1}{2}k(l_2^2 - l_1^2) \qquad (4)$$

Давление газа равно сумме парциальных давлений гелия и кислорода:

$$P = P_{He} + P_{O_2} = \frac{\nu RT}{V} + \frac{\nu RT}{V} = \frac{2\nu RT}{V}$$

Из условия равновесия поршня находим:

$$P\cdot S = Kl \qquad \text{и} \qquad P = \frac{Kl}{S}.$$

$$\frac{Kl}{S} = \frac{2\nu RT}{lS} \qquad \text{отсюда} \qquad \frac{Kl^2}{2} = \nu RT.$$

При температуре T_1: $\frac{Kl_1^2}{2} = \nu RT_1.$

При температуре T_2: $\frac{Kl_2^2}{2} = \nu R(T_1 + \Delta T).$

Вычтя из второго равенства первое, получим:

$$\frac{Kl_2^2}{2} - \frac{Kl_1^2}{2} = \frac{K(l_2^2 - l_1^2)}{2} = \nu R\Delta T.$$

Подставив эту разность в (4) получим:

$$Q = 4\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = 5\nu R\Delta T.$$

$$Q = 5\nu R\Delta T.$$

По условию $\nu = 1$ молю.

Задача 2

Множество маленьких стальных шариков находятся на дне большой квадратной коробки площади S. Шарики хаотически двигаются по дну, упруго соударяясь со стенками и друг с другом. Полная кинетическая энергия шариков E, все удары абсолютно упругие. Найти силу, действующую со стороны шариков на одну из стенок.

Решение

В силу хаотичности движения и упругости ударов будем считать, что средние скорости всех молекул одинаковы. Рассмотрим соударение одной молекулы со стенкой:

до удара импульс частицы: $K_{1x} = mV_x$;

после удара: $K'_{1x} = mV_x$.

Изменение импульса частицы: $\Delta K_x + K'_{1x} - K_{1x} = -2mV_x$

Изменение импульса вызвано импульсом силы, действующего со стороны стенки на частицу, т.е. $f'\Delta t = \Delta K_x = -2mV_x$.

Согласно третьему закону Ньютона частица действует на стенку с равной по величине силой, но противоположной по направлению, т.е.

$$f_x = -f'_x \qquad \text{и} \qquad f_x = \frac{2mV_x}{\Delta t}.$$

Для того, чтобы найти силу, действующую на всю стенку коробки, надо найти число шариков, ударяющихся о стенку за время Δt. Т.к. длина стороны квадрата a, то за время Δt стенки достигнут шарики, находящиеся на расстоянии $V_x\Delta t$ и их число будет равно

$$\Delta N \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{S} \cdot a \cdot V_x \cdot \Delta t,$$

здесь $\dfrac{N}{S}$ — число шариков, находящихся на единице площади. Тогда сила, действующая на стенку, будет равна

$$F = f_x \cdot \Delta N_x = \frac{2mV_x}{\Delta t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{S} aV_x\Delta t = mV_x^2 \cdot \frac{Na}{S}.$$

Учтем тот факт, что: $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ и $\left\langle V_x^2 \right\rangle + \left\langle V_y^2 \right\rangle = V^2$.

При хаотическом движении:

$$\left\langle V_x^2 \right\rangle = \left\langle V_y^2 \right\rangle = \frac{V^2}{2}.$$

Тогда:

$$F = \frac{mV^2}{2} \cdot \frac{Na}{S} = \frac{E\sqrt{S}}{S} = \frac{E}{\sqrt{S}}.$$

Здесь учтено, что полная энергия шариков $E = N\dfrac{mV^2}{2}$, а площадь $S = a^2$ и следовательно $a = \sqrt{S}$. В выражении для ΔNx присутствует множитель $\dfrac{1}{2}$, он означает, что в условиях равновесия и хаоса половина потока частиц движется вдоль оси Y, половина вдоль оси X.

§3. Электродинамика

10 класс

Задача 1

В «черном ящике» с тремя контактами находится схема, составленная из батарейки с известной ЭДС $\mathcal{E}$, двух неизвестных сопротивлений и соединительных проводов. Амперметр, подключенный к контактам 1 и 2, показывает значение тока I, к контактам 1 и 3 — ток $2I$, а к контактам 2 и 3 — отсутствие тока. Чему могут быть равны величины сопротивлений? Сопротивлением батарейки, амперметра и соединительных проводов пренебречь.

Решение

1) Из условия задачи вытекает, что:

— никакие две клеммы не могут быть подключены только к батарейке (иначе бы амперметр при подключении к этим клеммам зашкаливало);

— никакие две клеммы не могут быть соединены друг с другом только соединительным проводом (иначе бы два тока из трех совпадали).

Поэтому невозможны следующие схемы, изображенные на рис. 12.

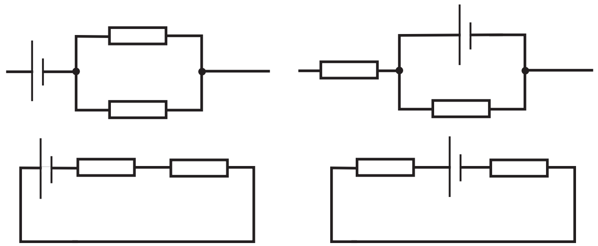


Рис. 12.

2) Далее, если схема состоит из нескольких отдельных частей, то все три клеммы должны быть подключены к той ее части, которая содержит батарейку. Поэтому, с учетом изложенного в пункте 1), также невозможны следующие схемы (см. рис. 13):

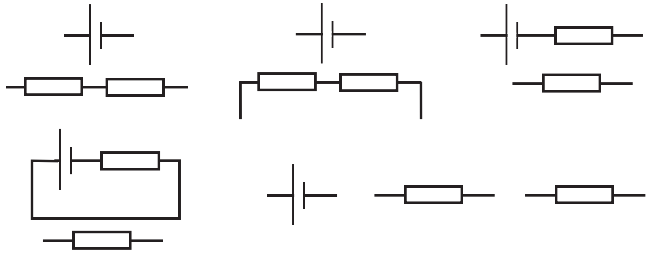


Рис. 13.

3) В итоге, остается рассмотреть следующие схемы (см. рис. 14): Поскольку

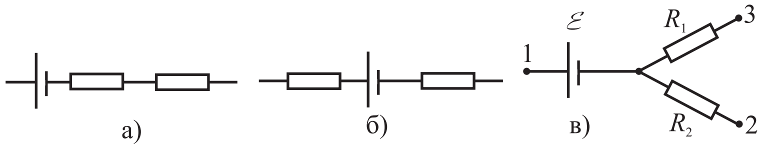


Рис. 14.

между клеммами 2 и 3 включено только сопротивление, то в случаях (а) и (б) клеммы 1, 2 и 3 могут располагаться следующим образом (см. рис. 14):

Заметим, что схемы 1, 2, 6 эквивалентны друг другу (так же эквивалентны друг другу схемы 3, 4, 5). Поэтому для решения задачи достаточ-

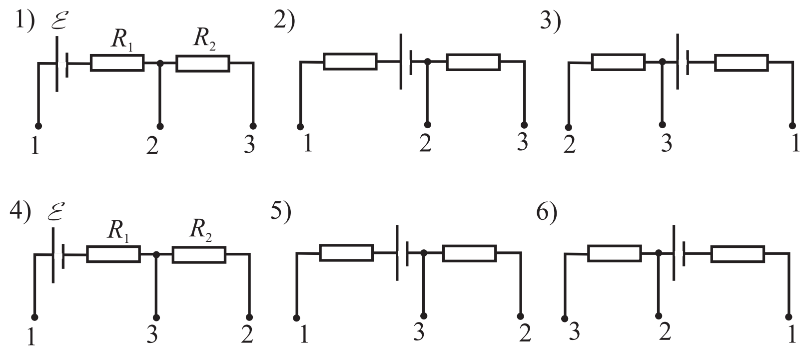


Рис. 15.

но рассмотреть всего три схемы — по одной, соответствующей случаям, изображенным на рисунках 14(а) и 14(б) (например, схемы 1 и 4 рис. 15) и схему рис. 14(в). Проделаем это.

Запишем (с учетом условия задачи) закон Ома для первой схемы (рис. 15.1):

$$2I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

Отсюда $R_1 = R_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2I}$.

Аналогично для второй схемы (рис. 15.4):

$$2I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

При решении этой системы значение R_2 получается отрицательным. Значит, такое соединение невозможно.

Наконец, для последней схемы (рис. 14в):

$$2I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R_2},$$

откуда

$$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{2I}, \qquad R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I}.$$

В итоге получаем, что величины сопротивлений могут быть равны $R_1 = R_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2I}$

(батарейка и сопротивления соединены последовательно) или $R_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2I}$ и $R_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{I}$ (батарейка и сопротивления соединены «звездой»).

11 класс

Задача 1

Прибор для измерения сопротивлений состоит из батарейки с напряжением $\mathcal{E}_0 = 4,$ В, резистора сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметра, соединенных так, как показано на рис. 16. На амперметр нанесена шка-

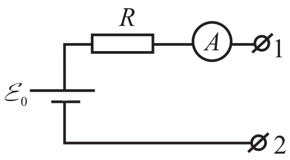


Рис. 16.

ла, показывающая значение сопротивления резистора, подключаемого к клеммам 1 и 2. С помощью данного прибора пытаются измерить сопротивление электрической цепи, изображенной на рис. 17, которая состоит из источника напряжения и резистора. Оказалось, что показания прибора зависят от полярности подключения к нему этой цепи: в одном направлении показание прибора равно $r_1 = 20$ Ом, в другом — $r_2 = 5$ Ом. Найти напряжение $\mathcal{E}$ источника и сопротивление r резистора. Батарейка, источник напряжения и амперметр имеют пренебрежимо малое внутреннее сопротивление.

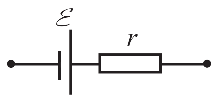


Рис. 17.

Решение

Показание прибора равно r, если ток через амперметр равен $\dfrac{\mathcal{E}_0}{R+r}$. Таким образом, в электрических цепях, изображенных на рис. 18 и рис. 19, токи равны

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R+r_1} = \frac{4{,}5}{10+20} = 0{,}15 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R+r_2} = \frac{4{,}5}{10+5} = 0{,}3 \text{ А}.$$

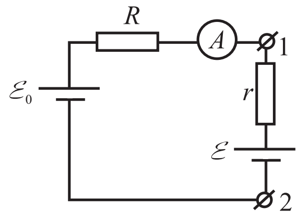


Рис. 18.

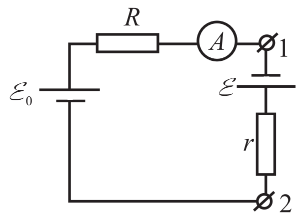


Рис. 19.

При этом сопротивления цепей на этих рисунках одинаковы и равны $R + r$, а суммарные напряжения батарейки и источника равны $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}$, соответственно. Отсюда

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = I_1(R+r), \qquad \mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = I_2(R+r).$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{R+r_1}{R+r_2} = 2,$$

и

$$\mathcal{E} = \frac{r_1 - r_2}{2R + r_1 + r_2}\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{3} = 1{,}5\ \text{В}.$$

Далее,

$$R + r = \frac{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}}{I_1} = \Big(1 - \frac{r_1 - r_2}{2R + r_1 + r_2}\Big) \cdot (R + r_1),$$

откуда

$$r = \frac{R(r_1 + r_2) + 2r_1 r_2}{2R + r_1 + r_2} = 10\ \text{Ом}.$$

Глава 2

Муниципальные олимпиады

§ 1. Механика

7 класс

Задача 1

Однажды Красная Шапочка решила навестить бабушку. Путь ей предстоял не близкий. Сначала она треть пути неспешно шла по дорожке со скоростью v. Затем, проголодавшись, села на пенек и съела несколько пирожков. Потратив на еду много времени, девочка загрустила, так как уже начало темнеть. Но тут из леса выбежал Серый Волк. Он любезно согласился подвезти её на себе до бабушки со скоростью $3v$. В результате получилось, что на всё путешествие девочка потратила столько же времени, сколько потребовалось бы при движении с постоянной скоростью v. Сколько пирожков скушала Красная Шапочка во время отдыха на пеньке? На каждый пирожок она затрачивала одну девятую времени всего своего путешествия.

Решение

Время движения девочки до привала $t_1 = \dfrac{L/3}{v}$. Трапеза затянулась на

$t_2 = N \cdot \dfrac{L/9}{v}$, где N — число съеденных пирожков. Поездка на Волке заняла $t_3 = 2 \cdot \dfrac{(L/9)}{v}$. Но в целом путешествие длилось $t = \dfrac{L}{v}$. Поскольку $t = t_1 + t_2 + t_3$, то, решив это уравнение, найдём, что девочка скушала $N = 4$ пирожка.

Задача 2

Экспериментатор Глюк исследовал графики равномерного движения (рис. 1). У какого тела (I или II) скорость больше? Во сколько раз?

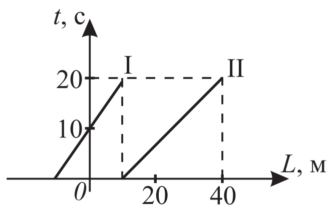


Рис. 1.

Решение

Из графика видно, что за время $t = 20$ с тело I преодолеет $L_I = 20$ м, а тело II — $L_{II} = 30$ м. У тела I скорость $v_I = \dfrac{L_I}{t} = 1\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, а у тела II скорость $v_{II} = \dfrac{L_{II}}{t} = 1{,}5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Следовательно, v_{II} в полтора раза больше v_I.

Задача 3

На столе стоит тележка с прикреплённой к ней упругой пластинкой. Пластинка согнута «в дугу» и связана нитью. Со стороны пружины на стол ставят ещё одну тележку (рис. 2а). После пережигания нити обе тележки приходят в движение и разъезжаются в разные стороны (рис. 2b).

Скорость первой тележки $v_1 = 30\ \dfrac{\text{см}}{\text{с}}$, а скорость второй $v_2 = 0{,}72\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$. Масса какой тележки больше? Во сколько раз?

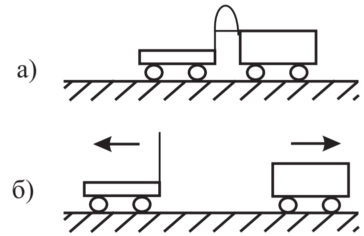


Рис. 2.

Решение

Во-первых, выразим обе скорости в единицах СИ:

$$v_1 = 30\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad v_2 = 0{,}72\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{720\ \text{м}}{3600\ \text{с}} = 0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В учебниках физики для 7 класса (например, в учебнике «Физика-7» под редакцией Л.В. Пёрышкина, издательство «Дрофа», 2001 г.) сказано: «Если после взаимодействия тела приобрели разные скорости, то их массы различны. Во сколько раз скорость первого тела больше (меньше) скорости второго тела, во столько раз масса первого тела меньше (больше) массы второго.» (стр. 45). Исходя из этого закона, запишем:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2} = 1{,}5.$$

Следовательно, масса второго тела в полтора раза больше массы первого тела.

Задача 4

В бочку объёмом 90 л, которая была на две трети заполнена мёдом, залез Винни-Пух. При этом уровень мёда поднялся до краёв, и ещё 9 кг мёда вытекло наружу, а из бочки осталась торчать голова медвежонка, объём которой равен одной десятой объёма Винни. Определите массу Винни-Пуха, если его средняя плотность составляет $1000\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Плотность мёда $1500\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Решение

Для седьмого класса ещё не известна сила Архимеда, да и не факт, что медведь плавает свободно. Может быть, он держится за стенки бочки. Поэтому дано, что из мёда торчит только одна десятая часть его тела. Объём части медведя в бочке равен сумме объёма ранее свободного места $\left(\frac{90}{3} = 30 \text{ л}\right)$ и объёма вытесненного мёда $\left(\frac{9}{1500} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 6 \text{ л}\right)$, то есть 36 л. По условию, это составляет 0,9 от всего объёма Винни-Пуха. Значит, объём медведя $\frac{36}{0{,}9} = 40$ л, и его масса 40 кг.

8 класс

Задача 1

На рисунке 3 схематически показано поперечное сечение космического корабля, вращающегося вокруг своей продольной оси. Космонавт выпускает из рук шар в точке A. С точки зрения космонавта последующее движение шара объясняется просто: так как на шар действует центробежная сила инерции, то он станет двигаться от центра O и через некоторое время «упадет на пол» в точке B. А как объяснить поведение этого шара с точки зрения наблюдателя, не участвующего во вращении корабля?

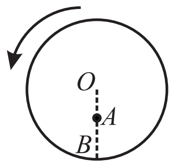


Рис. 3.

Решение

Так как космонавт и шар участвуют во вращательном движении космического корабля, то в момент, когда шар выпускается из рук, он имеет скорость v, направленную перпендикулярно OA. Поэтому в дальнейшем он станет двигаться прямолинейно, проходя через положения $A, A_1, A_2, \ldots$ В тоже время точка B будет двигаться по окружности, проходя через поло-

жения $B, B_1, B_2, \ldots$ (см. рис. 4). Поэтому шар будет приближаться к точке B, т.е. будет «падать».

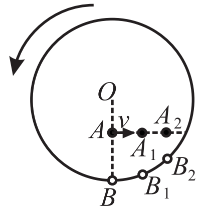


Рис. 4.

Задача 2

К рычагу, закрепленному на дне водоема, прикреплены на нитях два сферических поплавка радиуса R (см. рис. 5). В случае, если рычаг придерживать в горизонтальном положении, центры поплавков расположены на глубине $h > R$. На какой глубине будут расположены центры поплавков, если отпустить рычаг и дождаться установления равновесия? Массой поплавков и рычага пренебречь. Концы рычага в положении равновесия не касаются дна, а $AB : AC = 2 : 1$. Считать, что $AC \gg h$.

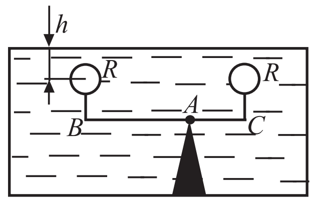


Рис. 5.

Решение

Так как поплавки и рычаг по условию задачи очень легкие, то при решении нужно учитывать только действующие в системе выталкивающие силы.

Поскольку поплавки одинаковые, то, пока они оба полностью погружены в жидкость, действующие на них выталкивающие силы также одинаковы. Кроме того, рассматриваемый рычаг несимметричен — одно плечо у него больше другого. Поэтому после того, как поплавки отпустят, рычаг начнет поворачиваться — длинное плечо пойдет вверх. До каких пор будет продолжаться этот процесс? Так как у рычага плечо AC вдвое короче плеча AB, то для того, чтобы рычаг мог находиться в равновесии, необходимо, чтобы сила, приложенная к точке C, была вдвое больше, чем сила, приложенная к точке B. Равновесие будет возможно только в том случае, если поплавок, привязанный к точке B, достигнет поверхности и частично всплывет, оставаясь погруженным на половину своего объема (см. рис. 6). При этом действующая на него выталкивающая сила уменьшится ровно

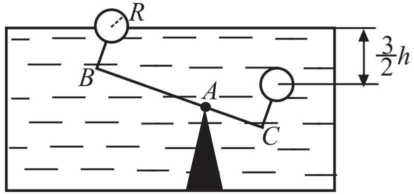


Рис. 6.

вдвое. Такое положение поплавков возможно, так как по условию задачи $AC \gg h$. Итак, в положении равновесия центр поплавка, привязанного к точке B, будет находиться на поверхности жидкости, то есть на глубине $H_B = 0$. Очевидно, что центр этого поплавка при всплытии поднимется на высоту h. В соответствии с золотым правилом механики центр второго поплавка опустится на глубину $\dfrac{h}{2}$ (он привязан к плечу, длина которого вдвое меньше). Значит, в положении равновесия центр поплавка, привязанного к точке C, будет находиться на глубине

$$H_C = h + \frac{h}{2} = \frac{3}{2}h.$$

Задача 3

На прямой дороге находятся велосипедист, мотоциклист и пешеход между ними. В начальный момент времени расстояние от пешехода до велосипедиста в 2 раза меньше, чем до мотоциклиста. Велосипедист и мотоциклист начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями 20 $\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$ и 60 $\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$ соответственно. В какую сторону и с какой скоростью должен идти пешеход, чтобы встретиться с велосипедистом и мотоциклистом в месте их встречи?

Решение

Обозначим расстояние между велосипедистом и мотоциклистом S, а скорость пешехода v. Дальше задачу можно решать двумя способами — с помощью составления системы уравнений и графически. Рассмотрим оба способа.

1. Составим систему уравнений. Пусть велосипедист, мотоциклист и пешеход встретятся через время t, и предположим, что пешеход идет по направлению к велосипедисту. До момента встречи мотоциклист проедет путь $60t$, а велосипедист — $20t$. Так как вначале расстояние между ними было равно S, то получаем уравнение:

$$60t + 20t = S.$$

Второе уравнение можно получить, рассмотрев встречу пешехода с велосипедистом или с мотоциклистом. В начальный момент времени расстояние между мотоциклистом и пешеходом было равно $\dfrac{2S}{3}$, а между велосипедистом и пешеходом — $\dfrac{S}{3}$. Так как встреча произошла через время t, то справедливы соотношения:

$$\frac{2}{3}S + vt = 60t,$$

$$20t = \frac{S}{3} - vt.$$

Легко видеть, что полученная система трех уравнений не позволяет найти время t и начальное расстояние S. Однако, скорость пешехода v из нее найти можно, причем для нахождения v достаточно решить только два любых уравнения из числа имеющихся. Это связано с тем, что велосипедист, мотоциклист и пешеход встречаются в одной точке. Выражая из любого уравнения величину S и подставляя ее в два оставшихся уравнения, находим скорость пешехода:

$$v = \frac{20}{3} \approx 6,7\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Скорость получилась положительной. Это означает, что мы вначале правильно решили, что пешеход идет по направлению к велосипедисту. Если бы мы ошиблись, и предположили, что пешеход идет в обратную сторону, то два последних уравнения изменились бы, и в результате мы бы получили величину скорости $v \approx -6{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знак «минус» показывал бы, что на самом деле пешеход идет в обратную сторону.

2. Графический способ решения задачи более нагляден (см. рис. **??**). Изобразим графики зависимости положения мотоциклиста, велосипедиста и пешехода от времени в одной системе координат (x, t) и обозначим их начальные положения буквами M, V и P соответственно.

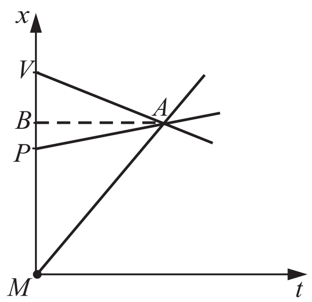


Рис. 7.

За начало координат выберем положение мотоциклиста, а за момент начала отсчета времени — начало движения. Так как движение происходит с постоянной скоростью, то графики будут представлять собой прямые линии, пересекающиеся в некоторой точке A (точка встречи). Перпендикуляр, опущенный из точки A на ось x, пересечет ее в точке B (эта точка соответствует расстоянию от начального положения мотоциклиста до места встречи. Из условия задачи вытекает следующая пропорция:

$$MP : PV = 2 : 1.$$

Кроме того, длины отрезков MB и BV относятся так же, как скорости мотоциклиста и велосипедиста:

$$MB : BV = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} : 20\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 3 : 1.$$

Из этих пропорций следуют следующие соотношения:

$$MV : BV = (MB + BV) : BV = 4 : 1,$$
$$MV : PV = (MP + PV) : PV = 3 : 1.$$

Деля два последних отношения друг на друга, получаем:

$$PV : BV = 4 : 3.$$

Наконец, используя последнее выражение, находим:

$$PB : BV = (PV - BV) : BV = 1 : 3.$$

Но отношение длин отрезков PB и BV равно отношению скоростей пешехода и велосипедиста. Значит, скорость пешехода должна быть равна

$$v = 20\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} : 3 \approx 6{,}7\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Кроме того, из чертежа видно, что пешеход должен двигаться в сторону велосипедиста.

Задача 4

Определите силу трения в подвижном блоке, если при подъеме при помощи этого подвижного блока груза весом 200 Н на высоту 5 м производят работу 1030 Дж.

Решение

При поднятии груза весом 200 Н на высоту 5 м совершается полезная работа $A_{\text{П}} = 200\ \text{Н} \cdot 5\ \text{м} = 1000\ \text{Дж}$, а затраченная работа $A_{\text{З}} = 1030$ Дж. Разница между $A_{\text{З}} - A_{\text{п}} = A_{\text{ТР}}$ равна работе сил трения. Т.е. $A_{\text{ТР}} = 30$ Дж.

$A_{\text{ТР}} = F_{\text{ТР}} \cdot 5\ \text{м}$, откуда следует, что $F_{\text{ТР}} = 6$ Н.

Задача 5

Малый поршень гидравлического пресса площадью 2 см^2 под действием силы опустился на 20 см. Площадь большего поршня 10 см^2. Определите на какую высоту был поднят груз, а также вес груза, поднятого поршнем, если на малый поршень действовала сила 200 Н.

Решение

По закону гидравлического пресса

$$\frac{F_б}{F_м} = \frac{S_б}{S_м}, \qquad (1)$$

где $F_б$ и $F_м$ — силы действующие на большой и малый поршень, соответственно, а $S_б$ и $S_м$ площади большого и малого поршня, соответственно. Из (1) определяем, что вес груза поднятого большим поршнем равен $F_б = 1000$ Н.

Высоту поднятия большого поршня найдем из того факта, что каков объем вытесняется из узкого колена гидравлического пресса, то таков и объем добавляется в широком колене гидравлического пресса.

$$S_м \cdot h = S_б \cdot H$$
$$2\ см^2 \cdot 20\ см = 10\ см^2 \cdot H,$$

откуда $H = 4$ см.

Задача 6

Могут ли два тела разной массы обладать одинаковой потенциальной энергией? Если да, то при каком условии?

Решение

Вблизи поверхности Земли два тела разной массы могут обладать одинаковой потенциальной энергией, в том случае, если

$$m_1gh_1 = m_2gh_2 \quad \text{или} \quad m_1h_1 = m_2h_2$$

Это условие равенства потенциальных энергий тел с разной массой можно сформулировать и по другому:

Два тела разной массы обладают одинаковой потенциальной энергией, если отношение их масс обратно пропорционально отношению высот их нахождения:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Задача 7

Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность вещества земного шара равна $\rho = 5000$ кг/м^3. Радиус Земли $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.

Решение

Мы знаем, что на глубине h под поверхностью давление равно $p = \rho gh$, где ρ — ее плотность, а g — ускорение свободного падения. Однако, мы не можем воспользоваться этой формулой для нахождения давления в центре Земли, поскольку g не остается постоянным по мере продвижения вглубь Земли. Действительно, представим себе, что нам удалось просверлить скважину до центра Земли. Ясно, что тело, опущенное в нее до этого центра, будет находиться в состоянии невесомости, поскольку оно со всех сторон одинаково притягивается веществом Земли. Таким образом, ускорение свободного падения постепенно уменьшается от значения 10 $\frac{м}{с^2}$ на поверхности Земли до нуля в ее центре. Поэтому в формулу для давления надо подставить среднее значение ускорения свободного падения, равное $\frac{g}{2}$. Значит, величина давления в центре Земли примерно равна

$$p = \frac{\rho g R_З}{2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-11}\ Па = 1{,}6\ \text{миллиона атмосфер!}$$

Замечание. По современным представлениям, Земля состоит из трех основных слоев — тонкой коры, довольно толстой мантии (около 3000 км), сложенной из пород сравнительно небольшой плотности, и тяжелого (железного) ядра. Ускорение свободного падения также довольно сложным образом зависит от глубины (см. задачу 1 для 11 класса). С учетом этого расчет дает для давления в центре Земли еще большую величину:

$$p_ц \approx 3{,}6\ \text{миллиона атмосфер!}$$

Задача 8

Участники летней Мелиховской школы возвращались домой, в Ростов-на-Дону, на автобусах. Автобусы ехали со скоростью $v_1 = 80$ км/ч. Пошёл дождь, и водители снизили скорость до $v_2 = 60$ км/ч. Когда дождь кончился, автобусы вновь поехали с прежней скоростью и въехали в Ростов на 10 минут позже, чем было запланировано. Сколько времени шёл дождь?

Решение

Сделаем рисунок 8 и введём на нём следующие обозначения: M — Мелиховская; R — Ростов-на-Дону; AB — участок, который автобус проехал под дождём за искомое время t; AC — участок, который проехал бы автобус за то же время t, если бы не было дождя.

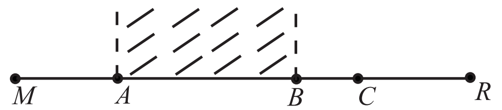


Рис. 8.

Ясно, что

$$BC = AC - AB = (v_1 - v_2)t.$$

С другой стороны, автобус прошёл путь $MA+AB+CR$ за то же время, за какое было запланировано пройти весь путь MR. Значит, $BC = v_1\Delta t$, где $\Delta t = 10$ минут — время, на которое опоздали автобусы. Приравнивая полученные выражения, имеем: $(v_1 - v_2)t = v_1\Delta t$, откуда

$$t = \frac{v_1\Delta t}{v_1 - v_2}.$$

Задача 9

Провода над железной дорогой, питающие током электропоезда, натягиваются с помощью системы, показанной на рисунке 9. Она крепится к столбу и состоит из тросов, блоков с изоляторами и стального груза квадратного сечения со стороной $a = 20$ см. Сила натяжения толстого троса, который идет от крайнего блока к держателю проводов, равна $T = 8$ кН. Какова длина h стального груза? Плотность стали равна $\rho_C = 7800$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение

Легко видеть, что каждый блок, охваченный двумя горизонтальными участками тросов, дает выигрыш в силе в 2 раза. Значит, три таких блока, изображенные на рисунке, дадут выигрыш в $2^3 = 8$ раз. Сила тяжести, действующая на груз, равна $\rho_C gV$, где $V = a^2h$ — объем груза. Значит, сила натяжения толстого троса будет в 8 раз больше:

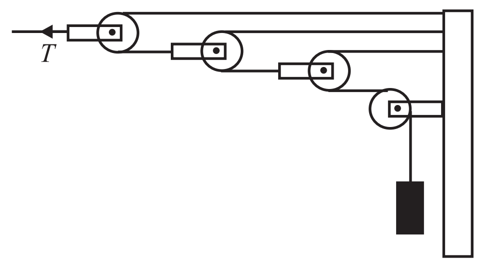


Рис. 9.

$$T = 8\rho_C gV.$$

Отсюда получаем, что объем стального груза составляет

$$V = \frac{T}{8\rho_C g},$$

а его длина равна

$$h = \frac{T}{8\rho_C ga^2} \approx 0,32 \text{ м} = 32 \text{ см}.$$

Задача 10

Когда пассажир едет в автобусе, то навстречу ему попадаются автобусы того же маршрута через каждые 10 мин. Какое максимальное время ему придется ждать на остановке до прихода автобуса? Считать, что автобусы в обоих направлениях движутся с одинаковой скоростью, а на остановках стоят очень мало.

Решение

Максимальное время ожидания совпадает с интервалом движения автобусов. Это соответствует тому, что пассажир пришел на остановку сразу после ухода автобуса. Интервал движения автобусов равен отношению расстояния между автобусами, находящимися на маршруте, к скорости их движения.

Для пассажира в движущемся автобусе скорость встречных автобусов возрастает в два раза, и, соответственно, интервал времени между ними уменьшается в два раза по сравнению с интервалом движения.

Следовательно, интервал движения, а значит, и максимальное время ожидания автобуса на остановке, вдвое больше интервала в 10 минут, который наблюдает движущийся пассажир, то есть равно 20 минутам.

Задача 11

Во льдах Арктики в центре небольшой плоской льдины площадью $S = 70$ м^2 стоит белый медведь массой $m = 700$ кг. При этом надводная часть льдины выступает над поверхностью воды на высоту $h = 10$ см. На какой глубине под водой находится нижняя поверхность льдины?

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1080\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Решение

Обозначим через x искомую глубину.

Сила тяжести, действующая на льдину с медведем, равна,

$$g[m + \rho_{\text{л}} S(h + x)].$$

Она должна равняться силе давления воды на нижнюю поверхность льдины, находящуюся на глубине x: $F_{\text{дав}} = \rho_{\text{в}} g x S$, поскольку льдина находится в состоянии равновесия. Отсюда получаем:

$$x = \frac{m + \rho_{\text{л}} S h}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})S}.$$

Подстановка численных значений дает ответ $x = 5{,}5$ м.

Задача 12

Два одинаковых сообщающихся сосуда наполнены жидкостью плотности ρ_0 и установлены на горизонтальном столе. В один из сосудов кладут маленький груз массой m и плотностью ρ. Насколько будут после этого отличаться силы давления сосудов на стол? Массой гибкой соединительной трубки с жидкостью можно пренебречь.

Решение

При решении задачи следует рассмотреть два случая:$\rho < \rho_0$ и $\rho > \rho_0$.

В первом случае груз плавает в жидкости, и поскольку ее уровень в обоих сообщающихся сосудах одинаков, то давление жидкости на дно сосудов одинаково, и силы давления сосудов на стол также одинаковы.

Во втором случае утонувший груз будет лежать на дне сосуда и давить на него с силой, равной разности силы тяжести mg и силы Архимеда $\rho_0 g \frac{m}{\rho}$. При этом жидкость по-прежнему будет давить на дно сообщающихся сосудов с одинаковой силой. Поэтому сосуд с грузом будет давить на стол с силой, превышающей силу давления сосуда без груза на величину $F = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$.

Задача 13

Какой максимальный объём масла плотностью $\rho_1 = 0{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ можно налить в L — образную трубку с открытыми концами, частично (до высоты h) заполненную водой плотностью $\rho_2 = 1{,}0\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$? Площадь горизонтального сечения вертикальных частей трубки равна S. Объёмом горизонтальной части трубки можно пренебречь. Вертикальные размеры трубки и высота столба воды приведены на рисунке 10 (высоту h считать заданной).

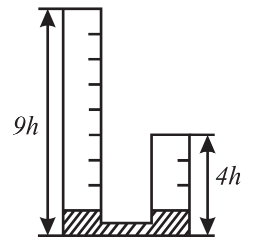


Рис. 10.

Примечание. Затыкать открытые концы трубки, наклонять её или выливать из неё воду запрещено.

Решение

Пытаясь налить наибольший объём масла в трубку, надо стараться максимально использовать давление столба воды, чтобы уравновесить его маслом возможно большей высоты. Для этого будем доливать в высокое колено масло до тех пор, пока оно не вытеснит всю воду во второе колено. При этом столб масла будет иметь высоту

$$H = 2h \cdot 1{,}25 = 2{,}5h.$$

Далее есть два пути, приводящих к одинаковому результату. Можно в оба колена долить по $2hS$ масла, а можно лить его только в высокое колено, тогда из-за меньшей плотности масло станет «пробулькивать» через воду и займёт весь оставшийся во втором колене объём. Окончательно получаем ответ

$$V = (2{,}5h + 2 \cdot 2h)S = 6{,}5hS.$$

Задача 14

(Фольклор)

Английский купец говорит русскому, что у них в Англии плотность золота 0,697 фунтов на дюйм в кубе. Русский купец отвечает, что если длину измерять в аршинах, а вес — в пудах, то плотность золота на Руси будет равна... Чему равна плотность золота на Руси?

Примечание. В одном фунте 0,4536 кг, в одном футе 12 дюймов, в одном дюйме 25,4 мм, в 1 пуде 16,38 кг, в одной сажени три аршина или 2,1336 м.

Решение

Найдём переводной коэффициент из фунтов в пуды:

$$a = \frac{0{,}4536}{16{,}38} \approx 27{,}7 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{п}}{\text{ф}}.$$

Переводной коэффициент из дюймов в аршины:

$$\beta = \frac{25{,}4 \cdot 10^{-3}}{2{,}1336/3} \approx 35{,}71 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{а}}{\text{д}}.$$

В одном кубическом дюйме содержится

$$\beta^3 = (35{,}71 \cdot 10^{-3})^3 = 45{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ кубических аршин } \frac{\text{а}^3}{\text{д}^3}.$$

Следовательно, плотность золота

$$\rho = 0{,}697\frac{a}{\beta^3} \approx 424\frac{\text{пуда}}{\text{аршин}^3}.$$

Задача 15

(Кармазин С.)

Экспериментатор Глюк решил оформить стенд о своих научных достижениях. Чтобы сделать красивый заголовок стенда, он выпилил лобзиком буквы из однородного листа тонкой фанеры. Измерив массу некоторых из получившихся букв, Глюк с удивлением обнаружил, что буквы E и H имеют одну и ту же массу. У всех букв высота $h = 8$ см, ширина $s = 5$ см, а толщина линий d одинакова (рис. 11). Чему равна толщина d?

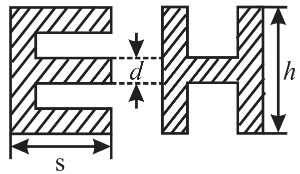


Рис. 11.

Решение

Масса буквы равна произведению плотности фанеры на объём буквы, который равен произведению площади поверхности буквы на толщину листа фанеры. Поскольку по условию толщина и плотность материала одинаковы, то массы двух букв будут равны в случае, если равны площади их поверхностей.

Приравниваем суммарные площади всех прямоугольников, из которых состоят буквы E и H соответственно:

$$hd + 3(s - d)d = 2hd + (s - 2d)d.$$

Сокращая на d и раскрывая скобки, получаем:

$$d = 2s - h = 2 \text{ см}.$$

9 класс

Задача 1

Тело движется так, что ни в какой из моментов времени его ускорение не равно нулю. График зависимости ускорения тела от скорости приведен на рисунке 12. Найдите время, в течение которого тело наберет скорость 12 м/с, а также путь, пройденный за это время.

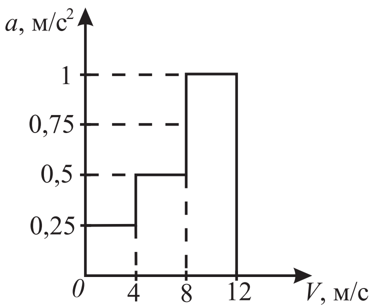


Рис. 12.

