

И.И. Турулин, Т.В. Шушкевич

**Основы  
цифровой обработки  
сигналов**



Таганрог  
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Таганрогский институт имени А.П. Чехова  
(филиал) ФГБОУ ВО «Ростовский государственный  
экономический университет (РИНХ)»

**И.И. Турулин, Т.В. Шушкевич**

# **ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

*Допущено  
редакционно-издательским советом  
Таганрогского института имени А.П. Чехова  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
изучающих курсы «Информатика», «Информационные технологии»*

Таганрог  
Издательство Таганрогского института имени А.П. Чехова  
2015

УДК 621.391.3(075)  
ББК 38/9  
Т88

*Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала)  
Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)*

**Рецензенты:**

доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики  
Таганрогского института имени А.П.Чехова (филиала)  
Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)

**Я.Е. Ромм;**

кандидат технических наук, доцент Таганрогского института имени А.П.Чехова  
(филиала) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)

**П.В. Хало**

**Турулин, И.И.**

**Т88** Основы цифровой обработки сигналов: учеб. пос. / И.И. Турулин,  
Т.В. Шушкевич – Таганрог: Изд-во Таганрог. ин-та имени А.П. Чехова, 2015.  
– 88 с.

Табл. 1. Ил. 40. Библиогр.: 16 назв.

**ISBN 978-5-87976-965-4**

Даются теоретические основы цифровой обработки сигналов. Рассмотрены основные спектральные преобразования, а также методы цифровой фильтрации и типы цифровых фильтров. Особенностью является описание процессов цифровой обработки сигналов с пояснением физического смысла или с помощью образных моделей, что способствует выработке не только абстрактно-математического, но и инженерного понимания предмета, то есть позволяет «прочувствовать» процессы цифровой обработки сигналов.

Для студентов высших учебных заведений, изучающих курсы «Информатика», «Информационные технологии».

УДК 621.391.3(075)  
ББК 38/9

**ISBN 978-5-87976-965-4**

© Турулин И.И., Шушкевич Т.В., 2015

© Издательство Таганрогского института  
имени А.П. Чехова, 2015

© Южный федеральный университет, 2015

## Оглавление

Введение .....	5
Список сокращений .....	6
1. Дискретизация аналоговых сигналов .....	7
1.1. Понятие сигнала .....	7
1.2. Дельта-функция Дирака и ее свойства .....	7
1.3. Дискретизация .....	9
1.4. Модели спектров дискретных сигналов .....	10
1.4.1. Модель 1: дискретный сигнал составлен из взвешенных дельта- функций .....	10
1.4.2. Модель 2: ступенчатая аппроксимация аналогового сигнала .....	12
1.4.3. Модель 3: дискретный спектр дискретного сигнала .....	13
1.4.4. Модель 4: дискретное преобразование Фурье .....	14
2. Преобразования дискретных сигналов .....	14
2.1. Основные дискретные функции .....	14
2.2. Интерполяция, децимация и передискретизация .....	15
2.3. Линейная дискретная свертка .....	17
2.4. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) .....	17
2.5. Свойства ДПФ .....	21
2.5.1. Обратимость ДПФ .....	21
2.5.2. Периодичность (цикличность) ДПФ .....	21
2.5.3. Эффект утечки (растекания) спектра .....	22
2.5.4. Свойство циклического сдвига .....	23
2.5.5. Свойство суперпозиции (линейности) .....	23
2.5.6. Соответствие дискретных и непрерывных осей во временной и частотной областях .....	24
2.5.7. Свойство циклической (круговой) свертки .....	25
2.5.8. Вычисление линейной свертки через циклическую .....	26
2.5.9. Алгоритм фильтрации в частотной области .....	27
2.5.10. ДПФ симметричных и антисимметричных функций .....	28
2.5.11. Вычислительные затраты ДПФ .....	29
2.5.12. Интеграл, ряды и дискретное преобразование Фурье: основные отличия .....	29
2.6. Алгоритм Кули-Тьюки быстрого преобразования Фурье .....	30
2.7. Алгоритмы быстрой свертки .....	31
2.8. Дискретная корреляционная функция и ее связь с формулой свертки .....	34
2.9. Z-преобразование .....	35
2.9.1. Определение .....	35
2.9.2. Физический смысл .....	36
2.9.3. Радиус сходимости .....	36
2.9.4. Основные свойства z-преобразования .....	37
2.9.5. Обратное z-преобразование .....	38
2.9.6. Некоторые способы вычисления обратного z-преобразования .....	38

3. Цифровые фильтры .....	40
3.1. Дискретные и цифровые системы (фильтры): определение, основные свойства и сравнение с аналоговыми .....	40
3.2. Основные способы описания цифровых фильтров .....	43
3.2.1. <i>Линейное разностное уравнение</i> .....	43
3.2.2. <i>Структурная схема</i> .....	43
3.2.3. <i>Импульсная характеристика цифрового фильтра</i> .....	44
3.2.4. <i>Системная (передаточная) функция</i> .....	45
3.2.5. <i>Связь разностных уравнений, структурной схемы, системной функции и импульсной характеристики фильтра</i> .....	46
3.3. Линейность и инвариантность к сдвигу .....	46
3.4. Описание процесса фильтрации формулой свертки .....	47
3.5. Устойчивость и физическая реализуемость .....	48
3.6. Классификация ЦФ: нерекурсивные, рекурсивные, КИХ- и БИХ-фильтры .....	50
3.7. Сравнение фильтров различных типов по вычислительным затратам и линейности фазочастотной характеристики .....	54
3.8. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики .....	55
3.9. Секционирование свертки .....	55
3.10. Основные схемы соединения фильтров .....	58
3.10.1. <i>Параллельное соединение</i> .....	58
3.10.2. <i>Последовательное (каскадное) соединение</i> .....	59
3.10.3. <i>Включение фильтра в цепь обратной связи</i> .....	61
3.11. Цифровые дифференциаторы и интеграторы .....	62
3.12. Условия линейности фазочастотной характеристики цифрового фильтра .....	63
3.13. Синтез цифровых фильтров .....	68
3.13.1. <i>Постановка задачи синтеза фильтра</i> .....	68
3.13.2. <i>Синтез фильтра по ФНЧ-прототипу</i> .....	68
3.13.3. <i>Обзор некоторых методов и программ расчета цифровых фильтров</i> .....	73
3.14. <i>Согласованный фильтр</i> .....	75
3.15. <i>Эффект наложения АЧХ</i> .....	77
3.16. <i>Эффект Гиббса</i> .....	77
3.17. <i>Погрешности (шумы) квантования при фильтрации</i> .....	79
3.18. <i>Эффективный алгоритм реализации блоков задержки цифровых фильтров</i> .....	81
Заключение .....	83
Библиографический список .....	84

## ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов широко применяется в современной технике.

В настоящее время сохраняется тенденция сокращения аппаратной части электронных систем. Это происходит за счет программной реализации подсистем преобразования сигналов и применения цифровой обработки сигналов.

Особенностью пособия является описание процессов цифровой обработки сигналов с пояснением физического смысла или с привлечением образных моделей, что способствует выработке не только абстрактно-математического, но и инженерного понимания предмета, т.е. позволяет «прочувствовать» процессы преобразования цифровых сигналов.

Понятия и определения выделены жирным шрифтом. Слова и фразы, на которые необходимо обратить внимание, даны курсивом.

В разд. 1 даются основы теории дискретизации, в разд. 2 – цифрового спектрального анализа, разд. 3 – анализа и синтеза цифровых фильтров.

При подготовке пособия использовались материалы книг [4, 8], а также конспект лекций С.В. Николаева по курсу «Теоретические основы информационно-измерительной техники».

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АЧХ** – амплитудно-частотная характеристика  
**АЦП** – аналого-цифровой преобразователь  
**БЗ** – блок задержки  
**БИХ** – бесконечная импульсная характеристика  
**БПФ** – быстрое преобразование Фурье  
**ДПФ** – дискретное преобразование Фурье  
**ИХ** – импульсная характеристика  
**КИХ** – конечная импульсная характеристика  
**ЛРУ** – линейное разностное уравнение  
**ОДПФ** – обратное дискретное преобразование Фурье  
**ПЗФ** – полосно-заграждающий фильтр  
**ППФ** – полосно-пропускающий фильтр  
**ТПП** – теоретико-полиномиальное преобразование  
**ТЧП** – теоретико-числовое преобразование  
**ФВЧ** – фильтр верхних частот  
**ФНЧ** – фильтр нижних частот  
**ФЧХ** – фазочастотная характеристика  
**ЦАП** – цифроаналоговый преобразователь  
**ЦОС** – цифровая обработка сигналов  
**ЦФ** – цифровой фильтр

# 1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ

## 1.1. Понятие сигнала

**Аналоговый** сигнал – некоторая функция времени  $t$ , обычно содержащая информацию, представляющую определенный интерес (т.е. сигналы о чем-то «сигнализируют»). Обычно являются электрическими напряжениями. Термин «аналоговый» подчеркивает аналогичность напряжения некоторому физическому процессу и появился примерно в середине прошлого века, когда дифференциальные уравнения, описывающие физические объекты, стали моделировать с помощью электронных схем.

Для непериодических электрических сигналов **континуальными** называются те, которые имеют конечное число разрывов, причем в точках разрыва не обращаются в бесконечность (разрывы первого рода). Для периодических континуальных сигналов допускается конечное число разрывов первого рода на период. В связи с этим термином «непрерывные» является некорректным, хотя и иногда употребляется.

В литературе термины «аналоговый» и «континуальный» обычно являются синонимами, хотя реальные аналоговые сигналы, строго говоря, разрывов не имеют – в природе, в отличие от математических моделей, не бывает бесконечно большой крутизны фронтов.

**Дискретные** сигналы являются функцией дискретного времени  $n$ . Получаются из континуальных путем дискретизации по времени, т.е. взятием выборок (отсчетов) континуальных сигналов в дискретные моменты времени, обычно с постоянным шагом  $T_d$ , называемым шагом дискретизации (п. 1.3).

Цифровые сигналы получаются из дискретных квантованием по уровню, представляют собой последовательность чисел.

## 1.2. Дельта-функция Дирака и ее свойства

Дельта-функция ( $\delta$ -функция)  $\delta(t)$  – бесконечно короткий импульс с единичной площадью. Поскольку длительность  $\delta$ -функции бесконечно мала, а площадь конечна, амплитуда  $\delta$ -функции бесконечна. Поэтому сигнал  $\delta(t)$  физически нереализуем, но его можно аппроксимировать импульсом, длительность которого значительно меньше постоянной времени анализируемой цепи.

$\delta$ -функция в теории сигналов и цепей играет важную роль, поскольку содержит колебания всех частот с единичной амплитудой и нулевой фазой. Если такой сигнал подать на вход аналогового фильтра и вычислить спектр отклика (выходного сигнала), т.е. взять интеграл Фурье, получим передаточную функцию фильтра. Она показывает, как передаются на выход спектральные компоненты определенной частоты: модуль – с каким коэффициентом передается амплитуда, фаза – какой фазовый сдвиг приобретает компонента.

Заметим, что случайный сигнал (точнее, процесс) с равномерной спектральной плотностью также содержит колебания всех частот, но фазы их случайны, в результате чего форма такого процесса будет совершенно другой (рис. 1.1).

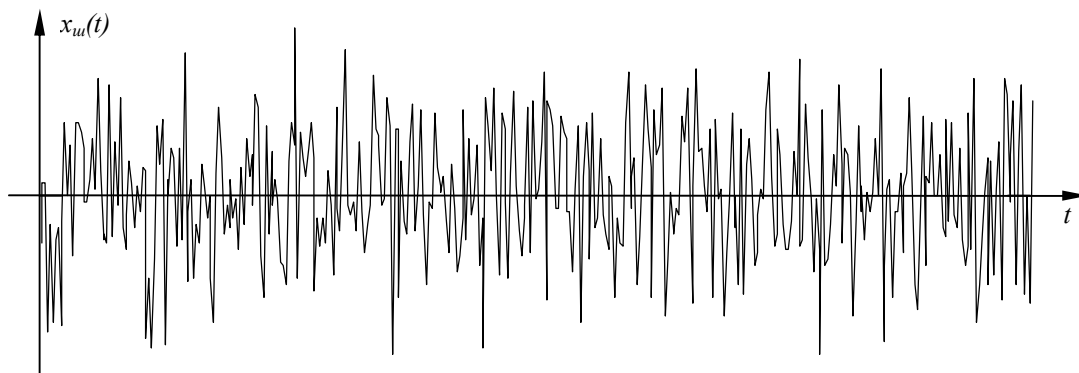


Рис. 1.1

Если умножить сигнал  $x(t)$  на  $\delta(t - t_0)$ , то произведение  $x(t)\delta(t - t_0)$  обратится в ноль везде, кроме окрестности точки  $t = t_0$ , и значение  $x(t_0)$  будет выделено («подсвечено»). Если проинтегрировать  $x(t)\delta(t - t_0)$  по  $t$ , и учесть, что  $\delta(t - t_0)$  равна нулю всюду, кроме окрестности точки  $t = t_0$ , и площадь функции  $\delta(t)$  равна единице, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} x(t)\Delta(t - t_0) dt = x(t_0). \quad (1.1)$$

Это равенство называется фильтрующим свойством  $\delta$ -функции, которое правильнее называть стробирующим, поскольку под словом «фильтрация» обычно подразумевается фильтрация в **частотной** области. Здесь же происходит фильтрация (выделение нужного отсчета) во **временной** области, что порождает определенную путаницу.

### 1.3. Дискретизация

**Дискретизацией** называется процесс преобразования аналоговых сигналов в дискретную или цифровую форму.

На рис. 1.2 изображена модель дискретизации аналогового сигнала  $x_a(t)$ . Здесь целые числа  $n$  – дискретное время. **Дискретный сигнал**  $x_d(nT_d)$  – это аналоговый сигнал, дискретизированный по времени, **цифровой сигнал**  $x(nT_d)$  – это дискретный сигнал, квантованный по уровню.

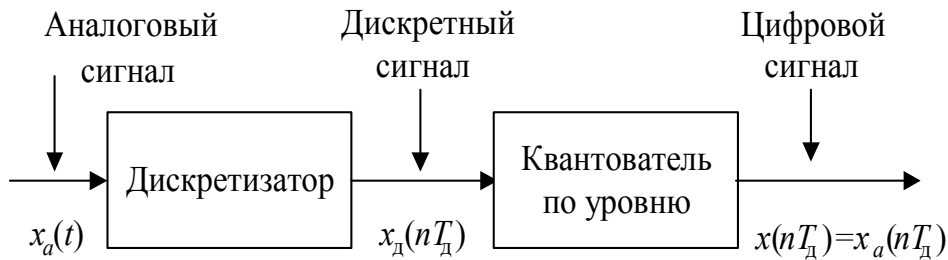


Рис. 1.2

После дискретизации информация о значениях сигнала  $x_a(t)$  в точках  $t \neq nT_d$  теряется. Это не значит, что  $x_d(nT_d) = 0$  при  $t \neq nT_d$  – в этом случае дискретный или цифровой сигнал не определен (неизвестен). Цифровой сигнал – это, если говорить программистским языком, массив чисел (таблица). Промежуточные значения между точками этой таблицы можно рассчитать приближенно (это называется **интерполяцией**, п. 2.2).

Заметим, что в литературе по цифровой обработке сигналов для упрощения формул полагается  $T_d = 1$ . Учесть шаг дискретизации можно, сделав в формулах замену  $n \rightarrow nT_d$ .

Далее по тексту для упрощения формул вместо  $x(nT_d)$  используется обозначение  $x(n)$  или  $x_n$ .

Дискретный сигнал может быть различным образом описан математически, т.е. иметь разные математические модели. Ниже рассмотрены 4 наиболее распространенных модели.

## 1.4. Модели спектров дискретных сигналов

### 1.4.1. Модель 1: дискретный сигнал составлен из взвешенных дельта-функций

Первая модель спектра дискретного сигнала основана на представлении дискретного сигнала в виде произведения аналогового сигнала на последовательность  $\delta$ -функций ( $\delta$ -функция – бесконечно короткий импульс с единичной площадью; см. п. 1.2). Дискретный сигнал выражается формулой

$$x_{д1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_d) \quad (1.2)$$

и изображен на рис. 1.3. Текстовый индекс (символ) «1» в  $x_{д1}(t)$  и его спектре обозначает номер модели спектра, в данном случае 1-ой.

Поскольку аналоговый сигнал умножается на последовательность дельта-функций, для **1-й модели**  $x_{д1}(t) \rightarrow 0$  при  $t \neq nT_d$  и  $x_{д1}(t) \rightarrow \infty$  при  $t = nT_d$ .