Решение

Так как ускорение $a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$, то отсюда следует, что время $t = \dfrac{1}{a} \cdot \Delta V$. Построим график зависимости $\dfrac{1}{a}$, $\left(\dfrac{\text{с}^2}{\text{м}}\right)$ от скорости V, $\left(\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right)$. Площадь под этим графиком и даст время движения тела. Далее строим график зависимости скорости тела от времени и по этому графику определяем путь, пройденный телом за это время.

$$t = 28\ \text{с},\ S = 120\ \text{м}.$$

Задача 2

Сосуд с легким и тонким приставным дном, плотно прилегающим к стенкам сосуда, опущен в воду на глубину $h = 4$ см и удерживается неподвижно (см. рис. 13). Гирю какой наименьшей массы надо поставить на дно, чтобы дно отвалилось? Сечение сосуда в плоскости дна — круг с площадью $S = 0{,}1$ м^2.

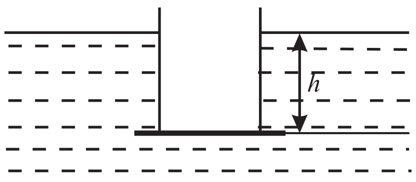


Рис. 13.

Решение

Для получения наименьшей массы гиря, очевидно, должна быть расположена вблизи стенки сосуда. Изобразим силы, действующие на дно (см. рис. 14):

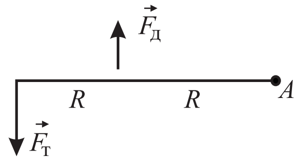


Рис. 14.

Запишем условие равновесия дна относительно точки A:

$$F_\text{д} \cdot R = F_\text{т} \cdot 2R.$$

отсюда имеем окончательно:

$$m = \frac{\rho h S}{2} = 2\ \text{кг}.$$

Задача 3

Палка шарнирно укреплена за верхний конец и наполовину погружена в воду (см. рис. 15). Какую плотность имеет материал, из которого изготовлена палка?

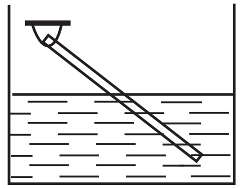


Рис. 15.

Решение

Рассмотрим силы, действующие на палку (см. рис. 16). По правилу равновесия:

$$F_\text{тяж} \cdot l = F_\text{А} \cdot \frac{3}{2} l,$$

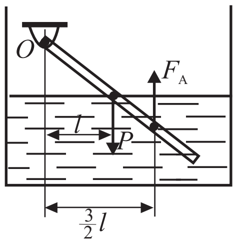


Рис. 16.

По закону Архимеда

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}} g \frac{V}{2},$$

где V — объем палки,
По определению:

$$F_{\text{тяж}} = mg = \rho g V,$$

Окончательно

$$\rho = \frac{3}{4}\rho_{\text{в}}.$$

Задача 4

Палочка объемом V и массой m всплыла на поверхность воды с глубины H. Чему равна механическая работа, совершенная при всплывании палочки? Трение не учитывать.

Решение

Работа равнодействующих сил тяжести и Архимеда равна

$$A = (\rho_{\text{в}} V - m) g H.$$

Задача 5

На полу лежат куб и шар, сделанные из стали (см. рис. 17). Массы их одинаковы. Тела подняли до соприкосновения с потолком. Одинаково ли при этом изменились потенциальные энергии тел?

Решение

Из рисунка 17 видно, что диаметр шара должен быть несколько больше высоты ребра куба. У потолка центр шара будет несколько ниже центра

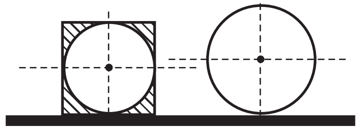


Рис. 17.

куба. Следовательно, при подъеме шара до соприкосновения с потолком будет произведена несколько меньшая работа. Поэтому шар приобретает меньшую потенциальную энергию.

Задача 6

Два автомобиля приближаются к перекрестку по взаимно перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. В момент времени, когда первый автомобиль достиг перекрестка, второй находился от него на расстоянии l_0. Определите минимальное расстояние между автомобилями в процессе их движения.

Решение

Решаем задачу в системе отсчета второго автомобиля (см. рис. 18). Первый автомобиль движется со скоростью $\vec{V}_{12}$, равной $\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, где $V_{12} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$.

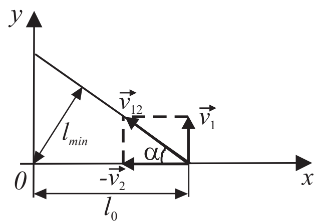


Рис. 18.

Из рисунка видно, что $l_{min} = l_0 \sin\alpha, \sin\alpha = \dfrac{V_1}{V_{12}}$.

Окончательно $l_{min} = l_0 \dfrac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$.

Задача 7

Пробирка, в которой находится кусок пластилина, плавает в воде. Изменится ли глубина погружения пробирки в воду, если пластилин переклеить ко дну пробирки снаружи (см. рис. 19)?

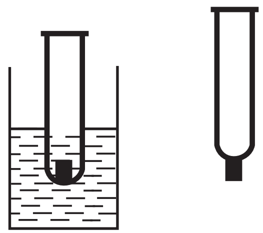


Рис. 19.

Решение

Глубина погружения уменьшится, так как при неизменной силе тяжести, действующей на пробирку, увеличится сила Архимеда, равная силе тяжести.

Задача 8

На тонкой нити подвешиваются три металлических шарика, причем верхний из них находится на высоте $h = 3150$ мм над полом (см. рис. 20). Нить с шариками отпускается, и те падают на пол, издавая характерный стук. Найти высоты h_1 и h_2 двух других шариков, чтобы при их падении были слышны три удара через равные промежутки времени.

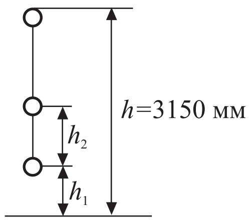


Рис. 20.

Решение

Известно, что при свободном падении пути, проходимые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательный ряд нечетных чисел, т.е. можем записать

$$315 - (h_1 + h_2) : h_1 = 5 : 3 : 1.$$

Искомые расстояния $h_1 = 350$ мм, $h_2 = 1050$ мм.

Задача 9

Тело, состоящее из куска льда и вмерзшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится $\alpha = 95\%$ объема тела. Какой процент льда β должен растаять, чтобы тело полностью погрузилось в воду (см. рис. 21)? Плотность воды $\rho_\text{в} = 10^3 \text{кг/м}^3$, плотность льда

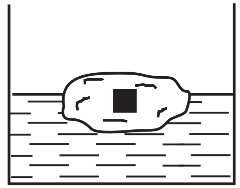


Рис. 21.

$\rho_\text{л} = 0{,}9 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$, плотность алюминия $\rho_\text{а} = 2{,}7 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$.

Решение

Условие плавания тела при частичном погружении:

$$(V_0\rho_\text{л} + V_\text{а}\rho_\text{а})g = \alpha(V_0 + V_\text{а})\rho_\text{в}g.$$

Условие плавания тела при полном погружении:

$$(V\rho_\text{л} + V_\text{а}\rho_\text{а})g = (V + V_\text{а})\rho_\text{в}g.$$

По условию задачи: $\beta = \dfrac{(V_0 - V)}{V_0}$. Выразив отсюда V и подставив его в условие плавания полностью погруженного тела, имеем:

$$\big(V_0(1-\beta)\rho_\text{л} + V_\text{а}\rho_\text{а}\big)g = \big(V_0(1-\beta) + V_\text{а}\big)\rho_\text{в}g.$$

Окончательно:

$$\beta = \frac{(1-\alpha)\rho_\text{в}(\rho_\text{а} - \rho_\text{л})}{(\rho_\text{а} - \alpha\rho_\text{в})(\rho_\text{в} - \rho_\text{л})} = 0{,}51 = 51\%.$$

Задача 10

Два кузнеца обрабатывают кусок железа. Сначала его кладут на массивную наковальню и бьют молотом по очереди, потом подвешивают к потолку и бьют одновременно с разных сторон. Сила удара каждого кузнеца одинакова в обоих случаях. В каком случае кусок железа больше нагревается за один удар каждого кузнеца?

Решение

Кусок железа нагревается больше во втором случае, так как в этом случае он не приобретает кинетической энергии в отличие от наковальни.

Задача 11

С деревянным шариком и высоким сосудом с водой проводятся четыре опыта по взвешиванию: в первом опыте шарик плавает в сосуде, во втором опыте шарик привязан ко дну сосуда. В третьем опыте шарик удерживается под водой с помощью тонкого стержня, и, наконец, в четвертом опыте шарик всплывает (см. рис. 22). В каком опыте масса гири, уравновешивающей сосуд с шариком, будет больше?

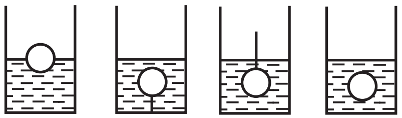


Рис. 22.

Решение

В третьем опыте масса гири будет больше, так как действует внешняя сила по удержанию стержня.

Задача 12

Тело движется по прямой. График зависимости его скорости v от координаты x приведен на рисунке 23. Найти ускорение тела в точке с координатой $x = 3$ м. Найти также максимальное ускорение тела на отрезке от 0 до 5 м.

Решение

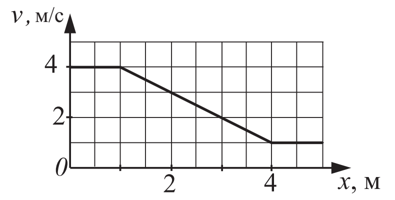


Рис. 23.

Из графика следует, что при $x < 1$ м и $x > 4$ м скорость тела постоянна, а значит, его ускорение равно нулю. В интервале от $x = 1$ м до $x = 4$ м связь между значениями скорости v и координаты x, выраженными в СИ, дается формулой

$$v = 5 - kx,$$

где k — размерный коэффициент, $k = 1c^{-1}$.

Пусть за малое время Δt скорость тела изменилась на величину Δv. Тогда:

$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) = [5 - kx(t+\Delta t)] - [5 - kx(t)] =$$
$$= -k[x(t+\Delta t) - x(t)] = -k\Delta x.$$

Разделив правую и левую часть на Δt, получаем:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -k\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

или

$$a = -kv.$$

Еще раз отметим, что в последней формуле множитель k перед скоростью равен единице и имеет размерность c^{-1}. Таким образом, в точке с координатой $x = 3$ м тело имеет скорость $v = 5 - 3 = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и ускорение $a = -2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Максимальное по модулю ускорение тело имеет в той точке, где максимальна по модулю его скорость, т.е. в точке, где его координата минимальна. Это точка с координатой $x = 1$ м. Скорость тела в этой точке равна $v = 5 - 1 = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а искомое (максимальное ускорение) равно

$$a = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Задача 13

«Хитрый» продавец на рынке торгует рыбой, взвешивая её на весах, сделанных из палки и верёвки (см. рисунок 2), причем не обманывает покупателей. Покупателю разрешается взвесить рыбу самому, но при условии, что рыба помещается только на левую чашку весов и не снимается до момента расплаты. Продавец разрешает провести максимум два взвешивания, предоставляя покупателю набор гирь. Как определить массу понравившейся вам рыбы? «Коромысло» весов с пустыми чашками занимает горизонтальное положение.

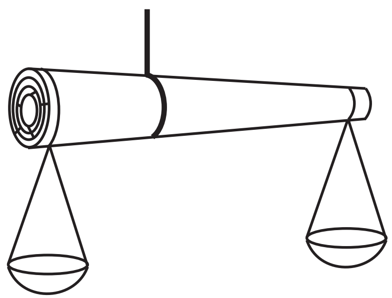


Рис. 24.

Решение

Из рисунка понятно, что продавец использует неравноплечие весы, причем длины плеч весов неизвестны и по условию задачи измерять их нельзя! Сначала, ради интереса, рассмотрим, как взвешивает рыбу продавец. Он может взвесить рыбу сначала на одной чашке весов, уравновесив ее гирями массой m_1, а затем на второй чашке, уравновесив ее гирями массой m_2. Обозначим длину одного из плеч весов a, а другого — b. Тогда условия равновесия весов при первом и втором взвешиваниях запишутся в виде:

$$ma = m_1 b, \qquad m_2 a = mb,$$

где m - неизвестная масса рыбы. Разделив эти соотношения друг на друга, получим:

$$m^2 = m_1 m_2,$$

откуда

$$m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

Покупателю этот путь недоступен, так как рыба всё время лежит на одной чашке весов. Однако, он может взвесить рыбу сначала на одной чашке весов, уравновесив ее гирями массой m_1, а затем может добавить на чашку, где лежит рыба, гирю известной массы m_3 и вновь провести взвешивание. При этом чашка с рыбой и гирей будет уравновешена гирями массы m_4. Условия равновесия весов в этом случае запишутся в виде:

$$ma = m_1 b, \qquad (m + m_3)a = m_4 b.$$

Разделив эти соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{m}{m + m_3} = \frac{m_1}{m_4},$$

откуда для истинного значения массы рыбы m получается

$$m = \frac{m_1 m_3}{m_4 - m_1}.$$

Так как в знаменателе стоит разность значений масс, полученных при двух взвешиваниях, то для повышения точности измерений необходимо, чтобы эта разность была не очень мала, т.е. нужно, чтобы массы m_1 и m_4 были не очень близки. Этого можно достичь, выбирая гирю m_3 побольше, тогда полученный результат будет точнее.

Задача 14

Автобус и велосипедист едут по одной прямой дороге в одном направлении с постоянными скоростями 63 км/час и 33 км/час. Грузовик едет по другой прямой дороге с постоянной скоростью 52 км/час. Расстояние от грузовика до автобуса все время равно расстоянию от грузовика до велосипедиста. Найти скорость грузовика относительно автобуса.

Решение

Автобус, велосипедист и грузовик в каждый момент времени образуют равнобедренный треугольник, основание которого лежит на дороге, по которой едут автобус и велосипедист (рис. 25). Направим ось x вдоль этой дороги в направлении движения автобуса и велосипедиста, а ось y — пер-

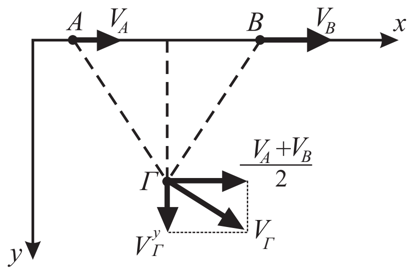


Рис. 25.

пендикулярно к ней. Тогда законы движения транспортных средств имеют вид:

Для автобуса:

$$x_A(t) = x_A^0 + V_A t, \quad y_A(t) = 0.$$

Для велосипедиста:

$$x_B(t) = x_B^0 + V_B t, \quad y_B(t) = 0.$$

Для грузовика:

$$x_\Gamma(t) = \frac{x_A^0 + x_B^0}{2} + \frac{V_A + V_B}{2} t, \quad y_\Gamma(t) = y_\Gamma^0 + V_\Gamma^y t.$$

Здесь верхними индексами «0» снабжены начальные координаты и скорости, буквами A, B, и Г обозначены величины, относящиеся к автобусу, велосипедисту и грузовику соответственно, а V_Γ^Y — проекция скорости грузовика на ось y. Заметим, что выражение для $X_\Gamma(t)$ получается из тех соображений, что грузовик все время находится в вершине равнобедренного треугольника, противоположной его основанию. Из этого, в частности, следует, что проекция скорости грузовика на ось x равна $\frac{V_A + V_B}{2}$. Из условия задачи нам известен модуль скорости грузовика V_Γ, которая связана со своими компонентами формулой:

$$V_\Gamma^2 = \left(\frac{V_A + V_B}{2}\right)^2 + (V_\Gamma)^2.$$

Отсюда проекция скорости грузовика на ось y

$$V_\Gamma = \sqrt{(V_\Gamma)^2 - \left(\frac{V_A + V_B}{2}\right)^2}.$$

Теперь мы знаем обе компоненты скорости грузовика, и найти скорость грузовика относительно автобуса не составляет труда. По теореме Пифагора, примененной к треугольнику скоростей, имеем

$$V_{\text{отн}}^2 = \left(V_A - \frac{V_A + V_B}{2}\right)^2 + \left(V_\Gamma^Y\right)^2,$$

откуда, с учетом выражения для V_Γ^Y,

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V_{\text{А}}^2 - V_A V_{\text{В}}} = 25\ \frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

Задача 15

Школьники побывали в музее Атомной электростанции г. Волгодонска и возвращались в Ростов-на-Дону на автобусах, которые ехали со скоростью $v_1 = 70$ км/ч. Пошел дождь, и водители снизили скорость до $v_2 = 60$ км/ч. Когда дождь кончился, до Ростова оставалось проехать $S = 40$ км. Автобусы поехали со скоростью $v_3 = 75$ км/ч и въехали в г. Ростов-на-Дону в точно запланированное время. Сколько времени шел дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Для упрощения считайте, что автобусы в пути не останавливались.

Решение

Средняя скорость автобуса — это отношение пройденного пути к затраченному времени. Так как расстояние от Атомной электростанции г.Волгодонска до Ростова-на-Дону из-за дождя не изменилось, и время, проведенное школьниками в автобусе, также не изменилось (потому что автобусы въехали в Ростов в точно запланированное время), то средняя скорость совпадает с начальной скоростью $v_{\text{ср}} = 70\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Пусть дождь шел в течение времени t. Тогда путь, пройденный за это время, составил $v_2 \cdot t$. Время, за которое после дождя автобусы проехали оставшееся расстояние, равно $\frac{S}{v_3}$. Ясно, что время, затраченное автобусами с момента начала дождя до прибытия в Ростов, должно равняться времени, которое потребовалось бы для преодоления того же расстояния с начальной скоростью v_1:

$$t + \frac{S}{v_3} = \frac{v_2 t + S}{v_1}.$$

Отсюда находим время, в течение которого шел дождь:

$$t = \frac{v_1}{v_1 - v_2}\left(\frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_3}\right) = \frac{S(v_3 - v_1)}{v_3(v_1 - v_2)} = 16 \text{ минут}.$$

Задача 16

На длинном прямом шоссе автомобили движутся с постоянной скоростью V_1 всюду, за исключением моста, на котором автомобили движутся с другой постоянной скоростью V_2. На рисунке 26 изображен график зависимости расстояния l между двумя едущими друг за другом автомобилями от времени t. Найти скорости V_1 и V_2, а также длину моста.

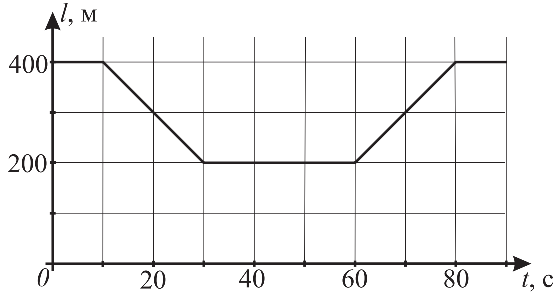


Рис. 26.

Решение

Пока оба автомобиля движутся по шоссе или по мосту, расстояние между ними остается постоянным: $l_1 = 400$ м или $l_2 = 200$ м. Расстояние l начинает уменьшаться, когда первый автомобиль въезжает на мост. Поэтому ясно, что второй автомобиль в этот момент ($t_1 = 10$ с на графике) находится на расстоянии $l_1 = 400$ м от въезда на мост.

При движении первого автомобиля по мосту расстояние между ним и вторым автомобилем, движущимся по шоссе, как видно из графика, сокращается до момента времени $t_2 = 30$ с на $l_1 - l_2 = 200$ м за время $t_2 - t_1 = 20$ с, то есть они сближаются со скоростью

$$V_1 - V_2 = \frac{l_1 - l_2}{t_2 - t_1} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, скорость $V_1 > 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, и время, за которое второй автомобиль доедет до моста, не может быть больше

$$\frac{400\ \text{м}}{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 40\ \text{с}.$$

В момент $t_2 = 30$ с расстояние между автомобилями перестает меняться. Это означает, что они снова движутся с одинаковыми скоростями — либо первый автомобиль съехал с моста, либо второй въехал на мост. В первом случае въезд второго автомобиля на мост будет соответствовать моменту времени $t_3 = 60$ с, когда расстояние между автомобилями начинает вновь расти (см. график).

Поскольку это произошло только через $t_3 - t_1 = 50$ с после въезда первого автомобиля на мост, первый случай невозможен, и в данных условиях реализуется вторая возможность, когда в момент $t_3 = 60$ с первый автомобиль съезжает с моста.

Значит, второй автомобиль проехал по шоссе $l_1 = 400$ м за время $t_2 - t_1 = 20$ с, и его скорость была равна

$$V_1 = \frac{l_1}{t_2 - t_1} = \frac{400}{20} = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость автомобилей на мосту, очевидно, равна

$$V_2 = V_1 - \frac{l_1 - l_2}{t_2 - t_1} = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}} - 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Первый автомобиль преодолел мост с этой скоростью $V_2 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ за время $t_3 - t_1 = 50$ секунд, так что длина моста равна

$$L = V_2 \cdot (t_3 - t_1) = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 50\ \text{с} = 500\ \text{м}.$$

Задача 17

Груз неизвестной массы взвешивают, уравновешивая его с гирькой известной массы M на концах тяжелого прямого коромысла; при этом равновесие достигается, когда точка опоры коромысла смещается от его середины на $x = \dfrac{1}{4}$ его длины в сторону гирьки. В отсутствие же груза на втором плече коромысло остается в равновесии при смещении его точки опоры от середины в сторону гирьки на $y = \dfrac{1}{3}$ его длины. Считая коромысло однородным по длине, найти массу взвешиваемого груза m.

Решение

Для решения задачи воспользуемся правилом рычага. При взвешивании груза неизвестной массы m на плечи коромысла длины L действуют силы mg, Mg и $m_k g$, где m_k — масса коромысла (см. рис. 27). Плечи этих сил равны $(0{,}5 + x)L$, $(0{,}5 - x)L$ и xL соответственно.

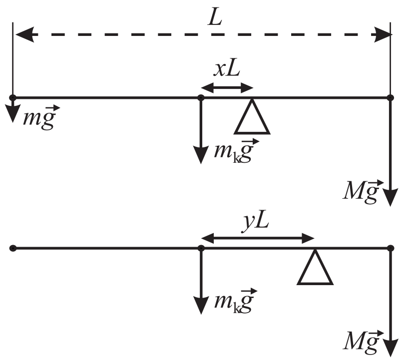


Рис. 27.

Условие равновесия рычага означает, что

$$mg(0{,}5 + x)L + m_k g x L = Mg(0{,}5 - x)L,$$

откуда

$$m = \frac{M(0{,}5 - x) - m_k x}{0{,}5 + x}.$$

Рассмотрим теперь второе взвешивание (без груза неизвестной массы), которое позволит нам найти массу коромысла. Плечи сил Mg и $m_k g$ будут теперь равны $(0{,}5 - y)L$ и yL соответственно. Тогда условие равновесия рычага дает:

$$m_k y L = M(0{,}5 - y)L,$$

откуда

$$m_k = \frac{M(0{,}5 - y)}{y}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{M(0{,}5 - x) - \dfrac{M(0{,}5 - y)}{y}x}{0{,}5 + x} = M\frac{0{,}5y - xy - 0{,}5x + xy}{(0{,}5 + x)y} =$$

$$= M\frac{y - x}{y(1 + 2x)} = M\frac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{3}\left(1 + 2\cdot\dfrac{1}{4}\right)} = \frac{M}{6}.$$

Задача 18

Диск начинает движение из состояния покоя и вращается равноускоренно. Каким будет угол между вектором скорости и вектором ускорения произвольной точки диска, когда диск сделает один оборот?

Решение

Т.к. вектор скорости всегда сонаправлен с вектором тангенциального ускорения, то вопрос задачи можно сформулировать как нахождение угла β между вектором тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ и вектором полного ускорения $\vec{a}_{\text{пол}}$(см. рис. **??**).

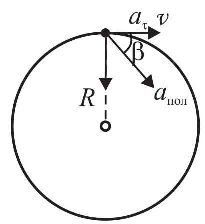


Рис. 28.

Путь пройденный телом за один оборот равен длине окружности можно выразить через a_τ и время t:

$$2\pi R = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}.$$

Центростремительное ускорение $a_ц = \dfrac{V^2}{R}$ или $a_ц = \dfrac{(a_\tau \cdot t)^2}{R}$.

По рисунку видно, что $\dfrac{a_\tau}{a_ц} = tg\beta$. Из приведенных формул легко получить, что $tg\beta = 4\pi$.

Тогда $\beta = \operatorname{arctg} 4\pi = 85°27'$.

Задача 19

Телу, находящемуся на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщили скорость V вдоль этой поверхности. За первые t секунд оно прошло путь S. Каким может быть коэффициент трения тела о поверхность?

Решение

Из второго закона Ньютона следует, что тело будет двигаться до остановки с постоянным ускорением $a = -\mu g$, где μ — искомый коэффициент трения. Понятно, что далее при решении задачи следует разделять два различных случая:

1) Тело остановится в течение первых t секунд;

2) Тело и в момент времени t будет продолжать двигаться.

Рассмотрим эти случаи. Прежде всего найдем время τ, через которое тело должно остановиться. Скорость движущегося тела изменяется по закону:

$$v = v_0 + at = v_0 - \mu g t.$$

В нашем случае $v_0 = V$. Откуда для момента остановки имеем:

$$\tau = \frac{V}{\mu g}.$$

Запишем закон движения тела в проекции на координатную ось, которая направлена вдоль вектора скорости v для каждого из случаев 1) и 2).

Случай 1 **(**$t > \tau$**)**.

$$S = V\tau - \frac{\mu g \tau^2}{2} = \frac{V^2}{2\mu g}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{V^2}{2gS},$$

а условие $t > \tau$ (с учетом выражения для τ) переписывается в виде

$$S < \frac{Vt}{2}.$$

Случай 2 ($t \leqslant \tau$**)**.

$$S = Vt - \frac{\mu g t^2}{2}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{2(Vt - S)}{gt^2},$$

а условие $t \leqslant \tau$ переписывается в виде

$$S \geqslant \frac{Vt}{2}.$$

Так как коэффициент трения положителен, то $S < Vt$. Учитывая все вышесказанное, запишем окончательный ответ:

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{V^2}{2gS}, & \text{при } 0 < S < \dfrac{Vt}{2}; \\ \mu = \dfrac{2(Vt - S)}{gt^2}, & \text{при } \dfrac{Vt}{2} < S < Vt. \end{cases}$$

При $S > Vt$ задача решений не имеет (такой случай невозможен).

Задача 20

(Слободянин В.)

Из пункта A в пункт B выехал автомобиль «Волга» со скоростью 80 км/ч. В то же время навстречу ему из пункта B выехал автомобиль «Жигули». В 12 часов дня машины проехали мимо друг друга. В 12 : 32 «Волга» прибыла в пункт B, а ещё через 18 минут «Жигули» прибыли в A. Вычислите скорость «Жигулей».

Решение

«Волга» проехала путь от пункта A до места встречи с «Жигулями» за время t_x, а «Жигули» этот же участок проехали за $t_1 = 50$ мин. В свою очередь, «Жигули» проехали путь от пункта B до места встречи с «Волгой» за время t_x, а «Волга» этот же участок проехала за $t_2 = 32$ минуты. Запишем эти факты в виде уравнений:

$$v_2 t_x = v_1 t_1, \qquad v_1 t_x = v_2 t_2,$$

где v_1 — скорость «Жигулей», а v_2 — скорость «Волги». Поделив почленно одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = 0{,}8.$$

Отсюда $v_1 = 0{,}8 v_2 = 64\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

10 класс

Задача 1

Сосновый брусок квадратного сечения со стороной квадрата $a = 0{,}5$ м и длиной $b = 1$ м плавает в воде как показано на рис. 29а. Какую работу необходимо совершить, чтобы перевести его в положение, указанное на рис. 29б? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3?

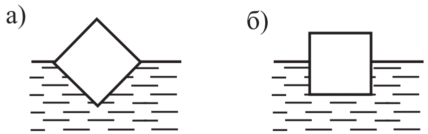


Рис. 29.

Решение

Сделаем чертеж (см. рис. 30).

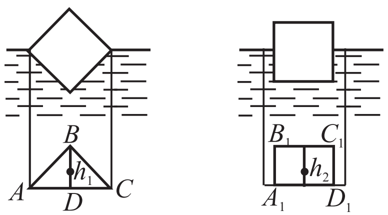


Рис. 30.

Работа будет равна изменению потенциальной энергии центра тяжести бруска:

$$A = m_{\text{в}} g (h_2 - h_1)$$

Из геометрических соотношений находим:

$$h_1 = \frac{BD}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \qquad h_2 = \frac{a}{4}$$

Выполняя преобразования, получим:

$$h_2 - h_1 = \frac{a(3 - 2\sqrt{2})}{12}$$

$$A = \rho \frac{a^2 b}{2} g \cdot \frac{a(3 - 2\sqrt{2})}{12}$$

Задача 2

Тело массы m летит горизонтально и ударяется в брусок массы M, подвешенный на тонком длинном и невесомом стержне длиной l. При какой минимальной скорости движения тела (m) маятник начнет вращаться, если: а) удар неупругий; б)удар упругий?

Решение

а) *Удар неупругий.*

По закону сохранения импульса:

$$m v_1 = (m + M) u \;\Rightarrow\; u = \frac{m}{m + M} v_1$$

Здесь u — скорость бруска с пулей.

По закону сохранения механической энергии после удара:

$$\frac{m + M}{2} u^2 = (m + M) 2gl \;\Rightarrow\; u^2 = 4gl \;\Rightarrow\; \frac{m^2}{(m + M)^2} v_1^2 = 4gl$$

$$v_1 = \sqrt{gl} \cdot 2 \frac{m + M}{m}.$$

б) *Удар упругий*

$$\begin{cases} mv_2 = Mu - mv' \\ \dfrac{mv_2^2}{2} = \dfrac{Mu^2}{2} + \dfrac{mv_2'}{2} \\ \dfrac{Mu^2}{2} = 2Mgl \end{cases} \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m+M}{m}\sqrt{gl}$$

Задача 3

Космический корабль влетает со скоростью v в облако космической пыли плотностью ρ_2. Чтобы скорость корабля не уменьшилась, включили двигатель. Какова плотность ρ_1 вытекающих из сопла сечения S_1 газов, если скорость их вытекания относительно корабля равна u, а сечение корабля S_2? Пылинки после удара прилипают к обшивке корабля.

Решение

Сделаем чертеж (см. рис. 31).

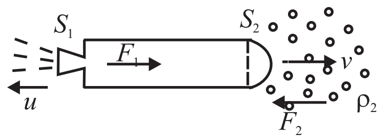


Рис. 31.

В системе отсчета, связанной с кораблем, в проекции на направление скорости корабля:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad \text{или} \quad F_1 - F_2 = 0$$

Реактивная сила равна:

$$F_1 = u\frac{\Delta m}{\Delta t} = u\rho_1\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = u\frac{\rho_1 S_1 \Delta l_1}{\Delta t} = u\rho_1 S_1 u$$

$$F_1 = u^2\rho_1 S_1$$

Аналогично $F_2 = v^2\rho_2 S_2$, тогда

$$u^2\rho_1 S_1 = v^2\rho_2 S_2,$$

откуда

$$\rho_1 = \rho_2\frac{S_2}{S_1}\frac{v^2}{u^2}.$$

Задача 4

На гладкой поверхности стоит брусок массой M. К бруску привязана нить длиной L, на конце которой находится шарик массой m (см. рис. 32). В начальный момент времени нить была отклонена на некоторый угол и отпущена без начальной скорости. Найти скорость бруска в момент, когда нить проходит через вертикальное положение, зная, что ее угловая скорость равна ω.

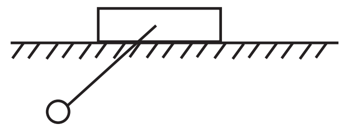


Рис. 32.

Решение

Сделаем чертеж (см. рис. 33).

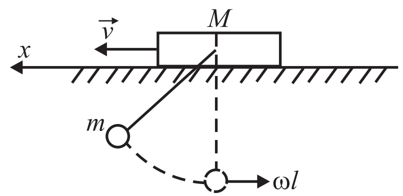


Рис. 33.

Закон сохранения импульса в проекциях на ось x:

$$Mv + mv - m\omega l = 0,$$

Центр масс не перемещается, откуда

$$v = \frac{m\omega l}{m+M}$$

Задача 5

В воде плавает в вертикальном положении труба, выступающая над поверхностью воды на 10 см. Внутрь трубы наливают масло плотностью 900 кг/м^3. Какой длины должна быть труба, чтобы её можно было целиком заполнить маслом? Положение трубы относительно воды не должно измениться.

Решение

На уровне дна давление масла равно давлению воды (см. рис. 34):

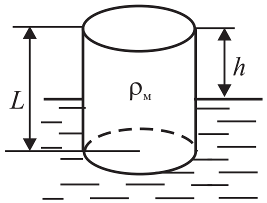


Рис. 34.

Решаем задачу в предположении безграничной жидкости:

$$\rho_{\text{м}} g L = \rho_{\text{в}} g(L-h),$$
$$\rho_{\text{м}} \cdot L = \rho_{\text{в}} L - \rho_{\text{в}} h,$$
$$(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}})L = \rho_{\text{в}} \cdot h;$$
$$L = \frac{\rho_{\text{в}} h}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}} = \frac{10^3 \cdot 10 \text{ см}}{10^3 - 900} = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}.$$

Задача 6

На горизонтальном столе лежит груз $M = 1$ кг. Коэффициент трения между столом и этим грузом $k_1 = 0{,}1$. На этот груз сверху положили еще один груз массой $M/2 = 0{,}5$ кг, причём коэффициент трения между грузами $k_2 = 0{,}25$. К нижнему грузу привязали нить и тянут её в горизонтальном направлении. С какой минимальной силой нужно тянуть, чтобы система пришла в движение? С какой силой пришлось бы тянуть, если бы нить была привязана к верхнему грузу?

Решение

Условие начала движения системы в целом:

$$F_1 = F_{\text{тр}1} = k_1\left(\frac{M}{2} + M\right)g = 1{,}5 \text{ Н}$$

Условие начала движения верхнего груза:

$$F_2 = F_{\text{тр}2} = k_2 \frac{M}{2} g = 1{,}25 \text{ Н}$$

Т.к. $F_1 > F_2$, то в этом случае система в движение не придет. Условием движения будет $F_1 = 1{,}5$ Н и нить привязана к нижнему грузу.

Задача 7

Вверх по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, пустили шайбу с начальной скоростью v_0. Когда шайба достигла половины максимальной высоты подъема, из той же начальной точки с такой же скоростью и в том же направлении пустили вторую шайбу. На каком расстоянии y от начальной точки встретятся шайбы?

Решение

За начало отсчета времени примем момент, когда запустили вторую шайбу, а первая в этот момент находилась на половине максимальной высоты подъема. Направим ось y вдоль наклонной плоскости; за нулевую точку примем точку начала движения шайб. Т.к. при движении тел по гладкой наклонной плоскости ускорение равно $g \sin\alpha$, то кинематические уравнения движения для этих шайб в проекции на ось y:

1. *для первой шайбы*

$$y_1 = y_0 + v_1 t - \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2,$$

где v_1 — скорость шайбы на середине максимальной высоты, а y_0 — координаты середины.

Легко рассчитать, что $v_1 = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$, а $y_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{v_0^2}{2g\sin\alpha}$ или $y_0 = \dfrac{v_0^2}{4g\sin\alpha}$.

2. *для второй шайбы*

$$y_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2.$$

В момент встречи $t = t_{\text{В}}$ координаты первой и второй шайбы совпадают, т.е. $y_1 = y_2$. Выразив из этого равенства $t_{\text{В}}$, получим:

$$t_{\text{В}} = \frac{y_0}{v_0 - v_1} \quad \text{или} \quad t_{\text{В}} = \frac{\sqrt{2} y_0}{v_0(\sqrt{2}-1)}.$$

Подставив значение $t_{\text{В}}$ в уравнение для второй шайбы, получим координату встречи:

$$y_{\text{В}} = \frac{y_0}{4}(5 + 2\sqrt{2}) \quad \text{или} \quad y_{\text{В}} = \frac{v_0^2(5+2\sqrt{2})}{16 g \sin\alpha}.$$

Задача 8

На нити подвешен груз массой $M = 100$ г. Пуля массой $m = 5$ г, летящая горизонтально, абсолютно упруго ударяется о груз. С какой минимальной скоростью V должна лететь пуля, если после удара груз начал вращаться вокруг точки подвеса. Длина нити $l = 50$ см.

Решение

Пусть V искомая скорость пули, а скорости V_1 и U скорости, которые приобретают пуля и шар после абсолютно упругого удара соответственно. Так как в этом случае справедливы закон сохранения импульса и закон сохранения энергии, то, полагая, что пуля после соударения летит назад, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} mV = -mV_1 + MU \quad \text{(Зак. сохр. имп)} \quad (1) \\ \dfrac{mV^2}{2} = \dfrac{mV_1^2}{2} + \dfrac{MU^2}{2} \quad \text{(Зак. сохр. энергии)} \quad (2) \end{cases}$$

Решение будет наиболее простым, если перенести выражения с массой пули в одну сторону от знака равенства.

Из (2) получим: $m(V^2 - V_1^2) = MU^2$; а из (1) получим: $m(V + V_1) = MU$. Поделив первое на второе, получим систему двух линейных уравнений первой степени относительно V_1 и U:

$$\begin{cases} V - V_1 = U \\ V + V_1 = \dfrac{M}{m}U \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$V = \frac{M+m}{2m}U \qquad (3)$$

Теперь перед нами стоит задача: чему должна равняться минимальная скорость шара U, чтобы шар сделал, хотя бы один, полный оборот. Для того чтобы шар на нити проходил верхнюю точку с минимальной скоростью, необходимо, чтобы в верхней точке сила натяжения нити была равна нулю (см. рис. 35). Т.к. энергия при движении шара на нити сохраняется, то, записав закон сохранения энергии и основное уравнение динамики вращательного движения, получим систему:

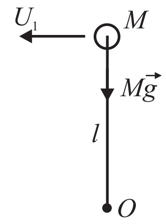


Рис. 35.

$$\begin{cases} \dfrac{mU^2}{2} = \dfrac{mU_1^2}{2} + 2Mgl \quad \text{(Зак. сохр. энер.)} \\ \dfrac{mU_1^2}{l} = Mg \quad \text{(Урав. вращат. движ.)} \end{cases}$$

Решая эту систему относительно U, получаем, что $U = \sqrt{5gl}$. Подставляя значение полученной скорости в формулу (3), окончательно получим $V = \dfrac{M+m}{2m}\sqrt{5gl}$.

Задача 9

На гладкой горизонтальной поверхности льда покоится доска массы M и длиной L, на одном из концов которой сидит котенок массы m. С какой наименьшей скоростью относительно льда он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец доски? Под каким углом к горизонту он должен прыгнуть, чтобы затратить при этом минимум энергии?

Решение

При прыжке котенка доска приобретает скорость отдачи «u», которую можно определить из закона сохранения импульса (в проекции на горизонтальное направление):

$$Mu = mv_0 \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$u = \frac{m}{M}v_0 \cdot \cos\alpha.$$

Котенок в своем прыжке попадает на другой конец доски, следовательно длина доски L равна сумме длин путей которое пролетел котенок

$L_К = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ и проехала доска $L_Д = ut$. Т.е. $L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + ut$. Время полета котенка легко находится, как время полного движения тела, брошенного под углом к горизонту, — $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Подставив в предыдущее уравнение значение u и t, окончательно получим, что

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)\sin 2\alpha}}.$$

Очевидно, что минимальная скорость котенка будет при прыжке под углом $\alpha = 45°$ и при этой скорости котенок затратит минимальную энергию для своего прыжка, следовательно:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{MgL}{M+m}};$$

Задача 10

На горизонтальной плоскости сидит лягушка. Навстречу ей издалека катится без проскальзывания барабан радиусом R. Центр барабана движется с постоянной скоростью v. С какой наименьшей скоростью должна подпрыгнуть лягушка, чтобы перепрыгнуть барабан, слегка коснувшись его только в верхней точке? В какой момент времени она должна прыгнуть? Размерами лягушки пренебречь.

Решение

Заметим, что в движущейся системе отсчета, связанной с центром барабана, ввиду его равномерного движения лягушка после прыжка будет двигаться по параболе. Направим ось X в этой системе по горизонтали вдоль плоскости в направлении от лягушки к барабану, а ось Y — вертикально вверх. Начало отсчета данной системы координат поместим на плоскости в том месте, где сидела лягушка, и будем отсчитывать время от момента прыжка. Значит, если лягушка прыгает в неподвижной системе отсчета под углом α к горизонту со скоростью W, имеющей горизонтальную составляющую W_x и вертикальную составляющую W_y, то зави-

симость координат лягушки от времени t во введенной нами движущейся системе координат будет иметь вид:

$$x = (W_x + v)t, \qquad y = W_y t - \frac{gt^2}{2}.$$

Максимальная высота подъема, очевидно, равна $y_0 = \dfrac{W_y^2}{2g}$ и должна совпадать с удвоенным радиусом цилиндра $2R$. Отсюда получается, что $W_y^2 = 4gR$. Эта высота достигается в момент времени $t_0 = \dfrac{W_y}{g}$ в точке с координатой

$$x_0 = (W_y + v)t_0 = \frac{W_x(W_x + v)}{g}.$$

Выразив время из зависимости $x(t)$ и подставив его в зависимость $y(t)$, получим уравнение траектории движения лягушки:

$$y = \frac{W_y x}{W_x + v} - \frac{gx^2}{2(W_x+v)^2} = y_0 - \frac{g(x-x_0)^2}{2(W_x+v)^2}.$$

(последнее равенство легко проверяется подстановкой; оно становится очевидным, если перенести начало системы координат в точку касания плоскости и барабана). Вблизи верхней точки параболы, находящейся в точке (x_0, y_0), это уравнение должно совпадать с уравнением окружности радиусом R с центром в точке (x_0, R):

$$y_0 - \frac{g(x-x_0)^2}{2(W_x+v)^2} = R + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2} \approx 2R - \frac{(x-x_0)^2}{2R}.$$

Отсюда получаем: $(W_x + v)^2 = gR$, откуда $W_x = \sqrt{gR} - v$. Следовательно, величина скорости лягушки в неподвижной системе отсчета равна

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{4gR + (\sqrt{gR} - v)^2} = \sqrt{5gR + v^2 - 2v\sqrt{gR}},$$

и она должна быть направлена под таким углом α к горизонту, чтобы

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W_y}{W_x} = \frac{2\sqrt{gR}}{\sqrt{gR} - v}.$$

Отметим, что при $v < \sqrt{gR}$ лягушка должна прыгать навстречу катящемуся барабану, а при $v \geqslant \sqrt{gR}$ — вертикально вверх.

Замечание. Задачу можно решить проще, воспользовавшись понятием радиуса кривизны траектории. Действительно, в движущейся системе отсчета радиус кривизны $R_{\text{КР}}$ траектории лягушки в верхней точке должен превышать R (траектория касается барабана), а ускорение лягушки имеет только нормальную составляющую, равную g. Отсюда получаем:

$$R_{\text{КР}} = \frac{(W_x + v)^2}{g} \geqslant R,$$

то есть $W_x \geqslant \sqrt{gR} - v$. Вертикальная составляющая скорости лягушки, очевидно, должна быть такой, чтобы она могла перепрыгнуть барабан высотой $2R$, то есть

$$W_y = \sqrt{2g \cdot 2R} = 2\sqrt{gR}.$$

Отсюда сразу следует ответ.

Задача 11

Цилиндр массой M поместили на рельсы, наклоненные под углом α к горизонту (вид сбоку показан на рисунке 36). Груз какой минимальной массы m нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он стал катится вверх? Проскальзывание отсутствует.

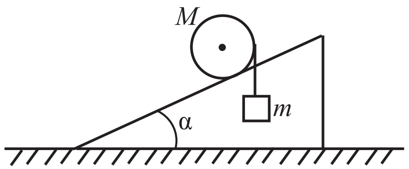


Рис. 36.

Решение

На цилиндр действуют приложенная к его центру масс сила тяжести Mg и приложенная к его краю сила натяжения нити, равная mg (см. рис. 37).

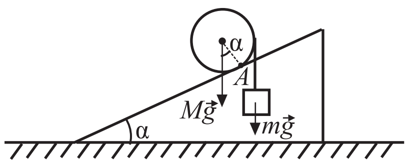


Рис. 37.

Цилиндр покатится вверх, если момент силы тяжести относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка, будет меньше момента силы натяжения нити. Поскольку плечи сил тяжести и натяжения нити равны $R\sin\alpha$ и $R(1 - \sin\alpha)$, то искомое условие имеет вид:

$$MgR\sin\alpha < mgR(1 - \sin\alpha),$$

или

$$m > \frac{M\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

Задача 12

Однажды барон Мюнхгаузен поднялся на привязанном к земле воздушном шаре над полем боя на высоту 150 м. Мимо него, параллельно земле, пролетает тяжелое ядро, пущенное из лагеря неприятеля. Барон садится на ядро и летит на нем до самой земли. Найти, под каким углом α к горизонту было запущено ядро, если Мюнхгаузен приземлился на расстоянии 150 м по горизонтали от воздушного шара. Массы ядра и барона одинаковы. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Мюнхгаузен вместе с ядром начал полет на высоте $H = 150$ м и пролетел до приземления по горизонтали такое же расстояние H. Поэтому время полета равно $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, горизонтальная скорость Мюнхгаузена на ядре равнялась $V_{\Gamma} = \dfrac{H}{t} = \sqrt{\dfrac{gH}{2}}$.

Из закона сохранения импульса можно найти скорость ядра $V_{\text{Я}}$ непосредственно перед тем моментом, когда на него сел Мюнхгаузен (массы ядра и барона одинаковы и равны M): $MV_{\text{Я}} = (M + M)V_{\Gamma}$, откуда $V_{\text{Я}} = 2V_{\Gamma} = \sqrt{2gH}$. Значит, ядро из лагеря неприятеля было запущено с такой же горизонтальной составляющей скорости $V_{\Gamma\text{Я}} = V_{\text{Я}} = \sqrt{2gH}$.

Вертикальную составляющую начальной скорости ядра легко определить из тех соображений, что она уменьшилась до нуля за время полета ядра от земли до Мюнхгаузена: $V_{ВЯ} = \sqrt{2gH}$.

Поэтому угол α, под которым ядро было запущено к горизонту, равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{V_{ВЯ}}{V_{ГЯ}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Задача 13

На длинную тележку, движущуюся со скоростью V без трения по горизонтальным рельсам, сыплется сверху песок так, что за каждую секунду на нее попадает μ килограммов песка. Точно такое же количество песка сбрасывается с тележки с постоянной относительно нее скоростью U в направлении, противоположном ее движению. Какую горизонтальную силу нужно прикладывать к тележке, чтобы поддерживать ее скорость постоянной?

Решение

За промежуток времени Δt на тележку падает масса песка $\mu\Delta t$, приобретая относительно неподвижных рельсов горизонтальный импульс, равный $\Delta p_1 = \mu\Delta t \cdot V$.

За это же время точно такая же масса песка, двигавшаяся на тележке со скоростью V, сбрасывается с тележки назад с относительной скоростью U, так что скорость этой массы песка становится равной $V - U$. Изменение ее импульса составляет $\Delta p_2 = \mu\Delta t\cdot(V-U) - \mu\Delta t\cdot V = -\mu\Delta t\cdot U$. Следовательно, горизонтальный импульс массы песка $\mu\Delta t$ изменяется на величину

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \mu\Delta t\cdot(V - U).$$

В соответствии со вторым законом Ньютона, приращение импульса системы за время Δt равно импульсу действующей на нее силы: $\Delta p = F\cdot\Delta t$. Отсюда горизонтальная сила, действующая на данную массу песка со стороны тележки, равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \mu(V - U).$$

Точно такую же силу нужно прикладывать к тележке, чтобы ее скорость оставалась постоянной.

Задача 14

Какую работу необходимо совершить, чтобы достаточно медленно переместить небольшой ящик массы m из точки O в точку B по горке, действуя на него силой, направленной по касательной к траектории его движения? Профиль горки показан на рисунке 38, коэффициент трения ящика о горку равен μ, ускорение свободного падения равно g. Указанные на рисунке значения координат считать известными.

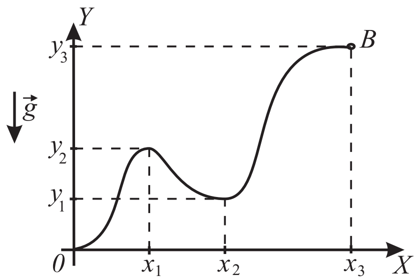


Рис. 38.

Решение

По условию задачи ящик двигают медленно (квазистатично). Это означает, что в любой момент времени сумма действующих на ящик сил равна нулю.

Рассмотрим столь малый отрезок горки длиной Δl_i, что его можно считать прямолинейным участком наклонной плоскости, образующим с горизонтом угол α. Тогда сила, которую нужно прилагать к ящику для его медленного равномерного перемещения по этому участку, равна $F_i = mg(\sin\alpha_i + \mu\cos\alpha_i)$. Работа, совершаемая такой силой на данном участке, равна

$$\Delta A_i = F_i\Delta l_i = mg(\Delta l_i\sin\alpha_i + \mu\Delta l_i\cos\alpha) = mg(\Delta y_i + \mu\Delta x_i).$$

Здесь Δx_i и Δy_i — проекции отрезка Δl_i на оси X и Y соответственно.

Из рисунка видно, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$. Поэтому все $\Delta x_i = \Delta l_i\cos\alpha_i > 0$ (ящик все время движется направо, вдоль оси X), а величины $\Delta y_i = \Delta l_i\sin\alpha_i$ могут быть как положительными (ящик поднимается), так и отрицательными (ящик опускается).

Таким образом, искомая работа по перемещению ящика из точки O в точку B по горке равна

$$A = \sum_i A_i = mg \sum_i (\Delta y_i + \mu \Delta x_i) = mg\Big(\sum_i \Delta y_i + \mu \sum_i \Delta x_i\Big) =$$
$$= mg(y_3 + \mu x_3).$$

необходимо совершить работу $A = mg(y_3 + \mu \cdot x_3)$.

Задача 15

Тонкую длинную планку, параллельную оси y, перемешают вдоль оси Ox с постоянной скоростью v_1. Её пересекает под углом α другая планка (рис. 39), скорость которой v_2. С какой скоростью движется вдоль оси Oy точка A, лежащая на пересечении планок?

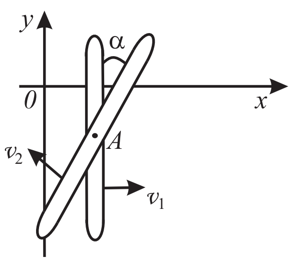


Рис. 39.

Решение

Пусть в некоторый момент времени планки пересекаются в точке A, лежащей на оси Ox. Через промежуток времени Δt они будут пересекать ось Ox соответственно в точках A_1 и A_2, которые отстоят друг от друга на расстояние

$$\Delta x = v_1 \Delta t + \frac{v_2 \Delta t}{\cos\alpha}.$$

За время Δt место пересечения планок сместилось вдоль оси Oy на расстояние $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{\operatorname{tg}\alpha}$. Следовательно, искомая скорость

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \left(v_1 + \frac{v_2}{\cos\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{v_1 cos\alpha + v_2}{\sin\alpha}.$$

Задача 16

При гребле на байдарке по «гладкой воде» в месте вытаскивания весла из воды образуется маленький водоворотик. Если гребец делает $n_1 = 24$ гребка в минуту, то расстояние между соседними водоворотиками равно $L_1 = 4$ м. Вычислите расстояние L_2 между водоворотиками, если тот же гребец на той же лодке будет делать $n_2 = 20$ гребков в минуту. Считайте, что в обоих случаях за один гребок спортсмен всегда совершает одну и ту же работу, а лодка движется с постоянной скоростью. Со стороны воды на лодку действует сила сопротивления F, прямо пропорциональная скорости лодки.

Решение

Пусть любителем водных походов за один гребок совершается работа A_0. Тогда в первом случае он развивает мощность $P_1 = n_1 A_0$, а во втором случае $P_2 = n_2 A_0$.

По условию скорости лодок в обоих случаях постоянны и равны v_1 и v_2. Следовательно, мощность гребца затрачивается на преодоление сопротивления воды:

$$P_1 = F_1 v_1, \qquad P_2 = F_2 v_2.$$

С учетом того, что $F = av$, где a — коэффициент пропорциональности, последние равенства можно переписать в виде:

$$P_1 = a v_1^2, \qquad P_2 = a v_2^2.$$

Приравняв известные выражения для мощностей, получим:

$$n_1 A_0 = a v_1^2, \qquad n_2 A_0 = a v_2^2.$$

Следовательно,

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}.$$

Расстояния между соседними водоворотиками в первом и во втором случаях равны соответственно

$$L_1 = \frac{v_1}{n_1}, \qquad L_2 = \frac{v_2}{n_2}.$$

Отсюда

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{v_2}{v_1}\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}.$$

Окончательно

$$L_2 = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}L_1 \approx 4{,}4 \text{ м}.$$

Задача 17

(Шеронов А.)

U-образная длинная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения заполнена ртутью так, что в каждом из открытых в атмосферу вертикальных колен остаётся слой воздуха высотой $H = 320$ мм. Правое колено плотно закрыли пробкой, а в левое опустили кусок свинцовой проволоки, зазор между проволокой и трубкой много меньше диаметра трубки (рис. 40). Какой максимальной длины L могла быть проволока, если при этом ртуть не выливалась из зазора между проволокой и трубкой?

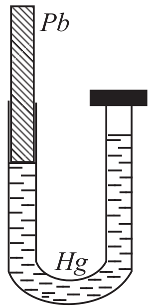


Рис. 40.

Примечание. Плотность ртути $\rho_{Hg} = 13{,}55\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, плотность свинца $\rho_{Pb} = 11{,}35\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Атмосферное давление $p_0 = 760$ мм. рт. ст., температура в течение всего опыта оставалась постоянной.

Решение

Пусть площадь сечения проволоки равна S. Плотность свинца меньше плотности ртути, поэтому проволока плавает в левом колене трубки, опустившись ниже первоначального уровня ртути на глубину H. При наибольшей длине проволоки ртуть слева доходит до края трубки. Давление воздуха в правом колене возрастёт до p счёт подъема уровня ртути на высоту ΔH.

По закону Паскаля

$$p_0 + \rho_{Hg}gH = p + \rho_{Hg}g\Delta H,$$

откуда имеем

$$p - p_0 = \rho_{Hg}g(H - \Delta H).$$

По закону Бойля–Мариотта для воздуха в правом колене

$$p_0HS = p(H - \Delta H)S.$$

Решаем последующие два равенства совместно:

$$p_0 = (p_0 + \rho_{Hg}g(H - \Delta H))(H - \Delta H),$$

$$H - \Delta H = -\frac{p_0}{2\rho_{Hg}g} \pm \sqrt{\frac{p_0^2}{4\rho_{Hg}^2g^2} + \frac{p_0H}{\rho_{Hg}g}}.$$

Отсюда находим ΔH:

$$\Delta H = H + \frac{p_0}{2\rho_{Hg}g} - \sqrt{\frac{p_0^2}{4\rho_{Hg}^2g^2} + \frac{p_0H}{\rho_{Hg}g}} = 80 \text{ мм}.$$

Условия плавания проволоки:

$$\rho_{Pb}gSL = \rho_{Hg}gS(H + \Delta H).$$

Окончательно

$$L = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{Pb}}(H + \Delta H) \approx 480 \text{ мм}.$$

11 класс

Задача 1

На поверхности земли взорвался маленький шар так, что осколки разлетелись во все стороны равномерно с одинаковой по модулю скоростью V. Какова масса осколков, выпавших на поверхность вне круга радиуса R (с центром в точке взрыва), если полная масса осколков равна M? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Координаты r точек падения осколков (см. рис. 41):

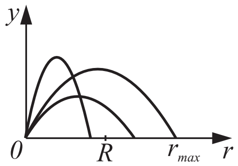


Рис. 41.

$$r = v\cos(\alpha)2t,$$

где $t = \dfrac{v\sin(\alpha)}{g}$, таким образом $r = \dfrac{v^2}{g}\sin(2\alpha)$.

Максимальная дальность $r_{max} = \dfrac{v^2}{g}$ имеет место при $2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ или $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Радиусу окружности R соответствует угол α_R:

$$R = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha_R).$$

За этот радиус r_{max} залетают осколки, имевшие углы:

$$\alpha_R \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha_R,$$

где $\alpha_R = \dfrac{1}{2}\arcsin\Big(\dfrac{Rg}{v^2}\Big)$.

При равномерном распределении

$$\frac{m}{M} = \frac{\Delta S}{S},$$

где $S = 4\pi R_{\text{ш}}^2$, а $\Delta S = 2\pi R_{\text{ш}} h$, h — высота сферического пояса, заключенного между углами α_R и $\Big(\dfrac{\pi}{2} - \alpha_R\Big)$.

$$h = R_{\text{ш}}\Big[\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha\Big) - \sin\Big(\alpha_R\Big)\Big] = R_{\text{ш}} 2\cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \alpha_R\Big)$$

или

$$h = R_{\text{ш}}\sqrt{2}\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \alpha_R\Big).$$

Таким образом,

$$\frac{m}{M} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \alpha_R\Big) \quad \text{и} \quad m = M\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\Big(\frac{Rg}{v^2}\Big)\Big).$$

Задача 2

С какой высоты падает груз массой 10 кг на невесомую вертикальную пружину жесткостью 1000 Н/м, если максимальная сила давления пружины на пол равна 400 Н? Длина пружины в ненапряженном состоянии 1 м. Высота отсчитывается от пола.

Решение

Обозначим высоту с которой падает груз через h, а x — деформацию пружины в момент максимального давления на пол. Максимальное давление наступает в момент, когда упавший на пружины груз, сжимая ее, останавливается. По закону сохранения энергии потенциальная энергия груза на высоте h переходит в потенциальную энергию пружины сжатой на величину x и потенциальную энергию груза, который в этот момент находится на высоте $(l - x)$, т.е.

$$mgh = \frac{kx^2}{2} + mg(l - x). \qquad (1)$$

Максимальная сила давления определяется суммой сил: силой тяжести и силой упругости сжатой пружины, т.е.

$$F_{\text{дав}} = mg + kx. \qquad (2)$$

Из второго уравнения легко находится, что $x = 0{,}3$ м. Далее, подставляя это значение в первое уравнение находим, что $h = 1{,}5$ м.

Задача 3

Земля, по современным геофизическим данным, состоит из трёх основных слоёв: коры (её толщина очень мала по сравнению с остальными слоями), мантии и ядра. При этом бо́льшая часть вещества Земли находится в жидком (расплавленном) состоянии. В физической энциклопедии приводятся следующие графики зависимости плотности ρ земного вещества и

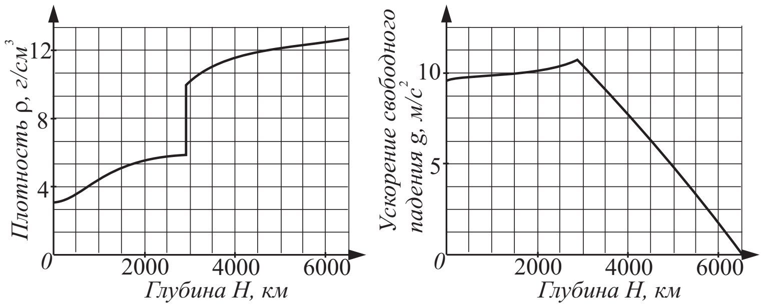


Рис. 42.

ускорения свободного падения g от глубины H (см. рис. 42). Оцените, то есть рассчитайте приближённо, давление в центре Земли (для такой оценки зависимости $\rho(H)$ и $g(H)$ можно разумным образом упростить на каждом отдельным участке). Попытайтесь объяснить также, почему до глубин порядка 3000 км ускорение свободного падения g возрастает.

Решение

Исходя из условия задачи, воспользуемся моделью жидкой Земли. Слой жидкости плотностью ρ и толщиной ΔH создаёт гидростатическое давление $\Delta p = \rho g \Delta H$, где g — ускорение свободного падения. Поскольку ρ и g изменяются с глубиной H, то вычисление давления «в одну строчку» невозможно. Обратим внимание на то, что создаваемое слоем жидкости гидростатическое давление для всех нижележащих слоёв будет внешним. Таким образом, по закону Паскаля это давление добавляется к гидростатическому давлению нижележащих слоёв. Отсюда получаем алгоритм решения задачи.

Разобьем Землю на слои толщиной ΔH и рассчитаем добавку к давлению в центре Земли от каждого слоя. Для этого перемножим ΔH и средние значения $\rho_{\text{ср}}$ и $g_{\text{ср}}$, относящиеся к середине каждого слоя. Затем сложим все добавки и получим оценку для давления в центре Земли (см. таблицу):

$$p_{\text{ц}} \approx 3{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{Па} = 3{,}5\ \text{Мбар}\ \ (1\ \text{бар} = 10^5\ \text{Па}).$$

Это значение хорошо согласуется с приведенным в Физической энциклопедии: $p_{\text{ц}} \approx 3{,}6$ Мбар. При разбиении на слои разной толщины наши оценочные значения, естественно, могут различаться, но разумной является оценка в пределах 3 – 4 Мбар.

H, км	ΔH, км	$\rho_{\text{ср}}$, $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$g_{\text{ср}}$, $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\Delta p(H) = \rho_{\text{ср}} g_{\text{ср}} \Delta H$, 10^{10} Па	$p = \sum \Delta p(H)$, 10^{10} Па
0	500	3,5	9,8	1,72	0
500	500	4,0	9,9	1,98	1,7
1000	500	4,8	9,9	2,38	3,7
1500	500	5,1	10,0	2,55	6,1
2000	500	5,5	10,0	2,75	8,6
2500	400	5,9	10,3	2,43	11,4
2900	600	10,3	9,6	5,93	13,8
3500	500	11,0	8,2	4,51	19,7
4000	500	11,5	6,8	3,91	24,3
4500	500	12,0	5,3	3,18	28,2
5000	500	12,2	3,8	2,32	31,3
5500	500	12,3	2,1	1,29	33,7
6000	400	12,5	0,8	0,40	35,0
6400	—	—	—	—	35,4

Относительно роста величины g с глубиной вплоть до $H \approx 2900$ км можно сказать следующее. Однородные сферические слои, лежащие выше точки наблюдения, не создают дополнительной силы притяжения. Тело, находящееся на глубине H, притягивается только нижележащими слоями, и ускорение свободного падения на глубине $H = R_З - R$ под поверхностью Земли для него равно, согласно закону всемирного тяготения, $g(H) = \dfrac{GM(R)}{R^2}$. Здесь $R_З \approx 6400$ км — радиус Земли, G — гравитационная постоянная, R — расстояние от центра Земли, $M(R)$ — масса всех слоев, расположенных ниже глубины H, то есть на расстояниях от центра Земли, меньших R. Поскольку плотность коры и мантии Земли значительно меньше, чем плотность ее ядра, то с ростом глубины вплоть до $H \approx 2900$ км величина $M(R)$ убывает немного медленнее, чем R^2, что и приводит к небольшому возрастанию $g(H)$ с глубиной. В пределах ядра Земли плотность почти постоянна, масса $M(R)$ убывает почти пропорционально R^3, и величина $g(H)$ убывает практически линейно по R.

Задача 4

Пружинное ружье наклонено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Энергия сжатой пружины 0,41 Дж. При выстреле шарик массой $m = 50$ г проходит по стволу ружья расстояние $b = 0{,}5$ м, вылетает и падает на расстоянии L от дула ружья в точку M, находящуюся с ним на одной высоте (см. рисунок 43). Найдите расстояние L. Трением в стволе и сопротивлением воздуха пренебречь.

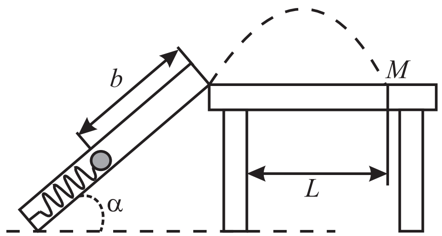


Рис. 43.

Решение

По закону сохранения энергии

$$E_0 = \frac{mV_0^2}{2} + mgb\sin\alpha, \qquad (1)$$

где E_0 — энергия сжатой пружины, а V_0 — скорость шарика в момент вылета из дула ружья. Согласно формулам кинематики, дальность полета тела брошенного под углом к горизонту,

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (2)$$

Комбинируя формулы (1) и (2), находим

$$L = \frac{2}{mg}\sin 2\alpha \cdot (E_0 - mb\sin\alpha).$$

Подстановка численных значений в эту формулу дает результат 1 м.

Задача 5

Две одинаковые упругие шайбы массой M каждая движутся в одну сторону по гладкому горизонтальному столу с одинаковыми скоростями v вдоль линии, проходящей через центры шайб. Расстояние между шайбами L. Передняя шайба налетает на небольшое покоящееся тело массой m, которое прилипает к шайбе. Через какое время после этого шайбы столкнуться между собой? Какие скорости будут иметь шайбы после абсолютно упругого лобового соударения?

Решение

В системе отсчета, движущейся со скоростью v. Шайбы до удара неподвижны, а тело m налетает на переднюю шайбу со скоростью v. Скорость шайбы вместе с прилипшим телом становится равной

$$v_1 = \frac{mv}{M+m}.$$

Время, за которое передняя шайба, двигаясь теперь уже навстречу задней, пройдет разделяющие шайбы расстояние, равно

$$T = \frac{L}{v_1} = \frac{L(M+m)}{mv}.$$

Составляем уравнения для абсолютно упругого удара

$$\begin{cases} (M+m)v_1 = (M+m)u_1 + Mu_2 \\ (M+m)v_1^2 = (M+m)u_1^2 + Mu_2^2 \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$u_1 = \frac{2mv}{2M+m}$$

$$u_2 = \frac{m^2 v}{(M+m)(2M+m)}$$

Не забудьте отнять v.

Задача 6

(Фольклор)

Ученые обратили внимание на то, что единицы длины, времени и массы «приспособлены» к людям и связаны с особенностями планеты Земля, но могут оказаться «неудобными» при контактах с представителями внеземных цивилизаций. Поэтому было предложено в качестве основных механических единиц взять фундаментальные постоянные $c \approx 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $G \approx 7 \cdot 10^{-11}\,\frac{H \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ и $\hbar \approx 1 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Тогда единицы длины l_p, времени t_p и массы m_p будут производными от этих физических величин и выражаться через них. Такие единицы назвали планковскими.

Выразите единицы длины l_p, времени t_p и массы m_p через «новые» основные единицы c, G и $\hbar$, взятые в соответствующей степени. Примите коэффициент пропорциональности между производной единицей и основными единицами равным 1. Сколько метров в единице длины l_p, секунд в единице времени t_p и килограммов в единице массы m_p?

Решение

Размерность скорости света — $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Заметив, что Ньютон $H = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$, а Джоуль Дж $= \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$, получим соответствующую размерность для гравитационной постоянной $\frac{\text{кг}^3}{(\text{м} \cdot \text{с}^2)}$ и постоянной Планка $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.

Найдём размерность комбинации $x = \text{c}^\alpha G^\beta \hbar^\gamma$:

$$[x] = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^\alpha \left(\frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}\right)^\beta \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}\right)^\gamma = \text{м}^{\alpha+3\beta+2\gamma}\text{с}^{-\alpha-2\beta-\gamma}\text{кг}^{-\beta+\gamma}.$$

Для l_p имеем:

$$\begin{cases} \alpha_l + 3\beta_l + 2\gamma_l = 1, \\ -\alpha_l - 2\beta_l - 2\gamma_l = 0, \\ -\beta_l + \gamma_l = 0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} \alpha_l = -\frac{3}{2}, \\ \beta_l = \frac{1}{2}, \\ \gamma_l = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-35}\ \text{м}.$$

Для t_p:

$$\begin{cases} \alpha_t + 3\beta_t + 2\gamma_t = 0, \\ -\alpha_t - 2\beta_t - \gamma_t = 1, \\ -\beta_t + \gamma_t = 0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} \alpha_t = -\frac{5}{2}, \\ \beta_t = \frac{1}{2}, \\ \gamma_t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44}\ \text{с}.$$

Отметим, что можно было не решать систему, а сразу заметить, что $t_p = \frac{l_p}{c}$.

Для m_p:

$$\begin{cases} \alpha_m + 3\beta_m + 2\gamma_m = 0, \\ -\alpha_m - 2\beta_m - \gamma_m = 0, \\ -\beta_m + \gamma_m = 1, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} \alpha_m = \frac{1}{2}, \\ \beta_m = -\frac{1}{2}, \\ \gamma_m = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$m_p = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{кг}.$$

§2. Молекулярная физика

8 класс

Задача 1

Внутри большой кастрюли, наполненной водой и стоящей на плите, плавает маленькая кастрюля. Можно ли таким образом вскипятить воду в маленькой кастрюле?

Решение

Нет, нельзя. Когда температура в маленькой кастрюле достигнет 100°С, к ней перестанет подводиться тепло. А без подвода тепла на парообразование кипение не возможно. Можно рассмотреть другие варианты.

Задача 2

В калориметре находился лёд массой $m_л = 0{,}5$ кг при температуре $t_л = -20°$С. Удельная теплоёмкость льда $c_л = 2100\ \dfrac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot\text{град})}$, а его удельная теплота плавления $\lambda = 340$ кДж/кг. В калориметр впустили пар массой $m_п = 60$ г при температуре $t_п = 100°$С. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4100\ \dfrac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot\text{град})}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2\cdot 10^6$ Дж/кг. Теплоёмкостью калориметра и потерями тепла пренебречь. Ответьте на тот же вопрос, если начальная масса льда равна $m_{л1} = 0{,}3$ кг.

Решение

Сначала нужно выяснить, что будет находиться в калориметре в конечном состоянии — только лёд, смесь льда и воды или только вода. Сравниваем количества теплоты, которые входят в уравнение теплового баланса, в первом случае. Теплота, выделяющаяся при конденсации всего пара, равна

$$Q_1 = r\cdot m_п = 2{,}2\cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\cdot 60\cdot 10^{-3}\ \text{кг} = 132\ \text{кДж}.$$

Теплота, необходимая для нагревания всего льда до точки плавления, то есть до 0°С, равна

$$Q_2 = c_л m_л(0°\text{C} - t_л) = 2100\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot°\ \text{C})}\cdot 0{,}5\ \text{кг}\cdot 20°\text{C} = 21\ \text{кДж}.$$

Теплота от конденсации всего пара больше, значит, лёд будет плавиться. Общее количество теплоты, выделяющееся при конденсации пара и охлаждении образовавшейся из него воды до 0°С, составляет

$$Q_3 = Q_1 + c_в m_п(t_п - 0°\text{C}) = 1{,}32\cdot 10^5\ \text{Дж} +$$

$$+4100\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot°\ \text{C})}\cdot 60\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot 100°\text{C} = 156{,}6\ \text{кДж},$$

что меньше теплоты, нужной для того, чтобы весь лёд, взятый при начальной температуре, расплавился:

$$Q_4 = Q_2 + \lambda m_л = 21\cdot 10^3\ \text{Дж} + 340\cdot 10^3\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}\cdot 0{,}5\ \text{кг} = 191\ \text{кДж}.$$

Значит, растает только часть льда, и конечная температура смеси будет 0°С. Во втором случае в конечном состоянии в калориметре, очевидно, будет только вода. Рассчитаем Q_4' для этого случая:

$$Q_4' = Q_2' + \lambda m_{л1} = 2100\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot°\ \text{C})}\cdot 0{,}3\ \text{кг}\cdot 20°\text{C} +$$

$$+340\cdot 10^3\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}\cdot 0{,}3\ \text{кг} = 114{,}6\ \text{кДж}.$$

Эта величина меньше общего количества теплоты Q_3, выделяющегося при конденсации пара и охлаждении образовавшейся из него воды до 0°С. Поэтому для расчета температуры, которая установится в калориметре в этом случае, надо записать уравнение теплового баланса:

$$Q_4' + c_в m_{л1}(t - 0°\text{C}) = Q_1 + c_в m_п(t_п - t),$$

или

$$c_в(m_{л1} + m_п)t = Q_1 - Q_4' + c_в m_п t_п.$$

Выражая отсюда температуру t, окончательно получаем:

$$t = \frac{r m_п - \lambda m_{л1} + c_п m_{л1} t_п + c_в m_п t_п}{c_в(m_{л1} + m_п)} \approx 28°\text{C}.$$

Итак, при массе льда 0,5 кг установится температура 0°С, при массе льда 0,3 кг — 28°С.

Задача 3

Определить примерный размер молекулы оливкового масла, если его капля объемом 2 мм^3 растекается по поверхности воды, образуя тонкую пленку максимальной площадью примерно 1 м^2.

Решение

Капля масла растекается по поверхности воды практически мономолекулярным слоем. Поэтому размер молекулы d примерно равен толщине пленки. Пренебрегая изменением объема капли V при растекании, получаем:

$$V = Sd,$$

где S — максимальная площадь пленки. Из этого соотношения получаем:

$$d = \frac{V}{S} = \frac{2\ \text{мм}^3}{1\ \text{м}^2} = 2\ \text{нм}.$$

9 класс

Задача 1

Дистиллированную воду можно охладить до температуры $-10°$C, и она не замерзнет. Но, если в эту переохлажденную воду бросить кристаллик льда, то она сразу же начинает замерзать. Какая часть воды замерзнет? Потерями пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4\cdot 10^5\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Решение

Часть замерзшей воды $\frac{m_1}{m}$. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды от $t°$C до $0°$C:

$$Q = c(m - m_1)\cdot(0 - t)$$

Количество теплоты, выделяемой при образовании льда

$$Q_1 = \lambda m_1$$

По закону сохранения энергии

$$Q = Q_1.$$

Окончательно получим

$$\frac{m}{m_1} = 0{,}11.$$

Задача 2

У поверхности воды мальчик выпускает камень, и он опускается на дно пруда на глубину $H = 5$ м. Какое количество теплоты выделится при падении камня, если его масса 500 г, а объем 200 см^3.

Решение

Пусть P — вес камня, а P_1 — вес вытесненной воды им воды. При погружении камня ко дну потенциальная энергия его уменьшается на PH, а потенциальная энергия воды возрастает на P_1H. По закону сохранения энергии количество выделенной теплоты равно уменьшению потенциальной энергии системы камень - вода.

$$Q = PH - P_1H = 73{,}5\ \text{Дж}.$$

Задача 3

В медный калориметр массой 100 г, содержащий воду массой 500 г при температуре $t_1 = 50°$C, опустили лед при температуре $t_2 = -30°$C. Масса льда 1,5 кг. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоемкость меди равна 380 $\frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot K)}$.

Решение

Т.к. льда очень много, то необходимо проверить будет ли таять лед? Для этого определим какое количество теплоты отдает вода с калориметром при охлаждении от $50°$C до $0°$C:

$$Q_1 = mc_{\text{М}}t_1 + M_{\text{В}}c_{\text{В}}t_1 = (mc_{\text{М}} + M_{\text{В}}c_{\text{В}})t_1 =$$
$$= \left(0{,}1\ \text{кг}\cdot 380\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot\text{град})} + 0{,}5\ \text{кг}\cdot 4200\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot\text{град})}\cdot 50°\text{C}\right) =$$
$$= 106900\ \text{Дж}.$$

При нагревании льда от $(-30°$C$)$ до $0°$C лед поглощает тепла

$$Q_2 = M_{\text{л}}c_{\text{л}}(-t_2) = 1{,}5\ \text{кг}\cdot 2100\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot\text{град})}\cdot 30°\text{C} = 94500\ \text{Дж}.$$

Т.к. $Q_1 > Q_2$, то некоторая часть льда превратится в воду, а температура смеси льда с водой естественно равна $0°$C. Полностью уравнение теплового баланса для этого случая запишется в следующем виде: $(mc_{\text{М}} + M_{\text{В}}c_{\text{В}})t_1 = M_{\text{л}}c_{\text{л}}(-t_2) + \Delta M_{\text{л}}\lambda$. Решение, что того уравнения дает $\Delta M_{\text{л}} \approx 37$ г.

температуре $0°$C, причем масса льда уменьшится на 37 г.

Задача 4

Концы U-образной трубки на 26 см выше уровня ртути, налитой в эту трубку. Определить разность уровней ртути после того, как левое колено заполнили водой до самого верха.

Решение

Столб воды, налитый в левое колено U-образной трубки будет естественно больше $l = 26$ см, т.к. частично вода выдавит ртуть из левого колена в правое. Положим, что величина столба воды на x см больше l, очевидно, что в правом колене уровень ртути также повысится на x см и разница уровней равна $\Delta h = 2x$ см, тогда по закону сообщающихся сосудов имеем давление на границе раздела воды и ртути:

$$\rho_{\text{в}} g(l + x) = \rho_{\text{р}} g 2x,$$

где $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{р}}$ — плотности воды и ртути соответственно. Решая это уравнение, получаем $\Delta h = 2x \approx 2$ см.

Задача 5

(Замятнин М.)