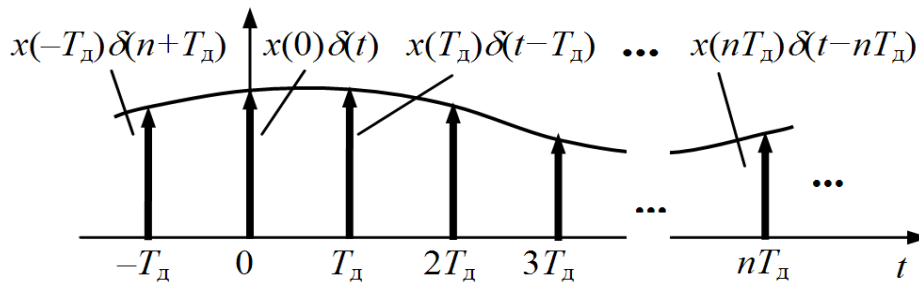


Рис. 1.3

Подставив сигнал  $x_{д1}(t)$ , определяемый формулой (5.1), в формулу интеграла Фурье, получим спектр этого сигнала

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{д1}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} \delta(t - nT_d) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)e^{-j\omega nT_d}. \end{aligned}$$

При переходе от правого выражения 1-й строки к левому выражению 2-й строки мы заменили интеграл суммы суммой интегралов, затем учли фильтрующее свойство  $\delta$ -функции (п. 1.2; формула (1.1)).

Таким образом, 1-я модель спектра дискретного сигнала (названия моделей спектра в литературе могут быть разными):

$$\dot{X}_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) e^{-j\omega n T_d}. \quad (1.3)$$

При достижении значением  $\omega$  величины  $\omega_d = 2\pi/T_d$  фаза комплексной экспоненты становится равной  $2\pi$ , поэтому **спектр дискретного сигнала** начинает повторяться и **будет периодичным** с периодом  $\omega_d$ :  $\dot{X}_1(\omega)$  – сумма бесконечного числа копий спектра  $\dot{X}(\omega)$  аналогового сигнала, отстоящих друг от друга на  $\omega_d$ , т.е.

$$\dot{X}_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - n\omega_d). \quad (1.4)$$

Этот эффект называется наложением спектров (размножением спектра) при дискретизации. На рис. 1.4 изображены модули спектров аналогового и дискретного сигналов для  $T_d = 1$ . Периодичность спектра дискретного сигнала и эффект наложения спектров наблюдаются для любой модели спектра дискретного сигнала. Интервал  $[0, \omega_d/2]$  называется интервалом однозначного представления сигнала.

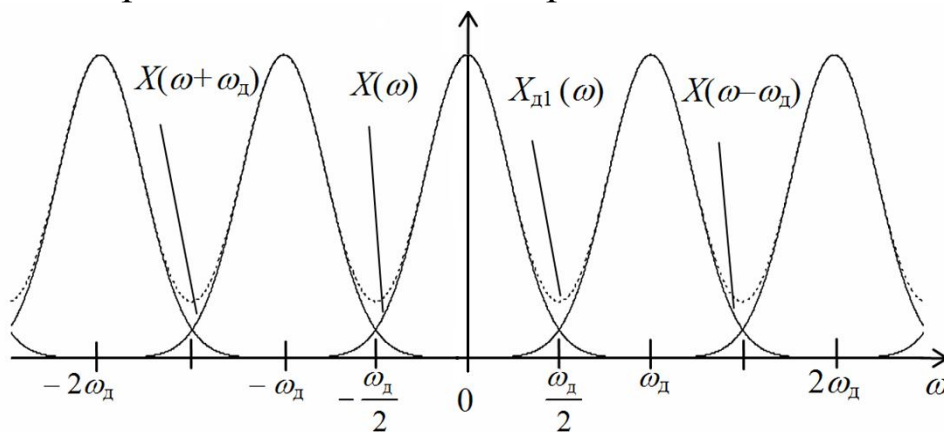


Рис 1.4

Часто на экране телевизора можно видеть, как колеса движущегося автомобиля крутятся слишком медленно, в обратную сторону или вообще останавливаются. Так проявляется эффект наложения спектров: частота кадров (т.е. частота дискретизации)  $f_d = 24$  Гц (также может быть 25, 30, 48, 50 и 60 Гц), а частота смены зубцов колеса превышает **частоту Найквиста**  $f_d/2$  и эта частота переносится в область низких частот (положительную или отрицательную).

Это происходит потому, что информация о поведении  $x(t)$  между отсчетами потеряна. Если сигнал промодулировать частотой  $k\omega_d$ , где

$k = 1, 2, \dots$ , то после дискретизации получим абсолютно такой же дискретный сигнал (рис. 1.5). Чтобы исключить эту неоднозначность, выделяют спектр сигнала  $x(t)$  перед дискретизацией в диапазоне  $[0, \omega_d/2]$ , вне диапазона – подавляют.

Подавление никогда не бывает полным, поэтому возникает погрешность наложения спектров при дискретизации. Ее среднеквадратическое отклонение (СКО) есть отношение СКО «хвоста» спектра  $\dot{X}(\omega)$  (вне диапазона  $[0, \omega_d/2]$ ) к СКО спектра  $\dot{X}(\omega)$ , т.е.

$$\delta_{нал} = \sqrt{\int_{\omega_d/2}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} / \sqrt{\int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \quad (1.5)$$

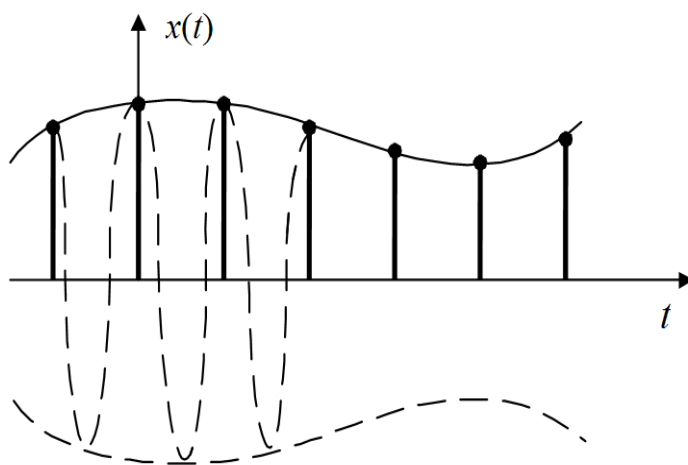


Рис. 1.5

### 1.4.2. Модель 2: ступенчатая аппроксимация аналогового сигнала

Если при вычислении спектра аналогового сигнала  $x(t)$  аппроксимировать в интеграле Фурье этот сигнал и множитель  $e^{-j\omega t}$  полиномами нулевого порядка (метод правых прямоугольников; рис. 1.6), получим 2-ю модель спектра дискретного сигнала:

$$\dot{X}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT_d}^{(n+1)T_d} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = T_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T_d} \quad (1.6)$$

Как видно из формул (1.6) и (1.3), модель 2 отличается от модели 1 только множителем  $T_d$ . Поэтому все выводы, формулы и рисунки для модели 1 справедливы и для этой модели.

Заметим, что  $x_2(t)$  в формуле (1.6) – не цифровой сигнал, а аппроксимированный аналоговый.  $\dot{X}_2(\omega)$  также будет периодичным, поскольку при дискретизации потеряна информация о значениях  $x(t)$  между дискретными отсчетами (рис. 1.5).

Кроме того, в отличие от модели 1 площади  $x_2(t)$  и  $x_{д2}(t)$  примерно равны, поэтому максимальные уровни  $X(\omega)$  и  $X_{д2}(\omega)$  будут примерно одинаковы. Т.е. если в рис. 1.4 заменить  $X_{д1}(\omega)$  на  $X_{д2}(\omega)$ , он будет справедлив при любом  $T_d$ , а не только при  $T_d = 1$ , как в модели 1.

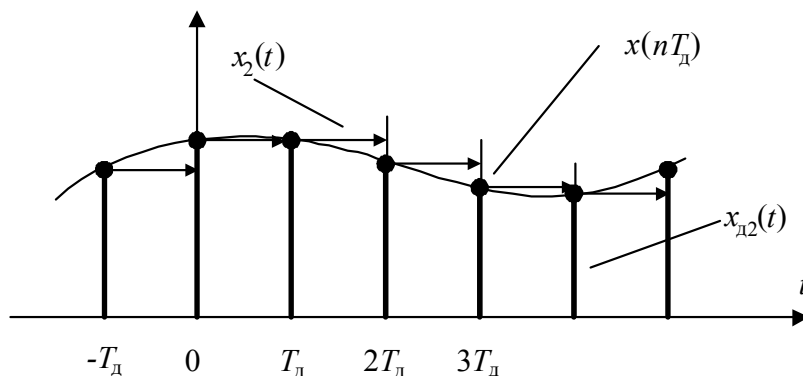


Рис. 1.6

### 1.4.3. Модель 3: дискретный спектр дискретного сигнала

Эта модель отличается от модели 2 тем, что дискретизируется не только сигнал, но и спектр. Обозначим шаг дискретизации по частоте через  $\Omega_d$  (не путать с частотой дискретизации  $\omega_d = 2\pi / T_d$ ) и подставим  $\omega = k\Omega_d$  ( $k$  – целое – дискретная частота) в формулу (1.6):

$$\dot{X}_3(k) = \dot{X}_2(\omega) \Big|_{\omega = k\Omega_d} = T_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_d n T_d}. \quad (1.7)$$

*Периодичность* в одной области (частотной (спектр) или временной (сигнал)) соответствует *дискретности* в другой. Если сигнал периодичен, то спектр дискретен (линейчатый). Если спектр периодичен, то сигнал дискретен. Следовательно, если спектр и сигнал дискретны, то они оба будут периодичны (в моделях 1 и 2 спектр был непрерывный, так как сигнал был в общем случае непериодичным). Периодичность сигнала означает, что данная модель спектра воспринимает его как периодичный с периодом  $T = 2\pi / \Omega_d$  по времени, даже если он непериодичен. Период спектра сигнала, как и в моделях 1 и 2, равен  $\omega_d = 2\pi / T_d$ .

Если  $T_d$  известен, для дискретных сигналов правильнее использовать термин «длительность», а не «длина» (как для массива).

#### 1.4.4. Модель 4: дискретное преобразование Фурье

Если в модели 3 потребовать, чтобы длины дискретных сигнала и спектра были одинаковы и равны  $N$ , т.е.  $0 \leq k \leq N-1$  и  $0 \leq n \leq N-1$ , то период  $T = 2\pi / \Omega_d$  первой гармоники спектра будет равен периоду сигнала  $NT_d$ , откуда  $T_d \Omega_d = 2\pi / N$ . Подставив последнее выражение в (1.7), получим формулу для 4-й модели спектра дискретного сигнала:

$$\dot{X}_4(k) = T_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nk/N}. \quad (1.8)$$

При  $T_d = 1$  формула (1.8) описывает прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Иногда модель 4 называют «дискретный спектр длины  $N$ ». Как и модель 3, ДПФ и другие дискретные спектральные преобразования **воспринимают сигнал как периодичный**, даже если он неперiodичен.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

### 2.1. Основные дискретные функции

Единичным импульсом или дискретной  $\delta$ -функцией называется функция

$$\delta(n) = \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ее график изображен на рис. 2.1, а. Единичный импульс играет ту же роль для цифровых систем, что и  $\delta$ -функция Дирака для аналоговых. Дискретное преобразование Фурье и  $z$ -преобразование от этой функции равны 1. Это означает, что функция содержит колебания всех частот с единичной амплитудой и нулевой фазой. Если подать такой сигнал на вход цифрового фильтра, а потом вычислить  $z$ -преобразование отклика (выходного сигнала), сделать замену  $z \rightarrow e^{j\omega T_d}$ , получим комплексный коэффициент передачи (передаточную функцию) фильтра  $\dot{H}(\omega)$ , где  $T_d$  – шаг дискретизации. Модуль

функции  $\dot{H}(\omega)$  показывает, насколько спектральные компоненты ослабляются или усиливаются, фаза – насколько сдвигаются по фазе при прохождении через фильтр. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в пп. 3.23, 3.8.

Аналогично фильтрующему свойству (1.1)  $\delta$ -функции существует фильтрующее свойство  $\delta_n$ :

$$x_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta_{n-k} . \quad (2.2)$$

**Единичной ступенчатой функцией** называется функция

$$\sigma(n) = \sigma_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

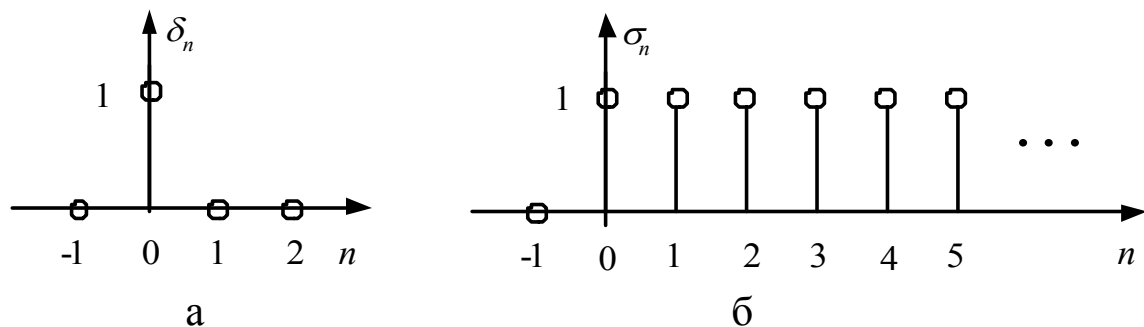


Рис. 2.1

## 2.2. Интерполяция, децимация и передискретизация

В некоторых задачах цифровой обработки сигналов возникает задача изменения шага дискретизации по времени. Соответствующая операция называется передискретизацией, а реализующее ее устройство – передискретизатором.

Если частота дискретизации увеличивается в целое число раз, такая передискретизация называется **интерполяцией**, если уменьшается в целое число раз – **децимацией** (рис. 2.2).

**Преобразование спектров при передискретизации.** При увеличении (уменьшении) числа отсчетов сигнала в  $K$  раз спектр сигнала сужается (расширяется) в  $K$  раз. Этот результат согласуется с известным правилом: **во сколько раз стал короче (длиннее) сигнал, во столько раз стал шире (уже) его спектр (ширина спектра сигнала обратно пропорциональна его длительности).**

При децимации возникает вторичное наложение спектров – копии спектров аналогового сигнала сближаются (см. рис. 1.4) с увеличением погрешности наложения спектров  $\delta_n$ . При интерполяции, наоборот, эти копии расходятся, и  $\delta_n$  уменьшается – спектр дискретного сигнала (пунктир) еще более «провисает».

Как известно [4], линейные инвариантные к сдвигу (стационарные или с постоянными параметрами) фильтры изменяют лишь *уровни и фазы* спектральных составляющих входных сигналов. При этом сами спектральные составляющие *не появляются и не исчезают*, т.е. *преобразования спектра* не происходит. При передискретизации (в общем случае) спектральные составляющие входного сигнала сдвигаются по оси частот. Таким образом, передискретизация, как и любое преобразование спектра – операция нелинейная (или линейная неинвариантная к сдвигу). Поэтому здесь неприменим математический аппарат линейных инвариантных к сдвигу (стационарных) фильтров (п. 3.2). Этот аппарат можно применить до или после интерполятора (или дециматора).

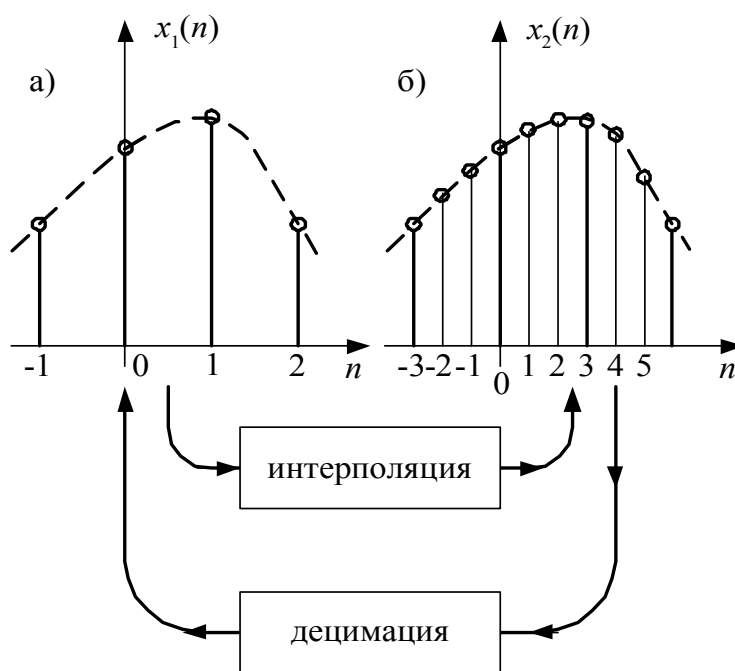


Рис. 2.2

Имеется еще одна разновидность передискретизации: частота дискретизации не изменяется, а огибающая дискретного сигнала задерживается на часть  $0 < p < 1$  такта (т.е. шага (периода) дискретизации  $T_d$ ), т.е. на  $pT_d$ . Эта операция, в отличие от общего случая передискретизации, является строго линейной (не путать с линейной ин-

терполяцией) и не преобразует спектр сигнала, а потому может быть выполнена линейным нерекурсивным цифровым фильтром (п. 3.6).