Ко дну калориметра прикреплён плоский нагревательный элемент, над которым находится тонкий слой льда. После того, как нагревательный элемент включили на время τ_1, лёд нагрелся на $\Delta t = 2°$C. Какое время τ_2 может потребоваться для увеличения температуры содержимого калориметра ещё на $\Delta t = 2°$C?

Потерями теплоты в окружающую среду и теплоёмкостью калориметра можно пренебречь. Процесс теплообмена внутри калориметра можно считать достаточно быстрым. Удельная теплоёмкость льда $c_1 = 2{,}1\ \dfrac{\text{кДж}}{(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})}$, воды $c_2 = 4{,}2\ \dfrac{\text{кДж}}{(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

Решение

После первого нагревания (в зависимости от конечной температуры льда) возможны следующие предельные варианты.

1. Если получился лёд при температуре меньшей $-2°$C, то на повторный нагрев понадобится столько же теплоты и времени, сколько было затрачено на первый, а именно:

$$Q = mc_1\Delta t \qquad (1).$$

2. Если получился лёд при температуре $0°$C, тогда сначала придётся его расплавить, а затем нагреть полученную воду на $2°$C, то есть затратить $Q_1 = m\lambda + mc_2\Delta t$ теплоты. Подставляя значение m из (1), найдём

$$Q_1 = \frac{Q(\lambda + c_2\Delta t)}{c_1\Delta t} = 80{,}6Q.$$

Искомое время нагревания лежит в диапазоне $\tau_1 < \tau_2 < 80{,}6\tau_1$.

10 класс

Задача 1

Сосуд объёмом 20 л содержит смесь водорода и гелия при температуре $20°$C и давления 2,0 атм. Масса смеси 5,0 г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в данной смеси.

Решение

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует:

$$VP_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{M_{1,2}}RT,$$

По закону Дальтона:

$$P_1 + P_2 = P;$$

$$m_1 + m_2 = m; \quad m_2x + m_2 = m, \ \Rightarrow \ m_2 = \frac{m}{x+1};$$

Для смеси можем записать:

$$PV = RT\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) \ \Rightarrow \ PV = RTm_2\left(\frac{x}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right),$$

$$PV = RT\frac{m}{x+1}\left(\frac{x}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \ \Rightarrow \ x + 1 = \frac{RTm}{PV}\left(\frac{x}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right),$$

$$\frac{RTm}{PV} = \frac{0{,}082\cdot 293\cdot 5}{2\cdot 20} = 3\ \frac{\text{г}}{\text{моль}} = a;$$

Здесь

$$R = 0{,}082\ \frac{\text{л}\cdot\text{атм}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$$

$$x+1=\frac{ax}{M_1}+\frac{a}{M_2},$$

$$x\left(1-\frac{a}{M_1}\right)=\frac{a}{M_2}-1 \quad \text{и} \quad x=\frac{a/M_2-1}{1-a/M_1}=0{,}5.$$

Задача 2

В закрытом с обоих концов откачанном цилиндре подвешен скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна (см. рис. 44). В пространство под поршнем вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту x. На какой высоте x_1 установится поршень, если этот газ нагреть с начальной температуры T_0 до T_1?

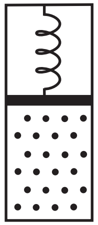


Рис. 44.

Решение

Из уравнений Менделеева-Клапейрона для этих двух состояний:

$$\text{а)}\begin{cases} PSx=\dfrac{m}{M}RT_0 \\ P_1Sx_1=\dfrac{m}{M}RT_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{P_1x_1}{Px}=\frac{T_1}{T_0}$$

S — площадь поршня;

По закону Гука:

$$\text{б)}\begin{cases} kx=PS \\ kx_1=P_1S \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x}=\frac{P_1}{P}$$

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)^2=\frac{T_1}{T_0}, \qquad x_1=x\sqrt{\frac{T_1}{T_0}}.$$

Задача 3

В сосуде находится N молекул одноатомного газа. Температура в сосуде T_0. В сосуд влетает очень тяжелая молекула, имеющая кинетическую энергию E. Найти температуру газа в сосуде после установления равновесия. Теплообмена со стенками нет.

Решение

Средняя кинетическая энергия одноатомных молекул:

$$\bar{E}=\frac{3}{2}\nu k\Delta T_0.$$

Тогда внутренняя энергия начального состояния:

$$U=\frac{3}{2}Nk\Delta T_0.$$

После установления теплового равновесия и увеличения внутренней энергии на E, новая внутренняя энергия распределяется на $N+1$ молекулу:

$$\frac{\frac{3}{2}kT_0N+E}{N+1}=\frac{3}{2}kT_1(N+1).$$

Отсюда

$$T_1=\frac{3kT_0N+2E}{3k(N+1)^2}$$

Задача 4

На PV-диаграмме (см. рис. 45) представлен график процесса, произведенного с некоторым количеством гелия. Какое количество тепла получил газ на участке $1-2$ и на участке $2-3$? Гелий — газ одноатомный.

Решение

По первому закону термодинамики

$$Q=\Delta U+A'.$$

Внутренняя энергия

$$U=\frac{3}{2}PV.$$

Работа газа равна площади над графиком P от V:

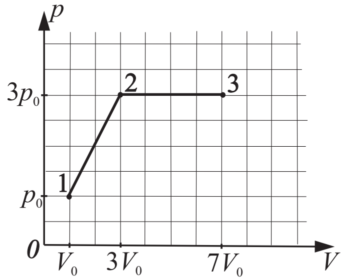


Рис. 45.

Процесс 1—2:

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}(3P_0 3V_0 - P_0 V_0) = 12 P_0 V_0$$

$$A'_{12} = \frac{(3P_0 + P_0)}{2} \cdot (3V_0 - V_0) = 4V_0 P_0.$$

Т.о.

$$Q_{12} = 16 V_0 P_0$$

Процесс 2—3:

$$\Delta U_{23} = U_3 - U_1 = \frac{3}{2} 3P_0 4V_0 = 18 P_0 V_0$$

$$A'_{23} = 3P_0 4V_0 = 12 V_0 P_0.$$

Т.о.

$$Q_{23} = 30 V_0 P_0$$

Задача 5

В двухлитровую пластиковую бутыль через короткий шланг накачивается воздух до давления 2 атм. Шланг пережимается, и к нему присоединяется герметичный тонкостенный полиэтиленовый пакет большой ёмкости (больше 10 литров) без воздуха внутри. Бутыль вместе с пакетом кладут на одну чашку весов и уравновешивают гирями, которые помещают на другую чашку, а затем зажим ослабляется. Воздух из бутыли перетекает в пакет, и равновесие весов нарушается. Груз какой массы и на какую чашку весов нужно положить, чтобы равновесие весов восстановилось? Плотность воздуха равна 1,3 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения считать равным 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Решение

Суммарная масса воздуха внутри бутыли и пакета после перетекания воздуха из бутыли в пакет не изменилась. Следовательно, суммарная сила тяжести, действующая на обе оболочки и воздух внутри них, осталась прежней. Однако изменился суммарный объём, который занимают вместе бутыль и пакет, так как после ослабления зажима часть воздуха из бутыли перешла в пакет. Давление в пакете стало равным 1 атм, значит, такое же давление установилось и в бутыли. Воздух, который в бутыли занимал объём 2 л при давлении 2 атм, теперь при давлении 1 атм занимает объём 4 л. Таким образом, в пакете оказалось 2 литра воздуха, и суммарный объём увеличился на 2 литра. На бутыль и пакет со стороны воздуха действует выталкивающая (Архимедова) сила. Приращение этой силы равно:

$$\Delta F_{\text{А}} = 0{,}002 \text{ м}^3 \cdot 1{,}3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}026 \text{ Н}.$$

Таким образом, для того, чтобы равновесие весов восстановилось, нужно на ту же чашку, где находится бутыль и пакет, добавить гирьки суммарной массой

$$M = \frac{\Delta F_{\text{А}}}{g} = 2{,}6 \text{ г}.$$

Задача 6

В металлический стакан налили $m = 40$ г жидкости и начали нагревать его на спиртовке, непрерывно измеряя температуру стакана. В результате был получен график зависимости температуры стакана от времени, приведенный на рисунке 46. Пользуясь графиком, найдите удельную теплоемкость $c_{\text{ж}}$ и удельную теплоту парообразования $L_{\text{ж}}$ жидкости, налитой в стакан, если в спиртовке ежесекундно сгорает $\mu = 11$ м/с спирта. Удельная теплота сгорания спирта $q = 27$ кДж/г. Потерями тепла пренебречь.

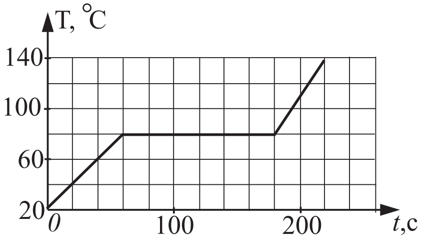


Рис. 46.

Решение

Так как спирт сгорает с постоянной скоростью, то количество тепла, переданное системе, прямо пропорционально времени нагрева. Из графи-

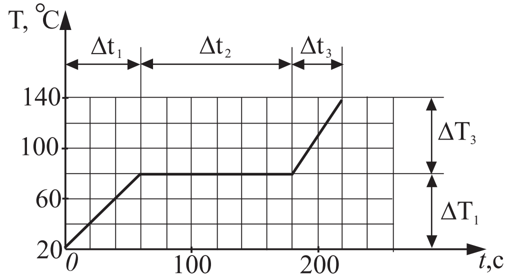


Рис. 47.

ка (см. рис. 47) следует, что в течение первых 60 секунд температура системы линейно возрастала от 20°C до 80°C (стакан и жидкость нагревались), затем в течение 120 секунд температура оставалась неизменной (жидкость кипела и испарялась), и наконец, за последние 40 секунд температура системы линейно увеличивалась от 80°C до 140°C (вся жидкость выкипела, и нагревался пустой стакан). Найдем количества теплоты, которые поступили в систему за каждый из указанных промежутков времени.

В течение времени $\Delta t_1 = 60$ с в систему поступило количество тепла $\Delta Q_1 = \mu q \Delta t_1$, в течение времени $\Delta t_2 = 120$ с $- \Delta Q_2 = \mu q \Delta t_2$, в течение времени $\Delta t_3 = 40$ с $- \Delta Q_3 = \mu q \Delta t_3$.

Составим уравнения теплового баланса для каждого промежутка времени:

$$\Delta Q_1 = \mu q \Delta t_1 = (c_{ж} m + c_{ст} m_{ст}) \Delta T_1,$$
$$\Delta Q_2 = \mu q \Delta t_2 = L_{ж} m,$$
$$\Delta Q_3 = \mu q \Delta t_3 = c_{ст} m_{ст} \Delta T_3.$$

Здесь $\Delta T_1 = \Delta T_3 = 60°\text{C}$, $c_{ст}$ и $m_{ст}$ — удельная теплоемкость и масса стакана соответственно. Из второго уравнения можно сразу найти удельную теплоту парообразования жидкости:

$$L_{ж} = \frac{\mu q \Delta t_2}{m} = \frac{11 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} \cdot 27 \cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 120\ \text{с}}{0{,}04\ \text{кг}} = 891\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Из третьего уравнения можно выразить произведение $c_{ст} m_{ст}$:

$$c_{ст} m_{ст} = \frac{\mu q \Delta t_3}{\Delta T_3}.$$

Подставляя полученное произведение в первое уравнение и учитывая, что $\Delta T_1 = \Delta T_3$, найдем удельную теплоемкость жидкости:

$$c_{ж} = \frac{\mu q (\Delta t_1 - \Delta t_3)}{m \Delta T_3} =$$

$$= \frac{11 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} \cdot 27 \cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot (60°\text{C} - 40°\text{C})}{0{,}04\ \text{кг} \cdot 60°\text{C}} =$$

$$= 2475\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

Задача 7

В калориметре находится $m = 100$ г расплавленного металла галлия при температуре его плавления $t_{пл} = 29{,}8°\text{C}$. Его начали медленно охлаждать, оберегая от внешних воздействий, и в результате температура понизилась до $t = 19{,}8°\text{C}$, а галлий остался жидким. Когда переохлажденный таким образом жидкий галлий размешали палочкой, он частично перешел в твердое состояние. Найдите массу отвердевшего галлия и установившуюся в калориметре температуру. Удельная теплота плавления галлия $\lambda = 80$ кДж/кг, удельная теплоемкость жидкого галлия

$c = 410\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$. Теплоёмкостью калориметра и палочки пренебречь.

Решение

При отвердевании галлия выделяется теплота кристаллизации, что приводит к нагреванию системы до температуры плавления галлия $t_{пл} = 29{,}8°$C, поскольку только при этой температуре жидкий и твердый галлий будут находиться в равновесии.

Количество теплоты, выделяющееся при отвердевании массы m_1 галлия, равно λm_1. Оно идет на нагревание всего галлия до температуры плавления; для этого требуется количество теплоты $cm(t_{пл} - t)$. Следовательно,

$$m_1 = \frac{cm(t_{пл} - t)}{\lambda} \approx 5{,}1 \text{ г}.$$

Заметим, что если бы переохлаждение было очень сильным, то теплоты кристаллизации могло бы не хватить для нагревания всей массы галлия до температуры плавления. Однако, поскольку $m_1 < m$, то в нашем случае галлий действительно нагреется до этой температуры.

Задача 8

В системе, изображенной на рисунке, груз, подвешенный к легкому подвижному блоку, является льдинкой массой 400 г, плавающей в воде при температуре 0°C, а второй груз изготовлен из алюминия, имеет массу 160 г и касается поверхности воды. При этом система находится в равновесии (см. рис. 48). Какое количество теплоты надо сообщить системе, чтобы алюминиевый груз оказался на дне сосуда? Вертикальные размеры грузов меньше глубины сосуда, плотности льда и алюминия равны $0{,}9\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ и $2{,}7\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ соответственно, нити достаточно длинные, невесомые и нерастяжимые, трения нет. Удельная теплота плавления льда равна $335\ \frac{\text{Дж}}{\text{г}}$. Силами поверхностного натяжения пренебречь.

Решение

При сообщении системе тепла лед начнет таять при 0°C, и, в конце концов, алюминиевый груз перевесит льдинку, которая окажется в воздухе, а

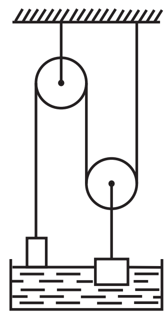


Рис. 48.

груз — на дне сосуда с водой. Поскольку вес алюминиевого груза в воде равен

$$P = 0{,}16 \text{ кг} \cdot 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} - 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{0{,}16 \text{ кг}}{2700\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} =$$

$$= 1{,}6 \text{ Н} \cdot \left(1 - \frac{1}{2{,}7}\right) \approx 1 \text{ Н}.$$

Подвижный блок дает выигрыш в силе в 2 раза, это произойдет при весе льдинки в воздухе, равном 2 Н (т.е. массе льдинки, равной 200 г). Следовательно, надо расплавить 400 г − 200 г = 200 г льда, для чего понадобится количество тепла, равное

$$335\ \frac{\text{Дж}}{\text{г}} \cdot 200 \text{ г} = 67000 \text{ Дж} = 67 \text{ кДж}.$$

Задача 9

В закрытой камере находится $m_1 = 1$ мг взвеси мельчайших капелек воды и $m_2 = 100$ мг водяного газа (пара). На сколько процентов возрастёт давление в камере к тому моменту, когда в результате испарения радиус капелек r уменьшится на 4%? Считайте, что температура в камере поддерживается постоянной, а диаметр всех капелек одинаков.

Решение

Пусть сначала давление пара в камере равно

$$p = \frac{m_2}{V} \cdot \frac{RT}{\mu}.$$

При испарении Δm граммов воды с поверхности капель давление в камере возрастёт на

$$\Delta p = \frac{\Delta m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu}.$$

Отношение $\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{\Delta m}{m_2}$.

Масса воды, содержащейся в капельной форме, как функция от r, равна

$$m_1(r) = N\rho\alpha r^3,$$

где N — число капель, ρ — плотность воды, а α — некоторый численный коэффициент.

Масса капель после испарения (новый радиус $r' = r - \Delta r$):

$$m_1(r') = N\rho\alpha(r-\Delta r)^3 \approx N\rho\alpha(r^3 - 3r^2\Delta r.$$

Следовательно, испарившаяся масса воды равна $\Delta m = 3N\rho\alpha^2\Delta r$. Отношение $\dfrac{\Delta m}{m_1} = 3\dfrac{\Delta r}{r}$. Следовательно,

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta m}{m_2} = \frac{\Delta m}{m_1} \cdot \frac{m_1}{m_2} = \frac{3\Delta r}{r} \cdot \frac{m_1}{m_2} = 0{,}12\%.$$

11 класс

Задача 1

На крыше, наклонённой к горизонту под углом 30°C, лежит свинцовый лист массы m. Коэффициент трения свинца о крышу 0,7. Длина листа при 10°C 1 м. Считая, что температура в течение суток повышается до 20°C и возвращается к первоначальной, определите положение точек листа, неподвижных в течение суток при нагревании и остывании. Найти расстояние, на которое сползёт лист за 30 суток устойчивой погоды. ТКЛР свинца составляет $3 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$.

Решение

При нагреве и охлаждении неподвижные точки лежат на разных линиях из-за различного направления сил трения при нагреве и охлаждении. f_1 и f_2 — силы трения верхней и нижней частей (см. рис. 49).

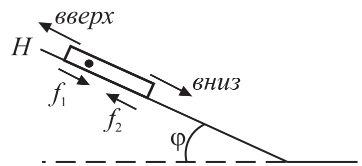


Рис. 49.

$$f_1 = km\frac{l - x_\text{н}}{l} g\cos\varphi;$$

$$f_2 = km\frac{x_\text{н}}{l} g\cos\varphi.$$

$x_\text{н}$ — координата неподвижной точки при нагреве, x_0 — координата неподвижной точки при охлаждении.

Считая процесс квазистатическим (медленные нагрев и охлаждение), то есть лист находящимся в равновесии, имеем в проекции на направление вдоль крыши вниз:

$$mg\sin\varphi + kmg\cos\varphi\frac{l \cdot x_\text{н}}{l} - kmg\cos\varphi\frac{x_\text{н}}{l} = 0$$

$$x_\text{н} = l\frac{\sin\varphi + k\cos\varphi}{2k\cos\varphi}.$$

При охлаждении силы трения f_1' и f_2' имеют противоположные знаки, а $x_\text{н} \leftrightarrow x_\text{o}$. Аналогичные рассуждения дают

$$x_\text{o} = l\frac{k\cos\varphi - \sin\varphi}{2k\cos\varphi},$$

то есть $x_\text{o} < x_\text{н}$ и неподвижная линия ближе к нижнему краю. При нагревании нижний край смещается вниз на

$$\Delta x_\text{н} = \alpha x_\text{н}\Delta t_\text{н} = \frac{\alpha l}{2k}(t_2 - t_1)\frac{k\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\alpha l}{2k}(t_2 - t_1)(k + \operatorname{tg}\varphi),$$

а при охлаждении нижний край смещается на

$$\Delta x_0 = -\frac{\alpha l}{2k}(t_2 - t_1)(k - \operatorname{tg}\varphi).$$

Так как $k > \operatorname{tg} 30^\circ$, то смещение происходит вверх. За сутки смещение нижнего края

$$\Delta x = \Delta x_{\text{н}} + \Delta x_0 = \frac{\alpha l}{k}(t_2 - t_1)\operatorname{tg}\varphi,$$

а за месяц

$$\Delta S = n\Delta x = \frac{n\alpha l}{k}(t_2 - t_1)\operatorname{tg}\varphi = 0{,}73 \text{ см}.$$

Задача 2

Один моль идеального одноатомного газа находится в неподвижном цилиндре, в который вставлен гладкий тонкий поршень, соединенный пружиной с вертикальной стенкой. Найти молярную теплоемкость газа при его нагревании в этой системе. Вне цилиндра — вакуум, собственная длина пружины равна L и совпадает с расстоянием от дна цилиндра до стенки (см. рис. 50).

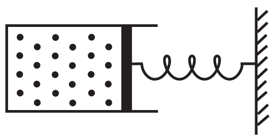


Рис. 50.

Решение

Представим, что системе сообщили количество теплоты ΔQ. В соответствии с первым началом термодинамики, оно идет на изменение внутренней энергии газа и на совершение газом работы, которая равна изменению энергии пружины:

$$\Delta Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \Delta\left(\frac{kx^2}{2}\right).$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная, k — жесткость пружины, и учтено, что количество газа $\nu = 1$ моль. Так как тепло сообщается газу медленно, то можно считать, что в каждый момент времени поршень находится в равновесии. Условие равновесия имеет вид:

$$pS = kx,$$

где p — давление газа в цилиндре, S — площадь цилиндра. Выражая давление из уравнения Менделеева-Клапейрона, получаем

$$\frac{RTS}{V} = kx,$$

откуда, с учетом того, что $V = Sx$:

$$kx^2 = RT.$$

Таким образом:

$$\Delta Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \Delta\left(\frac{RT}{2}\right) = 2R\Delta T.$$

Поэтому молярная теплоемкость газа в таком процессе равна:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 2R.$$

Задача 3

В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массой $M = 0{,}1$ кг, в который вмерзла дробинка массой $m = 5$ г. Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца $11{,}3\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, плотность льда $0{,}9\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, удельная теплота плавления льда $3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение

Лед с дробинкой начнет тонуть, как только плотность льда с замершей в нем дробинкой станет равной плотности воды. Т.е.

$$\frac{M_1 + m}{\dfrac{M_1}{\rho_{\text{л}}} + \dfrac{m}{\rho_c}} = \rho_{\text{в}}, \qquad (1)$$

где M_1 — масса оставшегося льда; $\rho_{\text{л}}$, ρ_c, $\rho_{\text{в}}$ — плотности льда свинца и воды соответственно. Из формулы (1) находим массу оставшегося льда $M_1 = 41{,}02$ г.

Количество теплоты необходимое чтобы такое количество льда осталось, очевидно, можно определить по формуле: $Q = (M - M_1)\lambda$. Расчет дает величину $Q = 19{,}5$ кДж.

Задача 4

Один литр гелия, находящегося при нормальных условиях, изотермически расширяется за счет полученного извне тепла до объема 2 л. Найти количество сообщенного газу тепла.

Решение

По условию задачи начальное давление $p_0 = 105$ Па, начальный объем $V_0 = 10^{-3}$ м^3 и начальная температура $T_0 = 273$ К. Количество теплоты получаемое при изотермическом процессе определяется по формуле $Q = \nu R T_0 \dfrac{V_2}{V_1}$.

Выразив из уравнения Клапейрона-Менделеева

$$RT_0 = p_0 V_0$$

и подставив в выражение для количества теплоты, получим расчетную формулу :

$$Q = p_0 V_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$Q = 10^5 \cdot 10^{-3} \cdot \ln 2.$$

$$Q = 69{,}2 \text{ Дж}.$$

Задача 5

Горизонтальный закрытый теплоизолированный цилиндр разделен на две части тонким теплопроводящим поршнем, который прикреплен пружиной к одной из торцевых стенок цилиндра. Слева и справа от поршня находятся по ν молей идеального одноатомного газа. Начальная температура системы T, длина цилиндра $2l$, собственная длина пружины $\dfrac{l}{2}$, удлинение пружины в состоянии равновесия равно x. В поршне проделали отверстие. Насколько изменится температура этой системы после установления нового состояния равновесия? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь, трения нет.

Решение

В исходном состоянии сила упругости пружины была уравновешена

разностью сил давления газов, находящихся по разные стороны от поршня:

$$\frac{\nu RT}{\dfrac{3l}{2} - x} - \frac{\nu RT}{\dfrac{l}{2} + x} = -kx,$$

где k — жесткость пружины. Отсюда жесткость пружины:

$$k = \frac{\nu RT}{x}\left(\frac{1}{l/2 + x} - \frac{1}{3l/2 - x}\right).$$

После того, как в поршне проделали отверстие, давления по разные стороны от поршня стали одинаковыми, и удлинение пружины стало равным нулю. При этом потенциальная энергия $E = \dfrac{kx^2}{2}$, которая была запасена в сжатой пружине, пошла на изменение внутренней энергии газа:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot 2\nu R \Delta T.$$

Отсюда искомое изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{kx^2}{6\nu R} = \frac{x}{6}\left(\frac{1}{l/2 + x} - \frac{1}{3l/2 - x}\right)T =$$

$$= \frac{2x}{3} \cdot \frac{l - 2x}{(l + 2x)(3l - 2x)} T.$$

Задача 6

В вертикальном цилиндрическом сосуде объёмом V под лёгким подвижным поршнем находится некоторое количество гелия при температуре T. Снаружи атмосферное давление p. Поршень находится в равновесии и делит сосуд пополам. Газ медленно нагревают, увеличивая его температуру до $3T$. Сверху сделан упор, который не даёт поршню выскочить из сосуда. Какое количество тепла получит газ при нагревании?

Решение

Из условия равновесия в начальный момент

$$\nu = \frac{p_0 V}{2RT_0}.$$

При нагревании от T_0 до $2T_0$ газ расширяется при $p = const$, увеличивая объём от $\frac{V}{2}$ до V. При этом газ получает

$$Q_1 = \nu C_p(2T_0 - T_0) = \nu\frac{5R}{2}T_0 = \frac{5}{4}p_0V.$$

Далее газ нагревают при $V = const$ от $2T_0$ до $3T_0$. При этом $Q_2 = \nu C_v(3T_0 - 2T_0) = \frac{\nu 3R}{2}T_0 = \frac{3}{4}p_0V$.

Всего $Q = Q_1 + Q_2 = 2p_0V$.

§3. Электродинамика

9 класс

Задача 1

Имеется электрическая цепь, изображенная на рисунке 51. Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его подсоединить к точкам C и D?

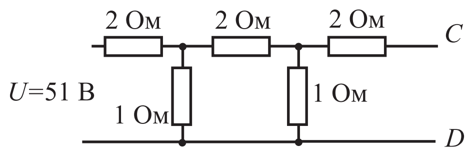


Рис. 51.

Решение

Через вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением ток практически не течёт. В этом случае нарисуем эквивалентную схему (см. рис. 52).

В ней ток через $R = 2$ Ом к точке C не течет.

Общее сопротивление этой цепи: $R_{\text{общ}} = \left(\frac{3}{4} + 2\right)$ Ом $= \frac{11}{4}$ Ом.

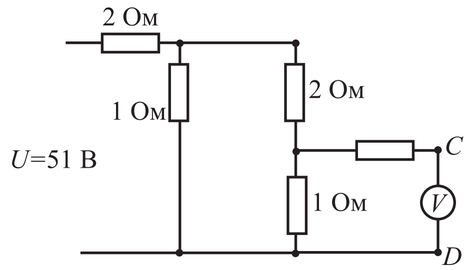


Рис. 52.

Найдем силу тока в этой цепи: $I = \frac{51\text{ В}}{11/4\text{ Ом}} = 18{,}5$ А.

Найдем силу тока в правой цепи: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$, а $I_1 = I_2$, тогда: $I_2 \approx 4{,}6$ А.

Найдем $U_{CD} \approx 1$ Ом $\cdot$ 4,6 А $=$ 4,6 В

Задача 2

К розетке напряжением $U = 20$ В подключена цепь, состоящая из 4-х одинаковых резисторов по 30 Ом каждый (см. рис. 53). Какое количество тепла выделится в этой цепи за 10 с?

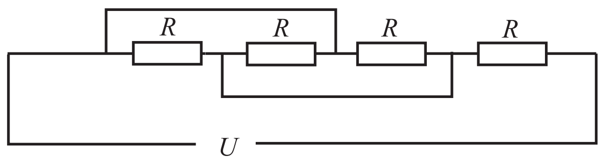


Рис. 53.

Решение

Нарисуем эквивалентную схему (см. рис. 54):

Отсюда сразу следует, что $Q = 100$ Дж.

Задача 3

Две лампы мощностью 40 Вт и 60 Вт, рассчитанные на одинаковое напряжение, включены в сеть с тем же напряжением последовательно. Как они будут гореть?

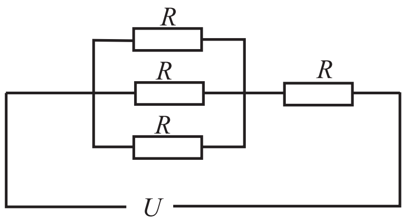


Рис. 54.

Решение

Запишем систему уравнений для последовательного и параллельного соединений:

$$\begin{cases} P_1' = I^2 R_1 \\ P_2' = I^2 R_2 \end{cases} \qquad I = \frac{U}{R_1 + R_2} \qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{U^2}{R_1} \\ P_2 = \dfrac{U^2}{R_2} \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$P_1' = \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} = 14{,}4 \text{ Вт},$$

$$P_2' = \frac{P_2 P_1^2}{(P_1 + P_2)^2} = 9{,}6 \text{ Вт}.$$

Задача 4

Начертите схему электрической цепи, состоящей из источника тока, электрической лампы, звонка и трех рубильников, причем если включить один рубильник, то горит только лампа, если второй — работает только звонок, третий — одновременно загорается лампа и работает звонок (в последнем случае лампа горит неполным накалом).

Решение

Схема имеет следующий вид (см. рис. 55):

Задача 5

Алюминиевая проволока диаметром $d = 2{,}5$ мм, не слишком гнутая, покрыта льдом. Общий диаметр проволоки со льдом равен $D = 3{,}5$ мм.

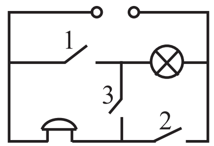


Рис. 55.

Температура льда и проволоки $t = 0°$C. По проволоке пустили ток силой $I = 15$ А. За какое время лёд растает? Плотность льда $\rho_л = 0{,}9\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг. (*Примечание*: Формула площади круга $S = \pi \cdot r^2$, где r — радиус круга.)

Решение

При прохождении тока через проволоку в ней выделяется тепло, равное по закону Джоуля-Ленца $Q = I^2 R\tau$, где τ — искомое время таяния льда, а R — сопротивление проволоки. Это сопротивление, согласно известной формуле, равно

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2}.$$

Здесь l — длина проволоки, S — площадь ее поперечного сечения.

Это количество теплоты расходуется на плавление льда: $Q = \lambda m$. Масса льда m равна произведению его плотности на объем V:

$$m = \rho_л V = \rho_л \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) l.$$

Приравнивая полученные выражения для количеств теплоты, и выражая время, окончательно получаем:

$$\tau = \frac{\lambda \rho_л \pi^2 d^2 (D^2 - d^2)}{16 I^2 \rho} \approx 19 \text{ мин}.$$

Задача 6

Электрическая цепь состоит из трех резисторов с известными сопротивлениями $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, одного резистора с неизвестным сопротивлением R_3 и одного переменного резистора (см.

рис. 56) При измерении сопротивления R_{AB} между точками A и B этой электрической цепи выяснилось, что оно не зависит от сопротивления переменного резистора. Найдите величины сопротивлений неизвестного резистора R_3 и всей цепи R_{AB}.

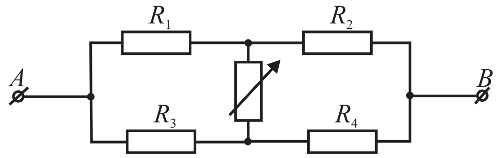


Рис. 56.

Решение

Идея решения заключается в том, что при условиях задачи ток через переменный резистор не идет, и напряжение на нем равно нулю (в противном случае изменение сопротивления этого резистора неизбежно приводило бы к изменению величины R_{AB}). Отсюда вытекает, что напряжения U_1 и U_3 на резисторах R_1 и R_3 совпадают. Так как

$$U_1 = U_{AB} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_3 = U_{AB} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4},$$

то отсюда $R_1R_4 = R_2R_3$. Из этого условия находим сопротивление неизвестного резистора R_3:

$$R_3 = \frac{R_1R_4}{R_2} = 40 \text{ Ом}.$$

Сопротивление всей цепи можно найти, пользуясь формулой для параллельного соединения резисторов:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4},$$

откуда

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_2 + R_4} \approx 33 \text{ Ом}.$$

Задача 7

В электрической цепи (рис. 57) сила тока, текущего через амперметр A_0, равна I_0. Сопротивление всех резисторов одинаково и равно R. Вы-

числите силу тока I_1, текущего через амперметр A_1. Подвижные контакты переменных резисторов установлены на середину так, что сопротивление от них до соответствующих выводов резистора равно $\dfrac{R}{2}$.

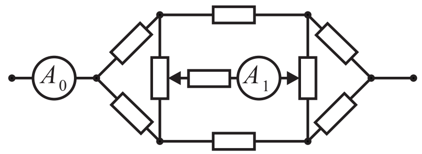


Рис. 57.

Решение

Пусть сила тока, протекающего через резистор R_1, равна I_2 (рис. 58). В силу симметрии схемы относительно оси BC (пунктирная линия) сила тока, протекающего через R_2, также равна I_2. Сила тока, протекающего

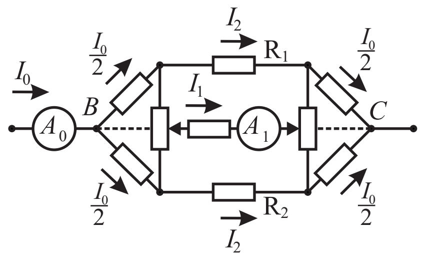


Рис. 58.

через остальные резисторы, легко находится из той же симметрии. Если схему «сложить» относительно осевой линии BC, то получится эквивалентная схема, представленная на рисунке 59. Сопротивления резисторов в ней равны $\dfrac{R}{2}$ и $\dfrac{R}{4}$ из-за возникшего параллельного соединения резисторов сопротивлением R и $\dfrac{R}{2}$ после операции «сложения». Ещё упростим схему (рис. 60). Поскольку в цепи, состоящей из двух параллельно соединённых резисторов, силы тока обратно пропорциональны их сопротивле-

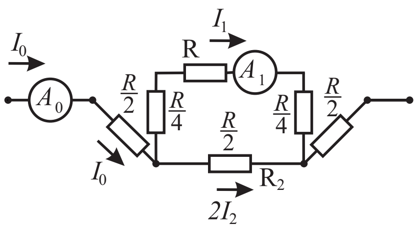


Рис. 59.

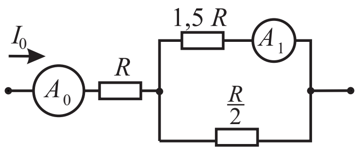


Рис. 60.

ниям, то

$$\frac{I_1}{2I_2} = \frac{R/2}{1{,}5R}, \text{ откуда } 3I_1 = 2I_2.$$

С другой стороны, $I_1 + 2I_2 = I_0$. Отсюда находим $I_1 = 0{,}25I_0$.

10 класс

Задача 1

Найти величину сопротивления R между клеммами A и B схемы, изображенной на рисунке (см. рис. 61). $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 8$ кОм, $R_3 = 21$ кОм, $R_4 = 56$ кОм, $R_1 = 9{,}625$ кОм.

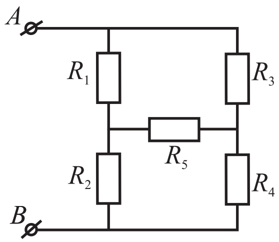


Рис. 61.

Решение

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

$\Rightarrow$ ток через резистор R_5 не протекает (см. рис. 62).

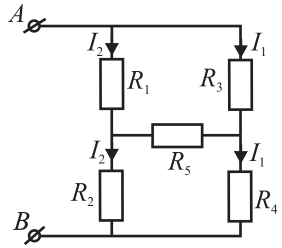


Рис. 62.

Таким образом можно составить схему (см. рис. 63):

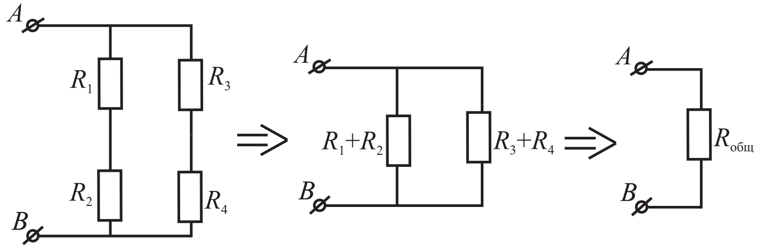


Рис. 63.

$$R_{общ} = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

$$R_{общ} = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4} = 9{,}625 \text{ кОм}.$$

Задача 2

Большую металлическую пластину толщины a зарядили так, чтобы плотность заряда на каждой стороне пластины σ. Затем пластину поместили в однородное электрическое поле $\vec{E} = E_0\vec{i}$ перпендикулярное плоскости пластины. Определить напряжённость поля внутри и снаружи, а также поверхностные плотности заряда на левой и правой стороне.

Решение

$$0 \leqslant x \leqslant a$$

$$\vec{E}' = 0 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}; \qquad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})$$

$$0 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + E_0, \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 - \sigma_1 = 2\varepsilon_0 E_0, \\ \sigma_2 + \sigma_1 = 2\sigma, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0, \\ \sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0. \end{cases}$$

При любом перераспределении поле пластины $\dfrac{2\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$E'(x<0) = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \qquad E'(x>0) = E_0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Задача 3

Найти заряд на левой обкладке конденсатора. Параметры схемы считать известными (см. рис. 64).

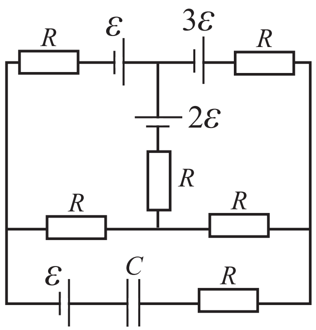


Рис. 64.

Решение

Расставим токи в схеме (см. рис. 65).

По методу контурных токов:

$$\begin{cases} 2I_1R + (I_1 - I_2)R = 3\mathcal{E} + 2\mathcal{E} \\ 2I_2R + (I_2 - I_1)R = \mathcal{E} - 2\mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3I_1R - I_2R = 5\mathcal{E} \\ -I_1R + 3I_2R = -\mathcal{E} \end{cases}$$

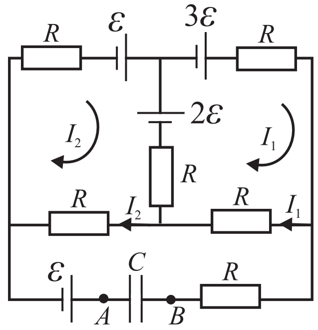


Рис. 65.

$$8RI_1 = 2\mathcal{E}, \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{4R}, \quad I_1 = \frac{7\mathcal{E}}{4R}$$

$$\varphi_A - \mathcal{E} + I_2R + I_1R = \varphi_B, \quad \Rightarrow \quad \varphi_B - \varphi_A = -\mathcal{E} + 2\mathcal{E} = \mathcal{E}.$$

$$\varphi_A < \varphi_B, \quad \Rightarrow \quad q_A = -C\mathcal{E}.$$

Задача 4

Частица, имеющая массу m и положительный заряд q, влетает со скоростью $v << c$ в область однородного магнитного поля с индукцией B. Изобразить проекции траектории частицы на плоскости yOz, xOy, zOx и определить параметры кривых (см. рис. 66). Вектор $\vec{v}$ лежит в плоскости xOz и составляет угол α с осью Ox.