### 2.3. Линейная дискретная свертка

Линейной дискретной сверткой (или просто дискретной сверткой) называется сумма вида:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n), \quad (2.4)$$

где  $x(n) = x_n$  и  $h(n) = h_n$  – дискретные последовательности (массивы), т.е. операнды свертки;

$y(n) = y_n$  – результат свертки;

\* – символическое обозначение операции свертки.

Здесь под термином «линейная свертка» имеется в виду то, что свертка не круговая (или циклическая) (п. 2.5.7) – не путать со свойством линейности (при котором выполняется принцип суперпозиции).

Если длины последовательностей  $x(n)$  и  $y(n)$  соответственно равны  $M$  и  $N$ , то длина  $y(n)$  составит  $M + N - 1$ .

Забегая вперед (п. 3.4) скажем, что для линейных дискретных фильтров процесс фильтрации описывается формулой (2.4), где  $x(n)$  – входной сигнал,  $y(n)$  – выходной,  $h(n)$  – импульсная характеристика.

### 2.4. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Пусть  $x(n)$  – дискретный периодический сигнал с периодом  $N$  или непериодический, в общем случае комплексный, заданный на отрезке  $0 \leq n \leq N - 1$ . **Прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ)** этого сигнала определяется формулой

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} \quad (2.5)$$

Эта формула совпадает с формулой (1.8) (4-я модель спектра дискретного сигнала).  $X(k)$  является периодической функцией с периодом  $N$ , которая в общем случае комплексная.

**Обратным ДПФ (ОДПФ)** называется сумма

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi nk/N} \quad (2.6)$$

Если обозначить  $V_n = e^{-j2\pi n/N}$  ( $V_n$  называется **фазовым множителем**), то формулы ДПФ и ОДПФ могут быть записаны более компактно:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) V_N^{nk} \quad (2.7)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) V_N^{-nk} \quad (2.8)$$

Проанализируем, как функционирует математический аппарат ДПФ. Для этого рассмотрим ортогональную на интервале  $0 \leq n \leq N-1$  систему функций  $e^{j2\pi k n/N}$ , где  $k$  – номер функции (гармоники). Эти функции комплексно сопряжены фазовым множителям в формуле ДПФ (2.5). Если  $k = k_0$ , то в силу ортогональности базисных функций для различных  $k$  обнулятся все гармоники  $X(k)$ , кроме  $k_0$ -й гармоники  $A_{k_0} e^{j2\pi k_0 n/N} = A_{k_0} [\cos(2\pi k_0 n/N) + j \sin(2\pi k_0 n/N)]$  ( $A_{k_0}$  – её амплитуда). При этом  $X(k_0) = N A_{k_0}$  (амплитуда усиливается в  $N$  раз из-за того, что сумма (2.5) содержит  $N$  слагаемых). Если  $x(n)$  – смесь различных гармоник (синусов и косинусов), что в общем случае имеет место,  $X(k)/N$  есть комплексные коэффициенты этих гармоник. Вещественные части – это коэффициенты косинусных составляющих, мнимые – синусных. Если умножить  $|X(k)/N|$  на 100%, получим процентное содержание  $k$ -й гармоники в сигнале.

Таким образом, правильнее ставить множитель  $1/N$  не перед формулой ОДПФ (2.6), а перед формулой ДПФ (2.5). В некоторых литературных источниках так и делается, в некоторых – перед обеими формулами стоят множители  $1/\sqrt{N}$ . Форма спектра от этого не меняется, меняется лишь масштаб по оси ординат.

$$|X(k)| = \sqrt{X_{Re}^2(k) + X_{Im}^2(k)}, \quad (2.9)$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)] = \arctg \frac{X_{Im}(k)}{X_{Re}(k)}, \quad (2.10)$$

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}, \quad (2.11)$$

где  $|X(k)|$  – амплитудный спектр;

$\varphi(k)$  – фазовый спектр;  
 $\arg(z)$  – аргумент комплексного числа  $z$ ;  
 $X_{Re}(k)$  – вещественная часть функции  $X(k)$ ;  
 $X_{Im}(k)$  – мнимая.

При некоторых  $k$  значение  $X_{Re}(k)$  может обращаться в ноль или быть настолько малым, что результат деления  $X_{Im}(k)$  на  $X_{Re}(k)$  в формуле (2.10) выходит за пределы разрядной сетки компьютера, что обычно приводит к ошибке «переполнение» или «деление на ноль» и прекращению работы программы.

Для того чтобы избежать подобных ситуаций, рекомендуется использовать функцию  $\text{atan2}(y,x)$ , где  $y$  и  $x$  – соответственно мнимая и вещественная части комплексного числа. Это гарантирует отсутствие переполнения при любых  $y$  и  $x$ , кроме  $y = x = 0$ . Если алгоритм расчета фазового спектра входные данные не содержат ошибок, ситуация  $y = x = 0$ , т.е.  $X_{Im}(k) = X_{Re}(k) = 0$ , практически исключена (кроме случая  $x_n = 0$ ).

То же самое можно сказать и о вычислении фазочастотных характеристик фильтров, поскольку математически передаточная функция фильтра есть спектр его импульсной характеристики. Во избежание аварийного завершения задачи из-за ошибки «переполнение» желательно в программу вводить логический оператор, присваивающий фазе при  $X_{Im}(k) = X_{Re}(k) = 0$  какое-либо, например, нулевое, значение с обходом обращения к функции  $\text{atan2}(\cdot)$ .

Функция  $\text{atan2}(y,x)$  входит в состав математических библиотек многих языков программирования, например, Fortran и C, Pascal, а также систему MATLAB. В системе Mathcad имеются аналогичные функции  $\arg(z)$ ,  $\text{angle}(x,y)$  рассчитывающие фазу комплексного числа  $z = x + jy$ , где  $j$  – мнимая единица. Кроме того, в системе Mathcad имеется и функция  $\text{atan2}(x,y)$ , однако первым аргументом здесь является не мнимая, а вещественная часть, что порождает путаницу и может привести к ошибке.

Область изменения (значений) функции  $\text{arctg}(a)$  – интервал  $(-\pi/2, \pi/2)$  радиан, функций  $\text{atan2}(y,x)$  и  $\arg(z)$  – интервал  $(-\pi, \pi)$  радиан. Это связано с тем, что при делении  $X_{Im}(k)$  на  $X_{Re}(k)$  в формуле (2.10) теряется информация о том, в какой (левой или правой) полуплоскости комплексной плоскости находится комплексное число.

Подчеркнем, что все тригонометрические функции в компьютерах оперируют, как правило, с радианами, а не с градусами.

Заметим, что диапазон изменения ФЧХ фильтра может превышать область значений функций, приведенных выше. В этом случае рассчитанная по формуле (2.10) (а не истинная) ФЧХ будет иметь разрывы (см. рис. 2.3, мелкий пунктир) из-за того, что функция  $\arctg(a)$  рассчитывает угол (фазу) на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\text{atan2}(y,x)$  и  $\arg(z)$  – на интервале  $(-\pi, \pi)$  радиан (рис. 2.3, сплошная линия).

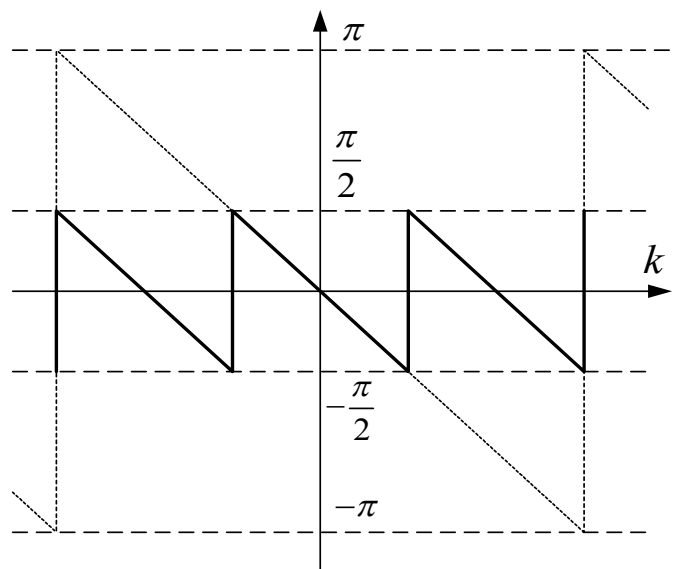


Рис. 2.3

Возникает вопрос: почему в формуле (2.5) прямого ДПФ показатель степени экспоненты отрицателен, в формуле ОДПФ – положителен? В формуле (2.5) отрицательный показатель степени нужен для того чтобы исключить (взаимно уничтожить) сами гармоники (базисные функции известны, а значит, информации не несут) и оставить их комплексные коэффициенты, несущие информацию об амплитуде и фазе той или иной гармоники спектра сигнала  $x(n)$ . Иными словами, в формуле (2.5) используются комплексно-сопряженные базисные функции. ОДПФ (2.6) осуществляет сборку сигнала  $x(n)$  по коэффициентам  $X(k)$  его базисных функций. Для этого, естественно, используются не комплексно-сопряженные, а исходные базисные функции, т.е. с положительным показателем степени.

## 2.5. Свойства ДПФ

### 2.5.1. Обратимость ДПФ

Если последовательно вычислить ДПФ дискретного сигнала  $x(n)$ , а затем ОДПФ, получим снова  $x(n)$  без каких-либо масштабных коэффициентов. Это свойство называется обратимостью и доказывается путем подстановки формулы ДПФ в формулу ОДПФ.

### 2.5.2. Периодичность (цикличность) ДПФ

Как уже было сказано, *периодичность* в одной области (частотной или временной) соответствует *дискретности* в другой.

Например, периодичность во временной области, т.е. функции с аргументом  $t$  (непрерывное время) соответствует дискретности спектральной функции с аргументом  $\omega$ . Так, спектры периодических колебаний всегда дискретны, т.е. отличны от нуля в дискретных точках  $\omega = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  (вспомните ряды Фурье).

ДПФ дискретно в обеих областях (временная область – дискретное время  $n$ , частотная – дискретная частота  $k$ ), что соответствует периодичности в этих областях (рис. 2.4).

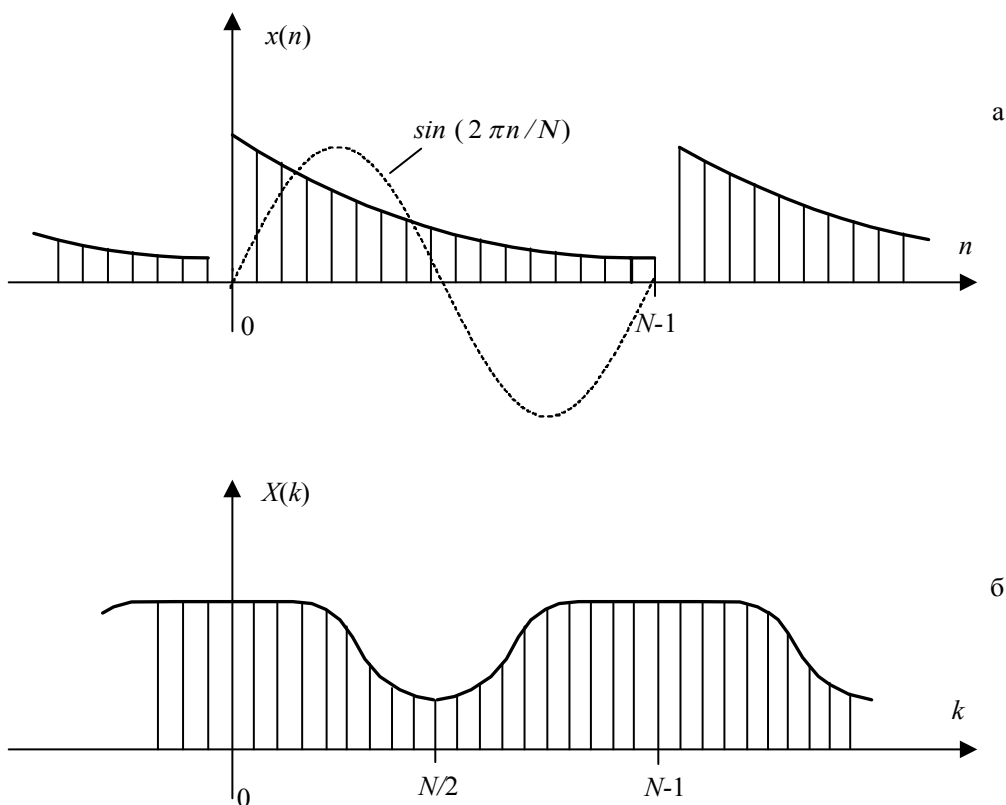


Рис. 2.4

Даже если исходный дискретный сигнал *непериодичен* и равен нулю вне отрезка  $0 \leq n \leq N - 1$ , подстановка его в формулу ДПФ ведет к тому, что математический аппарат ДПФ «рассматривают» сигнал и его спектр как дискретные *периодические* функции с периодом  $N$ . **Периодичность** ДПФ чаще называют **циклическостью**.

*Свойство циклическости в обеих областях присуще всем дискретным спектральным преобразованиям с дискретностью в обеих областях.*  $Z$ -преобразование (п. 2.9) таковым не является: во временной области сигналы дискретны и в общем случае непериодичны, а спектры непериодичных сигналов непрерывны. В частотной области  $z$ -преобразование периодически из-за дискретности временной функции.

Математически циклическость ДПФ во временной и частотной областях выражается соответственно формулами:

$$x(n) = x(n \bmod N), \quad (2.12)$$

$$X(k) = X(k \bmod N), \quad (2.13)$$

где  $i \bmod j$  – остаток от деления  $i$  нацело на  $j$ .

### 2.5.3. Эффект утечки (растекания) спектра

Из свойства циклическости ДПФ следует **эффект утечки** – размывание спектра монохроматического (одночастотного) сигнала, если на отрезке  $0 \leq n \leq N - 1$  укладывается нецелое число периодов сигнала. В результате в  $X(k)$  появляются частоты, которых не было в спектре исходного сигнала. Дело в том, что монохроматический сигнал бесконечен во времени. Из-за циклическости ДПФ сигнал будет таким же только в случае, если на отрезке  $0 \leq n \leq N - 1$  располагается целое число периодов сигнала. Спектр тем шире, чем ближе разность фаз сигнала в начале и конце отрезка  $0 \leq n \leq N - 1$  к  $180^\circ$ , и чем меньше периодов сигнала на этом отрезке.

Например, если с помощью ДПФ вычислить спектр синусоиды с частотой  $f_0 = f_d/4$ , получим одну спектральную составляющую, поскольку фазы синусоиды на краях отрезка  $0 \leq n \leq N - 1$  совпадут, и будет бесконечная синусоида. Если же, например,  $f_0 = f_d/5$ , периодически повторенный сигнал будет представлять собой также бесконечную, но «рваную» синусоиду – из-за несовпадения фаз на краях отрезка  $0 \leq n \leq N - 1$ . В результате появляется множество спектральных составляющих – спектр расширяется. Чем ближе «рваная» синусоида к

исходной, тем больше главная спектральная составляющая и меньше побочные.

#### 2.5.4. Свойство циклического сдвига

В п. 2.5.2 было рассмотрено свойство цикличности ДПФ во временной и частотной областях (формулы (2.12) и (2.13) соответственно). Следствием его является свойство циклического сдвига во временной и частотной областях и соответственно):

$$x((n - n_0) \bmod N) \Leftrightarrow V^{kn_0} X(k), \quad (2.14)$$

$$X((k - k_0) \bmod N) \Leftrightarrow V^{-nk_0} x(n). \quad (2.15)$$

На рис. 2.5 дано графическое пояснение циклического сдвига  $x((n - n_0) \bmod N)$ : если в результате сдвига  $x(n)$  один или несколько отсчетов переместились вправо (влево) от границ отрезка  $0 \leq n \leq N - 1$ , то они последовательно появляются слева (справа) на другом конце этого отрезка. Циклический сдвиг  $X(k)$  выполняется аналогично. На левом графике рис. 2.5 пунктиром показан сигнал, периодически продолженный математическим аппаратом ДПФ.

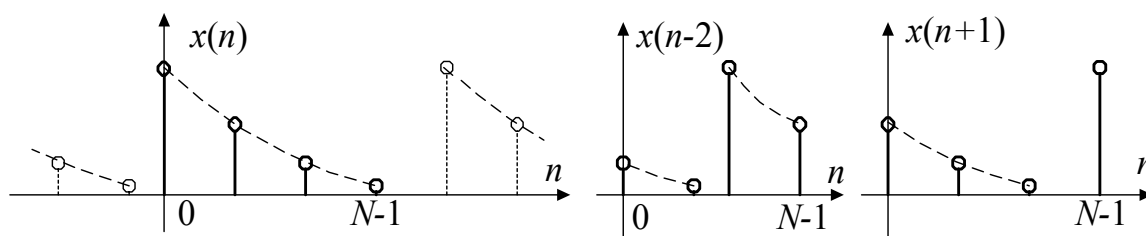


Рис. 2.5

Свойство (2.14) подобно теореме запаздывания для непрерывного преобразования (интеграла) Фурье, но отличается от него наличием цикличности.

#### 2.5.5. Свойство суперпозиции (линейности)

Если  $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(k)$ ,  $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(k)$ , где  $\Leftrightarrow$  – знак соответствия дискретного сигнала и его ДПФ,  $a_1$  и  $a_2$  – константы, то

$$ax_1(n) + bx_2(n) \Leftrightarrow aX_1(k) + bX_2(k)$$

Это свойство называется свойством **линейности** или **суперпозиции**: ДПФ от суммы сигналов с какими-либо коэффициентами равно сумме ДПФ этих сигналов по отдельности, умноженных на те же коэффициенты. Свойство доказывается подстановкой  $ax_1(n) + bx_2(n)$  в формулу ДПФ.

Таким образом, для получения ДПФ от сложного сигнала можно разбить этот сигнал на составляющие, вычислить ДПФ от каждой составляющей, а затем просуммировать результаты.

### 2.5.6. Соответствие дискретных и непрерывных осей во временной и частотной областях

Соответствие осей дискретного времени  $n$  и непрерывного времени  $t$  представлено на рис. 2.6, а, дискретной частоты  $k$  и непрерывной частоты  $\omega$  – на рис. 2.6, б.

Если дискретный сигнал получен путем дискретизации аналогового (такое не всегда бывает: иногда дискретный сигнал получается по формуле), то каждый  $n$ -й отсчет (или дискрета) соответствует времени  $t = nT_d$  (рис. 2.6, а), а каждый  $k$ -й отсчет соответствует частоте  $\omega = k\Omega_d$  (рис. 2.6, б), где  $T_d$  – период (шаг) дискретизации по времени,  $\Omega_d$  – по частоте. При этом  $\Omega_d T_d = 2\pi / N$ ;  $N\Omega_d = \omega_d$ , где  $\omega_d$  – частота дискретизации.

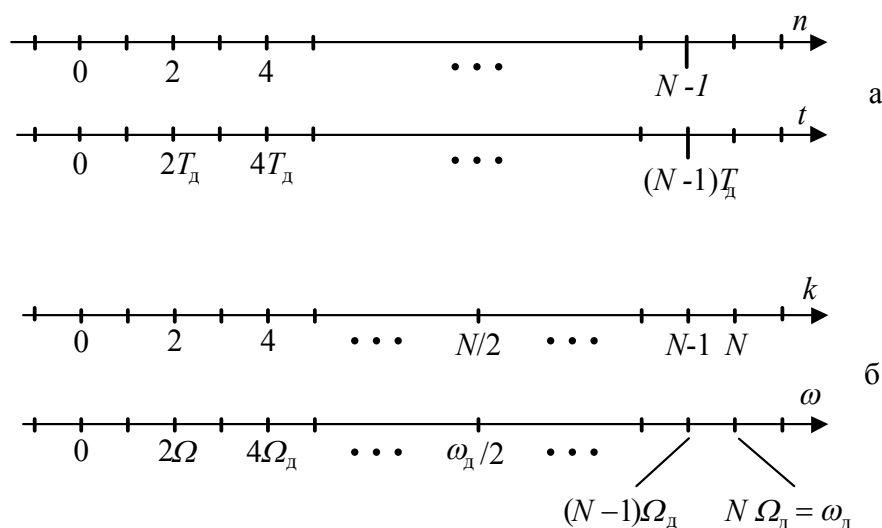


Рис. 2.6

### 2.5.7. Свойство циклической (круговой) свертки

Циклической (круговой) сверткой называется сумма

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h[(n-k) \bmod N] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x[(n-k) \bmod N] = \\
 &= x(n) \circledast^N h(n) = h(n) \circledast^N x(n),
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

где  $\circledast^N$  (или  $\otimes^N$ ) – символическое обозначение операции круговой свертки,  $a \bmod b$  – остаток от деления  $a$  нацело на  $b$ .

Циклическая свертка отличается от обычной (линейной) свертки (2.4) циклическостью сдвига в сумме. Графически циклическую свертку (2.16) можно представить следующим образом (рис. 2.7). Здесь последовательности  $x(n)$  и  $h((n-k) \bmod N)$  из-за циклическости ДПФ как бы сворачиваются в две трубки, после чего происходит суммирование парных произведений при вычислении (2.16) (первая формула). Для получения следующего значения  $y(n)$  надо повернуть одну из последовательностей (в данном случае,  $h(n)$ ) и вновь просуммировать парные произведения.

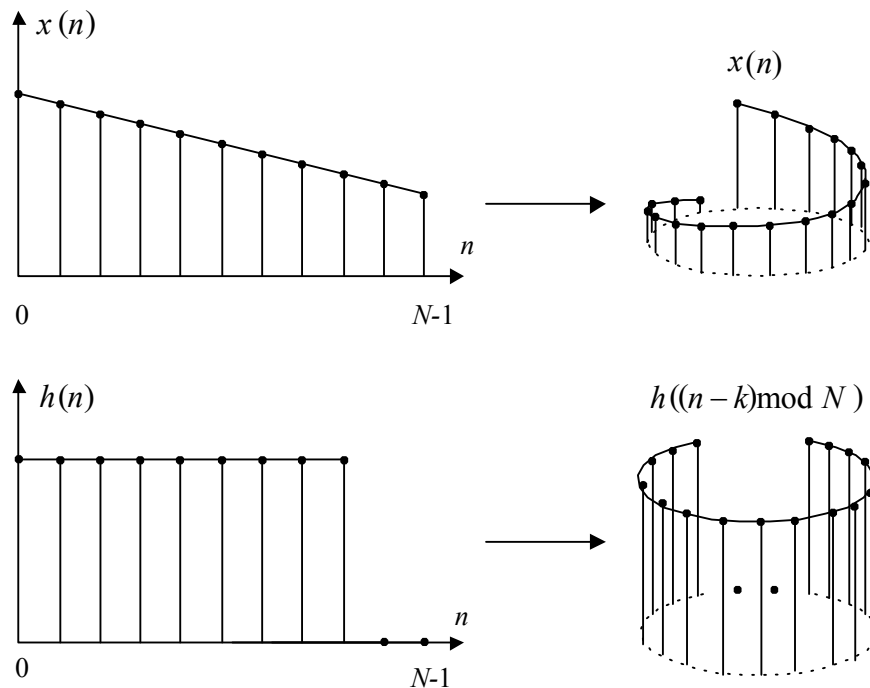


Рис. 2.7

Операция  $a \bmod b$  используется для математической записи периодичности (циклическости). Ее результат всегда положителен. Например,  $(N+1) \bmod N = 1$ ;  $-1 \bmod 4 = 3$ ;  $3 \bmod 2 = 1$ ;  $2 \bmod 3 = 2$ .

Если в алгоритмическом языке нет операции (или функции)  $mod$ , можно воспользоваться формулой  $a \bmod b = \left( \frac{a}{b} - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \right) b$ , где  $\lfloor x \rfloor$  – наибольшее целое, не большее  $x$ ;  $a$  и  $b$  могут быть целыми или вещественными. Функция, вычисляющая  $\lfloor x \rfloor$ , имеется в любом языке. Названия ее разные. Например, в языке C, или C++, системах Mathcad, MATLAB –  $floor(x)$ , в языке Basic (в том числе Visual Basic) –  $int(x)$ . В языке Basic имеется операция  $mod$ , но только для целых чисел, в C/C++ – функция  $fmod()$ . Сама функция  $fmod()$  и ее аргументы имеют тип  $double$ .

Как известно, для преобразований (интегралов) Фурье, Лапласа и  $z$ -преобразования линейная свертка в одной области соответствует произведению в другой. Для дискретных (в обеих областях) спектральных преобразований, в том числе ДПФ, будет то же самое, только свертка будет циклической (круговой).

Таким образом, если  $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(k)$ ,  $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(k)$ , то

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1(i)x_2[(n-i) \bmod N] \Leftrightarrow X_1(k)X_2(k) \quad (2.17)$$

(свойство круговой свертки во временной области),

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_1(i)X_2[(k-i) \bmod N] \Leftrightarrow x_1(n)x_2(n) \quad (2.18)$$

(свойство круговой свертки в частотной области).

### 2.5.8. Вычисление линейной свертки через циклическую

Результаты линейной (2.4) и циклической (2.16) сверток совпадают, если исходные последовательности (операнды свертки)  $x(n)$  и  $h(n)$  дополнить определенным количеством нулевых отсчетов. Если последовательность  $x(n)$  задана на интервале  $0 \leq n \leq N-1$ , а  $h(n)$  – на интервале  $0 \leq n \leq M-1$  (вне интервалов  $x(n) = h(n) = 0$ ),  $x(n)$  дополняют  $M-1$  нулями,  $h(n)$  дополняют  $N-1$  нулями (рис. 2.8). В итоге получаются последовательности  $x'(n)$  и  $h'(n)$  длиной  $N+M-1$ . Линейная (2.4) и циклическая (2.16) свертки последовательностей  $x'(n)$  и  $h'(n)$  будут совпадать при  $0 \leq n \leq N+M-2$  (всего будет  $N+M-1$  отсчетов), поскольку при циклическом сдвиге  $x'(n)$  или  $h'(n)$  вправо (влево) слева (справа) интервала  $0 \leq n \leq N+M-2$  появляются не отсчеты  $x(n)$

и  $h(n)$  (рис. 2.5), а нули (рис. 2.8). Минимальная размерность ДПФ для вычисления линейной свертки через циклическую равна длине линейной свертки и составляет  $N + M - 1$ . Таким образом,

$$x(n) * h(n) = x'(n) \otimes h'(n). \quad (2.19)$$

Заметим, что дополняющих нулей в  $x'(n)$  и  $h'(n)$  может быть больше, но при этом растет размерность ДПФ. Так, при увеличении числа нулей в  $x'(n)$  на  $K$  и  $h'(n)$  на  $K$ , размерность ДПФ и циклической свертки также должна быть увеличена на  $K$ .

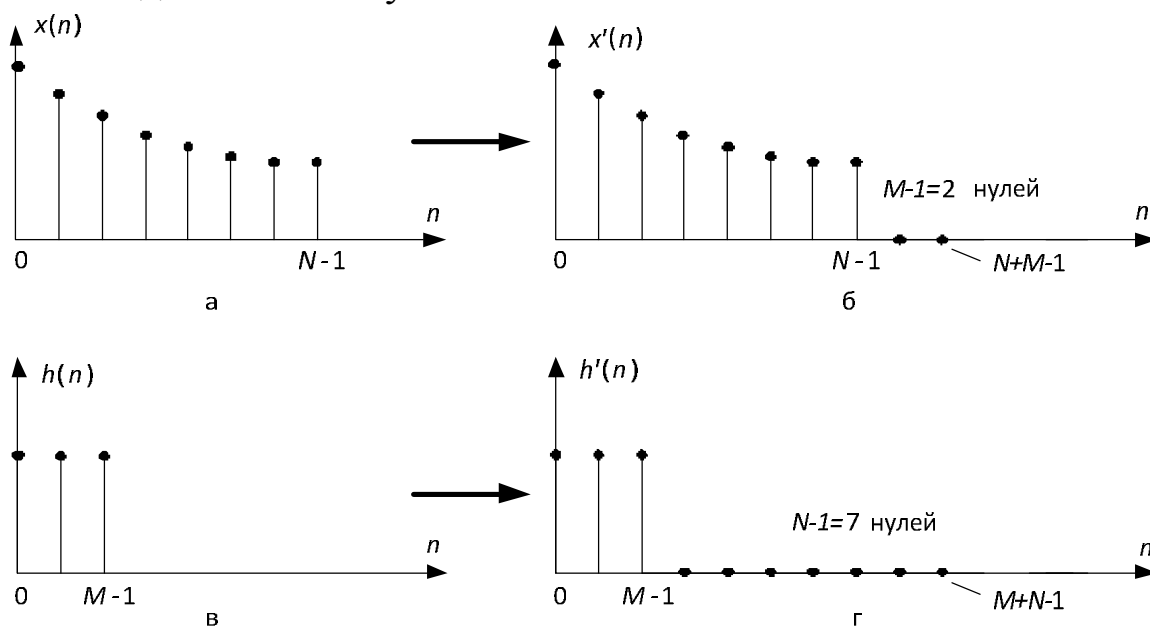


Рис. 2.8

### 2.5.9. Алгоритм фильтрации в частотной области

Для входного дискретного сигнала  $x(n)$  и импульсной характеристики (ИХ) цифрового фильтра  $h(n)$  выходной сигнал фильтра  $y(n)$  есть линейная свертка  $x(n)$  и  $h(n)$ . Это доказывается ниже (п. 3.4). Если дополнить  $x(n)$  и  $h(n)$  нулями согласно п. 2.5.8, циклическая свертка будет совпадать с линейной на определенном интервале (см. п. 2.5.8). Вычисление линейной дискретной свертки с помощью дискретного спектрального преобразования, в данном случае ДПФ, называется **алгоритмом фильтрации в частотной области** и записывается в следующей форме:

$$y(n) = x(n) * h(n) = x'(n) \otimes h'(n) = F^{-1} \{ F \{ x'(n) \} F \{ h'(n) \} \}, \quad (2.20)$$

где  $F\{\}$  и  $F^{-1}\{\}$  – символические обозначения прямого и обратного ДПФ;

$x'(n)$  и  $h'(n)$  – последовательности  $x(n)$  и  $h(n)$ , дополненные соответственно  $M - 1$  и  $N - 1$  нулями (см. п. 2.5.8).

$F\{x'(n)\} = X'(k)$ ,  $F\{h'(n)\} = H'(k)$ , их произведение есть спектр выходного сигнала, т.е.  $X'(k)H'(k) = Y'(k) = F\{y'(n)\}$ . Чтобы вычислить  $y'(n)$ , берется обратное ДПФ  $F^{-1}\{Y'(k)\}$ . Заметим, что иногда алгоритмом фильтрации в частотной области также называют формулу

$$x(n) \overset{N}{\otimes} h(n) = F^{-1}\{F\{x(n)\}F\{h(n)\}\}. \quad (2.21)$$

Эта формула будет давать верный результат только в случае, если ее операнды дополнены нулями согласно п. 2.5.8, а размерность ДПФ составляет не менее  $N + M - 1$ .

Однако иногда побочный эффект циклической свертки используется для уменьшения числа операций, например, при секционировании свертки (п. 3.9).

### 2.5.10. ДПФ симметричных и антисимметричных функций

Если  $x(n)$  – симметричная на интервале  $0 \leq n \leq N - 1$  последовательность, т.е.  $x(n) = x(N - n - 1)$ , то  $X(k)$  будет вещественной функцией. Если  $x(n)$  антисимметрична (не путать с асимметрией), т.е.  $x(n) = -x(N - n - 1)$ , то функция  $X(k)$  будет чисто мнимой. Аналогично, в случае симметрии  $X(k)$ , т.е. при  $X(k) = X(N - n - 1)$ ,  $x(n)$  будет вещественной последовательностью, в случае антисимметрии ( $X(k) = -X(N - n - 1)$ ) – чисто мнимой.

Поясним это. ДПФ циклично, т.е. математический аппарат ДПФ рассматривает  $x(n)$ ,  $X(k)$  и  $e^{-j2\pi nk/N}$  как периодические функции с периодом  $N$ . Поэтому в случае симметрии  $X(k)$  она будет фактически четной из-за цикличности ДПФ, благодаря чему в сумме ДПФ или ОДПФ появляются пары комплексно-сопряженных экспонент, дающих вещественные косинусы в другой области. Антисимметричные функции будут нечетными, что дает пары разностей комплексно-сопряженных экспонент, из которых получаются мнимые синусы по формуле Эйлера.