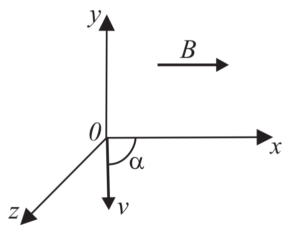


Рис. 66.

Решение

Сделаем чертеж (см. рис. 67). По II закону Ньютона:

$$\frac{v_\perp^2}{R} = \frac{1}{m} q v_\perp B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv\sin(\alpha)}{qB}$$

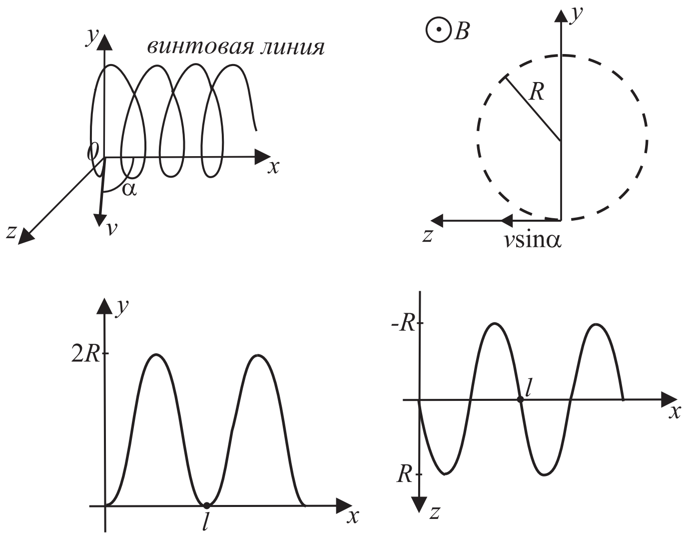


Рис. 67.

Запишем уравнение траектории.

$$(y-R)^2+z^2=R^2,$$

Шаг винта:

$$l=v\cos(\alpha)\cdot T,$$

где $T=\dfrac{2\pi R}{v\sin(\alpha)}$ — период движения по окружности в плоскости zOx.

$$l=v\cos(\alpha)\frac{2\pi m}{qB}=2\pi R\,\mathrm{ctg}(\alpha).$$

$$y=R(1-cos(\omega t));\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=q\frac{B}{m};\qquad x=v\cos(\alpha)\cdot t$$

В проекциях на плоскости:

$$yOx:\qquad y=\frac{mv\sin(\alpha)}{qB}\left(1-\cos\left(\frac{qB}{mv\cos(\alpha)}x\right)\right).$$

$$zOx:\qquad z=\frac{mv\sin(\alpha)}{qB}\sin\left(\frac{qB}{mv\cos(\alpha)}x\right).$$

Задача 5

В неоднородном магнитном поле, имеющем вертикальную ось симметрии, индукция поля имеет проекцию на эту ось $B_z = B_0\left(1+\dfrac{z}{h_0}\right)$. С большой высоты падает медное кольцо диаметра d, имеющее электрическое сопротивление R; плоскость кольца всё время горизонтальна, а его центр движется вдоль оси z (см. рис. 68). Найти установившуюся скорость падения, если масса кольца равна m.

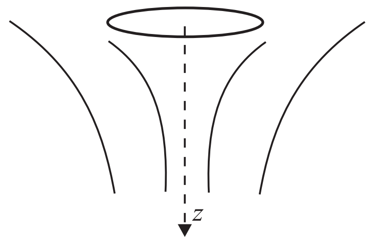


Рис. 68.

Решение

Силы тяжести и Ампера $m\vec{g}$ и $\vec{F}_A$ направлены противоположно. $\vec{g}=const$. F_A растёт до тех пор, пока рез. $\vec{a}$ не станет равным нулю. $\vec{v}=const=\vec{v}_{\text{уст}}$.

По закону сохранения энергии $mg\Delta z = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{и}}^2}{R}\Delta t$. Очевидно, что ЭДС индукции по закону Фарадея: $\Delta z = v_{\text{уст}}\Delta t$,

$$|\mathcal{E}_{\text{и}}|=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=S\frac{\Delta B}{\Delta t}=S\frac{\Delta B}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}=v_{\text{уст}}S\frac{\Delta B}{\Delta z},$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta z}=B'_z=\frac{B_0}{h_0}.\qquad |\mathcal{E}_{\text{и}}|=v_{\text{уст}}S\frac{B_0}{h_0}.$$

$$mgv_{\text{уст}}=\frac{1}{R}v_{\text{уст}}^2S^2\frac{B_0^2}{h_0^2},\qquad v_{\text{уст}}=\frac{mgRh_0^2\cdot 16}{B_0^2\pi^2d^4}$$

Таким образом:

$$v_{\text{уст}}=\frac{16mgRh_0^2}{\pi^2d^4B_0^2}$$

Задача 6

В электрических цепях часто используют двухпозиционные переключатели, которые могут, в зависимости от положения перемычки «П», соединять друг с другом либо контакты «0» и «1», либо контакты «0» и «2» (см. рисунок 69). Нарисуйте схему, состоящую из двух таких переключателей, двух одинаковых лампочек и одной батарейки, чтобы при четырех различных положениях перемычек переключателей она работала следующим образом:

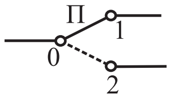


Рис. 69.

1) обе лампочки не горят;

2) одна лампочка не горит, а другая горит в полный накал;

3) обе лампочки горят в полный накал;

4) обе лампочки горят в полнакала. Известно, что лампочка горит в полный накал, если ее подключить непосредственно к батарейке, а в полнакала лампочки горят в том случае, если они соединены с батарейкой последовательно. Учтите, что в сконструированной вами цепи ни при каких положениях перемычек переключателей не должно происходить короткое замыкание батарейки.

Решение

Допустимая схема соединения элементов цепи изображена на рисунке 70. В таблице показаны 4 возможных сочетания положений 1 или 2 перемычек переключателей A и B, дающие в результате те варианты включения лампочек, которые указаны в условии задачи.

Задача 7

В электрической цепи (рис. 71) амперметр A показывает $I_1 = 32$ мА. Сопротивление всех резисторов одинаково и равно R. Вычислите силу тока I_x, который будет протекать через амперметр, если перегорит резистор, заштрихованный на схеме. Напряжение, подаваемое на разъёмы P и Q цепи, постоянно.

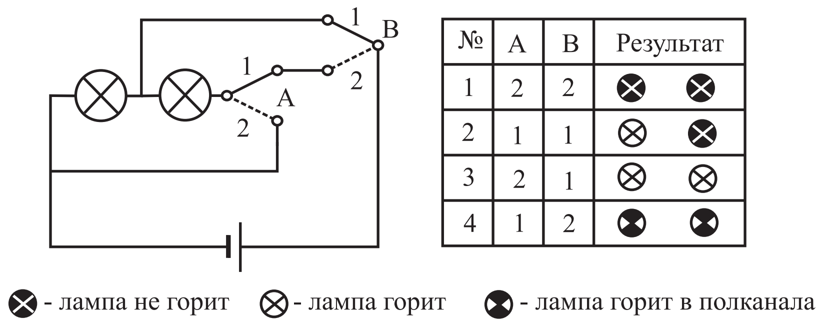


Рис. 70.

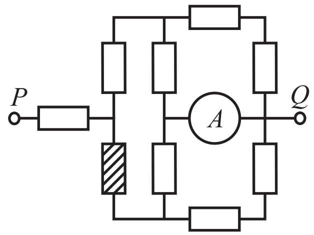


Рис. 71.

Решение

Пусть ток течёт от узла P к узлу Q. Укажем на схеме направление тока и силу тока в соответствующих участках цепи (рис. 72). С учётом симмет-

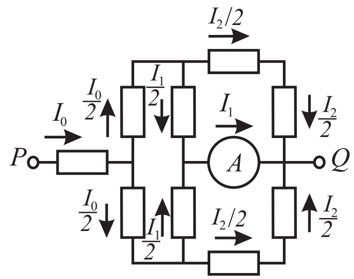


Рис. 72.

рии схемы (относительно пунктирной линии) её можно упростить, «сложив» верхнюю и нижнюю части (рис. 73). Приведём последнюю схему к

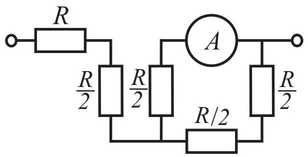


Рис. 73.

более удобному виду (рис. 74). Сила тока I_2 в нижней ветви в два раза меньше, чем I_1. Следовательно, сила тока, втекающего в цепь, $I_0 = \dfrac{3I_1}{2}$. Сопротивление всей цепи

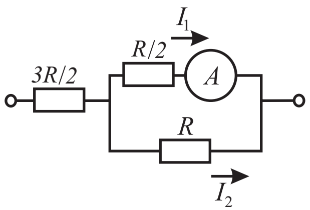


Рис. 74.

$$R_0 = \frac{3}{2}R + \frac{1}{3}R = \frac{11}{6}R,$$

а напряжение между узлами P и Q равно

$$U = I_0R_0 = \frac{3}{2}I_1 \cdot \frac{11}{6}R = \frac{11}{4}I_1R.$$

Если перегорит резистор, заштрихованный на схеме, ток через нижнюю часть цепи течь не будет. В этом случае эквивалентная схема цепи может быть представлена в виде (рис. 75). Теперь сопротивление всей цепи

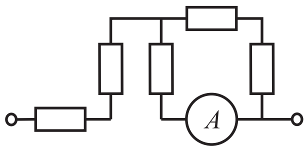


Рис. 75.

$$R_0' = 2R + \frac{2}{3}R = \frac{8}{3}R,$$

а сила тока

$$I_0' = \frac{U}{R_0'} = \frac{11}{4}I_1R \cdot \frac{3}{8R} = \frac{33}{32}I_1.$$

Сила тока, протекающего через амперметр и последовательно соединённый с ним резистор R, вдвое больше, чем через верхний участок цепи с сопротивлением $2R$ (при параллельном соединении силы токов обратно пропорциональны сопротивлению резисторов). Следовательно,

$$I_x = \frac{2}{3}I_0' = \frac{22}{32}I_1 = 22\ \text{мА}.$$

11 класс

Задача 1

Шарик массы m, имеющий заряд q, находится внизу под закреплённым зарядом $-q$ на расстоянии L от него. Какую минимальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он упал на землю? Движение происходит в поле тяготения Земли.

Решение

Сделаем рисунок (см. рис. 76).

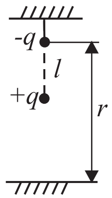


Рис. 76.

Начальная скорость шарика минимальна, если он достигает земли с нулевой скоростью, а сумма действующих сил в этом месте равна нулю, то есть

$$mg - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0.$$

По закону сохранения энергии

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}+mg(r-l)+\frac{mv_{min}^2}{2}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Из первого уравнения $r=\dfrac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}}$, а из второго

$v_{min}=\sqrt{2gl}\left(\dfrac{q}{l\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}}-1\right)$.

Задача 2

В вакуумном диоде, анод и катод которого — параллельные пластины, сила тока зависит как $I=aU^{3/2}$, где a — некоторая постоянная. Во сколько раз изменится сила давления на анод, если потенциал его увеличить в 2 раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих из катода, пренебречь.

Решение

Давление на анод оказывают электроны с импульсами по mv. За Δt к аноду подлетают Δn электронов. $\Delta n=\dfrac{\Delta q}{e}=\dfrac{I\Delta t}{e}$.

Эти электроны передают аноду импульс $\Delta p=\Delta n\cdot mv=mv\dfrac{I}{e}\Delta t$, где из

$eU=\dfrac{mv^2}{2}\ \Rightarrow\ v=\sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$.

Таким образом, $\Delta p=\dfrac{\sqrt{2meU}}{e}I\Delta t=\sqrt{\dfrac{2m}{e}}UI\Delta t$.

С учётом закона «трёх вторых»

$$\Delta p=\sqrt{\frac{2m}{e}}U\cdot aU^{3/2}\Delta t=\sqrt{\frac{2m}{e}}aU^2\Delta t.$$

По второму закону Ньютона $\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=F$, сила

$$F=\sqrt{\frac{2m}{e}}aU^2=kU^2.$$

Тогда $\dfrac{F_2}{F_1}=\dfrac{U_2^2}{U_1^2}=n^2=4$.

Задача 3

Заряженный конденсатор ёмкости C_0 замкнут на катушку индуктивности L. Найти такую зависимость от времени ёмкости конденсатора, при которой ток в цепи нарастает прямо пропорционально времени.

Решение

По условию ток должен нарастать линейно $I=kt$. Напряжение на катушке $U_L=-L\dfrac{dI}{dt}=-kL$ и равно напряжению на конденсаторе

$U_C=\dfrac{q_0}{C_0}=\dfrac{q_0-q}{C}$. Таким образом, $k=-\dfrac{q_0}{C_0L}$ и $q_0-q=C\dfrac{q_0}{C_0}$.

Дифференцируя по t левую и правую части получим:

$$0-\frac{dq}{dt}=\frac{q_0}{C_0}\cdot\frac{dC}{dt}=I=kt.$$

Тогда, $\dfrac{dC}{dt}\dfrac{q_0}{C_0}=kt$.

$$dC\frac{q_0}{C_0}=ktdt.$$

$$\int_{C_0}^{C}\frac{q_0}{C_0}dS=\int_0^t ktdt$$

$$\frac{q_0}{C_0}(C-C_0)=\frac{kt^2}{2}=-\frac{q_0}{C_0L}\frac{t^2}{2}.$$

$$C=C_0-\frac{1}{2L}t^2=C_0\left(1-\frac{t^2}{2LC_0}\right).$$

Задача 4

Два одинаковых шара удалены на очень большое расстояние друг от друга. Поле первого шара обладает энергией 1,6 мДж, а поле второго — 3,6 мДж. Какое количество теплоты выделится при соединении этих шаров проволокой?

Решение

Т.к. по условию шары находятся далеко друг от друга, то они не создают электрическое поле на таком расстоянии. Их энергия до соединения равна собственной энергии заряженного шара.

Количество теплоты (Q), которое выделится в этой системе равно разности энергий системы до соединения (W_0) и после соединения ($W_{\text{К}}$). Т.е. $Q = W_0 - W_{\text{К}}$. Совершенно очевидно, что $W_0 = W_1 + W_2$ и $W_{\text{К}} = W_1' + W_2'$,где W_1 и W_1' энергия первого шара до и после соединения, W_2 и W_2' энергия второго шара до и после соединения.

При соединении шаров потенциалы становятся равными, а т.к. шары одинаковые то из равенства потенциалов следует равенство зарядов этих шаров после соединения, следовательно, их энергии после соединения равны т.е. $W_{\text{К}} = 2W_1'$. Можно написать

$$Q = W_1 + W_2 - 2W_1'. \quad (1)$$

Согласно закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = 2q' \quad (2)$$

Электрическая энергия $W_1 = \dfrac{q_1^2}{2C}$; $W_2 = \dfrac{q_2^2}{2C}$ и $W' = \dfrac{(q')^2}{2C}$. Из этих трех уравнений и уравнения (2) следует, что

$$q' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2CW_1} + \sqrt{2CW_2}\right).$$

Подставляя полученные значения в (1) уравнение, получим:

$$Q = W_1 + W_2 - 2\frac{(q')^2}{2C}$$

или

$$Q = W_1 + W_2 - \frac{1}{4C}\left(\sqrt{2CW_1} + \sqrt{2CW_2}\right)^2.$$

После несложных преобразований получим:

$$Q = \frac{1}{2}(W_1 + W_2 - 2\sqrt{W_1 W_2}).$$

Подстановка значений дает $Q = 0{,}2$ Дж.

Задача 5

Найти сопротивление между клеммами A и B цепи, изображенной на рисунке 77 и состоящей из бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением R.

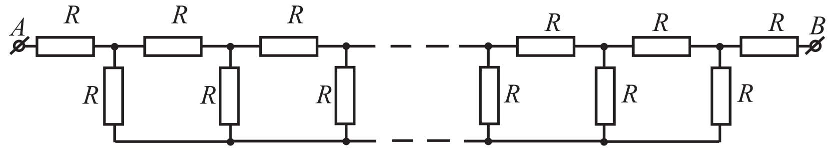


Рис. 77.

Решение

Ясно, что на большом удалении от клемм A и B данной цепи ток течет только по нижнему проводнику, а по верхней части цепи ток не идет, и поэтому ее можно разорвать. Тогда изображенную на рисунке в условии задачи электрическую цепь можно представить, как совокупность двух электрических цепей AC и CB, соединенных последовательно (см. рисунок 78). Сопротивление всей электрической цепи R_{AB} складывается из сопротивлений R_{AC} и R_{CB} цепей AC и CB, которые совпадают: $R_{AC} = R_{CB} = R_X$. Поэтому

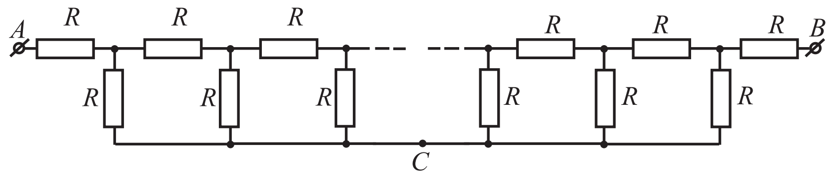


Рис. 78.

$$R_{AB} = 2R_X.$$

Перерисуем электрическую цепь AC (см. рисунок 79).

Поскольку эта цепь бесконечная и ее сопротивление не изменяется при добавлении еще одного звена в начале, представим ее так, как показано на рисунке 80.

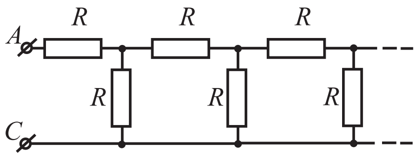


Рис. 79.

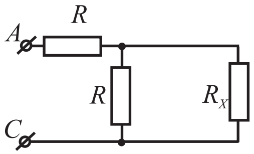


Рис. 80.

Тогда из законов последовательного и параллельного соединения проводников получим:

$$R_X = R + \frac{RR_X}{R + R_X}, \quad \text{или} \quad R_X^2 - RR_X - R^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$R_X = R\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда

$$R_{AB} = R(1+\sqrt{5}).$$

Задача 6

Терморегулятор электрокалорифера периодически включает нагрев на время Δt и затем отключает его, поддерживая, таким образом, почти неизменную заданную температуру. При нормальном напряжении в сети продолжительность промежутков $\Delta t = 2$ мин., а при понижении напряжения более чем на 20% калорифер уже не может поддерживать заданную температуру. Чему равна продолжительность включения при понижении напряжения на 10%.

Решение

Тепло передаваемое электрокалорифером в обогреваемый объем равно по закону Джоуля-Ленца $Q_1 = \dfrac{U_0^2}{R}\Delta t_1$ $\Big($при этом номинальная мощ-

ность $P_0 = \dfrac{U_0^2}{R}\Big)$, а также часть тепла отдается из обогреваемого объема в окружающую среду $Q_{\text{от}}$. Это тепло легко определить, т.к. известно, что при понижении напряжения на $0{,}2U_0$ электрокалорифер работает непрерывно, т.е. все тепло, вырабатываемое им, уходит в окружающую среду. Следовательно, мощность тепловых потерь $P_{\text{от}} = \dfrac{U_1^2}{R}$, где $U_1 = 0{,}8U_0$. Тогда тепло, которое получает обогреваемый объем при номинальном напряжении $Q_0 = (P_0 - P_{\text{от}})\Delta t_1$.

При понижении напряжения на 10%, обогреваемый объем получает тепла $Q_1 = (P_1 - P_{\text{от}})\Delta t_2$, где $P_1 = \dfrac{(0{,}9U_0)^2}{R}$. Т.к. $Q_0 = Q_1$, $\Delta t_1 = \Delta t$.

$$(P_0 - P_{\text{от}})\Delta t_1 = (P_1 - P_{\text{от}})\Delta t_2.$$

Подставляя значения мощностей получим ответ $\Delta t_2 = 4{,}24$ мин.

Задача 7

Во всех точках кривой A, изображенной на рисунке 81, потенциал электрического поля, созданного неподвижными точечными зарядами $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = 1$ нКл, равен $\varphi = 900$ В. Определите расстояние l между зарядами.

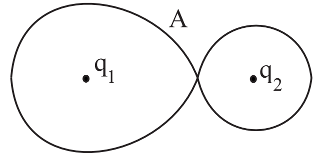


Рис. 81.

Решение

Электрическое поле в рассматриваемом случае симметрично относительно оси, проходящей через заряды q_1 и q_2. При вращении кривой A относительно этой оси получим замкнутую поверхность, потенциал во всех точках которой один и тот же (такие поверхности называют эквипотенциальными).

Вектор напряженности $\vec{E}$ (если он отличен от нуля) в любой точке эквипотенциальной поверхности направлен перпендикулярно к ней. Только в этом случае электрическое поле не совершает работы при переносе пробного заряда из одной точки эквипотенциальной поверхности в любую другую точку этой поверхности.

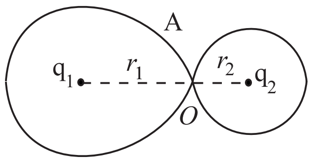


Рис. 82.

Заметим, что в точке O (см. рисунок 82), где самопересекается кривая A, направление нормали к эквипотенциальной поверхности, а, следовательно, и направление вектора $\vec{E}$, не определены. Это возможно только в том случае, когда вектор напряженности в этой точке равен нулю. Поэтому

$$\frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2},$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки O до зарядов q_1 и q_2. Запишем также выражение для потенциала в точке O:

$$\varphi = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}.$$

Кроме того, расстояние между зарядами

$$l = r_1 + r_2.$$

Из этих уравнений находим:

$$l = \frac{k(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}{\varphi} = 9 \text{ см}.$$

Задача 8

Металлическому шару радиусом 3 см сообщили заряд 16 нКл. Найти поверхностную плотность заряда и напряженность поля в точках, удаленных от центра шара на 2 и 4 см. Построить график зависимости напряженности как функцию расстояния от центра.

Решение

Т.к. шар металлический то весь заряд распределен только по поверхности шара. Следовательно, $q = 4\pi R^2\sigma$, откуда

$$\sigma = 1{,}415\ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

Напряженность электрического поля внутри такого шара равна нулю, т.е. $E(2) = 0$.

Напряженность электрического поля вне шара равна напряженности точечного заряда равного по величине заряду шара и находящегося в центре шара, т.е. $E = \dfrac{kq}{r^2}$ (см. рис. 83). Подставив значения q и r получим

$E(4) = 9000\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

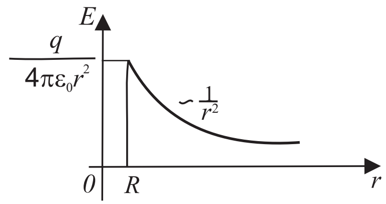


Рис. 83.

Задача 9

В электрической схеме, показанной на рисунке 84, ключ K замкнут. ЭДС батарейки $\mathcal{E} = 12$ В, емкость конденсатора $C = 0{,}2$ мкФ. Отношение внутреннего сопротивления батарейки к сопротивлению резистора $k = \dfrac{r}{R} = 0{,}2$. Найдите количество теплоты, которое выделится на резисторе после размыкания ключа K в результате разряда конденсатора.

Решение

Количество теплоты, выделяющееся на резисторе после размыкания ключа

$$Q = \frac{CU^2}{2}.$$

Напряжение на конденсаторе C и сопротивлении R равно

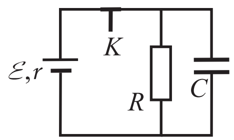


Рис. 84.

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{r+R}.$$

Комбинируя эти формулы, находим:

$$Q = \frac{1}{2}\frac{C\mathcal{E}^2R^2}{(r+R)^2} = 10 \text{ мкДж}.$$

Задача 10

Полупроводниковый терморезистор нагревают протекающим через него постоянным по величине током. Сопротивление терморезистора можно считать обратно пропорциональным его абсолютной температуре: $R = \dfrac{A}{T}$. От начальной температуры 300 К до 310 К терморезистор нагрелся за 10 с. Через какое время он нагреется до 350 К? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Решение

За малое время Δt резистор нагреется от T до $T+\Delta T$.Пусть его теплоемкость C, тогда $I_0^2R\cdot\Delta t_1 = C\Delta T_i$, или

$$I_0^2\left(\frac{A}{T_i}\right)\Delta t_i = C\Delta T_i.$$

$$\Delta t_i = \left(\frac{C}{AI_0^2}\right)T_i\Delta T_i.$$

Время нагревания

$$t = \sum \Delta t_i = \sum\left(\frac{C}{AI_0^2}\right)S_iT_i\Delta T_i = \left(\frac{C}{AI_0^2}\right)(T_{\text{К}}^2 - T_{\text{Н}}^2).$$

$T_{\text{К}} = 350$ К.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(310^2-300^2)}{350^2-300^2} = 0{,}23,$$

$$t_2 = \frac{10}{0{,}23} = 43 \text{ с}.$$

Задача 11

В электрической цепи (рис. 85) ключ K замкнули на некоторое время τ, а потом разомкнули. За время после размыкания ключа через катушку индуктивности протёк заряд $q_2 = 9$ мкКл. Какой заряд q_1 протёк через резистор R за время, пока ключ был замкнут? Вычислите продолжительность времени τ, на которое замкнули ключ K. Сопротивление резистора $R = 500$ кОм, ЭДС батарейки $U = 9$ В. Внутренним сопротивлением батарейки и сопротивлением катушки индуктивности пренебречь.

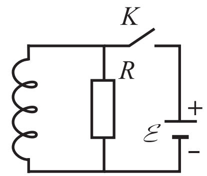


Рис. 85.

Решение

После замыкания ключа в катушке индуктивности возникнет ЭДС индукции, равная $L\dfrac{dI}{dt} = U$. Следовательно, $LdI = Udt$. Так как все элементы цепи можно считать идеальными, а в момент замыкания ключа ток по цепи не протекал, можно записать $L(I_K - 0) = U\tau$. Отсюда

$$I_K = \frac{U}{L}\tau. \qquad (5)$$

За время τ через резистор протечёт заряд

$$q_1 = I_R\tau = \frac{U}{R}\tau. \qquad (6)$$

После размыкания ключа сила тока в цепи будет изменяться по закону $L\dfrac{dI}{dt} = IR$, то есть $LdI = RIdt = Rdq$. За время переходного процесса сила тока в цепи упадёт от I_K до 0, а через резистор протечёт заряд

$$q_2 = \frac{LI_K}{R}. \qquad (7)$$

Из уравнений (5) и (7) следует:

$$\tau = \frac{q_2 R}{U} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{с}.$$

Подставив найденное время τ в уравнение (6), получим:

$$q_1 = I_R \tau = \frac{U}{R}\frac{q_2 R}{U} = q_2 = 9\ \text{мкКл}.$$

§4. Оптика

9 класс

Задача 1

Сколько изображений предмета (AB) дают зеркала, расположенные под углом 60° (см. рис. 86)? Где находятся эти изображения?

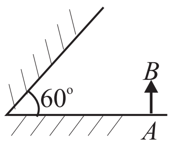


Рис. 86.

Решение

Получится пять изображений (см. рис. 87).

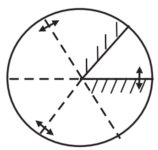


Рис. 87.

Задача 2

На рисунке 88 показано положение S лампы и точки A относительно поверхности LL стола. Построением покажите на столе точку, где надо положить маленькое плоское зеркало, чтобы «зайчик» попал в точку A.

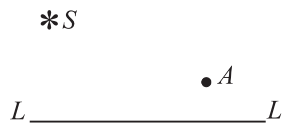


Рис. 88.

Решение

Мысленно заменим поверхность стола зеркалом. Тогда, построив точки S' и A', симметричные точкам S и A, и проведя прямые SA' и $S'A$, найдем искомую точку на поверхности стола.

Задача 3

Против двух зеркал находится непрозрачный экран с вырезанным в нем отверстием в виде стрелки, на которое падает пучок параллельных лучей света. Постройте дальнейший ход лучей и определите положение изображения стрелки на экране (см. рис. 89).

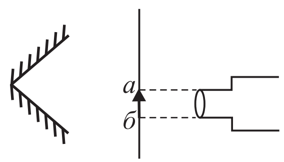


Рис. 89.

Решение

Получается следующее перевернутое изображение (см. рис. 90).

Задача 4

Точечный источник света S находится на некотором расстоянии под тонкой собирающей линзой. Где и как нужно установить плоское зеркало для того, чтобы из линзы выходил пучок света по направлению, показанному стрелкой (см. рис. 91)?

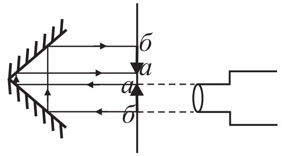


Рис. 90.

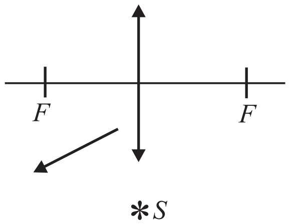


Рис. 91.

Решение

Смотри рисунок 92.

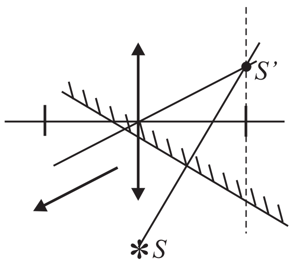


Рис. 92.

11 класс

Задача 1

Точка A движется со скоростью 2 см/с. С какой скоростью движется её изображение, если $a = 15$ см, а фокусное расстояние линзы 10 см (см. рис. 93)?

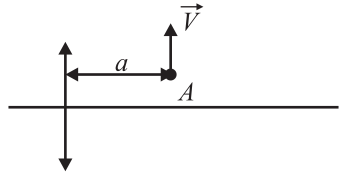


Рис. 93.

Решение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}, \qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a} = \frac{a-F}{a \cdot F},$$

$$b = \frac{a \cdot F}{a - F} = \frac{10 \cdot 15}{5} = 30 \text{ см}$$

$$\frac{L_{\text{изобр}}}{L_{\text{А}}} = \frac{b}{a} = \frac{30}{15} = 2; \qquad L_{\text{изобр}} = 2L_{\text{А}},$$

то есть скорость изображения в 2 раза больше скорости точки A.

$$V_{\text{изобр}} = 4 \text{ см/с}.$$

Задача 2

Два зеркала, одно из которых бесконечно, а другое имеет длину L, образуют угол 45° (см. рис. 94). В плоскости зеркала длины L на расстоянии $2L$ от вершины угла расположен точечный источник света S. Сколько раз луч света, вышедший из S, может отразиться от этой системы зеркал?

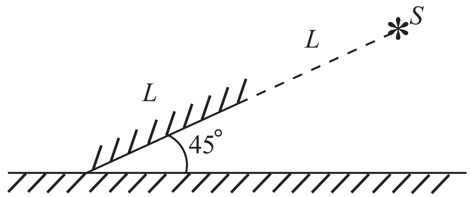


Рис. 94.

Решение

Задача решается, исходя из закона отражения света: угол падения светового луча на зеркало равен углу отражения. Отсюда следует известное свойство: луч, испущенный источником S и отраженный от зеркала, можно заменить лучом, исходящим из изображения S' источника в зеркале. Из построения, приведенного на рисунке 95, следует, что если луч света попадает в область I, то он вообще ни разу не отразится от зеркал. Если

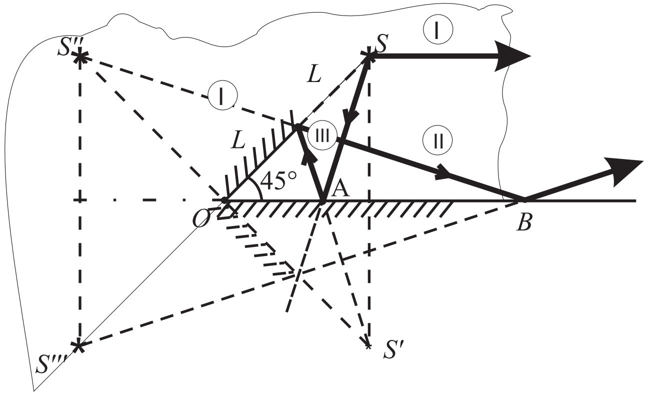


Рис. 95.

же луч сначала падает на бесконечное зеркало, то, в зависимости от точки падения, он может либо отразиться от бесконечного зеркала всего один раз (область II), либо испытать три отражения: от бесконечного зеркала, от конечного зеркала, и снова от бесконечного зеркала (область III). Пограничную точку на бесконечном зеркале, разделяющую эти области, можно определить, построив изображение S' источника света в большом зеркале. Действительно, проводя отрезки из точки S' к бесконечному зеркалу, мы можем определить возможные направления распространения отраженных от него лучей. Далее, проведя прямую, проходящую через S' и верхний край конечного зеркала, найдем точку A ее пересечения с бесконечным зеркалом. Луч, вышедший из источника S' и проходящий правее точки A, не попадает ни на одно из зеркал, в то время как луч, проходящий левее точки A, попадает на конечное зеркало. Значит, точка A является пограничной. Проведя прямую через источник S и точку A, мы получим границу областей II и III.

Покажем теперь, что луч света, попавший из источника S в область III, действительно отразится от системы зеркал три раза. Для этого построим изображение источника S' в конечном зеркале (обозначим это изображение S''). Затем проведем прямую, проходящую через изображение S'' и край конечного зеркала. Эта прямая пересекает бесконечное зеркало в некоторой точке B. Значит, луч, вышедший из источника S и попавший в область III, после двух последовательных отражений от бесконечного и конечного зеркал попадет на бесконечное зеркало левее точки B. Для того, чтобы определить, куда он далее отразится, построим изображение источника S'' в бесконечном зеркале (обозначим это изображение S'''). Из построения ясно, что угол $S''OS'''$ прямой. Значит, точки S, O и S''' лежат на одной прямой, и поэтому луч, отраженный от бесконечного зеркала, больше не будет попадать ни на одно из зеркал системы. В итоге данное отражение будет последним.

В заключение заметим, что существует и другой способ нахождения точки A. Отразим конечное зеркало в бесконечном и проведем прямую, проходящую через источник света и изображение края конечного зеркала. Эта прямая пересечет бесконечное зеркало в искомой точке A. Однако далее все равно нужно обосновать то, что при попадании луча из источника S в область III возможно только три его отражения, что наиболее просто сделать, строя мнимые изображения источников.

Задача 3

На горизонтальном столе стоит прозрачный цилиндр с радиусом основания R и высотой H_1, изготовленный из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$. На высоте H_2 над верхним основанием цилиндра на его оси расположен точечный источник света. Найти площадь тени, отбрасываемой цилиндром на поверхность стола.

Решение

Из чертежа (см. рис. 96) ясно, что тень на столе имеет вид кольца с центром на оси цилиндра (область тени показана штриховкой). Внешняя граница кольца находится там, куда падает световой луч 1, касающийся края верхнего основания цилиндра. Из чертежа следует, что радиус внешней границы тени равен

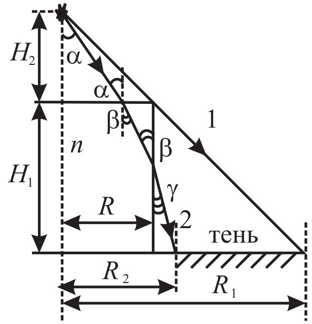


Рис. 96.

$$R_1 = (H_1 + H_2)\frac{R}{H_2}.$$

Для того чтобы найти радиус R_2 внутренней границы тени, рассмотрим луч 2, который проходит через цилиндр очень близко от края его верхнего основания (масштаб на чертеже не соблюден). Именно этот луч определяет, где на столе будет проходить граница между тенью и светом, поскольку все остальные лучи, упавшие на верхнее основание цилиндра, попадут на стол левее луча 2. Рассматриваемый луч преломляется на верхнем основании и на боковой поверхности цилиндра. Запишем для двух указанных преломлений закон Снеллиуса :

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \qquad \cos\gamma = n\cos\beta.$$

Отсюда $\cos\gamma = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$, или $\cos^2\gamma + \sin^2\alpha = n^2$. Последнее соотношение можно преобразовать, выразив $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\gamma} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = n^2.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{2+\operatorname{ctg}^2\alpha - n^2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{n^2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-1}}.$$

Учитывая, что $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{H_2}{R}$ (луч 2 проходит практически через край верхнего основания цилиндра), найдем R_2:

$$R_2 = R + H_1\operatorname{tg}\gamma = R + H_1\sqrt{\frac{2+\left(\frac{H_2}{R}\right)^2 - n^2\left[1+\left(\frac{H_2}{R}\right)^2\right]}{n^2\left[1+\left(\frac{H_2}{R}\right)^2\right]-1}} =$$

$$R + H_1\sqrt{\frac{1-(n^2-1)\left[1+\left(\frac{H_2}{R}\right)^2\right]}{n^2\left[1+\left(\frac{H_2}{R}\right)^2\right]-1}}.$$

Из полученного выражения видно, что внутренняя граница кольцевой тени может существовать за пределами нижнего основания цилиндра только при выполнении условия $(n^2-1)\left[1+\left(\frac{H_2}{R}\right)^2\right] < 1$. Переписав его в виде $\left(\frac{H_2}{R}\right)^2 < \frac{2-n^2}{n^2-1}$, заметим, что при заданном в условии задачи значении показателя преломления $n = 1{,}5$ полученное условие не выполняется. Это означает, что при заданном значении n все световые лучи, попавшие из источника на верхнее основание цилиндра, упадут на стол в пределах нижнего основания цилиндра, т.е. второго преломления на боковой поверхности цилиндра не будет. Поэтому радиус внутренней границы тени будет равен радиусу R цилиндра, и искомая площадь тени:

$$S = \pi(R_1^2 - R^2) = \frac{\pi R^2 H_1(H_1+2H_2)}{H_2^2}.$$

Задача 4

В аквариуме, заполненном прозрачной жидкостью, закреплена тонкостенная полая равнобедренная призма. Схематично эта ситуация изображена на рисунке 97. Узкий пучок света, распространяющийся параллельно дну аквариума, после прохождения призмы выходит из неё перпендикулярно её боковой грани. Для каких значений показателя преломления жидкости такая ситуация возможна?