Заметим, что аналогично интегралу Фурье четность (нечетность) функции в одной области соответствует вещественной (мнимой)

функции в другой. В п. 3.12 проводится анализ влияния симметрии и антисимметрии импульсных характеристик фильтров на их передаточную функцию, точнее, на линейность фазочастотной характеристики.

### 2.5.11. Вычислительные затраты ДПФ

Из формул (2.5), (2.6) следует, что для вычисления ДПФ или ОДПФ размерностью (длиной)  $N$  требуется в общем случае  $N^2$  комплексных умножений и  $N(N - 1) \approx N^2$  комплексных сложений.

Это достаточно большой объем вычислений (трудоемкость) даже для современных компьютеров и процессоров цифровой обработки сигналов. Поэтому в состав их программного обеспечения входят программы вычисления ДПФ и ОДПФ с малой трудоемкостью. Соответствующие алгоритмы называются алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ), один из которых рассмотрен в п. 2.6.

### 2.5.12. Интеграл, ряды и дискретное преобразование Фурье: основные отличия

У студентов нередко возникает путаница между этими понятиями, поэтому остановимся на их отличиях.

**Интеграл Фурье** (преобразование Фурье) применяется для непериодических аналоговых (континуальных) сигналов. С помощью него можно вычислить комплексный спектр такого сигнала.

В случае периодических сигналов интеграл Фурье переходит в **ряд Фурье**, поскольку периодичность в одной (временной (аргумент  $t$ ) или частотной (аргумент  $\omega$ )) области соответствует дискретности в другой. Таким образом, вместо непрерывного спектра будем иметь набор дискретных частот (гармоник)  $\omega_i$  в общем случае с разными амплитудами: постоянная составляющая ( $\omega_0 = 0$ ); 1-я гармоника (ее частота  $\omega_1$  равна частоте сигнала); 2-я (частота равна  $2\omega_1$ ); 3-я и т.д. Т.е.  $\omega_n = n\omega_1$ .

**Дискретное преобразование Фурье** (ДПФ) оперирует с дискретными сигналом и спектром, поэтому, как говорилось выше, и сигнал, и спектр будут периодическими. Даже если на отрезке дискретного времени  $0 \leq n \leq N - 1$  мы поместим непериодический сигнал, математиче-

ский аппарат ДПФ «помимо нашей воли» делает сигнал периодическим.

## 2.6. Алгоритм Кули-Тьюки быстрого преобразования Фурье

Быстрое преобразования Фурье (БПФ) – это алгоритм расчета прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ и ОДПФ) с гораздо меньшим объемом вычислений (трудоемкостью, вычислительной сложностью), чем при непосредственных расчетах по формулам ДПФ (2.5) и ОДПФ (2.6).

Для алгоритма БПФ Кули-Тьюки, названного так по фамилиям авторов, требуется, чтобы  $N$  было вида  $2^p$ , где  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Если  $N \neq 2^p$ , последовательность  $x(n)$  дополняется нулями до  $N = 2^p$ . Для других алгоритмов БПФ требования к выбору  $N$  будут другими.

Рассмотрим основную идею сокращения трудоемкости для алгоритма БПФ Кули-Тьюки с прореживанием по времени и его сигнальный граф. Это делается для того, чтобы студенты имели представление о том, как строятся быстродействующие алгоритмы.

Идея алгоритма БПФ состоит в сокращении числа операций вдвое путем прореживания  $x(n)$  (для краткости  $x_n$ ) и получения двух последовательностей. В результате  $N$ -точечное ДПФ (2.7) представляется в виде суммы двух  $N/2$ -точечных ДПФ:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \underbrace{\sum_{0 \leq n \leq N-1} x_n V_N^{nk}}_{n\text{-четное}} + \underbrace{\sum_{0 \leq n \leq N-1} x_n V_N^{nk}}_{n\text{-нечётное}} = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_{2r} V_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_{2r+1} V_N^{(2r+1)k} = \\
 &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_{2r} V_N^{2rk} + V_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_{2r+1} V_N^{2rk} = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_{2r} V_{N/2}^{rk} + V_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_{2r+1} V_{N/2}^{rk}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

При выводе этой формулы учтено, что

$$V_N^2 = \left( e^{-j2\pi/N} \right)^2 = e^{-j4\pi/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = V_{N/2}.$$

Поскольку трудоемкость ДПФ составляет  $N^2$  комплексных умножений и примерно столько же комплексных сложений (п. 2.5.11), преобразование (2.22) уменьшает трудоемкость почти вдвое: трудоемкость двух  $N/2$ -точечных ДПФ составляет  $2(N/2)^2 = N^2/2$ .

Преобразование (2.22) повторяют до тех пор, пока размерность двух  $N/2$ -точечных ДПФ не составит 2. Двухточечное ДПФ называется

операцией “бабочка” и входит в систему команд сигнальных процессоров (процессоров цифровой обработки сигналов), а также современных универсальных процессоров.

В результате получается алгоритм, который, как и другие алгоритмы БПФ, не выражается в замкнутом виде, т.е. в виде компактных формул, как ДПФ (2.5) и ОДПФ (2.6) и описывается сигнальным графом, определяющим порядок вычислений.

Выкладки, необходимые для получения сигнального графа, громоздки и здесь не приводятся. Их можно найти практически в любой книге по цифровой обработке сигналов (см., например, [4, 8]).

В качестве примера на рис. 2.9 приводится сигнальный граф 8-точечного ДПФ ( $N = 8$ ). Из графа видно, что имеется  $\log_2 N$  ступеней, в каждой из которых выполняется по  $N$  комплексных умножений и столько же комплексных сложений. Если обозначить общее число комплексных умножений через  $N_{ку}$ , число комплексных сложений – через  $N_{кс}$ , то  $N_{ку} = N_{кс} = N \log_2 N$ . Реализация комплексного умножения требует 4-х вещественных умножений и 2-х вещественных сложений. В сигнальных процессорах комплексное умножение и сложение обычно выполняется за 1 такт.

Выигрыш алгоритма БПФ Кули-Тьюки по сравнению с ДПФ (коэффициент снижения вычислительных затрат, т.е. снижения числа операций) равен отношению трудоемкостей ДПФ и БПФ:

$$R_N \approx \frac{N^2}{N \log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}. \quad (2.23)$$

Имеется модификация алгоритма БПФ для вещественных сигналов, требующая вдвое меньшего числа комплексных умножений.

Существуют более сложные в реализации, но менее трудоемкие алгоритмы вычисления ДПФ.

## 2.7. Алгоритмы быстрой свертки

Прямое вычисление дискретной свертки по формуле (2.4) требует  $N^2$  умножений и  $N(N-1) \approx N^2$  сложений. Алгоритм фильтрации в частотной области (2.20) на основе быстрых алгоритмов дискретных спектральных преобразований, например, БПФ, называется **быстрой сверткой**, поскольку в общем случае требует меньших вычислительных затрат. Выигрыш алгоритма быстрой свертки равен отношению

трудоемостей прямой и быстрой сверток. Поскольку число умножений примерно равно числу сложений в обоих алгоритмах, для простоты будем учитывать только умножения.

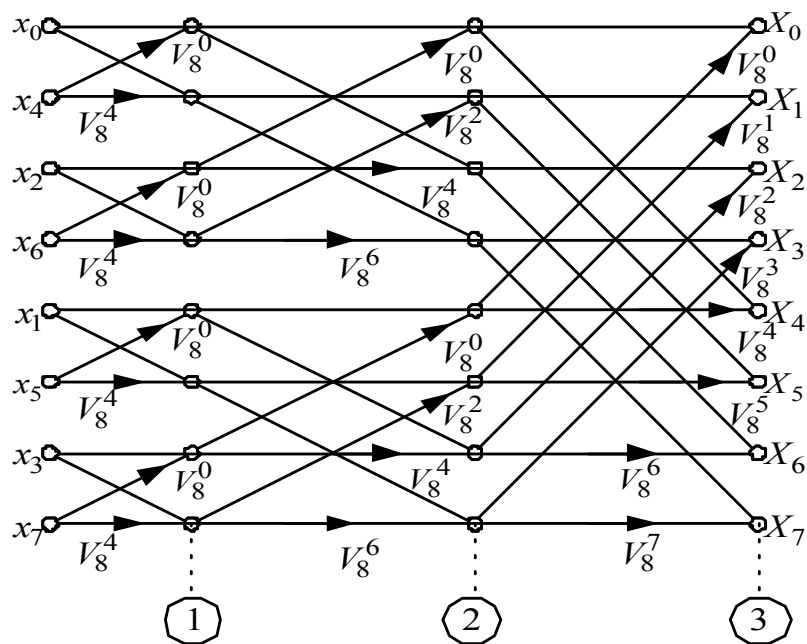


Рис. 2.9

Если используется алгоритм быстрой циклической свертки (2.21) требуется 3 вычисления БПФ, по  $N \log_2 N$  комплексных умножений на каждое. Поскольку комплексное умножение требует 4 вещественных умножения, общая трудоемкость составит  $12N \log_2 N$  вещественных умножений. Выигрыш быстрой свертки

$$R_{\otimes N} \approx \frac{N^2}{12N \log_2 N} = \frac{N}{12 \log_2 N}. \quad (2.24)$$

Оценим выигрыш для реализации быстрой **линейной** свертки (2.20) на основе алгоритма БПФ Кули-Тьюки для двух последовательностей длины  $N$ . Поскольку для линейной свертки длины последовательностей должны быть увеличены примерно вдвое с добавлением нулевых отсчетов, вычислительные затраты БПФ увеличатся примерно вдвое, в результате чего выигрыш будет примерно вдвое меньше, чем для формулы (2.24):

$$R_{*N} \approx \frac{N}{24 \log_2 N} \cdot \quad (2.25)$$

Формулы (2.24) и (2.25) справедливы для универсального процессора и комплексной последовательности  $x_n$ . Для сигнального процессора в знаменателе формулы (2.24) вместо числа 12 будет число 3, а знаменателе формулы (2.25) – число 6, и выигрыш будет в 4 раза больше. Если ДПФ одной из последовательностей известно заранее, необходимо 2 раза выполнить БПФ, а не 3; тогда выигрыш будет еще в 4/3 раза больше. Если применяется модификация БПФ для вещественных  $x_n$ , отличающаяся вдвое меньшей трудоемкостью, значение выигрыша в (2.24) или в (2.25) будет еще вдвое больше.

Если проанализировать формулы (2.24) и (2.25) с учетом приведенных в данном подразделе замечаний, получим известный вывод: выигрыш алгоритма быстрой свертки на базе алгоритма БПФ Кули-Тьюки для универсального процессора начинает проявляться при  $N$  порядка  $2^6 = 64$ . При меньших  $N$  целесообразнее прямое вычисление дискретной свертки по формуле (2.4). Для сигнальных процессоров выигрыш начинает проявляться при  $N$  порядка  $2^4 = 16$ .

При использовании других алгоритмов БПФ, например, теоретико-числовых или теоретико-полиномиальных преобразований (ТЧП, ТПП) выигрыш быстрой свертки может быть в несколько раз (например, в 5 раз) большим [8]. При этом коэффициенты в знаменателях формул (2.24) и (2.25) будут меньше во столько же раз, и выигрыш алгоритма быстрой свертки начнет проявляться соответственно при меньших  $N$ . Существуют алгоритмы спектральных преобразований, специально предназначенные для реализации быстрой свертки, которые дают неверный дискретный спектр, но верный результат свертки.

В библиотеке программ для цифровой обработки сигналов (ЦОС) Intel SPL имеется около 1000 различных функций ЦОС, в том числе и свертки. Имеется семейство подпрограмм-функций свертки для вещественных, целых и комплексных последовательностей. В файле описании библиотеки `splman.pdf` приводится формула свертки, аналогичная (2.4), однако она вычисляется с помощью высокоэффективных алгоритмов быстрой свертки, использующих сигнальный процессор, который имеется в процессорах фирмы Intel, начиная с Pentium MMX (выпускается с 1997 г.), а также в современных процессорах других фирм для IBM-совместимых компьютеров. Использование сигнального процессора из языка высокого уровня сопряжено с рядом проблем.

## 2.8. Дискретная корреляционная функция и ее связь с формулой свертки

Дискретная взаимно-корреляционная функция (ВКФ) дискретных последовательностей (или, как иногда говорят, векторов)  $x_k$  и  $h_k$  выражается формулой

$$K_{xh}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n+k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n+k} . \quad (2.26)$$

Как и для операции свертки, результат вычисления корреляционной функции не меняется от перестановки операндов (в данном случае исходных последовательностей). Если  $x_k = h_k$ , ВКФ вырождается в автокорреляционную функцию. Дискретная ВКФ связана с дискретной сверткой (2.4) соотношением

$$K_{xh}(n) = x_{-n} * h_n = x_n * h_{-n} . \quad (2.27)$$

Поэтому для вычисления дискретной ВКФ этой формуле можно применять алгоритмы быстрой свертки (с учетом знака « $\rightarrow$ » в формуле (2.27)).

Формулу (2.27) легко доказать, подставив в первую сумму формулы (2.26) последовательность  $x_n$ , инвертированную по времени (с обратным порядком следования отсчетов), т.е.  $x_{-n}$ . Тогда

$K_{xh}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{-k} h_{n+k}$ . Сделав замену  $k \rightarrow -k$  и изменив порядок суммирования, получим первую сумму формулы (2.4) ( $x(k) = x_k$ ;  $h(k) = h_k$ ). Аналогично можно получить вторую сумму формулы (2.4), подставив  $h_{-n}$  во вторую сумму формулы (2.26).

Иногда при анализе случайных процессов, в частности, шумов, большой длительности (в пределе – бесконечной) возникает задача оценки корреляционных и взаимно-корреляционных функций по реализации (отрезку бесконечного процесса) определенной длительности (в случае дискретных последовательностей чаще вместо термина «длительность» употребляют термин «длина»). Если вычислить оценку ВКФ по формуле (2.26), то при смещении  $n$  относительно точки  $n = 0$  уровень ВКФ будет плавно спадать к краям из-за уменьшения

интервала перекрытия последовательностей  $x_k$  и  $h_k$  по оси дискретного времени. Этот эффект подобен амплитудной модуляции. Закон такой модуляции будет треугольным, если  $N = M$  и трапецеидальным, если  $N \neq M$ , где  $N$  и  $M$  – длины входных последовательностей ( $x_k$  и  $h_k$  соответственно) в формуле (2.26).

Скомпенсировать данный эффект можно, если пронормировать ВКФ к ширине интервала перекрытия, т.е. домножить ВКФ на

$$A(n) = \begin{cases} M/(M-n), & 0 < n < M, \\ M/(N+n), & -N < n < M-N, \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $N \geq M$ . Если  $N < M$ , достаточно поменять местами  $x_k$  и  $h_k$  и применить данную формулу.

## 2.9. Z-преобразование

### 2.9.1. Определение

Z-преобразование основано на том, что последовательность  $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  (входной дискретный сигнал) преобразуется в степенной ряд  $\{x_n z^{-n}\}$ . В отличие от ДПФ допускается бесконечная длина последовательности, причем математический аппарат z-преобразования в отличие от ДПФ и других дискретных (в обеих областях) преобразований не делает последовательность периодической.

Последовательность  $x_n$  должна удовлетворять неравенству  $x_n < MR^n$ , где  $M > 0$  и  $R > 0$ , что обычно всегда выполняется на практике. В этом случае z-преобразованием называется сумма

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots, \quad (2.28)$$

где  $z$  – комплексная переменная.

Комплексная переменная  $z$  – более общий случай, чем комплексная экспонента для ДПФ, поэтому z-преобразование применимо для более широкого класса функций, чем ДПФ.

Данная формула описывает так называемое одностороннее z-преобразование, поскольку значение нижнего предела в сумме равно нулю. Существует также двустороннее z-преобразование, отличаю-

щееся нижним пределом  $n = -\infty$ . Некоторые его свойства будут отличаться от свойств одностороннего  $z$ -преобразования. Однако в цифровой обработке сигналов двустороннее  $z$ -преобразование практически не применяется. Это связано с тем, что проектируются физически реализуемые цифровые фильтры, а для таких фильтров импульсная характеристика (ИХ) должна быть равна нулю при  $n < 0$ , для чего в формуле достаточно иметь нулевой нижний предел. Поэтому в дальнейшем под термином « $z$ -преобразование» мы будем понимать одностороннее  $z$ -преобразование, другие случаи будут оговорены особо.

По аналогии с преобразованием Фурье и Лапласа соответствие (не путать со знаком равенства) последовательности  $x_n$  (временная область) и ее изображения  $X(z)$  (частотная область) записывается следующим образом:  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ .

Напомним, что в литературе по цифровой обработке сигналов для упрощения формул полагают  $T_d = 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). В случае, если  $T_d$  явно не фигурируют в формуле, его можно легко учесть, сделав в ней замену  $n \rightarrow nT_d$ .

### 2.9.2. Физический смысл

Как видно из формулы (2.28),  $z^{-1}$  играет роль задержки на один такт (т.е.  $T_d$ ). Так, отсчет  $x_1$  отстает на 1 такт от  $x_0$ .

### 2.9.3. Радиус сходимости

Если ряд (2.28) сходится при  $|z| > R_0$ ,  $R_0$  называется радиусом сходимости последовательности  $x_n$ .

Пример: найти  $z$ -преобразование  $h_n = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$  (ИХ неустойчивого фильтра; п. 3.4). Очевидно, что при  $|z| > 2$  ряд (2.28) будет сходиться, поскольку члены ряда будут убывать по экспоненте. Если подставить  $h_n$  в формулу (2.28), получится сумма членов бесконечной геометрической прогрессии. Напомним, что для такой прогрессии  $a_0, a_0q, a_0q^2, \dots, a_0q^N$  ее сумма

$$S = a_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} . \quad (2.29)$$

В данном случае  $q = 2z^{-1}$ . Поскольку для сходимости ряда необходимо выбрать  $|z| > 2$ , то в этом случае  $q^{N+1} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , и

$$X(z) = S = a_0 \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 2} ,$$

т. е.  $z$ -преобразование пригодно для описания даже неустойчивых систем (фильтров).

## 2.9.4. Основные свойства $z$ -преобразования

**Линейность.** Если  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ ,  $g_n \Leftrightarrow G(z)$ ,  $a$  и  $b$  – постоянные коэффициенты, то  $z\{ax_n + bg_n\} \Leftrightarrow aX(z) + bG(z)$ .

**Сдвиг (задержка).** Если  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ , то  $\{x_{n-n_0}\} \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$ .

**Сдвиг (опережение).** Если  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ , то

$$z\{x_{n+n_0}\} \Leftrightarrow z^{n_0} [X(z) - x_0 - x_1 z^{-1} - \dots - x_{k_0} z^{n_0}].$$

Отличие свойств задержки и опережения связано с тем, что используется одностороннее  $z$ -преобразование.

**$z$ -преобразование свертки.** Если  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ ,  $h_n \Leftrightarrow H(z)$ ,  $x_n = h_n = 0$  при  $n < 0$ , то

$$x_n * h_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} \Leftrightarrow X(z) \cdot H(z).$$

**Масштабирование.** Если  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ , то  $nx_n \Leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$ .

Если надо учесть шаг дискретизации, то

$$nT_d x(nT_d) \Leftrightarrow -zT_d \frac{dX(z)}{dz}.$$

**Масштабирование изображения.** Если  $x_n \Leftrightarrow X(z)$ ,  $\gamma = \alpha + j\beta$ , то

$$\gamma^{-n} x_n \Leftrightarrow X(\gamma z).$$

**Связь  $z$ -преобразования со 2-й моделью спектра дискретного сигнала.** Если сравнить формулу прямого  $z$ -преобразования (2.28) с формулой (1.6) 2-й модели спектра  $\dot{S}_2(\omega)$  дискретного сигнала  $s_k$  то для  $s_k = 0$  при  $k < 0$

$$\dot{S}_2(\omega) = T_d S(z) \Big|_{z = e^{j\omega T_d}}.$$

## 2.9.5. Обратное z-преобразование

Обратное z-преобразование может быть вычислено по формуле

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-1} X(z) dz, \quad (2.30)$$

причем интеграл берется против часовой стрелки по замкнутому контуру, охватывающему все особые точки, т.е. полюса (корни знаменателя функции)  $X(z)$ .

## 2.9.6. Некоторые способы вычисления обратного z-преобразования

**1. Через вычеты.** Интеграл (2.30) может быть вычислен как сумма вычетов:

$$x_n = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_i} X_0(z), \quad (2.31)$$

где  $\operatorname{Res}_{z=z_i} X_0(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_i)^m X_0(z)];$  (2.32)

$$X_0(z) = X(z) z^{n-1}; \quad (2.33)$$

$z_i$  – полюс функции  $X(z)$ ;

$m_i$  – кратность  $i$ -го полюса;

$k$  – число полюсов.

После вычисления последовательности  $x_n$  ее домножают на  $\sigma_{n-n_0}$ , где  $n_0$  – наибольшая степень переменной  $z$  в числителе  $X(z)$ , если  $X(z)$

выражена в виде  $\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \left( 1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right)$ .

**2. Через разложение в ряд.** Пример.  $X(z) = \frac{k}{z-\gamma}$ . Разложим  $X(z)$  в

ряд по степеням  $z$ :

$$X(z) = \frac{k}{z} (1 + \gamma z^{-1} + \gamma^2 z^{-2} + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma(n-1) k \gamma^{n-1}] z^{-n}.$$

Если сравнить полученное выражение с формулой (2.28) (прямое z-преобразование), получим  $x_n = \sigma(n-1) k \gamma^{n-1}$ .

**4. С помощью таблицы z-преобразований.** С помощью этой таблицы (табл. 2.1) можно вычислять как обратные, так и прямые z-преобразования. Здесь фигурные скобки означают выбор «или»: верхняя часть нижней ячейки соответствует синусу, нижняя – косинусу. Некоторые z-преобразования можно «подогнать» под таблицу, используя свойства z-преобразований.

Таблица 2.1

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$\sigma(n)$	$z/(z-1)$
$n\sigma(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$n^2\sigma(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$b^n\sigma(n)$	$z/(z-b)$
$nb^{n-1}\sigma(n)$	$\frac{z}{(z-b)^2}$
$k\sigma(n-1)$	$k/(z-1)$
$k\sigma(n)\gamma^{n-1}$	$k/(z-\gamma)$
$\sigma(n)e^{\alpha nT_d}$	$z/(z-e^{-\alpha T_d})$
$\sigma(n)\frac{a^n - b^n}{a - b}, a \neq b$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$
$\sigma(n)e^{cnT_d} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (\omega nT_d)$	$\frac{\begin{cases} ze^{-\alpha T_d} \sin \omega T_d \\ z(z - e^{-\alpha T_d} \cos \omega T_d) \end{cases}}{z^2 - 2ze^{-\alpha T_d} \cos \omega T_d + e^{-2\alpha T_d}}$

**4. Через разложение на элементарные дроби.** Рассмотрим случай, когда полюсы функции  $X(z)$  простые, т.е. разные. Если разложить  $X(z)$  на элементарные дроби (вручную или с использованием систем Maple или Mathcad), получим  $X(z) = \sum_{i=1}^k X_i(z)$ ,  $X_i(z) = q_i/(z - z_{pi})$  где  $z_{pi}$  –  $i$ -й полюс. После этого вычислим обратное z-преобразование

$X_i(z) \Leftrightarrow x_i(n)$  от каждой дроби по табл. 2.1, а результаты просуммируем. В силу линейности  $z$ -преобразования  $x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n)$ .

Если функция  $X(z)$  имеет кратные полюса, ее разбивают на произведение сомножителей с простыми полюсами, поскольку произведение в одной области соответствует свертке в другой. После получения соответствующих временных функций вычисляют их свертку.

**4. С помощью математических программ.** Несложные обратные  $z$ -преобразования удобно вычислять с помощью систем (пакетов программ) Maple и Mathcad (используется подсистема символьной математики).

### 3. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

#### 3.1. Дискретные и цифровые системы (фильтры): определение, основные свойства и сравнение с аналоговыми

Электронным фильтром называется устройство, с помощью которого осуществляется заданное преобразование амплитудного и/или фазового спектра входного сигнала.

Чаще всего задача разработки фильтра ставится следующим образом: фильтр должен пропускать со входа на выход спектральные составляющие входного сигнала, лежащие в определенной полосе частот, называемой полосой пропускания, и не пропускать составляющие, лежащие в полосе заграждения.

Некоторые фильтры осуществляют заданный поворот фазы спектральных составляющих сигнала в зависимости от частоты при единичной амплитудно-частотной характеристике (АЧХ). Такие фильтры называются фазовращателями или фазовыми фильтрами.

Входные и выходные сигналы электронного фильтра обычно представляют собой напряжения. Аналоговый фильтр описывается дифференциальными уравнениями. Для линейного стационарного фильтра эти уравнения линейны, а их коэффициенты постоянны.

Иногда требуется, чтобы фильтр имел заданную импульсную характеристику (ИХ).

**Дискретным** называется фильтр, входной и выходной сигналы которого определены в дискретные моменты времени (см. разд. 1).

Дискретными являются фильтры, реализованные, например, на микросхемах с переносом заряда (с зарядовой связью) или на базе включенных каскадно аналоговых запоминающих устройств (устройств выборки-хранения). Дискретный фильтр для случая равномерной дискретизации (шаг дискретизации постоянен) описывается разностными уравнениями. Для линейного инвариантного к сдвигу (стационарного) фильтра эти уравнения линейны, а их коэффициенты постоянны.

Если входной и выходной сигналы дискретного фильтра квантованы по уровню и представлены в виде цифровых кодов, а фильтрация осуществляется путем операций с числами, такой фильтр называется **цифровым**.

Если цифровой фильтр построен на так называемой **жесткой логике** – счетчиках, регистрах, сумматорах, говорят, что фильтр реализован **аппаратно** (аппаратурно).

Если цифровой фильтр является программой на компьютере, (универсальном процессоре) или сигнальном процессоре (процессоре ЦОС), такая реализация называется **программной**.

Цифровой фильтр может быть реализован частично на жесткой логике, частично – на базе одного или нескольких микропроцессоров с программной реализацией отдельных частей фильтра. В этом случае имеет место смешанная, т.е. **программно-аппаратная** реализация.

Фильтры на жесткой логике используются обычно в случае, если существующие (или доступные для применения) микропроцессоры не могут обеспечить высокую тактовую частоту.

В 60-х годах прошлого столетия аппаратно реализованные цифровые фильтры представляли собой довольно громоздкие устройства или программы на еще более громоздких электронных вычислительных машинах (компьютерах). Такая машина занимала площадь около 100 м<sup>2</sup> и имела производительность порядка 10 тысяч операций в секунду. В связи с этим цифровой фильтр называли **системой**. В настоящее время как цифровой фильтр, так и компьютер, считаются не системами, а **элементами**. Однако с тех времен сохранился термин «системная функция», который употребляется наряду с термином «передаточная функция» и означает отношение  $z$ -преобразований выходного и входного сигналов цифрового фильтра.

**Динамический диапазон** (отношение максимального значения входного сигнала к минимальному) цифровых фильтров теоретически неограничен и реально гораздо выше, чем у дискретных и аналоговых.

Это связано с тем, что разрядность цифровых фильтров может быть сколь угодно большой.

Разрядность аналоговых сигналов можно считать бесконечной. Однако масса погрешностей дискретных и аналоговых фильтров (смещение нуля усилителей, дрейф его во времени и при изменении температуры, утечка зарядов и т.д.) ограничивает их точность.

Цифровые фильтры, реализованные программно, *проще перестраивать*, чем аналоговые, так как перестройка обычно сводится к замене программы либо использованию коэффициентов фильтров, явно зависящих от граничных частот.

Цифровые нерекурсивные фильтры в отличие от аналоговых могут иметь *произвольную ИХ*, в том числе симметричную, что соответствует линейной фазочастотной характеристике (ФЧХ), в то время как ФЧХ аналоговых фильтров принципиально нелинейна (степень нелинейности зависит от типа аппроксимации АЧХ фильтра – Баттерворта, Чебышева, Бесселя и т.п.)

Алгоритм цифровой фильтрации абсолютно стабилен, поскольку не зависит ни от температуры, ни от влажности и других факторов, ограничивающих реальный динамический диапазон аналоговых и дискретных фильтров. Однако не следует забывать, что в процессе дискретизации и восстановления сигналов дестабилизирующие факторы оказывают влияние на получаемые цифровые и восстанавливаемые аналоговые сигналы. Например, дестабилизирующим фактором является зависимость (хотя и очень слабая для кварцевых резонаторов и генераторов на их основе) тактовой частоты от температуры, влажности и давления (влажность и давление влияют на диэлектрическую проницаемость воздуха, а значит, на паразитную емкость проводников, от которой слабо зависит частота генератора). Аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи (АЦП и ЦАП) содержат аналоговые элементы, имеющие смещение нуля, апертурную погрешность (зависимость момента дискретизации (выборки) от мгновенного значения аналогового сигнала) и т.п.

Таким образом, цифровой фильтр абсолютно стабилен, если не считать шумов квантования (п. 3.17) и отсутствует аналого-цифровое и/или цифроаналоговое преобразование (например, цифровой сигнал получается по формуле).

Если на вход цифрового фильтра поступают сигналы с АЦП и/или выдаются на ЦАП, перечисленные выше дестабилизирующие факторы приводят к смещению АЧХ, изменению ФЧХ и импульсной характе-

ристики (ИХ). Однако эти нестабильности являются на несколько порядков меньшими, чем у аналоговых фильтров.

Преимуществом аналоговых фильтров является простота реализации, если фильтры несложные (например, интегрирующая цепочка или фильтр 1-4 порядка).

## 3.2. Основные способы описания цифровых фильтров

### 3.2.1. Линейное разностное уравнение

Аналоговые фильтры описываются линейными дифференциальными уравнениями, цифровые – линейными разностными уравнениями (ЛРУ). Общий вид ЛРУ:

$$y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k} = b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots + b_N y_{n-N} + a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_{N-1} x_{n-N+1} + \dots + a_M x_{n-M}. \quad (3.1)$$

### 3.2.2. Структурная схема

Цифровой фильтр (ЦФ) может быть описан с помощью структурной схемы (структура, сигнальный граф), которая изображена на рис. 3.1. Символами « $z^{-1}$ » обозначены элементы задержки сигналов на 1 такт (период частоты дискретизации). Соответственно задержка на  $m$  тактов обозначается как « $z^{-m}$ » (вспомним теорему запаздывания (свойство задержки) (п. 2.9): задержка сигнала на  $m$  тактов эквивалентна умножению  $z$ -преобразования исходного сигнала на  $z^{-m}$ ). Внутренние стрелки обозначают умножение на коэффициенты, стоящие рядом с этими стрелками. Коэффициенты те же, что и в линейном разностном уравнении.

В литературе по цифровой обработке сигналов встречается 4 основных разновидности обозначения операций умножения в структурах ЦФ (рис. 3.2), где  $a$  – коэффициент, на который производится умножение.

**Порядком** цифрового фильтра общего вида называют наибольшее из чисел  $M$  и  $N$ .

В аналоговом фильтре фильтрующие свойства (зависимость коэффициента передачи от частоты) обеспечиваются сочетанием активных элементов (сопротивлений) с реактивными (емкости, индуктивности),

комплексное сопротивление которых зависит от частоты. В ЦФ роль реактивных элементов играют элементы задержки в сочетании с суммированием их выходных сигналов с соответствующими коэффициентами (взвешенное суммирование).

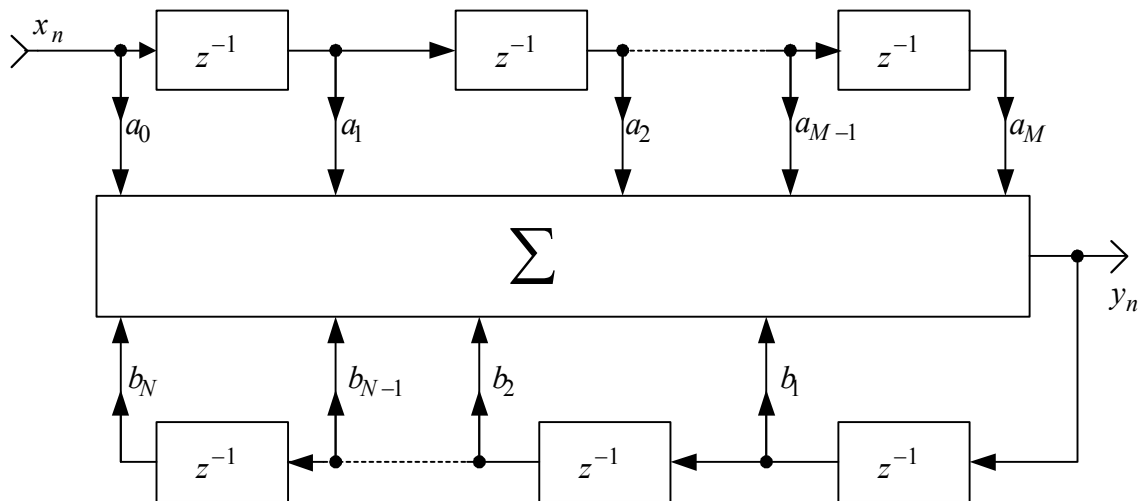


Рис. 3.1

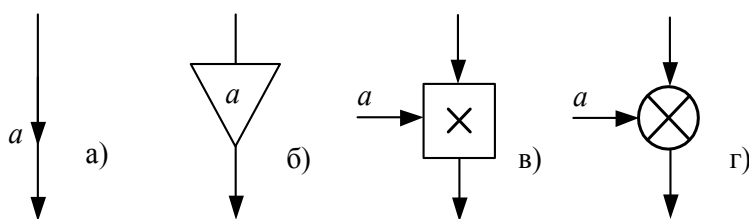


Рис. 3.2

ЦФ однозначно определяются коэффициентами  $a_m$  и  $b_n$ . Заметим, что из-за конечности разрядной сетки процессора фильтрующие свойства будут изменяться вследствие квантования коэффициентов фильтра и результатов арифметических операций. Некоторые из этих эффектов (погрешностей) рассмотрены в п. 3.17.