Решение

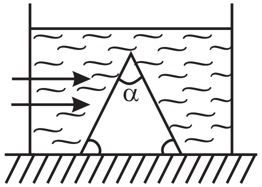


Рис. 97.

Согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами угол падения равен половинному углу при вершине полой призмы: $\varphi_1 = \dfrac{\alpha}{2}$, а угол преломления равен углу при вершине полой призмы: $\varphi_2 = \alpha$.

По закону Снелла $n \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$, и после соответствующей подстановки получим

$$n \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha.$$

Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\sin \alpha = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2).$$

Тогда получим:

$$n = 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

По физическому смыслу задачи $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. С учётом этого неравенства получаем:

$$\sqrt{2} < n < 2.$$

Глава 3

Региональные олимпиады

Механика

8 класс

Задача 1. Маугли и Каа

Маугли принимал у удава Каа зачёт по развороту на 180°. Техника разворота такова: Каа, вытянувшись в линию, ползёт к Маугли со скоростью v_1; как только голова удава касается ног мальчика, удав поворачивает её на 180° и начинает выполнять разворот; при этом голова Каа удаляется от Маугли со скоростью $v_2 > v_1$, а хвост продолжает движение в прежнем направлении и с прежней скоростью (рис. 1). За какое время t_0 удав выполнит разворот? На каком расстоянии x_0 от ног мальчика окажется хвост удава сразу же после выполнения разворота? Считайте, что длина L удава Каа во время разворота не меняется.

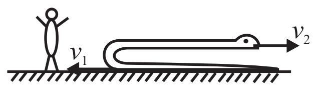


Рис. 1.

Решение

Введём систему координат, в которой начало отсчёта расположено у ног Маугли, ось x сонаправлена с вектором $\vec{v}_2$, а время t отсчитывается от момента начала поворота.

Пока поворот не закончился, координата x_1 хвоста и x_2 головы Каа зависят от времени следующим образом:

$$x_1 = L - v_1 t, \qquad x_2 = v_2 t.$$

Конец поворота — это момент времени t_0, когда удав снова вытянулся вдоль оси x,это есть

$$x_2(t_0) - x_1(t_0) = L,$$

откуда после подстановки x_1 и x_2 найдём

$$t_0 = \frac{2L}{v_1 + v_2}.$$

Координата хвоста в этот момент:

$$x_0 = x_1(t_0) = L - v_1 t_0 = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} L.$$

Задача 2. Футболисты

Крокодил Гена и Чебурашка решили поставить ворота для игры в футбол. Они вкопали штанги и стали устанавливать перекладину. Для этого Гена прямо над штангами прикрепил к ветке дерева блок с перекинутой через него верёвкой. Один конец верёвки он обвязал вокруг середины лежащей на земле перекладины массой $m = 5$ кг, потянул за другой так, что верёвка натянулась, а её конец оказался на уровне плеч Чебурашки, стоящего точно под блоком. Чебурашка пошёл от дерева, удерживая конец верёвки на прежнем уровне. Перекладина оторвалась от земли и стала подниматься. Когда Чебурашка удалился на расстояние $L = 3$ м, она оказалась на одном уровне с верхними концами штанг (рис. 2). После этого Гена прикрепил её к штангам. Какова высота h штанг? Какую работу A совершил Чебурашка, перемещаясь с натянутой верёвкой? Блок находился на высоте $H = 4$ м от уровня плеч Чебурашки, стоящего на земле. Ускорение свободного падения $g \approx 10\ \dfrac{\text{Н}}{\text{кг}}$.

Решение

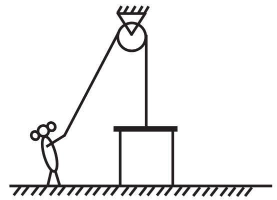


Рис. 2.

В начале подъёма длина куска верёвки от блока до Чебурашки была $S_1 = H$. В конце подъёма она достигла величины $S_2 = \sqrt{H^2 + L^2}$. Следовательно, Чебурашка поднял перекладину на высоту

$$h = S_2 - S_1 = \sqrt{H^2 + L^2} - H = 1\ \text{м}.$$

Поскольку никакой механизм не даёт выигрыша в работе, Чебурашка совершил работу

$$A = mgh = mg(\sqrt{H^2 + L^2} - H) = 50\ \text{Дж}.$$

Задача 3. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс закреплён на полозьях, которые могут скользить по полу цеха. Шток поршня большего диаметра прижат к стене. Минимальная сила, которую нужно приложить к штоку поршня меньшего диаметра, чтобы пресс сдвинулся с места, равна F_1 (рис. 3а). В какую сторону (к стене или от неё) сдвинется пресс? Если пресс установить так, чтобы стены касался шток поршня меньшего диаметра, то для того, чтобы сдвинуть пресс, к противоположному штоку придётся приложить силу F_2 (рис. 3б). Какую минимальную горизонтальную силу F_3 необходимо приложить к отдельно стоящему прессу на полозьях (рис. 3в), чтобы сдвинуть его с места? Учитывайте трение только между полозьями и полом.

Решение

Пусть S_1 и S_2 — площади малого и большого поршней соответственно, тогда давления жидкости в первом и во втором случаях:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}, \qquad p_2 = \frac{F_2}{S_2}.$$

Суммарные силы давления, действующие со стороны жидкости на внутренние стенки пресса,

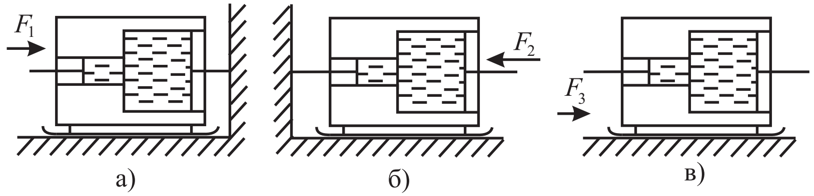


Рис. 3.

$$F_{p_1} = p_1(S_2 - S_1) \text{ и } F_{p_2} = p_2(S_2 - S_1)$$

всегда направлены в сторону меньшего поршня, следовательно, в первом случае пресс сдвинется от стены.

Каждая из сил F_{p_1} и F_{p_2} равна силе трения F_0, откуда $p_1 = p_2$,

$$F_0 = F_{p_1} = p_1(S_2 - S_1) = p_2S_2 - p_1S_1 = F_2 - F_1.$$

Чтобы сдвинуть с места отдельно стоящий пресс, нужно приложить к нему не меньшую силу, чем сила трения, то есть

$$F_3 = F_0 = F_2 - F_1.$$

Задача 4. Пожарный катит бочку

Пожарный катит бочку на продовольственный склад (рис. 4). Для этого он медленно тянет за перекинутую через бочку веревку с силой $F = 300\ H$. При этом веревка параллельна склону, который составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найдите массу m бочки. Ускорение свободного падения $g = 10\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$.

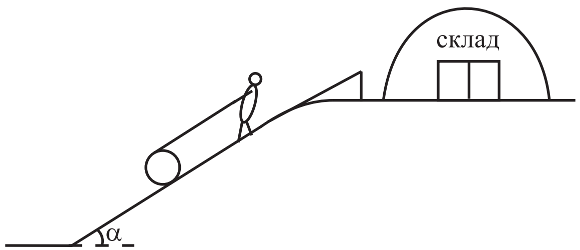


Рис. 4.

Решение

Поскольку бочку катят медленно, момент силы тяжести относительно точки касания бочки со склоном уравновешивается моментом силы $\vec{F}$ (рис. 5). Плечо силы $\vec{F}$ равно $2R$, а плечо силы тяжести равно $\frac{R}{2}$, так как катет, лежащий против угла 30°, вдвое меньше гипотенузы. Следовательно,

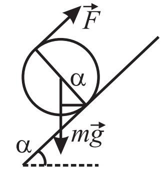


Рис. 5.

$$2RF = \frac{R}{2}mg, \quad \text{откуда} \quad m = \frac{4F}{g} = 120 \text{ кг}.$$

Задача 5. Система в равновесии

Левые концы рычагов с длинами плеч l_1, $5l_1$ и $5l_2$, l_2 соответственно соединены нитью, к которой прикреплен груз массой M (рис. 6). К их правым концам с помощью нити подвешен подвижный блок с грузом массой $m = 1$ кг. Система находится в равновесии. Полагая, что рычаги и блок легкие, определите M.

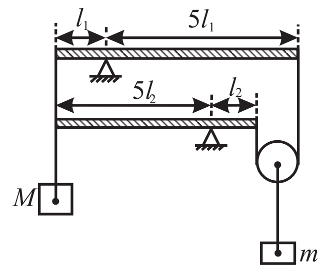


Рис. 6.

Решение

Обозначим силы натяжения нитей через T_1, T_2, T_3 и T_4 (рис. 7). Условия равновесия для верхнего и нижнего рычагов имеют вид:

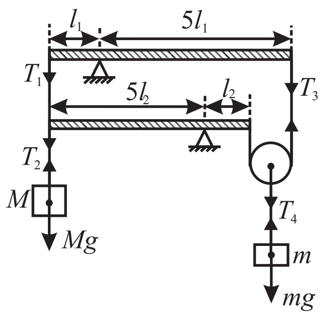


Рис. 7.

$$T_1 l_1 = T_3 5 l_1, \qquad (T_2 - T_1) 5 l_2 = T_3 l_2.$$

Блок и грузы находятся в равновесии при

$$Mg = T_2, \qquad mg = T_4 = 2T_3.$$

Из полученных уравнений находим $M = 2{,}6$ кг.

Задача 6. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс закреплен на бетонном полу в цехе. К штокам поршней прижаты два одинаковых ящика. Минимальная сила, которую нужно приложить к левому ящику, чтобы сдвинуть оба ящика вправо, составляет F_1 (рис. 8). Аналогично, к правому ящику необходимо приложить силу не меньше F_2, чтобы сдвинуть оба ящика влево.

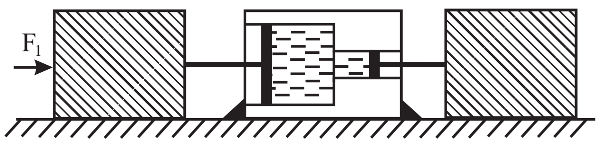


Рис. 8.

Какую минимальную силу F необходимо приложить к точно такому же отдельно стоящему ящику (рис. 9), чтобы сдвинуть его с места? Учитывайте трение только между ящиками и полом.

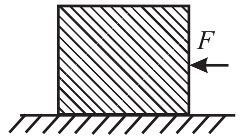


Рис. 9.

Решение

Чтобы сдвинуть ящик с места, нужно преодолеть силу трения $F_{\text{тр}}$. В первом опыте силы $F_{1\text{л}}$ и $F_{1\text{п}}$ давления на левый и правый поршни соответственно связаны соотношением

$$F_{1\text{л}} = F_{1\text{п}} \cdot k,$$

где k — отношение площадей поршней. Минимальная сила F_1 определяется условиями:

$$F_1 = F_{\text{тр}} + F_{1\text{л}}, \qquad F_{1\text{п}} = F_{\text{тр}}.$$

Аналогично, для второго опыта (когда сила действует справа):

$$F_2 = F_{\text{тр}} + F_{2\text{п}}, \qquad F_{2\text{л}} = F_{\text{тр}}, \qquad F_{2\text{л}} = kF_{2\text{п}}.$$

Из всех написанных уравнений находим

$$F = F_{\text{тр}} = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}.$$

Задача 7. Лекарство

В цилиндрический сосуд с водой налили $V = 0{,}2$ л масла, которое образовало на воде слой толщиной $d = 1$ см. Затем в сосуд опустили плоскую таблетку из сала массой $m = 360$ г и толщиной $h = 5$ см. На какую высоту l таблетка будет выступать над маслом? Плотности воды $\rho_{\text{в}} = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, масла $\rho_{\text{м}} = 0{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, сала $\rho_{\text{с}} = 0{,}72\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Решение

Площадь сечения сосуда $S = \dfrac{V}{d}$, а таблетки $s = \dfrac{m}{\rho_{\text{с}} h}$. Толщина слоя масла после погружения таблетки

$$D = \frac{V}{S-s} = \frac{d}{\dfrac{md}{\rho_С V h}} = 2 \text{ см}.$$

Применим закон Архимеда для сала:

$$\rho_С shg = \big(\rho_М gD + \rho_В g(h-D-l)\big)s,$$

откуда

$$l = h - D - \frac{\rho_С h - \rho_М D}{\rho_В} = 1 \text{ см}.$$

9 класс

Задача 1. Скорость снаряда

Снаряд вылетел из катапульты со скоростью $v_1 = 39\ \frac{м}{с}$. Через время $\tau = 4{,}2$ с он упал на землю со скоростью $v_2 = 45\ \frac{м}{с}$. Определите минимальную v_{min} и максимальную v_{max} скорости снаряда за время его полёта Ускорение свободного падения $g \approx 10\ \frac{м}{с^2}$. Сопротивление воздуха можно не учитывать. Выводить общую формулу для v_{min} и v_{max} не требуется.

Решение

Предположим, что снаряд вылетел из катапульты под углом α к горизонту (рис. 10). Проекции на оси Ox и Oy начальной и конечной скоростей связаны между собой следующим образом:

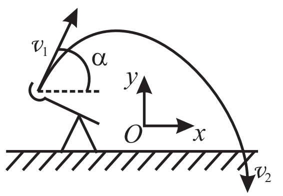


Рис. 10.

$$v_{2x} = v_{1x} = v_1 \cos\alpha,$$
$$v_{2y} = v_{1y} - g\tau = v_1 \sin\alpha - g\tau.$$

Используя теорему Пифагора $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$, находим

$$\sin\alpha = \frac{v_1^2 - v_2^2 + g^2\tau^2}{2v_1 g\tau} = \frac{5}{13}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{12}{13}.$$

Скорость минимальна в наивысшей точке траектории, а максимальная скорость достигается на концах траектории, в данном случае в момент падения на землю, следовательно,

$$v_{min} = v_1 \cos\alpha = 36\ \frac{м}{с},$$

$$v_{max} = v_2 = 45\ \frac{м}{с}.$$

Задача 2. Кирпичи в аквариуме

Два одинаковых шершавых кирпича положили на дно аквариума (рис. 11а). После этого в аквариум стали наливать воду. Зависимость силы F давления кирпичей на дно аквариума от высоты h слоя налитой воды изображена на графике (рис. 11б). Определите длины a, b и c рёбер кирпичей и плотность ρ материала, из которого они изготовлены.

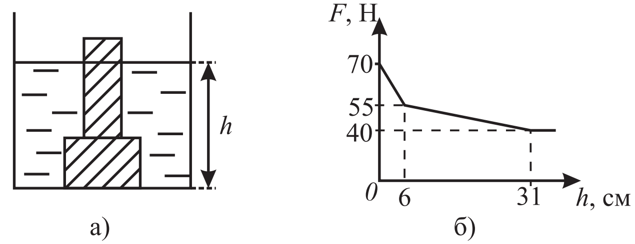


Рис. 11.

Решение

При $h = 0$ (воды нет) сила $F_1 = 70$ Н давления на дно равна силе тяжести, действующей на оба кирпича:

$$F_1 = 2\rho V g, \qquad (2)$$

где V — объём кирпича. Два излома на графике $F(h)$ возникают, когда уровень воды достигает верхней грани каждого из кирпичей. Следовательно, длины рёбер кирпичей

$$a = 6\text{ см} \text{ и } b = (31-6)\text{ см} = 25\text{ см}.$$

При $h = 6$ см сила $F_2 = 55$ Н давления на дно равна силе тяжести, действующей на оба кирпича, за вычетом силы Архимеда, действующей на нижний (погружённый в воду) кирпич:

$$F_2 = 2\rho V g - \rho_В V g, \qquad (3)$$

где $\rho_В = 1000\ \frac{кг}{м^3}$ — плотность воды. Вычитая (3) из (2), получаем

$$F_1 - F_2 = \rho_В V g, \quad \text{откуда} \quad V = \frac{F_1 - F_2}{\rho_В g} = 0{,}0015\text{ м}^3 = 1{,}5\text{ л}.$$

Длина третьего ребра кирпича $c = \frac{V}{ab} = 10$ см. Из (2) находим плотность

$$\rho = \frac{F_1}{2Vg} = \frac{F_1}{2(F_1 - F_2)}\rho_В \approx 2{,}3\ \frac{г}{см^3}.$$

Задача 3. Звук от самолетов

Два сверхзвуковых самолета движутся горизонтально прямолинейно встречными курсами, находясь в одной вертикальной плоскости на разных высотах (см. рис. 12). В момент времени $t_0 = 0$ самолет 1 оказался точно над самолетом 2. Через время $t_1 = 1{,}8$ с после этого второй пилот услышал звук от первого самолета. В какой момент времени t_2 первый пилот услышал звук от второго самолета? Скорость звука в воздухе $u = 324\ \frac{м}{с}$, скорости самолетов $v_1 = 405\ \frac{м}{с}$ и $v_2 = 351\ \frac{м}{с}$.

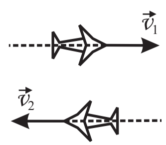


Рис. 12.

Решение

Границей зоны, до которой дошёл звук от первого самолета, является

конус. Его вершина в каждый момент времени совпадает с положением самолета. Осью конуса является траектория самолета. Для первого самолета угол $2\alpha_1$ раствора конуса определяется соотношением $\sin(\alpha_1) = \frac{u}{v_1}$. Пусть H — высота первого самолета над вторым, а O_1 и O_2 — точки, в которых находились самолеты в момент t_0. В момент t_1 самолеты окажутся в точках A_1 и A_2 (см. рис. 13). Тогда $O_1A_1 = v_1t_1$, $O_2A_2 = v_2t_2$, откуда

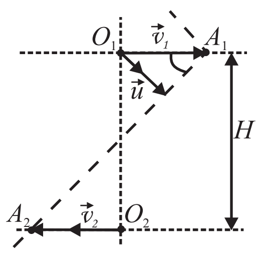


Рис. 13.

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{H}{(v_1+v_2)t_1}, \qquad t_1 = \frac{H}{(v_1+v_2)\operatorname{tg}(\alpha_1)}.$$

Аналогично,

$$t_2 = \frac{H}{(v_1+v_2)\operatorname{tg}(\alpha_2)}.$$

Окончательно,

$$t_2 = t_1\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1)}{\operatorname{tg}(\alpha_2)} = t_1\sqrt{\frac{v_2^2 - u^2}{v_1^2 - u^2}} = 1{,}0\text{ с}.$$

Задача 4. Метеорологическая ракета

Метеорологическая ракета стартует в вертикальном направлении с поверхности Земли. Ее топливо сгорает за $\tau = 40$ с полета. В течении этого времени ускорение ракеты возрастает линейно от $a_0 = g$ до $a_\tau = 5g$. Найдите мощность двигателя ракеты перед окончанием его работы. Масса незаправленной ракеты $m_0 = 10$ кг, ускорение свободного падения $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

Решение

Ускорение ракеты

$$a(t) = a_0 + (a_\tau - a_0)\frac{t}{\tau}.$$

По аналогии с тем, что пройденному пути соответствует площадь под графиком скорости, находим скорость v_τ ракеты в момент τ как площадь под графиком ускорения (см. рис. 14):

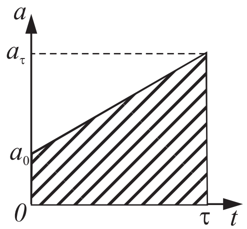


Рис. 14.

$$v_\tau = \frac{\tau}{2}(a_0 + a_\tau).$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$m_0 a_\tau = F - mg,$$

где F — сила тяги в конце полета. Мощность двигателя в этот момент

$$N = Fv_\tau = \frac{m_0\tau}{2}(a_\tau + g)(a_0 + a_\tau) = 720 \text{ кВт}.$$

Задача 5.Сосуд на опорах

Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью плотностью ρ_0 стоит на двух параллельных опорах, силы реакций которых составляют N_1 и N_2 (рис. 15). В сосуд опустили на нити шарик массой m и плотностью ρ так, что он оказался на одной вертикали со второй опорой. При этом шарик полностью погружен в воду и не касается сосуда. Определите новые силы N_1' и N_2' реакций опор.

Решение

Пусть F и F' — силы давления жидкости на основание сосуда до и после погружения шарика, тогда

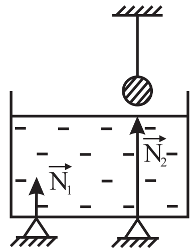


Рис. 15.

$$F' = F + \rho_0\frac{mg}{\rho}.$$

Поскольку сосуд легкий и цилиндрический, то при увеличении уровня воды центр масс сосуда с водой не смещается по горизонтали. Следовательно, точки приложения сил F и F' совпадают. Запишем условия равновесия сосуда до и после погружения шарика:

$$N_1 + N_2 = F, \qquad N_1' + N_2' = F',$$
$$N_1 l_1 = N_2 l_2, \qquad N_1' l_1 = N_2' l_2,$$

где l_1 и l_2 — плечи реакций опор относительно точки приложения силы F. Откуда

$$N_1' = N_1\Big(1 + \frac{mg\rho_0}{(N_1 + N_2)\rho}\Big), \qquad N_2' = N_2\Big(1 + \frac{mg\rho_0}{(N_1 + N_2)\rho}\Big).$$

Заметим, что ответ не зависит от места погружения шарика.

10 класс

Задача 1. Стробоскопическая фотография

На обрывке стробоскопической фотографии (рис. 16) запечатлены три последовательных положения (A, B и C) шарика, движущегося в поле тяжести Земли. Найдите построением с помощью циркуля и линейки без делений следующее положение (D) шарика. Поясните ход построения. Вспышки лампы происходят через равные промежутки времени. Ориентация фотографии относительно вертикали не известна.

Решение

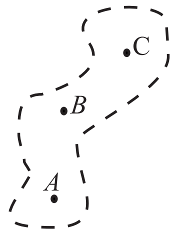


Рис. 16.

Пусть t — время между вспышками лампы, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ — скорости шарика в положениях A и B, тогда

$$\vec{AD} = \vec{v}_A \cdot 3t + \frac{\vec{g}(3t)^2}{2} = 3\left(\vec{v}_A t + \frac{3\vec{g}t^2}{2}\right) =$$

$$= 3\left((\vec{v}_A + \vec{g}t)t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right) = 3\left(\vec{v}_B t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right) = 3\vec{BC}.$$

Таким образом, если через точку A провести прямую параллельно вектору $\vec{BC}$ и отложить на ней отрезок $AD = 3BC$, то точка D и будет искомой точкой (рис. 17). Методика построения прямой параллельной данной и отрезка кратного данному известна из курса геометрии.

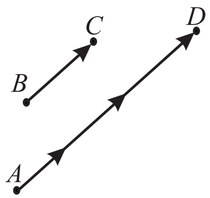


Рис. 17.

Задача 2. Устойчивость стержня

Один конец однородного стержня массой M и длиной L опирается на шарнир O, а другой — прикреплён к лёгкой нити, перекинутой через блок (рис. 18). К свободному концу нити привязан груз массой m. Расстояние от стержня до блока равно l. При какой массе m груза вертикальное положение стержня будет устойчиво (то есть при его отклонении от вертикали

на малый угол будет возникать сила, возвращающая стержень в исходное положение)?

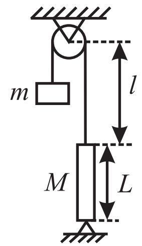


Рис. 18.

Решение

Пусть стержень отклонился от вертикали на малый угол α, тогда нить отклонится от вертикали на угол $\beta \approx \dfrac{\alpha L}{l}$ (рис. 19). Чтобы он вернулся в исходное положение, момент силы натяжения нити $T = mg$, имеющей плечо $l_1 \approx \beta(l + L)$ относительно полюса O, должен превысить момент силы тяжести стержня $F = Mg$, имеющей плечо $l_2 \approx \dfrac{\alpha L}{2}$ относительно того же полюса:

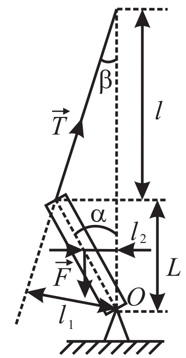


Рис. 19.

$$mg \cdot \beta(l + L) > Mg \cdot \alpha\frac{L}{2}, \qquad \beta l = \alpha L,$$

откуда

$$m > \frac{\frac{M}{2}}{1 + \frac{L}{l}}.$$

Задача 3. Поршень с рукояткой

Экспериментатор Глюк нашёл в сарае старый цилиндр, вблизи дна которого крепился манометр показывающий, что внутри вакуум. Поршень площадью $S = 10^{-2}$ м^2 закрывал внутренность цилиндра. К середине поршня крепилась рукоятка, плечо которой было в $k = 4$ раза больше радиуса поршня (рис. 20). Несмотря на внешнее давление $p_o = 10^5$ Па, поршень был неподвижным из-за трения. Чтобы его сдвинуть с места, Глюк начал давить на рукоятку с постоянной по модулю силой перпендикулярной оси цилиндра, и та вместе с поршнем стала медленно поворачиваться. С какой силой F Глюк давил на рукоятку, если при повороте поршня на один оборот она продвинулась вглубь цилиндра на $\Delta y = 40$ см. Считайте поршень лёгким.

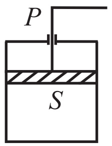


Рис. 20.

Решение

Траектория произвольной точки A боковой поверхности поршня — это винтовая линия (рис. 21). Пусть $v_\parallel$ — составляющая скорости точки A вдоль оси цилиндра, а $v_\perp$ — составляющая в перпендикулярной к оси плоскости. Поскольку сила трения T противонаправлена скорости, то её составляющие по абсолютной величине

$$\frac{T_\parallel}{T_\perp} = \frac{v_\parallel}{v_\perp} = \frac{\Delta y}{2\pi r}, \qquad (6)$$

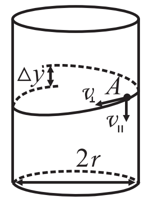


Рис. 21.

где $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ — радиус цилиндра.

Поршень движется с постоянной скоростью, поэтому можно применить правило моментов и равенство сил вдоль оси цилиндра:

$$F \cdot kr = T_\perp \cdot r, \quad p_0 S = T_\parallel. \qquad (7)$$

Решая уравнения (7) с использованием (6), находим

$$F = \frac{2\pi r}{k\Delta y} p_0 S = \frac{2\sqrt{\pi S}}{k\Delta y} p_0 S \approx 220 \text{ Н}.$$

Задача 4. Стакан-поплавок

В глубоком цилиндрическом сосуде с внутренним диаметром D находится вода, в которой дном вниз плавает тонкостенный металлический стакан массой m и высотой H. Благодаря направляющим стенки стакана и цилиндра остаются параллельными. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы утопить этот стакан, то есть заставить его пойти ко дну? Известно, что утопленный стакан не всплывает, а максимальная масса вмещаемой им воды равна M.

Решение

Будем медленно опускать стакан в воду. Для этого к нему нужно прикладывать вертикально вниз силу F, уравновешивающую силу Архимеда и силу тяжести, действующие на стакан. Пока в стакане нет воды F линейно зависит от глубины погружения x, причем $F(0) = 0$.

Край стакана сравняется с уровнем жидкости в сосуде при $x = x_1$ (рис. 22). При этом $F(x_1) = Mg - mg = F_0$. По мере дальнейшего опускания стакана в него начнет затекать вода. Сила тяжести, действующая на стакан с жидкостью будет увеличиваться, а F — уменьшаться линейно с x. При $x = x_2$ сила F достигнет нулевого значения и стакан утонет:

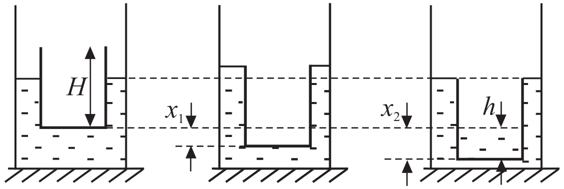


Рис. 22.

$$-mg - Mg\frac{h}{H} + Mg = F(x_2) = 0, \quad \text{откуда} \quad h = H\left(1 - \frac{m}{M}\right).$$

Нетрудно показать, что это произойдет, когда уровень воды в сосуде станет равным первоначальному, поэтому $x_2 = h$.

Построим график зависимости $F(x)$, $\quad 0 \le x \le x_2$ (рис. 23). Совершенной работе соответствует площадь под графиком:

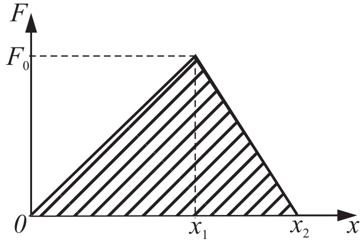


Рис. 23.

$$A = \frac{1}{2}F_0 x_2 = \frac{1}{2}MgH\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2.$$

Обратите внимание на то, что результат не зависит от диаметра сосуда.

Задача 5. Клин и шайба (1)

Вблизи вершины клина массой M, высотой H и с длиной основания L удерживают небольшую шайбу массой M (рис. 24). Клин покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Шайбу отпускают и она соскальзывает к основанию клина. На какое расстояние S при этом переместится

клин?

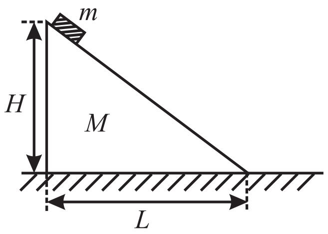


Рис. 24.

Решение

Поскольку внешние силы, действующие на систему «клин—шайба», не имеют горизонтальных составляющих, горизонтальная координата центра масс системы не меняется. Тогда можем записать:

$$X_{\text{сп}} = \frac{MX_{\text{К}}}{m+M};$$

$$X_{\text{ск}} = \frac{mL + MX_{\text{К}}}{m+M};$$

$$S = X_{\text{сп}} - X_{\text{ск}} = -\frac{mL}{m+M}.$$

Задача 6. Клин и шайба (2)

При выполнении условий предыдущей задачи найдите максимальную скорость V клина. Трением между клином и шайбой пренебречь.

Решение

Скорость клина будет максимальной, когда шайба достигнет его основания. Пусть $\vec{u}$ — скорость шайбы в этот момент относительно клина, а $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ — ее скорость в неподвижной системе отсчета(рис. 25). По теореме косинусов для треугольника скоростей:

$$v^2 = u^2 + V^2 - 2uV\cos(\alpha).$$

Поскольку внешние силы, действующие на систему «клин—шайба» вертикальны, проекция имульса системы на ось x не меняется: $0 = m(u\cos(\alpha) - V) - MV$, откуда

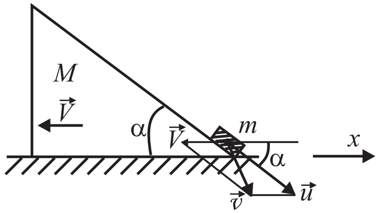


Рис. 25.

$$u = \frac{m+M}{m\cos(\alpha)}V.$$

По закону сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Подставив (1) и (2) в последнее уравнение и учитывая, что $\cos(\alpha) = \dfrac{L}{\sqrt{H^2+L^2}}$, найдём

$$V = \sqrt{2gH\left(1+\frac{M}{m}\right)^{-1}\left(\frac{M}{m}+\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{H^2}{L^2}\right)^{-1}}.$$

11 класс

Задача 1. Санки с моторчиком

Крокодил Гена с Чебурашкой решили покататься с горы. Гена установил на санки лебёдку с мотором, взял лыжи, и друзья отправились на гору. Там они встали на склон, составляющий с горизонтом угол α. Чебурашка включил мотор, а Гена, взявшись за трос, покатился с горы (рис. 26). С каким ускорением a поехал Гена, если санки с Чебурашкой остались в покое? Масса санок вместе с мотором, лебёдкой и Чебурашкой равна массе Гены вместе с лыжами. Коэффициенты трения между снегом и санками и между снегом и лыжами равны μ.

Решение

Пусть m — масса Гены вместе с лыжами, N — сила нормальной реакции склона, действующая на него, T — сила натяжения троса, F_1 и F_2 —

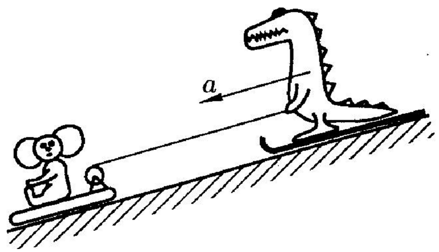


Рис. 26.

силы трения, действующие на Чебурашку (рис. 27) и Гену (рис. 28) соответственно, тогда второй закон Ньютона для них в проекциях на оси Ox и Oy имеет вид:

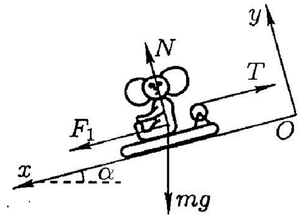


Рис. 27.

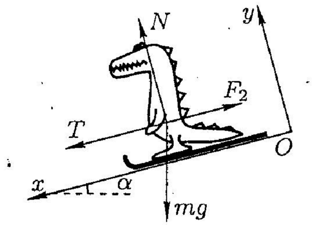


Рис. 28.

$$\begin{aligned} Oy:&\quad 0 = N - mg\cos\alpha,\\ Oy:&\quad 0 = N - mg\cos\alpha,\\ Ox:&\quad 0 = mg\sin\alpha - T + F_1,\\ Ox:&\quad ma = T + mg\sin\alpha - F_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку Гена скользит вниз, то сила трения для него определяется однозначно: $F_2 = \mu N$. Чебурашка покоится, поэтому сила трения F_1 может принимать значения в диапазоне от $-\mu N$ (при малых T) до μN (при больших T). Выразим a из системы (8):

$$a = g\left(2\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \frac{F_1}{mg}\right).$$

Подставляя $F_1 = F_{1min} = -\mu mg\cos\alpha$ и $F_1 = F_{1max} = \mu mg\cos\alpha$, найдём диапазон возможных значений a:

$$a_{min} = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad a_{max} = 2g\sin\alpha.$$

Если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, то $a_{min} < 0$, то есть Гена скользит вверх. Это противоречие возникло из-за того, что в ходе решения мы использовали фиксированное направление силы F_2 (предположив, что Гена скользит вниз). Для устранения противоречия нужно добавить к ответу условие: если $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, то $a_{min} = 0$.

Задача 2. Старое ведро

Ведро объёмом $V = 10$ л и массой $m = 0{,}5$ кг наполняется вертикальной струёй воды из мощной колонки за $T = 5$ с (рис. 29). Площадь поперечного сечения струи $S = 4$ см^2. При очередном наполнении одно из креплений ручки, за которую ведро было подвешено к колонке, сломалось. К этому моменту ведро наполнилось лишь наполовину. При какой нагрузке F на повреждённое крепление оно сломалось? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

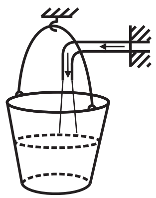


Рис. 29.

Решение

Когда одно из креплений ручки сломалось, их суммарная реакция складывалась из веса самого ведра, веса воды объёмом $\frac{V}{2}$ и силы F_0, тормозящей струю воды в ведре:

$$2F = mg + \rho\frac{V}{2}g + F_0,$$

где $\rho = 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — плотность воды.

Силу F_0 определим из рассмотрения процесса наполнения ведра целиком. Из условия, что ведро объёмом V наполняется струёй поперечным сечением S за время T, находим скорость v истечения воды из крана:

$$V = SvT, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{V}{ST}.$$

Из закона изменения импульса $\Delta p = F\Delta t$ в виде

$$pVv = F_0T \quad \text{находим} \quad F_0 = \frac{\rho V v}{T} = \frac{\rho V^2}{ST^2}.$$

Таким образом,

$$F = \frac{mg}{2} + \frac{\rho V g}{4} + \frac{\rho V^2}{2ST^2} = 2{,}45\ \text{Н} + 24{,}5\ \text{Н} + 5\ \text{Н} \approx 32\ \text{Н}.$$

Задача 3. Взвешивание Юпитера

Определите массу m Юпитера. Считайте известными среднюю плотность Юпитера $\rho = 1{,}25\cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения на его поверхности $g = 24{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и гравитационную постоянную $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение

По закону всемирного тяготения

$$g = \frac{\gamma m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho R\gamma, \quad \text{откуда} \quad R = \frac{3g}{4\pi\gamma\rho}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^3 \approx 1{,}90\cdot 10^{27}\ \text{кг}.$$

Задача 4. Двумерные колебания

На гладкой горизонтальной поверхности находится грузик, прикрепленный двумя одинаковыми пружинами к стенкам. Когда грузик находится в положении равновесия, пружины имеют одинаковое растяжение δ. Введем систему координат Oxy (рис. 30). Траектория грузика, совершающего малые колебания, изображена на рисунке 30. Определите δ, если длина пружин в нерастянутом состоянии равна a.

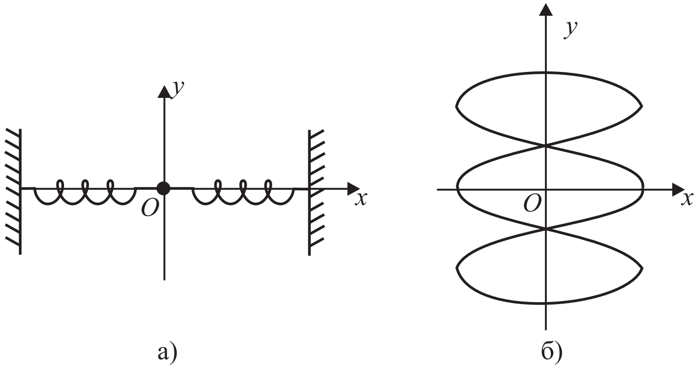


Рис. 30.

Решение

При малом смещении Δx вдоль оси x возникает возвращающая сила $F_1 = 2k\Delta x$. Частота малых колебаний вдоль оси x равна

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

где m — масса грузика, k — жесткость пружины. При малом смещении вдоль оси y возникает возвращающая сила

$$F_2 = 2F_0\frac{\Delta y}{\delta + a},$$

где $F_0 = k\delta$ — сила натяжения пружин в положении равновесия. Значит, частота малых колебаний вдоль оси y равна

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}\frac{\delta}{\delta + a}}.$$

Из картины двумерных колебаний видно, что $\dfrac{\omega_y}{\omega_x} = \dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta + a} = \frac{1}{9}, \quad \text{откуда} \quad \delta = \frac{1}{8}a.$$

§2. Молекулярная физика

8 класс

Задача 1. Теплолюбивые индейцы

В палатке, покрытой сверху шерстяными одеялами, пол застелен толстым теплонепроницаемым войлоком. Одинокий спящий индеец начинает мёрзнуть в такой палатке при уличной температуре воздуха $t_1 = 10°\text{C}$. Два спящих индейца начинают мёрзнуть в такой палатке при уличной температуре воздуха $t_2 = 4°\text{C}$. При какой температуре t_0 воздуха индейцы начинают пользоваться палатками? При какой температуре t_3 в той же палатке будет холодно трём индейцам? Считайте, что количество теплоты, теряемое палаткой в единицу времени, пропорционально разности температур воздуха внутри и снаружи.

Решение

Индейцы начинают пользоваться палатками, когда начинают мёрзнуть на улице, то есть t_0 — температура воздуха, окружающего индейца, при которой он начинает мёрзнуть. Индейцы начинают мёрзнуть в палатке, когда температура воздуха внутри неё опускается до t_0.

Пусть N — тепловая «мощность» одного индейца, t_i — температура уличного воздуха, при которой в палатке начинают мёрзнуть i индейцев, тогда уравнение теплового баланса для палатки имеет вид:

$$iN = k(t_0 - t_i), \qquad (1)$$

где k — коэффициент, зависящий только от свойств палатки. Слева в уравнении стоит суммарная тепловая мощность, выделяющаяся в палатке, а справа — мощность теплоотдачи в окружающую среду. Запишем общее уравнение (1) конкретно для каждого из случаев (1, 2 или 3 индейца в палатке):

$$\begin{cases} N = k(t_0 - t_1), \\ 2N = k(t_0 - t_2), \\ 3N = k(t_0 - t_3). \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$t_0 = 2t_1 - t_2 = 16^\circ\mathrm{C}, \qquad t_3 = 2t_2 - t_1 = -2^\circ\mathrm{C}.$$

Примечание. Найти N и k по отдельности невозможно из-за нехватки уравнений, но можно найти $\dfrac{N}{k} = t_1 - t_2 = 6^\circ\mathrm{C}$.

Задача 2. Выравнивание температур

В теплоизолированный сосуд поместили: $m_1 = 4$ кг льда при температуре $t_1 = -20^\circ$C, $m_2 = 3$ кг воды при температуре $t_2 = 50^\circ$C и $m_3 = 100$ г пара при температуре $t_3 = 100^\circ$C. Найдите температуру в сосуде, а также массы воды, льда и пара после установления теплового равновесия.

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}1\ \dfrac{\text{кДж}}{(\text{кг}\cdot\text{К})}$, воды $c_2 = 4{,}2\ \dfrac{\text{кДж}}{(\text{кг}\cdot\text{К})}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2300\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

Решение

Рассчитаем, сколько энергии выделится при охлаждении системы, пока она не превратится в лед массой $M = m_1 + m_2 + m_3 = 7{,}1$ кг, находящийся при температуре t_1:

$$Q = rm_3 + c_2 m_3(100^\circ\mathrm{C} - 0^\circ\mathrm{C}) + c_2 m_2(t_2 - 0^\circ\mathrm{C}) +$$
$$+\lambda(m_2 + m_3) + c_1(m_2 + m_3)(0^\circ\mathrm{C} - t_1) = 2086{,}2\ \text{кДж}.$$

Теперь посмотрим в какое состояние придет лед массой M, если к нему подвести теплоту Q. Для его нагрева до 0° С требуется

$$Q_1 = c_1 M(0^\circ\mathrm{C} - t_1) = 298{,}2\ \text{кДж}.$$

Еще останется подвести

$$Q_1' = Q - Q_1 = 1788\ \text{кДж}.$$

Для превращения льда в воду требуется

$$Q_2 = \lambda M = 2414\ \text{кДж}.$$

Поскольку $Q_1' < Q_2$, то в воду превратится не весь лед, а только

$$M_2 = M\frac{Q_1'}{Q_2} = 5{,}26\ \text{кг}.$$

Весь пар сконденсируется, следовательно, льда останется

$$M_1 = M - M_2 = 1{,}84\ \text{кг}.$$

Равновесная температура $t_0 = 0^\circ$C.

Существует еще и другой способ решения задачи.

9 класс

Задача 1. Измерение теплоёмкости алюминия

Теплоизолированный сосуд до краёв наполнили водой при температуре $t_0 = 20^\circ$C. В него опустили алюминиевую деталь, нагретую до температуры $t = 100^\circ$C. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде стала $t_1 = 30{,}3^\circ$C. Затем такой же эксперимент провели с двумя деталями. В этом случае после установления в сосуде теплового равновесия температура воды стала $t_2 = 42{,}6^\circ$C. Чему равна удельная теплоёмкость с алюминия? Плотность воды $\rho = 1000\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, её удельная теплоёмкость $c_0 = 4200\ \dfrac{\text{Дж}}{(\text{кг}^\circ\text{C})}$. Плотность алюминия $\rho = 2700\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Решение

Пусть m — масса детали, V — объём сосуда, тогда уравнения теплового баланса при опускании одной и двух деталей соответственно имеют вид:

$$cm(t - t_1) = c_0\rho_0\Big(V - \frac{m}{\rho}\Big)(t_1 - t_0), \qquad (4)$$

$$2cm(t - t_2) = c_0\rho_0\Big(V - 2\frac{m}{\rho}\Big)(t_2 - t_0), \qquad (5)$$

Поделив (4) на $t_1 - t_0$, а (5) — на $t_2 - t_0$ и вычтя (5) из (4), получим

$$cm\frac{t-t_1}{t_1-t_0} - 2cm\frac{t-t_2}{t_2-t_0} = c_0\rho_0\frac{m}{\rho},$$

откуда

$$c = \frac{c_0\dfrac{\rho}{\rho_0}}{\dfrac{t-t_1}{t_1-t_0} - 2\dfrac{t-t_2}{t_2-t_0}} \approx 922\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}^\circ\text{C})}.$$

Задача 2. Тяжелый поршень

В теплоизолированном цилиндрическом сосуде с вертикальными гладкими стенками на небольших опорах лежит тяжелый однородный поршень толщиной h и плотностью ρ (рис. 31). Под поршнем находится газ массой m с удельной теплоемкостью c. Первоначально давление газа внутри цилиндра равно атмосферному. Газ начинают нагревать, при этом увеличение его давления $\Delta p = am\Delta t$, где a — заданная константа, Δt — изменение температуры. Какое минимальное количество теплоты Q нужно подвести к газу, чтобы поршень сдвинулся с места?

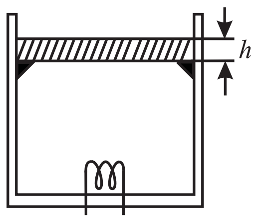


Рис. 31.

Решение

Пусть M — масса поршня, S — площадь его основания, тогда чтобы он сдвинулся с места, давление газа в цилиндре должно превысить атмосферное на величину

$$\Delta p = \frac{Mg}{S} = \rho g h.$$

Из связи Δp и Δt находим

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{\alpha m}.$$

Следовательно,

$$Q = cm\Delta t = \frac{c}{\alpha}\Delta p = \frac{c\rho g h}{\alpha}.$$

10 класс

Задача 1. КПД подъёмного устройства

Имеется два различных подъёмных устройства, каждое из которых представляет собой цилиндр, заполненный идеальным газом и закрытый поршнем (рис. 32). В первом устройстве в качестве идеального газа используется метан (CH_4), а во втором — азот (N_2). Для поднятия грузов газы подогревают нагревательными элементами. Найдите отношение $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ КПД устройств.

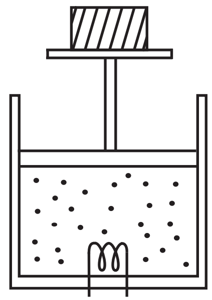


Рис. 32.

Решение

Будем считать, что процесс поднятия груза происходит медленно, тогда газ расширяется изобарически. Введём стандартные обозначения: p — давление газа, ΔV и ΔT — изменения его объёма и температуры, R — газовая постоянная, ν — количество газа, C_p — его молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

Полезная работа по поднятию груза

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T,$$

а подведённое к газу количество теплоты

$$Q = \nu C_p \Delta T,$$

следовательно, КПД устройства

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{R}{C_p}.$$

Поскольку метан — многоатомный газ, а азот — двухатомный, то

$$C_{v1} = 3R, \quad C_{p1} = C_{v1} + R = 4R,$$

$$C_{v2} = \frac{5}{2}R, \quad C_{p2} = C_{v2} + R = \frac{7}{2}R.$$

Таким образом, отношение КПД устройств

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\dfrac{R}{C_{p1}}}{\dfrac{R}{C_{p2}}} = \frac{C_{p2}}{C_{p1}} = \frac{7}{8}.$$

Результат не зависит ни от размеров цилиндров, ни от количества газа в них.

Задача 2. Максимальный КПД цикла (1)

В тепловой машине в качестве рабочего тела используют идеальный одноатомный газ. Машина работает по циклу (рис. 33), состоящему из изохоры $1-2$, изобары $2-3$ и процесса $3-1$, в котором давление и объем связаны линейной зависимостью. Найдите максимальный КПД η_{max} такого цикла.

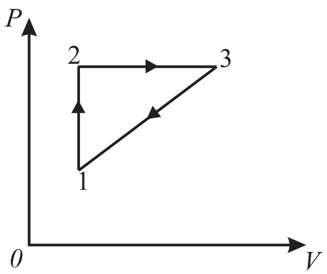


Рис. 33.

Решение

Пусть ν — количество газа, R — универсальная газовая постоянная. Система получает теплоту на участках $1-2$ и $2-3$:

$$Q_{12} = \nu C_v \Delta T_{21} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1),$$

$$Q_{23} = \nu C_p \Delta T_{32} = \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2),$$

где T_i — температура в соответствующем состоянии. Введем коэффициенты α и β:

$$\alpha = \frac{p_2}{p_1}, \quad \beta = \frac{V_3}{V_1},$$

где p_i и V_i — давление и объем в соответствующем состоянии. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, получаем выражение для теплоты, подводимой к системе за цикл:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}(p_2V_1 - p_1V_1) + \frac{5}{2}(p_2V_3 - p_2V_1) =.$$

$$= \frac{3}{2}(\alpha - 1)p_1V_1 + \frac{5}{2}\alpha(\beta - 1)p_1V_1.$$

Работа газа за цикл равна площади треугольника $1-2-3$ в координатах $(V; p)$:

$$A = \frac{1}{2}(\alpha - 1)p_1 \cdot (\beta - 1)V_1.$$

КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{3(\alpha-1) + 5(\beta-1)} = \frac{1}{5} - \left(\frac{\frac{3}{5\beta} + \frac{1}{\alpha} - \frac{8}{5\alpha\beta}}{5 - \frac{2}{\beta} - \frac{3}{\alpha\beta}}\right).$$

КПД максимален, когда выражение в скобках минимально. Поскольку оно положительно и стремится к 0 при больших α и β, то

$$\eta_{max} = \frac{1}{5}.$$

Задача 3. Максимальный КПД цикла (2)

В тепловой машине в качестве рабочего тела используют идеальный одноатомный газ. Машина работает по циклу (рис. 34), состоящему из изобары $1-2$, процесса $2-3$, в котором давление прямо пропорционально объему, и адиабаты $3-1$. Найдите максимальное значение КПД η_{max} такого цикла.

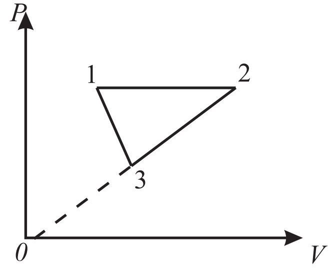


Рис. 34.

Решение

Обозначим количество газа в системе через ν, его молярные теплоемкости при постоянном объеме или давлении через C_V и C_p соответственно. Символом Δ будем обозначать малые изменения соответствующих величин. Для любого процесса молярная теплоемкость

$$C = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T},$$

где ΔQ — теплота, подведенная к системе, ΔT — изменение температуры. Известно, что $\Delta U = \nu C_V \Delta T$ — изменение внутренней энергии,
$\Delta A = p\Delta V$ — работа системы. Из закона Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$ находим

$$p\Delta V + V\Delta p = \nu R \Delta T.$$

Отсюда для процесса $2-3$ получаем

$$\Delta V = \frac{\nu R \Delta T}{p + \alpha V} = \frac{\nu R \Delta T}{2p},$$

где использована линейная связь между давлением и объемом:

$$p = \alpha V, \alpha = const, \qquad \Delta p = \alpha \Delta V.$$

Подставим выражения для ΔU и ΔA в формулу для теплоемкости:

$$C = \frac{\Delta U + \Delta A}{\nu \Delta T} = \frac{\nu C_V \Delta T + p\dfrac{\nu R \Delta T}{2p}}{\nu \Delta T} = C_V + \frac{R}{2} = \frac{C_V + C_p}{2}.$$

Найдем теперь КПД цикла. Пусть T_1, T_2, T_3 — температуры в соответствующих состояниях системы, тогда на участке $1-2$ газ получает теплоту

$$Q_{12} = \nu C_p (T_2 - T_1),$$

а на участке $2-3$ отдает теплоту

$$Q_{23} = \nu C (T_2 - T_3).$$

На участке $3-1$ теплообмена нет. КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{12}} = 1 - \frac{C(T_2 - T_3)}{C_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{C_V/C_p + 1}{2}\left(\frac{1 - T_3/T_2}{1 - T_1/T_2}\right).$$

В процессе $3-1$ над системой совершается работа, поэтому $T_1 > T_3$. Следовательно, при увеличении T_2 выражение в скобках стремится к 1 — своему минимуму. Таким образом,

$$\eta_{max} = \frac{1 - C_V/C_p}{2} = 0{,}2,$$

где использовано $\dfrac{C_V}{C_p} = \dfrac{3}{5}$.

11 класс

Задача 1. Опыт Майера

В 1841 году Робертом Майером был предложен метод расчёта механического эквивалента теплоты — величины α, показывающей, сколько энергетических единиц $\left(\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}\right)$ содержится в единице количества теплоты — калории. Майер рассмотрел циклический процесс, совершаемый над идеальным газом (воздухом) и состоящий из:

$1-2$ — расширения воздуха в пустоту без совершения работы и изменения состояния других тел (к тому времени Джоуль уже установил, что при расширении идеального газа в пустоту его температура не меняется);

$2-3$ — сжатия газа при постоянном давлении;

$3-1$ — нагревания газа при постоянном объёме.

Майер нашел α, измерив работу, совершённую газом за цикл, и общее количество теплоты, подведённое к газу за цикл. С помощью приведённых ниже данных вычислите, какое значение α получил Майер в своём опыте.

В то время уже было известно уравнение состояния идеального газа:

$$\frac{pV}{m(t+t_0)} = B = const,$$

где m — масса газа, t — его температура (в °C), $t_0 \approx 270$°C. Удельная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме

$c_V \approx 0{,}186\ \dfrac{\text{кал}}{(\text{г}\cdot\text{град})}$, а при постоянном давлении $c_p \approx 0{,}26\ \dfrac{\text{кал}}{(\text{г}\cdot\text{град})}$. При нормальных условиях ($t = 0$°C, $p_0 = 10^5$ Па) плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}3\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Примечание. Внесистемная единица калория (кал) — это количество теплоты, которое требуется для нагрева 1 г воды на 1°C.

Решение

Работа A, совершённая газом за цикл, равна общему количеству теплоты Q, полученной газом:

$$A = \alpha Q, \qquad (1)$$

где α служит для перевода единиц измерения. Пусть p_1, V_1, и t_1 — давление, объём и температура в первом состоянии, p_2, V_2 и t_2 — во втором (рис. 35), t_3 — температура в третьем состоянии, тогда

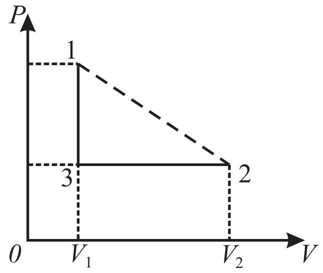


Рис. 35.

$$A = p_2(V_1 - V_2),$$
$$Q = mc_p(t_3 - t_2) + mc_V(t_1 - t_3). \qquad (2)$$

Процесс $1-2$ изображён на графике пунктиром, так как расширение в вакуум не является квазистационариым процессом. Температура в этом процессе не изменяется, то есть $t_1 = t_2$.

Применяя уравнение состояния идеального газа к состояниям 2 и 3:

$$\frac{p_2V_2}{m(t_2+t_0)} = \frac{p_2V_1}{m(t_3+t_0)},$$

получаем

$$t_3 + t_0 = (t_2+t_0)\frac{V_1}{V_2}. \qquad (3)$$

Преобразуем выражение (2) для Q с использованием (3) и неизменности температуры при расширении в пустоту:

$$Q = mc_p((t_3+t_0)-(t_2+t_0)) + mc_V((t_2+t_0)-(t_3+t_0)) =$$
$$= m(c_p - c_V)\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)(t_2+t_0).$$

Выразим α из (1):

$$\alpha = \frac{A}{Q} = \frac{p_2(V_1-V_2)}{m(c_p-c_V)(V_1/V_2-1)(t_2+t_0)} =$$
$$\frac{p_2V_2}{m(t_2+t_0)(c_p-c_V)} = \frac{B}{c_p-c_V}.$$

При $t_0 = 0°$ С и $p = p_0 = 10^5$ Па получаем $B = \dfrac{p_0}{(\rho_0 t_0)}$. Таким образом,

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho_0 t_0(c_p-c_V)} \approx 3{,}85\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{кал}}.$$

$$\alpha \approx 3{,}85\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{кал}}.$$

Задача 2. Продавец воздуха

Говорят, что в распоряжении главного злодея романа А. Беляева «Продавец воздуха» была электростанция мощностью $W = 63$ ГВт (мощность Красноярской ГЭС). Оцените, через какое время τ после начала осуществления этого «коварного плана» по откачиванию воздуха из атмосферы и его сжижению жители Земли ощутят снижение атмосферного давления? Считайте, что давления от $p_1 = 730$ мм рт.ст. до $p_2 = 780$ мм рт.ст. воспринимаются как допустимые отклонения от нормального, теплота, отнимаемая у сжижаемого газа, передается воде мирового океана. Атмосфера и гидросфера имеют одинаковую среднюю температуру $t_0 = 4$°C. Радиус Земли $r = 6400$ км, плотность ртути $\rho = 13600\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Для воздуха: молярная масса $\mu = 29\ \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$, температура кипения $t \approx -196°$C, теплота парообразования $L \approx 6{,}7\ \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$, нормальное атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт.ст.

Решение

Жители Земли ощутят изменение атмосферного давления, если масса атмосферы $M = \dfrac{4\pi r^2 p_0}{g}$ уменьшится на

$$m = M\frac{p_0 - p_1}{p_0} = \frac{4\pi r^2(p_0 - p_1)}{g}.$$

Для этого можно использовать обращенную тепловую машину (тепловой насос) с охлаждаемым телом температурой $T_1 = 77$ К и нагреваемым телом температурой $T_0 = 277$ К. Количество теплоты Q, выделяющейся при преобразовании в жидкость воздуха массой m:

$$Q = \frac{m}{\mu}(C_p(T_0 - T_1) + L),$$

где $C_p = \dfrac{7R}{2}$ — теплоемкость при постоянном давлении. Чтобы отобрать у воздуха такое количество теплоты и передать его воде при температуре T_0, требуется работа A. Эта работа минимальна, когда мы охлаждаем газ по обратному циклу Карно, для которого

$$\frac{A}{Q} = \frac{T_0 - T_1}{T_1}, \quad \text{откуда} \quad A = Q\frac{T_0 - T_1}{T_1}.$$

Окончательно,

$$\tau = \frac{A}{W} = \frac{4\pi r^2(p_0 - p_1)}{Wg\mu}(C_p(T_0 - T_1) + L)\frac{T_0 - T_1}{T_1} \approx$$
$$\approx 50 \cdot 10^3 \text{ лет}.$$

§3. Электродинамика

9 класс

Задача 1. Болометр

Болометр — это прибор для измерения энергии излучения (света). Болометр представляет собой тонкую зачернённую медную проволочку, заключенную в стеклянный вакуумированный сосуд. При её освещении одиночным лазерным импульсом проволочка нагревается столь быстро, что потери энергии на тепловое излучение и теплопроводность можно не учитывать. Нагрев проволочки, в свою очередь, вызывает увеличение её сопротивления. По величине изменения сопротивления можно вычислить энергию лазерного импульса. Правильная настройка болометра подразумевает, что всё излучения лазера попадает на проволочку (а не проходит частично мимо).

В ходе исследования лазера новой конструкции выяснилось, что возникающее после каждого импульса изменение сопротивления болометра слишком мало. Во сколько раз нужно изменить диаметр проволочки, чтобы при заданной энергии лазерного импульса изменение сопротивления возросло в $k = 10$ раз?

Примечание. Изменение сопротивления R проволоки, вызванное её нагревом на ΔT, можно определить по формуле:

$$\Delta R = R\alpha\Delta T,$$

где α — температурный коэффициент сопротивления (постоянная величина).

Решение

Пусть ρ — плотность меди, L — длина проволоки, d — её диаметр, тогда площадь S поперечного сечения, объём V и масса m проволоки:

$$S = \frac{\pi}{4}d^2, \quad V = SL = \frac{\pi}{4}d^2L, \quad m = \rho_0 V = \frac{\pi}{4}\rho_0 Ld^2.$$

Пусть c — удельная теплоёмкость меди, E — энергия лазерного импульса тогда изменение температуры проволоки:

$$\Delta T = \frac{E}{cm} = \frac{4E}{\pi c\rho_0 Ld^2}.$$

Пусть ρ — удельное сопротивление меди, тогда сопротивление проволоки

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{4\rho L}{\pi d^2},$$

а изменение этого сопротивления из-за нагрева:

$$\Delta R = R\alpha\Delta T = \frac{16\alpha\rho E}{\pi^2 c\rho_0 d^4} \sim d^{-4},$$

Таким образом, чтобы увеличить ΔR в k раз, нужно уменьшить d в n раз:

$$n = \sqrt[4]{k} \approx 1{,}8.$$

10 класс

Задача 1. Измерения в электрической цепи

Семь резисторов сопротивлениями $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 0{,}5$ кОм, $R_4 = 2{,}5$ кОм, $R_5 = 2$ кОм, $R_5 = 2$ кОм, $R_6 = 1$ кОм, $R_7 = 1$ кОм соединены с источником постоянного напряжения $U = 30$ В (рис. 36). К резисторам подключили два вольтметра и два амперметра. Определите их показания V_1, V_2, I_1, I_2. Приборы считайте идеальными.

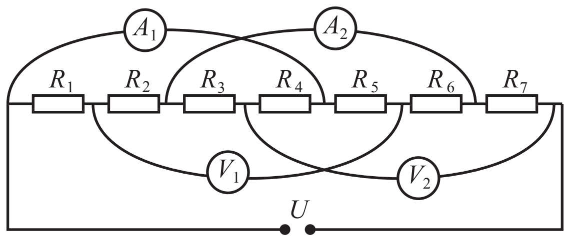


Рис. 36.

Решение

Перерисуем схему без вольтметров (рис. 37). Сопротивление каждой из параллельных ветвей цепи составляет

Можно установить, что

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = R_5 + R_6 = r = 3 \text{ кОм},$$

поэтому полное сопротивление цепи

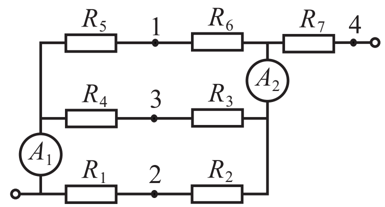


Рис. 37.

$$R = \frac{r}{3} + R_7 = 2 \text{ кОм}.$$

Через резистор R_7 сила тока $I = \dfrac{U}{R}$. Через каждую из параллельных ветвей цепи течет одинаковый ток, поэтому сила тока в каждой из них $i = \dfrac{I}{3}$, откуда

$$I_1 = I_2 = 2i = \frac{2U}{3R} = 10 \text{ мА}.$$

Показания V_1 и V_2 вольтметров найдем как напряжения между соответствующими точками:

$$V_1 = | U_{12} | = iR_5 - iR_1 = \frac{U}{3R}(R_5 - R_1) = 5 \text{ В},$$

$$V_2 = | U_{34} | = iR_3 + IR_7 = \frac{U}{3R}(R_3 + 3R_7) = 17{,}5 \text{ В}.$$

11 класс

Задача 1. Перезарядка конденсатора

Электрическая цепь состоит из последовательно соединённых резистора, ключа и двух заряженных конденсаторов различной ёмкости (рис. 38). Вначале ключ разомкнут. Затем его замыкают. В итоге через резистор прошёл заряд $q_0 = 10$ мкКл. Какой заряд q прошёл через резистор к моменту, когда отношение силы тока в цепи к её максимальному значению равнялось $\alpha = 0{,}1$?

Решение

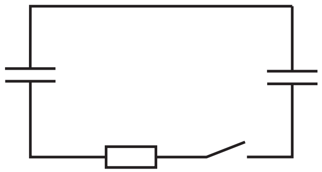


Рис. 38.

Пусть R — сопротивление резистора, C_1 и C_2 — ёмкости конденсаторов. Когда ток прекратится, конденсаторы будут заряжены до одинакового напряжения U_0, а их заряды окажутся равными $q_{10} = C_1U_0$ и $q_{20} = C_2U_0$.

Рассмотрим произвольный момент, когда ток ещё есть. Заряды q_1 и q_2 на конденсаторах в этот момент ещё не равны «равновесным» q_{10} и q_{20}, а отличаются от них на Δq (в силу закона сохранения заряда):

$$q_1 = q_{10} + \Delta q,\, q_2 = q_{20} - \Delta q$$

Следовательно, напряжения на конденсаторах

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1},\, U_2 = \frac{q_2}{C_2},$$

а сила тока через резистор:

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{q_{10} + \Delta q}{C_1} - \frac{q_{20} - \Delta q}{C_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(U_{10} + \frac{\Delta q}{C_1} - U_0 - \frac{-\Delta q}{C_2}\right) = \frac{\Delta q}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \sim \Delta q. \quad (1)$$

Таким образом, ток в произвольный момент времени прямо пропорционален заряду, которому ещё предстоит протечь через резистор от этого момента до установления равновесия в цепи.

В момент замыкания ключа $I(0) = I_0$, $\Delta q(0) = q_0$. Когда сила тока уменьшилась до $I(t) = \alpha I_0$, осталось протечь заряду $\Delta q(t) = q_0 - q$. Из (1) следует

$$\frac{I(t)}{I(0)} = \frac{\Delta q(t)}{\Delta q(0)},$$

то есть $\dfrac{\alpha I_0}{I_0} = \dfrac{q_0 - q}{q_0}$, откуда $q = (1-\alpha)q_0 = 9$ мкКл.

Задача 2. Электромагнитная индукция

Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн, резистора сопротивлением $R = 1$ Ом, источника постоянного напряжения, ограничивающего резистора и ключа (рис. 39). Через значительное время после замыкания ключа сила тока через батарейку устанавливается постоянной и равной $I_0 = 0{,}1$ А. Определите с точностью не хуже 1%, на какую величину ΔI изменится ток через катушку за время $\tau = 10^{-2}$ с после размыкания ключа? Все элементы цепи можно считать идеальными.

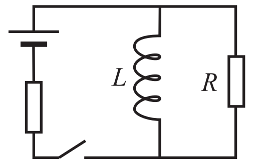


Рис. 39.

Решение

Сразу после размыкания ключа сила тока в катушке останется равной I_0 (для скачкообразного изменения тока в катушке требуется бесконечное напряжение). Процесс дальнейшего изменения тока описывается уравнением:

$$LI'_t + RI = 0. \qquad (1)$$

В начальный момент сила тока в катушке изменялась со скоростью:

$$I'_t = -\frac{R}{L}I_0 = -0{,}1\ \frac{\text{А}}{\text{с}}.$$

Если бы эта скорость оставалась постоянной, то ток прекратился бы через

$$T = \frac{I_0}{|\,I'_t(0)\,|} = \frac{L}{R} = 1\ \text{с}.$$

Из уравнения (1) видно, что I'_t со временем убывает, поэтому истинное время затухания тока больше. Поскольку $\tau \ll T$, то будем считать, что ток убывает с постоянной скоростью, тогда

$$\Delta I = I'_t(0)\tau = -\frac{R}{L}I_0\tau = -1\ \text{мА}.$$

При нахождении ΔI мы считали, что $I'_t = const$, хотя на самом деле скорость изменения силы тока меняется. Для оценки погрешности нашего результата будем считать, что I'_t изменяется линейно со временем. Тогда погрешность δI равна площади заштрихованного треугольника (рис. 40):

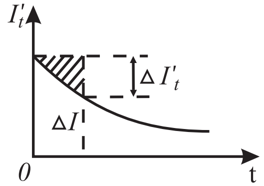


Рис. 40.

$$\delta I = \frac{1}{2}\tau \Delta I'_t = \frac{1}{2}\tau\frac{R}{L}\Delta I.$$

Относительная погрешность

$$\frac{\delta I}{\Delta I} = \frac{\tau R}{2L} = 0{,}5\%.$$

Примечание. Уравнение (1) имеет точное решение:

$$I(t) = I_0 e^{-t\frac{R}{L}},$$

откуда

$$\Delta I = I(\tau) - I_0 = I_0\left(e^{-\tau\frac{R}{L}} - 1\right) = -0{,}995 \text{ мА} \approx 1 \text{ мА}.$$

Задача 3. Проволочный каркас в магнитном поле

В проволочный каркас в форме двух прямоугольников с размерами $AB = BC = a$ и $CD = 2a$ впаяны резисторы с сопротивлениями R, $7R$ и R_x (рис. 41). Конструкция помещена в однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно ее плоскости и изменяющееся во времени с постоянной скоростью $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = k$. При каком сопротивлении резистора R_x ток через резистор сопротивлением $7R$ не будет течь?

Решение

ЭДС в левом и правом контурах «направлены» против часовой стрелки (при $k > 0$) и их модули

$$\mathcal{E}_1 = ka^2, \quad \mathcal{E}_2 = 2ka^2.$$

По второму правилу Кирхгофа для левого и правого контуров при токе I через резисторы с сопротивлениями R и R_x получаем

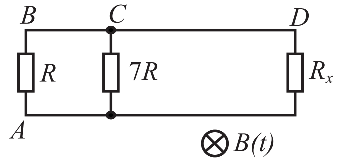


Рис. 41.

$$\mathcal{E}_1 = IR, \quad \mathcal{E}_2 = IR_x.$$

Отсюда

$$R_x = R\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = 2R.$$

Задача 4. Перезарядка ёмкостей

Вдали от большого заряженного котла находится незаряженная кастрюля. Небольшой незаряженной кружкой с изолированной ручкой прикасаются сначала к котлу, а затем к кастрюле. На кастрюле появляется заряд q_1. Процедуру повторяют. Заряд кастрюли возрастает до q_2. Найдите заряд q кружки после касания котла. Вся посуда изготовлена из алюминия. Кружкой касаются одних и тех же мест котла и кастрюли.

Решение

Поскольку котел большой, изменением его заряда на протяжении всего эксперимента можно пренебречь. Поэтому заряд, возникающий на кружке после касания котла, будет одинаковым в первом и втором случае. После первого касания кастрюли ее заряд q_1, а заряд кружки $q - q_1$, после второго — соответственно q_2 и $q_1 + (q - q_2)$. Отношение зарядов двух соприкасающихся тел зависит только от их формы и взаимного расположения, поэтому

$$\frac{q_1}{q - q_1} = \frac{q_2}{q_1 + q - q_2}, \quad \text{откуда} \quad q = \frac{q_1^2}{q_2 - q_1}.$$

§4. Оптика

9 класс

Задача 1. Солнечная постоянная

Солнечная постоянная $P = 1{,}37$ кВт/м^2 означает, что полное количество лучистой энергии Солнца, падающей за 1 с на площадку площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и удалённую от Солнца на расстояние, равное радиусу земной орбиты, равно 1,37 кДж. Какое количество лучистой энергии излучается в космос с 1 м^2 поверхности Солнца за 1 с? При наблюдении с Земли угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0{,}5°$.

Решение

Пусть r — радиус Солнца, R — расстояние от Солнца до Земли, тогда $\alpha \approx \dfrac{2r}{R}$.

Площадь S сферы радиусом R относится к площади s поверхности Солнца как $\left(\dfrac{R}{r}\right)^2$. Вся излучаемая Солнцем энергия за одно и то же время τ полностью проходит через любую охватывающую его сферу, поэтому $sP_0\tau = SP\tau$, откуда

$$P_0 = P\frac{S}{s} = P\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{4P}{\alpha^2} \approx 72\ \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2},$$

а сама энергия равна

$$W = P_0 \cdot 1\ \text{м}^2 \cdot 1\ \text{с} = 72\ \text{МДж}.$$

Глава 4

Эксперимент

В этом разделе рассмотрим два типа экспериментальных заданий, в которых требуется:

1) объяснить наблюдаемые явления

2) выполнить экспериментальное задание

§ 1. Наблюдаемые явления

Задание 1

В стеклянном цилиндре, закрытом сверху резиновой пленкой и наполненном водой, плавает перевернутая пробирка, частично заполненная водой. При нажатии на резиновую пленку пробирка тонет. Объясните наблюдаемое явление

Решение

При нажатии на пленку увеличивается давление воздуха и это изменение давления передается по закону Паскаля в пробирку, объем воздуха в пробирке уменьшается. Это приводит к уменьшению силы Архимеда. Она становится меньше силы тяжести. Пробирка тонет.

Задание 2

Опыт с шариковой ручкой.

Из шариковой (гелевой) ручки вытащить стержень. Заглянуть внутрь ручки через открытый верхний торец, направив другой конец на освещенную поверхность. Описать наблюдаемую картину и объяснить ее происхождение.

Решение

Наблюдается чередование темных и светлых колец. Рассеяный свет входит в отверстие под разными углами. Области, после отражения от которых свет попадает в глаз, видны светлыми. Области, которые не посылают свет в глаз (даже после многократного отражения), кажутся темными.

Задание 3

При помощи пальцев рук определите примерное положение центра тяжести круглой деревянной палочки разной толщины (длиной порядка 70—80 см).

Решение

Палочка кладется концами на два вытянутых горизонтально указательных пальца. Пальцы медленно сводятся вместе, и они сойдутся в центре тяжести.

Движение пальцев начинается не одновременно, т.к. сила трения, равная μmg, слева и справа разная. Когда эти силы становятся равными, двигаются оба пальца и сходятся в центре тяжести.

Задание 4

Тепловая машина.

На стержне, закрепленном в штативе, установлено велосипедное колесо, в котором спицы заменены резиновыми лентами. Колесо закреплено в своем центре масс и может свободно вращаться. Если резиновые ленты, в какой-то части колеса, осветить ярким источником света или иным источником тепла, колесо начнет вращаться. Почему?

Решение

При нагревании резина укорачивается. (Это свойство резины позволяет создать устройство для преобразования тепловой энергии в механическую.) При нагревании лент в колесе смещается центр тяжести системы и колесо начинает вращаться.

Задание 5

Полиморфные превращения в железе.

Железная проволока закреплена с одного конца, а с другого растянута, прикрепленной к этому концу массивной гирей. К проволоке прикреплена стрелка, поворачивающаяся при удлинении проволоки. При пропускании через проволоку электрического тока, она накаляется и удлиняется. Стрелка поворачивается на достаточно большой угол. При выключении тока проволока остывает и стрелка стремится в исходное положение. Однако, в какой то момент угол отклонения стрелки вновь увеличивается. Почему?

Решение

При температурах, близких к 800°C железо испытывает фазовый переход, который, как и большинство фазовых переходов, сопровождается аномалией температурного расширения.

Нагреваем железную проволоку, пропуская по ней ток, до температуры около 900°C. Проволока удлиняется. Выключаем ток, проволока естественным образом охлаждается, в области фазового перехода укорочение проволоки сменяется ее кратковременным удлинением.

Задание 6

Цепочка Джоуля.

Демонстрируется так называемая цепочка Джоуля — проводник длиной 2—3 метра, состоящий из большого числа отрезков медной и константантантановой проволоки, включенных последовательно и имеющих одинаковую площадь поперечного сечения. При пропускании по цепочке тока от регулируемого источника напряжения одни участки цепочки светятся, а другие нет. Почему?

Решение

Через последовательные участки цепочки течет ток одной и той же силы, но участки, выполненные из проволоки с большим удельным сопротивлением (константан) ток нагревает сильнее до красного свечения. Участки, выполненные из проволоки с меньшим удельным сопротивлением (медь) нагреваются меньше и не светятся.

Задание 7

Вертушка Фарадея.

Легкий металлический диск нецентросимметричной формы с остриями закрепляется в центре масс на игле и присоединяется к электрофорной машине. При зарядке диска он начинает вращаться. Почему?

Решение

Около острых частей диска скапливается электрический заряд (предположим отрицательный) с наибольшей поверхностной плотностью заряда. Этот заряд создает за пределами диска вблизи него настолько сильное поле, что оно вырывает из металла электроны (автоэлектронная эмиссия). Вылетевшие электроны, отталкиваясь от отрицательно заряженного диска, улетают от него. В процессе движения они сталкиваются с нейтральными молекулами воздуха и при ударе ионизируют их. Образовавшиеся при этом положительные ионы устремляются к диску под действием кулоновских сил. При движении они захватывают с собой нейтральные молекулы воздуха. Это ветер, состоящий из нейтральных молекул воздуха, и ионов несет с собой импульс. При ударе об острые части диска импульс передается ему и диск начинает приходить во вращение.

Задание 8

Светящаяся струя.

В сосуд из оргстекла наливается вода. В сосуде имеется небольшое отверстие, через которое вода может выливаться. Изнутри на отверстии фокусируется лазерный луч. Вытекающая струя воды, искривляясь, оказывается подсвеченной, создается впечатление, что вода увлекает за собой свет. Объясните явление.

Решение

На самом деле мы имеем дело с явлением полного внутреннего отражения. Заключается оно в том, что при падении света из вещества с большим показателем преломления на границу с веществом, имеющим меньший показатель преломления под углом, большим предельного, не возникает преломленный луч. Свет полностью отражается от границы раздела и распространяется внутри первой среды. Если свет падает под углом, меньшим предельного, то преломленный луч возникает. Отражаясь от границы струи, свет распространяется вдоль нее. На самом деле часть лучей выходит наружу и подсвечивает струю.