### 3.2.3. Импульсная характеристика цифрового фильтра

Импульсная характеристика (ИХ) цифрового фильтра есть отклик единичный импульс  $\delta_n$ :

$$h_n = y_n \Big|_{x_n = \delta_n} \quad (3.2)$$

Как уже говорилось в п. 2.1, единичный импульс играет ту же роль для цифровых систем, что и  $\delta$ -функция Дирака для аналоговых (см. п. 1.2). Дискретное преобразование Фурье и  $z$ -преобразование от  $\delta_n$  равны 1. Это означает, что  $\delta_n$  содержит колебания всех частот с единичной амплитудой и нулевой фазой. Поэтому в ИХ содержится информация о том, на какой коэффициент умножается каждая спектральная компонента входного сигнала (это есть амплитудно-частотная характеристика – АЧХ) и какой фазовый сдвиг она приобретает (это фазочастотная характеристика ФЧХ). Если вычислить  $z$ -преобразование от ИХ, сделать замену  $z \rightarrow e^{j\omega T_d}$ , получим комплексный коэффициент передачи (передаточную функцию) фильтра  $\dot{H}(\omega)$ , где  $T_d$  – шаг дискретизации. Модуль  $H(\omega)$  функции  $\dot{H}(\omega)$  (АЧХ) показывает, насколько спектральные компоненты ослабляются или усиливаются, фаза (ФЧХ) – насколько сдвигаются по фазе.

### 3.2.4. Системная (передаточная) функция

Системная (передаточная) функция  $H(z)$  фильтра определяется как отношение  $z$ -преобразований выходной  $\{y_n\}$  и входной  $\{x_n\}$  последовательностей (дискретных сигналов):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Найдем  $H(z)$  из линейных разностных уравнений (3.1), вычислив  $z$ -преобразования от правой и левой его частей. С учетом свойства линейности  $z$ -преобразования

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N b_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^M a_k X(z) z^{-k} = Y(z) \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} + X(z) \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}.$$

Если перенести слагаемое с  $Y(z)$  в левую часть уравнения и вынести за скобки, будем иметь  $Y(z) \left( 1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right) = X(z) \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$ . Решив это уравнение относительно  $Y(z) / X(z)$ , (что есть  $H(z)$  по определению) получим:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \left( 1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right). \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай  $x_n = \delta_n$  ( $\delta_n$  – единичный импульс). Подставив  $\delta_n$  в формулу прямого  $z$ -преобразования (2.28), получим  $X(z) = 1$ . Вы-

ходной сигнал (отклик)  $y_n = h_n$  – импульсная характеристика фильтра по определению (см. п. 3.2.3). Его z-преобразование согласно (2.28)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} . \quad (3.4)$$

### 3.2.5. Связь разностных уравнений, структурной схемы, системной функции и импульсной характеристики фильтра

Связь разностных уравнений (3.1), структурной схемы (рис. 3.1) и системной функции фильтра (3.3) состоит в том, что в них фигурируют одни и те же коэффициенты фильтра  $a_m$  и  $b_n$ . Цифровой фильтр однозначно определяется этими коэффициентами, поэтому может быть задан одной из этих трех форм и легко построен: в виде разностного уравнения (или системы разностных уравнений) – при программной реализации; в виде структуры – при аппаратной.

Для цифрового фильтра общего вида (рис. 3.1) связь коэффициентов  $a_m$  и  $b_n$  и импульсной характеристики (ИХ) сложна. Для нерекурсивных фильтров (у них отсутствуют обратные связи)  $a_m = h_m$  (п. 3.6).

### 3.3. Линейность и инвариантность к сдвигу

Линейность – фундаментальное свойство самого большого класса систем – линейных. Ранее в пп. 2.5.5, 2.9.4 было рассмотрено свойство линейности дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и z-преобразования. Другие спектральные преобразования (Фурье, Лапласа и т. д.) также обладают этим свойством.

Рассмотрим **общее определение свойства линейности**. Пусть  $L$  – оператор, с помощью которого из последовательности или величины  $x$  получается последовательность или величина  $y$ . Если  $L$  – **линейный оператор**, а  $L\{x_1\} = y_1$ ,  $L\{x_2\} = y_2$ ,  $a$ ,  $b$  – константы, то  $L\{ax_1 + bx_2\} = ay_1 + by_2$ .

Представим процесс цифровой фильтрации в виде некоторого оператора  $Q$ , в результате действия которого из последовательности  $x_n$  получается последовательность  $y_n$ . Тогда фильтрацию можно описать в операторной форме  $y_n = Q[x_n]$ ;  $h_n = Q[\delta_n]$ , где  $h_n$  – импульсная ха-

рактеристика (ИХ) фильтра,  $\delta_n$  – единичный импульс. Свойство **линейности** фильтра в этом случае записывается в виде  $Q\left[\sum_i a_i x_i(n)\right] = \sum_i a_i Q[x_i(n)]$ , т.е. отклик (выходной сигнал) на сумму воздействий (входных сигналов) равен сумме откликов.

**Инвариантность к сдвигу** означает, что фильтр имеет постоянные параметры во времени (имеется в виду дискретное время  $n$ ), т.е. постоянные коэффициенты  $a_i$  и  $b_j$ . Поэтому задержка воздействия приводит только к задержке отклика при полном сохранении его формы, т.е.  $Q[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$ . Подобное свойство аналоговых фильтров называется **стационарностью**.

Далее по тексту, если не оговорено особо, рассматриваются линейные инвариантные к сдвигу фильтры.

### 3.4. Описание процесса фильтрации формулой свертки

Рассчитаем выходной сигнал  $y(n) = y_n$  линейного цифрового инвариантного к сдвигу фильтра по известным входному сигналу  $x(n) = x_n$  и импульсной характеристике (ИХ)  $h(n) = h_n$ . Напомним, что ИХ фильтра есть отклик (выходной сигнал) на воздействие (входной сигнал) в виде единичного импульса (пп. 2.1, 3.2.3).

Очевидно, что  $k$ -й отсчет сигнала  $x_k$  можно рассматривать как смещенный на  $k$  отсчетов единичный импульс  $\delta_n$  с весом (коэффициентом), равным  $x_k$ , т.е.  $x_k \delta_{n-k}$ . Откликом на него будет ИХ, смещенная на  $k$  отсчетов и умноженная на  $x_k$ , т.е.  $x_k h_{n-k}$  (на основании свойств инвариантности к сдвигу и линейности). Если просуммировать отклики на все отсчеты входного сигнала, получим

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}, \quad (3.5)$$

**т.е. выходной сигнал линейного инвариантного к сдвигу фильтра есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики.**

Обозначим в формуле (3.5)  $k' = n - k$ , тогда  $k = n - k'$ . Подставив последнее равенство в (3.5) и заменив индекс  $k'$  снова на  $k$  (сумма не зависит от обозначения индекса), получим другую формулу свертки:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k}. \quad (3.6)$$

Из формул (3.5) и (3.6) следует, что *результат свертки не зависит от переменных мест операндов*. Свертку также обозначают в символическом виде:  $y_n = x_n * h_n = h_n * x_n$ , где  $*$  – символ свертки. Это значит, что математически все равно ( $y_n$  не изменится), пропускается ли входной сигнал  $x_n$  через фильтр с ИХ  $h_n$ , или, наоборот, пропускается ли входной сигнал  $h_n$  через фильтр с ИХ  $x_n$ . В частотной области это соответствует перемножению спектра ИХ (это  $H(z)$ ) на спектр входного сигнала (это  $X(z)$ ), а от переменных мест сомножителей результат не меняется. Физически же различия есть: входной сигнал и ИХ фильтра – не одно и то же.

Заметим, что формула свертки имеет бесконечные пределы по переменной суммирования, тогда как в формуле (2.28) одностороннего  $z$ -преобразования пределы 0 и  $\infty$ . Для физически реализуемых фильтров  $h_k = 0$  при  $k < 0$ ; в этом случае пределы суммирования в формуле (3.6) можно установить от 0 до  $\infty$ .

### 3.5. Устойчивость и физическая реализуемость

Для устойчивости аналогового фильтра полюсы (корни знаменателя) передаточной функции должны лежать в левой  $p$ -полуплоскости, для устойчивости цифрового – внутри круга единичного радиуса. Нули  $H(z)$  (корни числителя) могут быть где угодно. Таким образом, временной и частотный критерии устойчивости, а также временной критерий физической реализуемости цифрового фильтра будут иметь соответственно следующий вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad (3.7)$$

$$|z_{pi i}| < 1, \quad (3.8)$$

$$h(n) = 0 \text{ при } n < 0. \quad (3.9)$$

Здесь  $h(n)$  – ИХ фильтра,  $z_{pi i}$  – полюса системной функции  $H(z)$ ,  $i$  – номер полюса.

Критерий (3.7) означает, что после окончания воздействия в виде единичного импульса (ИХ есть отклик на него) система должна вернуться в исходное состояние. Для этого ИХ должна затухать по экспоненте или быстрее, что и обеспечивает сходимость ряда (3.7).

Для интегратора (см. п. 3.11) ИХ будет дискретной единичной ступенчатой функцией  $\sigma_n$  (п. 2.1), которая не возрастает и не убывает. Поэтому иногда говорят, что интегратор находится на грани устойчивости. Однако здесь фильтр (интегратор) не возвращается в исходное состояние, т.е. критерий (3.7) не выполняется.

Прямые связи могут скомпенсировать (прервать) бесконечную ИХ [17], как в структуре на рис. 3.8, б, и обеспечить устойчивость.

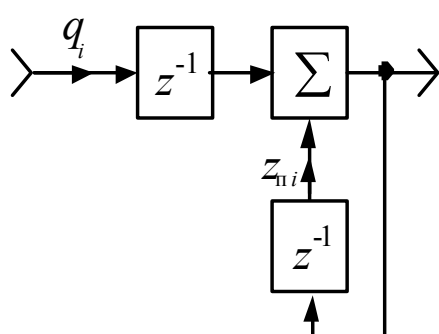


Рис. 3.3

Проанализируем устойчивость чисто рекурсивного фильтра ( $a_m = 0$  для  $m > 0$ ; рис. 3.5 простыми (разными) полюсами). Системная функция такого фильтра может быть представлена в виде  $H'(z) = 1 / \prod_{i=1}^N (z - z_{ni})$ , где  $z_{ni}$  – полюса. Эту формулу можно представить в виде суммы элементарных дробей вида

$H'_i(z) = q_i / (z - z_{ni})$ . Поделив числитель и знаменатель элементарной дроби на  $z$ , получим  $H'_i(z) = z^{-1} q_i / (1 - z_{ni} z^{-1})$ . Такой дроби соответствует структура, приведенная на рис. 3.3, а фильтр с системной функцией  $H'(z)$  – параллельному (рис. 3.11) соединению элементарных звеньев с системной функцией  $H'_i(z)$ . ИХ этих звеньев  $h_i(n)$  ( $i$  – номер звена) легко рассчитать вручную, подав на вход единичный импульс  $\delta_n$ . В итоге получим  $h_i(n) = \{0; q_i; q_i z_{ni}; q_i z_{ni}^2; q_i z_{ni}^3; \dots\} = \sigma_{n-1} q_i z_{ni}^{n-1}$ , где  $\sigma_n$  – единичная ступенчатая функция (п. 2.1). Очевидно, что ИХ каждого звена будет убывать по экспоненте, если  $|z_{ni}| < 1$ , а значит, будет устойчив и фильтр с системной функцией  $H'(z)$ , т.е. получим критерий (3.8).

Фильтр с кратными полюсами может быть представлен в виде каскадного соединения звеньев с простыми полюсами, для которых анализ устойчивости остается таким же.

Критерий физической реализуемости (3.9) можно объяснить достаточно просто. ИХ фильтра есть отклик на единичный импульс, который отличен от нуля в нулевой момент дискретного времени  $n = 0$ , а условие (3.9) требует, чтобы отклик появился не раньше, чем  $n = 0$ , т.е. не раньше воздействия.

**Частотный критерий физической реализуемости:** степень числителя системной функции  $H(z)$  не должна превышать степень знаменателя.

Покажем это. В формуле (3.3) степень знаменателя равна нулю (из-за единицы), и превышение этой степени в числителе означает появление члена  $cz^k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $c = \text{const}$ , что соответствует физически нереализуемому блоку опережения, выходной сигнал которого появляется раньше входного.

Если фильтр физически нереализуем, для физической реализуемости можно сдвинуть (задержать) его ИХ так, чтобы условие физической реализуемости выполнялось. Так, если начало (левая граница) ИХ  $n_0 < 0$ , все задержки в цепях прямых связей структуры (рис. 3.1) увеличивают на  $|n_0|$ , т.е. делают замену  $z^{-m} \rightarrow z^{-m-|n_0|}$  в блоках задержки и числителе системной функции  $H(z)$  (3.3).

Это эквивалентно домножению  $H(z)$  на  $H_3(z) = z^{-|n_0|}$  – системную функцию блока задержки на  $|n_0|$  тактов. Передаточная функция этого блока  $\dot{H}_3(\omega)$  получается из  $H_3(z)$  заменой  $z \rightarrow e^{j\omega T_d}$ , т.е.  $\dot{H}_3(\omega) = e^{j\omega n_0 T_d}$ .

амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)  $H_3(\omega) = |\dot{H}_3(\omega)| = 1$ , фазочастотная характеристика (ФЧХ)  $\varphi_3(\omega) = -\omega |n_0| T_d$ .

Следовательно, в результате задержки на  $|n_0|$  тактов АЧХ) фильтра не изменится, а к фазочастотной характеристике (ФЧХ) добавится слагаемое дополнительная линейная ФЧХ  $\varphi_3(\omega) = -\omega |n_0| T_d$  (при каскадном соединении фильтров (п. 3.10.2) АЧХ фильтров перемножаются, ФЧХ – складываются).

### 3.6. Классификация ЦФ: нерекурсивные, рекурсивные, КИХ- и БИХ-фильтры

Цифровые фильтры могут классифицироваться по различным признакам. Наиболее распространенными являются классификации по виду структурной схемы и длине ИХ.

**По структурной схеме** (структуре, сигнальному графу) цифровые фильтры делятся на **нерекурсивные** (трансверсальные) (рис. 3.4) и **рекурсивные** (фильтр, имеющий хотя бы одну обратную связь). Рекурсивные фильтры подразделяются на фильтры общего вида (рис. 3.1) и чисто рекурсивные, у которых все коэффициенты прямых связей  $a_m = 0$ , кроме  $a_0$  (рис. 3.5). Отсутствие  $m$ -й прямой или  $n$ -й об-

ратной связи эквивалентно равенству нулю коэффициента  $a_m$  или  $b_n$  соответственно.

Рассчитаем ИХ нерекурсивного фильтра по известным коэффициентам  $a_m$  (рис. 3.4). Как известно, ИХ фильтра есть отклик на единичный импульс  $\delta_n$  (формула (2.1), рис. 2.1, а). Найдем ИХ фильтра  $h_n$ , подав на вход  $\delta_n$ . В структуре (рис. 3.4)  $\delta_n$ , начиная с момента дискретного времени  $n = 0$ , будет последовательно пробегать вдоль элементов задержки и, умножаясь на коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_M$ , поступать на сумматор. В результате в момент времени  $n = 0$  выходной сигнал  $y_0 = h_0 = a_0$ , при  $n = 1$  будет  $y_1 = h_1 = a_1$  и т.д. В произвольный ( $n$ -й) момент времени  $y_n = h_n = a_n$ . Таким образом,  $h_n = a_n$ , т.е. всегда конечна по времени при конечном  $M$ .