Задание 9

Подпрыгивающий диск.

Над лежащим на столе тонким металлическим диском располагаем еще один параллельный ему диск с отверстием, в которое вставлена труба пылесоса. При вдувании струи воздуха через эту трубу нижний диск подпрыгивает вопреки действию силы тяжести. Почему?

Решение

Между дисками устанавливается поток быстро движущегося воздуха. В соответствии с уравнением Бернулли в этом потоке давление понижается. В область пониженного давления и втягивается нижний диск.

§2. Экспериментальные задания

Задача 1. «Черный сосуд»

Условие: В «черный сосуд» с водой на нити опущено тело. Найдите плотность тела ρ_τ, высоту тела l, уровень воды h в сосуде с погруженным телом, уровень воды h_0 в сосуде, когда тело находится вне жидкости.

Оборудование. «Черный сосуд», динамометр, миллиметровая бумага, линейка.

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Глубина сосуда $H = 32$ см.

Решение

Прикрепим верхний конец нити к динамометру и будем медленно поднимать тело из воды. Построим график зависимости силы, измеренной динамометром, от координаты z верхнего конца нити. Координату z отсчитываем от крышки «черного сосуда». Из графика на рисунке 1 видно, что тело имеет цилиндрическую форму, причем в положении z_2 тело полностью погружено, а в положении z_3 тело находится в воздухе. Отсюда можно определить искомые величины:

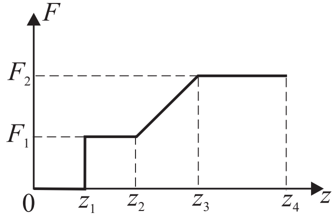


Рис. 1.

Запишем несколько очевидных соотношений:

$$h_0 = z_3 - z_1, \qquad l = H - (z_4 - z_1), \qquad h = l + (z_2 - z_1).$$

Из закона Архимеда находим:

$$F_1 = \rho g V - \rho_т g V, \qquad F_2 = \rho_т g V.$$

Теперь можно определить плотность тела:

$$\rho_т = \frac{\rho F_2}{F_2 - F_1}.$$

Задача 2. Трение

Условие: Определите коэффициент трения скольжения деревянной и пластмассовой линеек о поверхность стола.

Оборудование. Штатив с лапкой, отвес, деревянная линейка, пластмассовая линейка, стол.

Решение

Закрепив в лапке штатива деревянную линейку, кладем на нее пластмассовую линейку (см. рис. 2). Изменяя угол наклона, добиваемся скольжения пластмассовой линейки по деревянной, тогда $\mu = tg\alpha$, где α — угол

линейки с горизонтом. Закрепим деревянную линейку вертикально с помощью отвеса. Приставим к ней пластмассовую линейку и, изменяя ее угол β с горизонтом, добьемся скольжения ее скольжения по столу. В этом случае

$$N_2 = F_1 = \mu_1 N_1, \quad F_2 = \mu N_2.$$

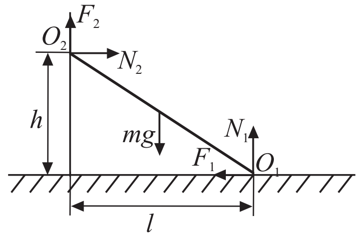


Рис. 2.

Сумма моментов сил относительно точек O_1 и O_2 должны быть равны нулю:

$$mg\frac{l}{2} + \mu_1 N_1 l - N_1 l = 0, \qquad -mg\frac{l}{2} + \mu_2 N_2 l + N_2 l = 0,$$

откуда $\mu_1 = \dfrac{l}{2h + \mu l}$. Аналогично определяется μ_2.

Задача 3. Сферическая колба

Условие: Определить показатель преломления неизвестной жидкости внутри сферической колбы, положение фокуса относительно поверхности колбы, радиус кривизны колбы.

Оборудование. Сферическая колба с жидкостью, лазер, миллиметровая бумага, штатив.

Решение

Установим колбу на подставку. Оптический столик приставим к подставке и подберем высоту стойки такой, чтобы отражения лазерного луча от диаметрально противоположных сторон лежали в одной плоскости. Если их совместить еще и друг с другом, то луч лазера будет распространяться вдоль диаметра колбы (оптической оси). Для нахождения задней фокальной плоскости подберем такое положение миллиметровой бумаги, при котором лазерное пятно на ней не движется при небольших смещениях лазера в направлении перпендикулярном оптической оси.

Второй полоской миллиметровой бумаги измеряем расстояние L от колбы до фокальной плоскости. Теперь сместим лазер с оптической оси до того момента, когда луч будет касаться края колбы, тогда смещение лазера будет совпадать с радиусом R колбы. На нашей установке оказалось $R \approx L$ (см. рис. 3).

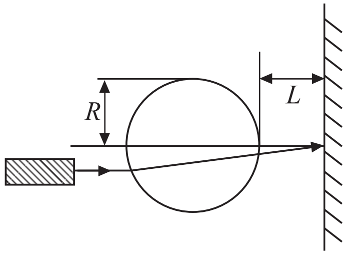


Рис. 3.

Теперь найдем показатель преломления n жидкости (см. рис. 4):

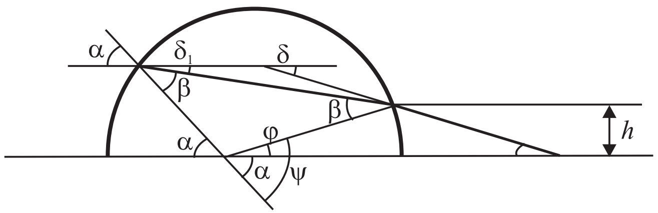


Рис. 4.

$$\delta = 2\delta_1 = 2(\alpha - \beta) = 2(n-1)\beta,$$
$$\varphi = \psi - \alpha = (2-n)\beta,$$

В параксиальном приближении :

$$R\varphi = h = L\delta.$$

Отсюда:

$$(2-n)R = 2(n-2)L.$$

Окончательно получаем:

$$n = 1 + \frac{R}{2L+R} \approx 133.$$

Задача 4. Вес груза

Условие: Определить вес груза.

Оборудование. Динамометр с заклеенной верхней частью шкалы, груз.

Решение

Для оценки веса груза можно мысленно экстраполировать шкалу динамометра до указателя. Реально при этом получается погрешность не больше, чем при других методах измерения. Например, оттянем груз вниз и отпустим — он поднимется вверх выше положения равновесия. Подберем такое начальное растяжение, при котором в верхнем положении резинка не натянута (заметно расслабление резины в верхней точке). Если резина подчиняется закону Гука и нет трения, то из закона сохранения энергии следует, что в начале она была растянута до напряжения $2P$, где P — вес груза. Отсюда находим P.

Задача 5. Показатель преломления

Условие: Определить показатель преломления n жидкости.

Оборудование. Прозрачный цилиндрический сосуд с небольшим отверстием в боковой стенке (сверху сосуд открыт, а стенки сосуда заклеены темной бумагой, кроме вертикальной щели, расположенной диаметрально к отверстию), непрозрачная кювета с неизвестной жидкостью, полупроводниковый лазер (лазерная указка), штатив, линейка, миллиметровка, липкая лента, карандаш, прищепка.

Решение

Наливаем жидкость почти до самого отверстия и пускаем через него луч лазера. Происходит разделение луча на отраженный и преломленный (см. рис. 5).

Измеряем $AC = a$ и $BC = b$. Поскольку уровень воды близок к отверстию, то $OC \approx D$. Из закона преломления $\sin\alpha = n \sin\beta$ и измерений $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{D}$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{b}{D}$ находим $b^2 = n^2a^2 + (n^2-1)D^2$. Изменяя угол

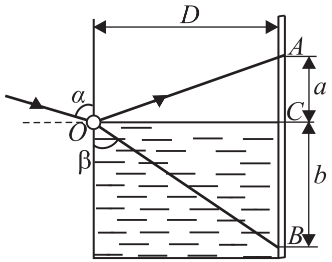


Рис. 5.

падения луча, снимем зависимость b от a. Тогда по углу наклона графика $b^2(a^2)$ найдем n^2, а, следовательно, и сам показатель преломления n.

Глава 5

Универсиада физического факультета

§ 1. Механика

8 класс

Задача 1

Слесарь Анатолий в своём холодном гараже просверлил под винт в центре медного диска отверстие. Но ему стало холодно, и он зашёл в тёплую квартиру, прихватив с собой просверленную деталь. Изменится ли диаметр отверстия в диске после переноса в тёплое помещение?

*** После того, как Анатолий в гараже просверлил отверстие, он подобрал точно подходящий под него винт. Получится ли у Анатолия вкрутить этот винт дома, если винт тоже медный?

Решение

Диаметр отверстия увеличится.

При нагревании происходит расширение тела — то есть увеличивается расстояние между любыми двумя точками тела. Тогда рассмотрим точки, лежащие на внутренней окружности в диске. После нагревания расстояние между соседними точками увеличится, следовательно, увеличится длина этой окружности. А значит и её радиус.

***Анатолий сможет вкрутить винт. Это легко можно понять, если представить, что Анатолий уже вкрутил его в гараже. Тогда, поскольку винт тоже медный, дырка в диске «исчезла» и он стал однородным. И расширение сложной детали «винт+диск с отверстием» можно рассматривать как расширение детали «диск без отверстия».

Задача 2

Сотрудники ДПС сфотографировали несущийся по трассе автомобиль, сделали замер на фотографии (см. рис. 1), но самостоятельно так и не смогли определить скорость машины. Объясните, как нужно её определять. Нарушил ли водитель скоростной режим ($max = 90$ км/ч), если длина автомобиля равна 2,5 м, а время выдержки фотоаппарата было 0,02 с.

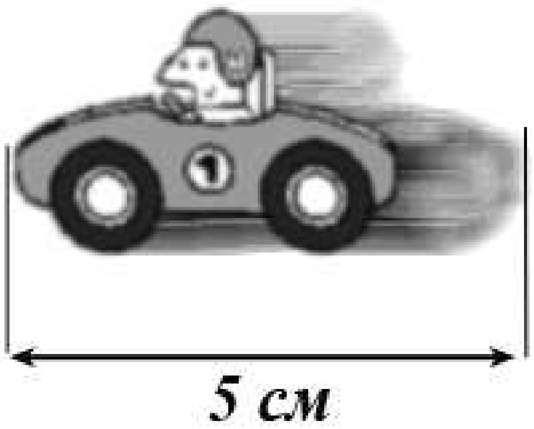


Рис. 1.

Решение

За время выдержки, пока происходит фотографирование, автомобиль успевает пройти некоторый путь и фотография получается смазанной. Нужно дополнительно замерить на фотографии «хвост», получающийся при смазывании. На нашем рисунке он приблизительно равен 1 см. Длина всей

машины $5 - 1 = 4$ см. Значит, 4 см на фотографии — это 2,5 м реальных размеров BMW. Поэтому путь, пройденный машиной за время выдержки $t = 0{,}02$ с равен

$$\frac{2{,}5\text{ м}}{4\text{ см}} \cdot 1\text{ см} = 0{,}625\text{ м}.$$

Её скорость:

$$\frac{0{,}625\text{ м}}{0{,}02\text{ с}} = 31{,}25\text{ м/с} = 112{,}5\text{ км/ч}.$$

Правила нарушены.

Задача 3

На весах уравновешен закрытый сосуд, на дне которого находится кусочек твёрдой углекислоты (которую, кстати, используют для охлаждения мороженого). Нарушится ли равновесие весов, если углекислота в сосуде превратится в газ?

Решение

Равновесие весов не нарушится. После испарения углекислоты весь газ останется внутри сосуда. Так как масса газа равна массе кусочка углекислоты, на него будет действовать такая же сила тяжести (это не удивительно, что на газ действует сила тяжести. Именно благодаря ей летают воздушные шары и шарики). Поэтому весы «не почувствуют» процесса испарения углекислоты.

9 класс

Задача 1

На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом 45° при основании (см. рис. 2). По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой m. Чему должна быть равна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложенная к клину, чтобы ускорение тела массой m было направлено: а) вертикально; б) горизонтально.

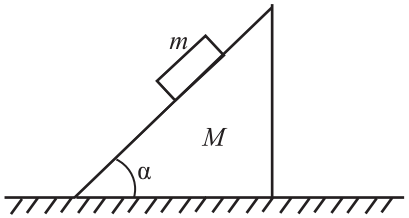


Рис. 2.

Решение

а) ускорение $\vec{a}$ вертикально, если выполняется условие $\vec{N} = 0$, следовательно имеем $\vec{a} = \vec{g}$. Сила при этом направлена вправо и $F = Mg$.

б) ускорение $\vec{a}$ горизонтально, если $N = mg\sqrt{2}$.

Тогда $N\cos\alpha = mg$, следовательно $N = \dfrac{2mg}{\sqrt{2}} = mg\sqrt{2}$. Сила направлена влево и равна

$$F = (m + M)g.$$

Далее

$$N_x = \frac{mg\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = mg.$$

следовательно $a = g$.

Задача 2

На автомобиле, имеющем специальное устройство, определяют с помощью звукового сигнала расстояние до поста ГИБДД. Какое расстояние L было до поста в момент испускания звукового сигнала, если после отражения от будки его приняли на автомобиле через $t_0 = 12$ с? Скорость звука $V = 325$ м/с, скорость автомобиля $U = 90$ км/ч.

Решение

Время движения автомобиля от A до B (см. рис. 3) :

Рис. 3.

$$t_0 = \frac{x}{u}.$$

Время получения звукового сигнала в точке B:

$$t_0 = \frac{L}{u+v} + \frac{L-x}{u+v}.$$

Из решения этой системы следует

$$L = \frac{t_0(u+v) + t_0 u}{2}.$$

Задача 3

«Черный ящик» представляет собой систему, изображенную на рисунке 4. Внутри него находятся вода и погруженный в нее узкий вертикальный цилиндр с поршнем. К поршню прикреплен выходящий наружу вертикальный шток. Потянув за шток и подвигав его вверх — вниз, школьник решил, что в «черном ящике» находится прикрепленная к штоку пружина, и измерил ее коэффициент жесткости. Он оказался равным $k = 100\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$. Чему равна площадь S поршня? Трением и массой поршня можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

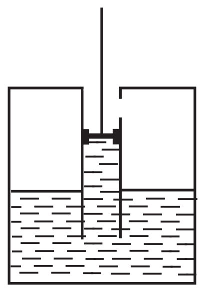


Рис. 4.

Решение

На столб жидкости высотой h в цилиндре действует сила тяжести $g{\cdot}\rho h S$. Чтобы двигать шток мальчику необходимо преодолевать эту силу. Она пропорциональна высоте столба жидкости и поэтому ему кажется, что там пружина. Её коэффициент жёсткости $k = g\rho S$. Отсюда $S = 0{,}01$ м^2.

10 класс

Задача 1

Камень, брошенный под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, движется по некоторой траектории. Если по этой же траектории полетит птица с постоянной скоростью v_0, то каким будет её ускорение на высоте, равной половине высоты наибольшего подъёма камня? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Сначала необходимо определить максимальную высоту подъёма камня. Затем, из закона сохранения энергии можно вычислить угол наклона к горизонту полной скорости камня на высоте $\dfrac{H}{2}$: $\cos\varphi = \dfrac{v_0\cos\alpha}{v}$.

Составляющая ускорения камня, нормальная к траектории движения:

$$\frac{v^2}{\rho} = g\cos\varphi.$$

Здесь ρ — радиус кривизны на высоте $\dfrac{H}{2}$ (см. рисунок 5).

$$\rho = \frac{v^2}{g}\cos\varphi.$$

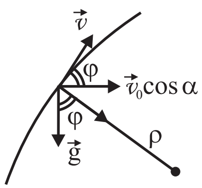


Рис. 5.

Следовательно, ускорение птицы в этой точке

$$a = \frac{v_0^2}{\rho} = \frac{v_0^2 g\cos\varphi}{v^2}.$$

Задача 2

На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Кубики соединены пружинкой жесткостью k. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0. На левый кубик внезапно начинает действовать сила $\vec{F}$, постоянная по модулю и направлению. Найдите минимальное и максимальное расстояние между кубиками при движении системы.

Решение

Когда расстояние l между кубиками минимально или максимально, оба кубика движутся с одинаковой скоростью $\vec{V}$ и кинетическая энергия системы равна $2\dfrac{mV^2}{2} = mV^2$. При этом потенциальная энергия системы равна потенциальной энергии сжатой пружины $\dfrac{kx^2}{2}$. Полная энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий, т.е $mV^2 + \dfrac{kx^2}{2}$.

Т.к. эту энергию система приобрела благодаря работе силы $\vec{F}$, то

$$FL = mV^2 + \frac{kx^2}{2},$$

где L — расстояние которое прошел левый кубик к тому моменту, когда пружина стала минимальной (см. рисунок 6). Если S — расстояние, которое пройдено центром масс системы, то

$$L = S + \frac{1}{2}l_0 - \frac{1}{2}(l_0 - x) = S + \frac{x}{2}.$$

Скорость $\vec{V}$ кубиков равна скорости центра масс системы. Т.к на систему действует постоянная внешняя сила, то центр масс движется с ускорением $a = \dfrac{F}{2m}$. Поэтому, обозначив через t время от момента начала движения до того момента, когда длина пружины стала равна $l_0 - x$, можно

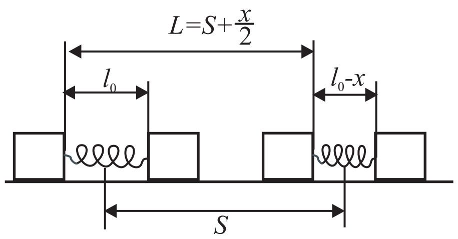


Рис. 6.

записать:

$$V = at, \qquad L = \frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Подставляя эти выражения V и L в выражение для работы силы, получим

$$F\left(\frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}\right) = ma^2t^2 + \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{F^2t^2}{4m} + \frac{x}{2}F = \frac{F^2t^2}{4m} + \frac{kx^2}{2}.$$

Или $Fx = kx^2$. Следовательно $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{F}{k}$. Таким образом, минимальное расстояние между грузами будет $l_{min} = l_0 - x_2 = l_0 - \dfrac{F}{k}$, а максимальное $l_{max} = l_0 - x_1 = l_0$.

§2. Молекулярная физика

9 класс

Задача 1

Оцените массу атмосферы Земли. Площадь сферической поверхности $S = 4\pi R^2$.

Решение

Давление воздуха на поверхность Земли равно $P = \dfrac{Mg}{4\pi R^2}$. Отсюда найдем массу Земли

$$M = \frac{P\cdot 4\pi R^2}{g} = 5\cdot 10^{18}\ \text{кг}.$$

Задача 2

Пустой толстостенный стакан массой $m = 100$ г плавает в сосуде с водой сечением $S = 0{,}05$ м^2. После того, как стакан утопили, уровень воды в сосуде понизился на $h = 1$ мм (см. рисунок 7). Найдите плотность стекла $\rho_{\text{ст}}$, если плотность воды $\rho_{\text{В}} = 1000$ кг/м^3.

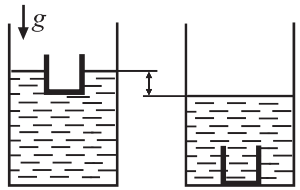


Рис. 7.

Решение

Из условия плавания стакана $mg = \rho_B\cdot gSh$, $h_1 = \dfrac{m}{S\rho_B}$, $h_1 = 2$ мм.

Из условия $\rightarrow$ стакан лежит на дне

$$V_{\text{ст}} = \frac{m}{\rho_{\text{ст}}} = S(h_1 - h)$$

$$\rho_{\text{ст}} = \frac{m}{S(h_1 - h)} = 2000\ \text{км/м}^3.$$

10 класс

Задача 1

Определить КПД цикла, показанного на рисунке 8. Газ идеальный и одноатомный. Участки $2-3$ и $4-5$ на чертеже представляют собой дуги окружностей с центрами в точках O_1 и O_2.

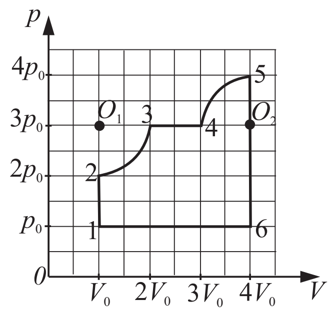


Рис. 8.

Решение

КПД: $\eta = \dfrac{A}{Q_{\text{получ}}} = \dfrac{A}{A + |Q_{\text{отданное}}|}$.

Тепло отдаётся на участках $5-6$ и $6-1$:

$$|Q_{\text{отданное}}| = \nu\frac{3}{2}R(T_5 - T_6) + \nu\left(\frac{3}{2}R + R\right)(T_6 - T_1) =$$

$$= \frac{3}{2}(16-4)P_0V_0 + \frac{5}{2}(4-1)P_0V_0 = \frac{51}{2}P_0V_0.$$

Работа A находится как площадь цикла: $A = 6P_0V_0$. В результате получаем $\eta = \dfrac{6}{(6+51/2)} = \dfrac{4}{21}$.

Задача 2

U-образная трубка заполнена водой (см. рисунок 9). Из одного колена трубки воздух удален; давление воздуха в другом колене при температуре $t = 20°$C равно атмосферному. Оба конца трубки запаяны. Разность между уровнями воды в коленах $h = 15$ м. Какой будет разность уровней воды в коленах, если трубку нагреть до $100°$C.

Решение

Давление в левом колене равно давлению насыщенного пара. В правом же колене находиться как воздух, так и пар и давление равно сумме парциальных давлений воздуха и пара. Причем пар в правом сосуде тоже насыщен, и его парциальное давление равно парциальному давлению в левом

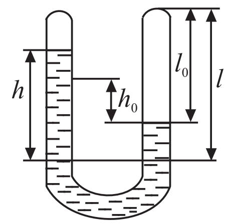


Рис. 9.

колене. Поэтому, рассматривая равновесие воды, мы можем не учитывать давления пара в левом и правом коленах.

Запишем условие равновесия воды в трубке при $t = 20°$

$$\rho g h_0 = p_0.$$

p_0 — значение нормального атмосферного давления. Поэтому

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 10 \text{ м}.$$

При температуре $100°$C давление воздуха в правом колене примет некоторое значение p, а разность уровней воды в коленах станет равной

$$h = \frac{p}{\rho g} \qquad (1)$$

Давления p и p_0 связаны соотношением

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$$

Так как $l - l_0 = \dfrac{1}{2}(h - h_0)$, где s — площадь сечения трубки, то $V_0 = l_0 s$, $V = ls$.

$$p = p_0\frac{T}{T_0}\frac{l}{l_0} = p_0\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}(h-h_0)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$h = \frac{p_0}{\rho g}\frac{T}{T_0}\frac{l}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h} = h_0\frac{T}{T_0}\frac{l}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h}.$$

Если $\frac{1}{2}\Delta h \ll l_0$, то получаем результат, мало отличающийся от точного

$$h \approx h_0 \frac{T}{T_0} = 13 \text{ м}.$$

11 класс

Задача 1

На горизонтальную поверхность льда при температуре $T_1 = 0°C$ кладут однокопеечную монету, нагретую до температуры $T_2 = 50°C$. Монета проплавляет лёд и опускается в образовавшуюся лунку. На какую часть своей толщины она погрузится в лёд? Удельная теплоёмкость материала монеты $c = 380$ Дж/(кг °C), плотность $\rho = 8{,}9$ г/см^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho_0 = 0{,}9$ г/см^3.

Решение

Будем считать монету цилиндром с площадью основания S и высотой h. При её остывании до температуры $T_1 = 0°C$ выделяется количество тепла $Q = c\rho Sh(T_2 - T_1)$, которое достаточно для того, чтобы расплавить лёд объёмом Sx, где — глубина, на которую погрузится монета: $Q = \lambda\rho_0 Sx$. Отсюда

$$\frac{x}{h} = \frac{c}{\lambda}\frac{\rho}{\rho_0}(T_2 - T_1) = 0{,}55,$$

то есть монета погрузится в лёд на 55% своей толщины.

Заметим, что если считать, что вода, выплавленная и нагретая монетой, растекается по поверхности льда и плавит его в стороне от монеты, то глубина её погружения в лёд получится немного меньше: $\frac{x}{h} \approx 0{,}48$.

§3. Электродинамика

8 класс

Задача 1

Две одинаковые лёгкие гильзы из фольги подвешены на шёлковых нитях равной длины в одной точке. После того, как гильзам сообщили заряды одинакового знака, они удалились друг от друга. Что произойдёт, если одну из гильз разрядить?

Решение

После разрядки 2-й гильзы исчезнет сила взаимодействия между гильзами и они начнут сближаться. В поле заряженной 1-й гильзы начнёт происходить процесс перераспределения зарядов во 2-й гильзе. Они станут сближаться быстрее, чем если бы были незаряжены. Потом они столкнутся. Фольга — проводник. Заряды поровну перераспределятся между гильзами и они снова начнут отталкиваться друг от друга. Силы отталкивания теперь меньше, поэтому угол расхождения нитей станет меньше.

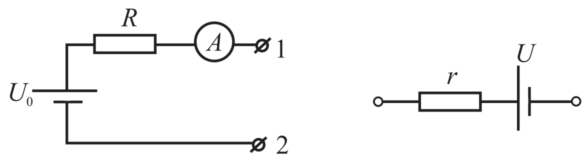
9 класс

Задача 1

Прибор для измерения сопротивлений состоит из батарейки с напряжением $U_0 = 4{,}5$ В, резистора сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметра, соединенного так, как показано на рисунке 10а. На амперметр нанесена шкала, показывающая значение неизвестного сопротивления резистора, который можно подключать к клеммам 1 и 2. С помощью данного прибора пытаются измерить сопротивление электрической цепи, изображенной на рис 10б, которая состоит из источника напряжения U и резистора r. Оказалось, что показания прибора зависят от полярности подключения к нему этой цепи: в одном направлении показание прибора равно $r_1 = 20$ Ом, в другом — $r_2 = 5$ Ом. Найти напряжение источника в цепи и сопротивление резистора. Внутренним сопротивлением источников тока и амперметра пренебречь.

Решение

Показание прибора равно r, если ток через амперметр равен $I = \frac{U_0}{R + r}$. Токи в цепях (см. рисунки 11 и 12)



а) б)

Рис. 10.

$$I_1 = \frac{U_0}{R + r_1} = 0{,}15\ \text{А}.$$

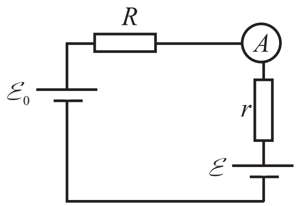


Рис. 11.

$$I_2 = \frac{U_0}{R + r_2} = 0{,}3\ \text{А}.$$

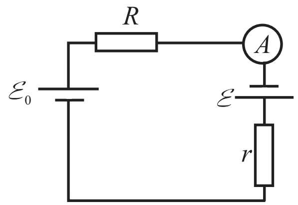


Рис. 12.

При этом сопротивления цепей на рисунках одинаковы и равны $R + r$, а суммарные напряжения батарейки и источника равны $U_0 - U$ и $U_0 + U$, отсюда

$$U_0 - U = I_1(R + r) \quad \text{и} \quad U_0 + U = I_2(R + r).$$

Следовательно,

$$\frac{U_0 + U}{U_0 - U} = \frac{I_2}{I_1} = 2 \quad \text{и} \quad U = 1{,}5\ \text{В}.$$

$$R + r = \frac{U_0 - U}{I_1},$$

отсюда $r = 10$ Ом.

10 класс

Задача 1

Для зарядки конденсатора собрали электрическую цепь по схеме (см. рисунок 13) и замкнули ключ. Энергия, запасенная конденсатором после окончания зарядки, оказалась равной 5 Дж. Сколько энергии выделилось в цепи в виде тепла?

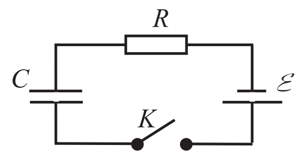


Рис. 13.

Решение

Энергия, запасённая в конденсаторе

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

U — напряжение на клеммах источника. При зарядке конденсатора источник совершил работу

$$A = qU,$$

где q — полный заряд, прошедший через источник. Но $q = C \cdot U$, следовательно $A = 2W$. По закону сохранения энергии работа совершённая источником, идёт на зарядку конденсатора и на нагревание резистора:

$$A = Q + W = 2W.$$

Следовательно $Q = W = 5$ Дж.

Задача 2

Закрытый непрозрачный ящик содержит внутри электрическую цепь, состоящую из резисторов. От трех точек этой цепи имеются выводы 1, 2, и 3 снаружи ящика. Омметр, присоединенный к выводам 1 и 2, показывает 3 Ом, присоединенный к выводам 2 и 3 — 5 Ом, к выводам 1 и 3 — 6 Ом. Нарисовать, какие цепи с наименьшим возможным числом резисторов могут находиться внутри ящика.

Решение

Простейшие возможные схемы показаны на рис. 14. И состоят из трех резисторов. Это звезда и треугольник из резисторов.

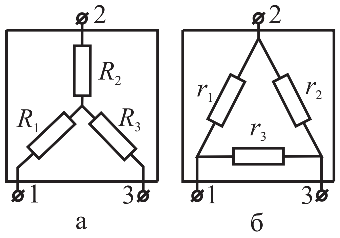


Рис. 14.

В случае звезды (см. рис. 14а).

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 3\text{ Ом} \\ R_2 + R_3 = 5\text{ Ом} \\ R_1 + R_3 = 6\text{ Ом} \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} R_1 = 2\text{ Ом} \\ R_2 = 1\text{ Ом} \\ R_3 = 4\text{ Ом} \end{cases}$$

В случае треугольника (см. рис. 14б).

$$\begin{cases} \dfrac{r_1(r_2+r_3)}{r_1+r_2+r_3} = 3\text{ Ом} \\ \dfrac{r_2(r_1+r_3)}{r_1+r_2+r_3} = 5\text{ Ом} \\ \dfrac{r_3(r_1+r_2)}{r_1+r_2+r_3} = 6\text{ Ом} \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} r_1 = 3{,}5\text{ Ом} \\ r_2 = 7\text{ Ом} \\ r_3 = 14\text{ Ом} \end{cases}$$

11 класс

Задача 1

К точкам 1, 2, 3, электрической цепи, изображённой на рисунке 15, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами r, ρ, r соответственно. Найти заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.

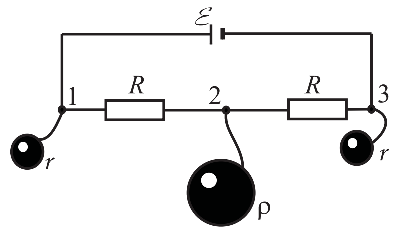


Рис. 15.

Решение

Пусть Q_1, Q_2, Q_3 — заряды шаров после их подсоединения к цепи. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на электрической цепи и соединительных проводниках мал, то $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$. Найдем разность потенциалов между точками 1 и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \rho} = \frac{\mathcal{E}}{2},$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \rho} - \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$Q_2 = 0; \qquad Q_1 = -Q_3 = 2\pi\varepsilon_0 r\mathcal{E}.$$

§4. Оптика

9 класс

Задача 1

Найти построением положение линзы, ее вид и положение ее фокусов. A — источник, A_1 — его изображение (см. рис. 16).

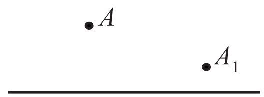


Рис. 16.

Решение

Решение ясно из рисунка 17.

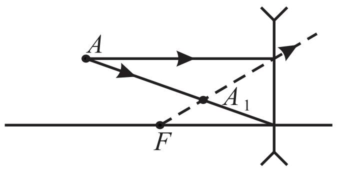


Рис. 17.

Задача 2

Постройте изображение предмета, пересекающего фокус собирающей линзы (см. рис. 18).

Решение

Решение ясно из чертежа на рисунке 19 (изображение точек предмета вблизи фокуса уходят на бесконечности, изображение разорвано, действительные и мнимые его части параллельны главной оптической оси).

Задача 3

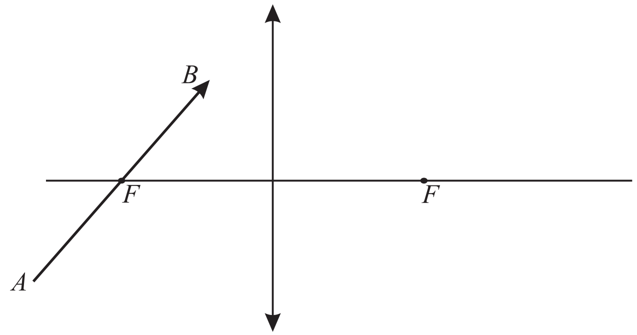


Рис. 18.

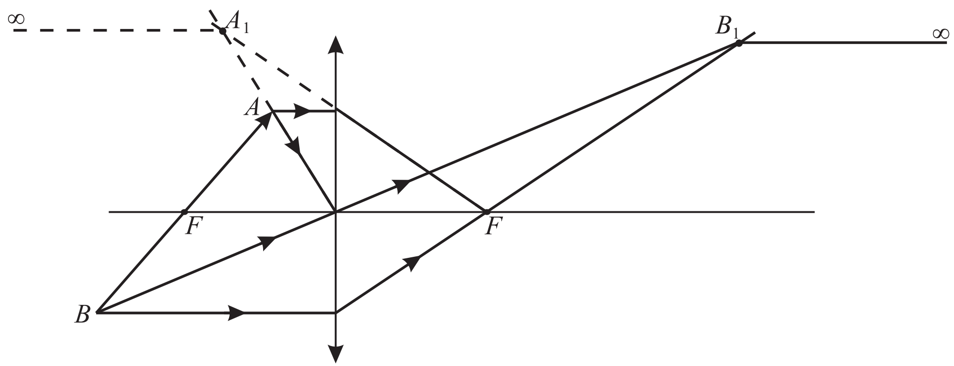


Рис. 19.

Школьник поместил на главную оптическую ось собирающей линзы свечку, на расстоянии $d > 2F$ (где F — фокусное расстояние линзы). Отвлекшись на минуту, он обнаружил, что младший брат расколол линзу на две половинки и положил их так, как показано на рисунке 20. Как будет выглядеть изображение свечки, которое увидит школьник?

Решение

Каждая из половинок «работает» как целая линза с тем же фокусным расстоянием и новыми главными оптическими осями. Поэтому, после того как линзу разрезали и полученные половинки раздвинули, изображений светящейся точки будет два (см. рисунок 21). Их положение легко найти, построив ход лучей, идущих через фокусы половинок линзы и через их

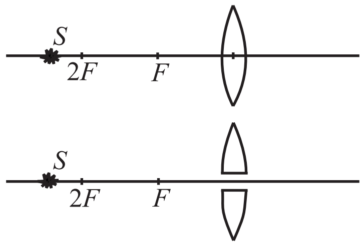


Рис. 20.

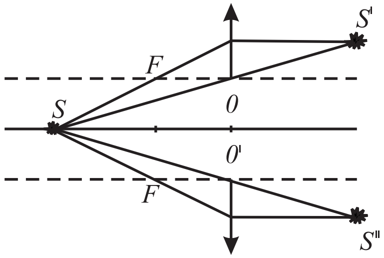


Рис. 21.

оптические центры O и O'. Каждое из этих изображений будет в два раза менее ярким, чем изображение источника, получаемое с помощью целой линзы.

11 класс

Задача 1

Решив поэкспериментировать, механик оптического завода изготовил странную плосковыпуклую линзу. Радиус сферической поверхности R, угол α мал. Толщина линзы в любом месте много меньше её радиуса r. Что сделает линза с параллельным пучком света, падающим на неё, как показано на рисунке 22? Будет ли у неё фокус, и если да, то где? Показатель преломления стекла линзы равен n.

Решение

Прохождение параллельного пучка лучей через рассматриваемую систему осуществляется в две стадии (см. рис. 23): прохождение через приз-

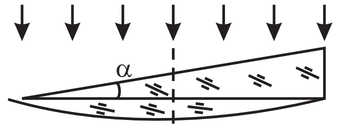


Рис. 22.

му, а затем — через обычную линзу.

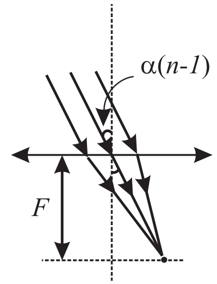


Рис. 23.

При прохождении через призму пучок лучей после выхода из неё в воздух отклоняется на угол $\beta = \alpha(n-1)$. Если теперь этот пучок попадёт из воздуха в линзу, то после прохождения через неё лучи соберутся в фокальной плоскости с координатами $\big(F, \alpha(n-1)F\big)$. Отсюда, учитывая, что $F = \dfrac{R}{n-1}$ получаем координаты фокуса системы.

Задача 2

Стандартный компакт-диск представляет собой залитую прозрачным пластиком тонкую металлическую пластинку, на которую штамповкой нанесено множество микроскопических углублений, в каждом из которых закодирован один бит информации. Оцените максимальное значение длины волны лазера, используемого для считывания информации в дисководе для компакт-дисков, если известно, что полезная ёмкость одного диска составляет $W = 640$ Мбайт, а его диаметр равен $D = 12$ см. Сколько информации можно было бы записать на такой диск при использовании лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}36$ мкм? Компакт-диски имеют только одну рабочую сторону.

Решение

Так как нам требуется получить оценку, будем считать, что в одном байте содержится 10 бит, и пренебрежём площадью центральной части компакт-диска, где нет записи. Тогда получается, что на площади $S = \pi D^2/4$ записано $N = 10W$ бит информации, а значит, на поверхности диска имеется N углублений. Таким образом, на одно углубление приходится площадь $\sim \dfrac{S}{10W}$. При максимальной плотности записи размер углубления должен быть порядка длины волны, поскольку в противном случае интерференция света, одновременно отражающегося от соседних углублений, сделает чтение информации с диска невозможным (точнее говоря, технически существенно более сложным). Поэтому

$$\lambda_{max} \sim \sqrt{\frac{S}{10W}} = \sqrt{\frac{\pi D^2}{40W}} \approx 1{,}3 \text{ мкм.}$$

Рассуждая аналогично, придём к выводу, что при использовании лазера на нитриде галлия с длинной волны $\lambda = 0,36$ мкм на компакт-диск можно было бы записать информацию объёмом

$$W_1 = \frac{\pi D^2}{40\lambda^2} \sim 9 \text{ Гбайт,}$$

что составляет примерно 16 часов стандартной звуковой записи.