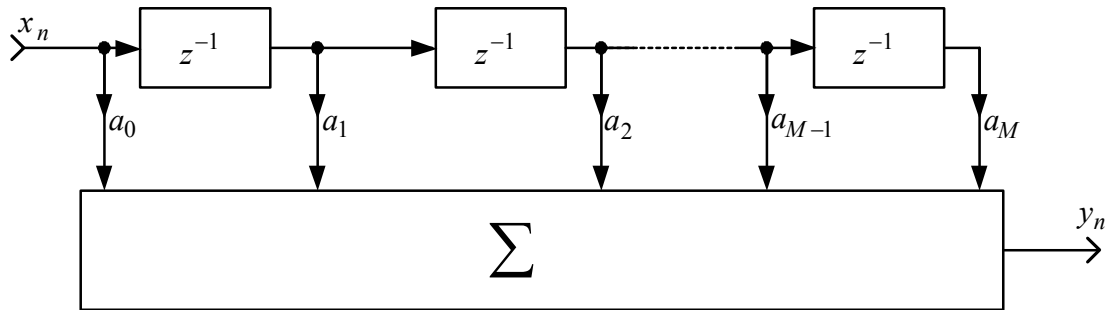


Рис. 3.4

У реальных КИХ-фильтров всегда конечный порядок  $M$  и коэффициенты  $a_m$ . Поэтому условие устойчивости (3.7) всегда выполняется. В самом деле,  $\delta_n$ , пройдя через все элементы задержки, перестанет поступать на сумматор, т.е. фильтр возвращается в исходное состояние после прекращения воздействия, а значит, будет устойчив.

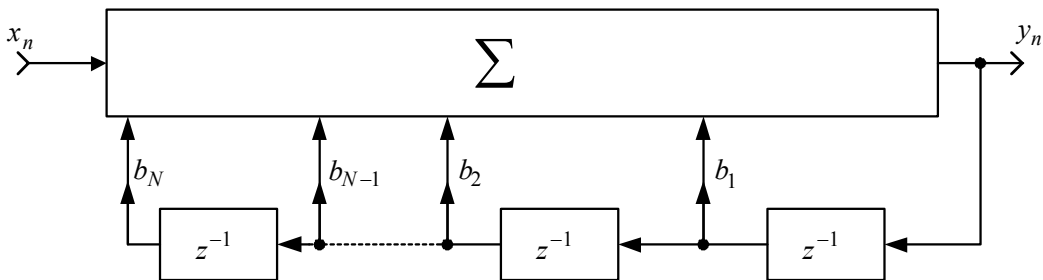


Рис. 3.5

Выполним следующее преобразование формулы (3.3):

$$H(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} / \left( 1 - \sum_{n=1}^N b_n z^{-n} \right) = \frac{A(z)}{B(z)} = A(z) \cdot \frac{1}{B(z)}, \quad (3.10)$$

где  $A(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}$ ;  $B(z) = 1 - \sum_{n=0}^N b_n z^{-n}$ .

В результате получено произведение системных функций  $H_1(z) = A(z)$  – чисто нерекурсивного и  $H_2(z) = 1/B(z)$  – чисто рекурсивного фильтров. Произведению системных (передаточных) функций соответствует последовательное (каскадное) соединение фильтров (п. 3.10.2). Следовательно, фильтр общего вида можно представить как каскадное соединение (рис. 3.6) чисто нерекурсивного (рис. 3.4) и чисто рекурсивного (рис. 3.5) фильтров.

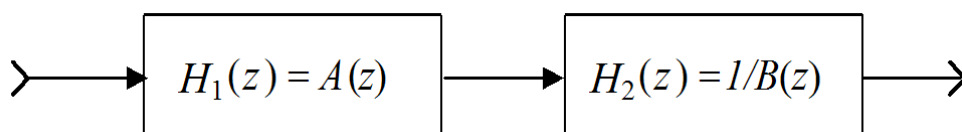


Рис. 3.6

При классификации цифровых фильтров по длине ИХ они (фильтры) делятся на фильтры с конечной ИХ (**КИХ-фильтры**) и с бесконечной ИХ (**БИХ-фильтры**). На рис. 3.7 показано соответствие классификаций по структуре и длине ИХ.

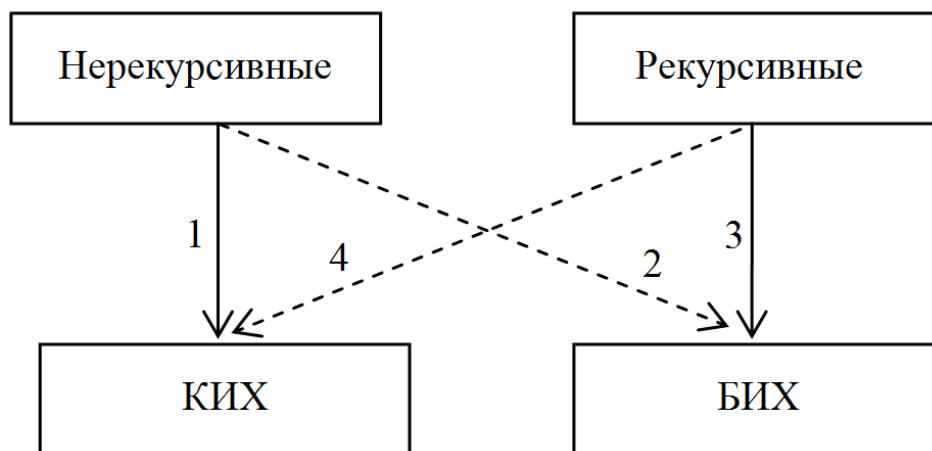


Рис. 3.7

Так, физически реализуемые нерекурсивные фильтры (рис. 3.4) имеют КИХ (рис. 3.7, стрелка 1).

Нерекурсивные фильтры для случая  $M \rightarrow \infty$  ( $M$  – порядок фильтра) могут иметь БИХ (рис. 3.7, стрелка 2). Это соответствует физически нереализуемому фильтру, поскольку нельзя реализовать фильтр с бесконечным числом элементов задержки.

Рекурсивные фильтры обычно имеют БИХ (рис. 3.7, стрелка 3). Это объясняется тем, что в случае наличия обратных связей фильтра его ИХ есть суперпозиция экспонент, если полюса (корни знаменателя

системной функции) простые. У устойчивого фильтра эти экспоненты затухают и становятся сколь угодно близки к нулю, но в ноль не обращаются, т.е. ИХ бесконечна во времени. Если полюса устойчивого фильтра кратные (одинаковые), то этот случай эквивалентен каскадному соединению фильтров с простыми полюсами и свертке затухающих экспонент, чему также соответствует БИХ.

Чтобы системная функция  $H(z)$  соответствовала БИХ-фильтру, необходимо, во-первых, чтобы имелся хотя бы один ненулевой коэффициент в цепях обратных связей ( $b_i \neq 0$ ). Во-вторых, необходимо, чтобы сразу все корни знаменателя не компенсировались корнями числителя. Это значит, что в случае разложения числителя и знаменателя на множители все множители в знаменателе нельзя сократить.

Если коэффициенты  $b_i$  фильтра в цепях обратной связи целые, то такой рекурсивный фильтр может иметь КИХ (рис. 3.7, стрелка 4) [12]. Для обеспечения его устойчивости необходимо, чтобы операции при фильтрации (вычисления согласно разностному уравнению) у такого фильтра выполнялись точно. Это может быть достигнуто квантованием чисел перед фильтрацией и реализацией операций в фильтре на базе целых чисел или чисел с фиксированной точкой.

Простейшим примером рекурсивного КИХ-фильтра является фильтр (рис. 3.8, б) с системной функцией  $H(z) = \sum_{m=0}^M z^{-m} = \frac{1 - z^{-M-1}}{1 - z^{-1}}$  и прямоугольной единичной КИХ длиной  $M$  (рис. 3.8, а). Его полюс компенсируется нулем, в результате чего фильтру эквивалентен нерекурсивный КИХ-фильтр (рис. 3.4). В этом можно убедиться, поделив числитель  $(1 - z^{-M-1})$  на знаменатель  $(1 - z^{-1})$ . Корень такого знаменателя называется фиктивным полюсом.

При реализации рекурсивного КИХ-фильтра с прямоугольной КИХ желательно использовать целые числа, что обеспечит точное выполнение операций и предотвратит накопление шумов округления в фильтре. Эта рекомендация связана с тем, что фильтр без верхнего блока задержки есть дискретный интегратор. Он неустойчив (см. п. 3.5) и накапливает погрешности квантования, которые не затухают. В случае использования вещественных чисел (с плавающей точкой) надо производить периодическое обнуление переменных фильтра, т.е. содержимого блоков задержки, которое должно приводить к обнулению сумматора. Это легко сделать при импульсном режиме работы (т.е. на ограниченных интервалах дискретного времени).

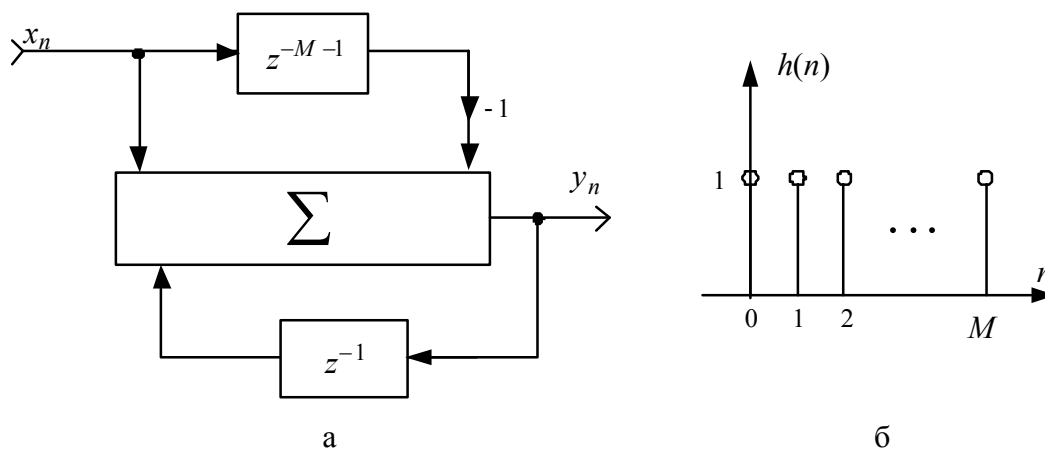


Рис. 3.8

Алгоритм фильтрации в частотной области (п. 2.5.9) соответствует КИХ-фильтру. Напомним, что свертка во временной области соответствует произведению в частотной и наоборот. При этом надо помнить, что все дискретные спектральные преобразования (ДПФ, алгоритмы БПФ, теоретико-числовые и теоретико-полиномиальные преобразования) соответствуют циклической свертке. Это является следствием того, что дискретность в одной области соответствует периодичности в другой (имеются в виду временная и частотная области), а дискретность в обеих областях – периодичности (в обеих областях), что характерно для упомянутых преобразований.  $Z$ -преобразование в частотной области дискретным не является, что не ведет к периодичности во временной. Поэтому свертка для  $z$ -преобразования будет линейной. Сигнал в частном случае может быть периодическим, но это уже будет особенностью самого сигнала, а не свойством  $z$ -преобразования.

### 3.7. Сравнение фильтров различных типов по вычислительным затратам и линейности фазочастотной характеристики

Наименьших вычислительных затрат при реализации требуют рекурсивные БИХ-фильтры, но их фазочастотная характеристика (ФЧХ) принципиально нелинейна. Наибольших вычислительных затрат требуют нерекурсивные КИХ-фильтры, но их ФЧХ может быть линейна (условия линейности ФЧХ приведены в п. 3.12). ФЧХ рекурсивных КИХ-фильтров может быть линейной, по вычислительным за-

тратам они занимают промежуточное положение между рекурсивными БИХ-фильтрами и нерекурсивными КИХ-фильтрами, в общем случае ближе к рекурсивным БИХ-фильтрам.

### 3.8. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

Если известна системная функция цифрового фильтра  $H(z)$ , то путем замены  $z \rightarrow e^{j\omega T_d}$  получается передаточная функция  $\dot{H}(\omega)$ , из которой можно получить **амплитудно-частотную** и **фазочастотную характеристики** (АЧХ и ФЧХ) фильтра. Эти характеристики соответственно определяются формулами (3.11) и (3.12):

$$|H(\omega)| = |\dot{H}(\omega)| = \sqrt{H_{Re}^2(\omega) + H_{Im}^2(\omega)}, \quad (3.11)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{H_{Im}(\omega)}{H_{Re}(\omega)}, \quad (3.12)$$

$$\dot{H}(\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.13)$$

Как избежать ошибок при численных расчетах ФЧХ, было сказано в п. 2.4.

Групповая задержка характеризует физическую задержку, т.е. время задержки информации и определяется формулой

$$\tau_{gp} = -\frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega}. \quad (3.14)$$

Линейная ФЧХ имеет постоянный отрицательный наклон, что означает  $\tau_{gp} = \text{const}$ .

$$\text{Фазовая задержка } \tau_{\phi} = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}.$$

### 3.9. Секционирование свертки

Секционирование свертки – вычисление длинной свертки в виде суммы коротких. Такая необходимость возникает в случае КИХ-фильтрации непрерывно поступающего входного сигнала или при  $N_r \gg N_h$ , где  $N_r$  – длина входной реализации (сигнала),  $N_h$  – длина импульсной характеристики (ИХ) фильтра. Секционирование свертки основано на принципе суперпозиции (свойство линейности), а потому может применяться только для линейных систем (фильтров). Состоит

в том, что входной сигнал разбивается на участки (секции), которые по очереди пропускаются через фильтр, после чего отклики на эти секции (т.е. выходные сигналы) суммируются. Обычно длина секции выбирается равной длине ИХ КИХ-фильтра.

Часто для КИХ-фильтрации используются алгоритмы быстрой свертки (фильтрация в частотной области (см. п. 2.5.9), например, с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) либо другого быстрого спектрального преобразования). В этом случае длина (размерность)  $N$  спектрального преобразования выбирается не менее  $N_h$  ( $N$  обычно нельзя менять произвольно), «лишние» (справа) отсчеты обнуляются.

Алгоритм секционирования свертки имеет две основные разновидности: перекрытия с суммированием и перекрытия с накоплением. Вначале рассмотрим алгоритм **перекрытия с суммированием** как более простой для понимания.

Входной сигнал  $x(n)$  длиной  $N_r$  разбивается на  $J$  секций  $x_0(n)$ ,  $x_1(n)$ , ...  $x_j(n)$ , ...  $x_{J-1}(n)$  длиной  $N_s$ , где  $j$  – номер секции (рис. 3.9).  $N_h$  – длина ИХ фильтра  $h(n)$ . Секции по очереди пропускаются через фильтр, а затем суммируются (рис. 3.10). Процесс добавления в выходной сигнал откликов на новые секции может осуществляться в реальном масштабе времени, т.е. в процессе непрерывного поступления на вход отсчетов входного сигнала и формирования выходных отсчетов. В этом случае  $J \rightarrow \infty$ .

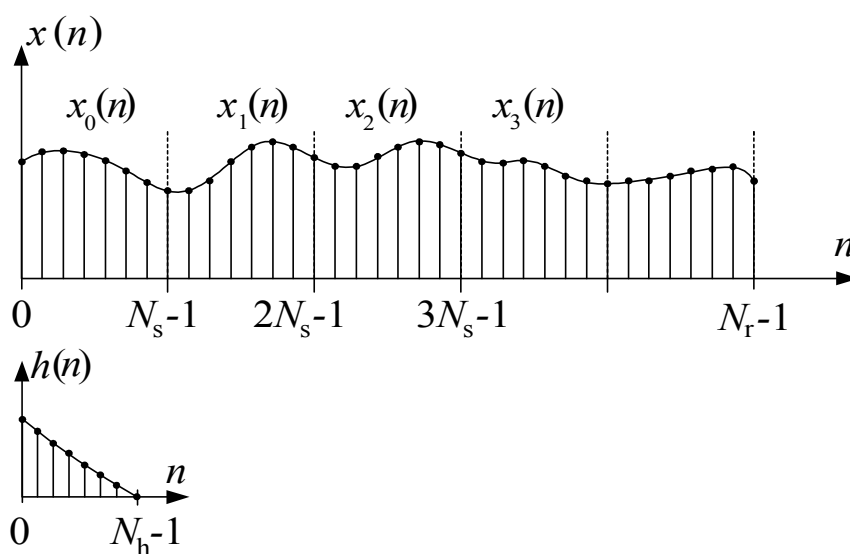


Рис . 3.9

Математическая запись секционирования свертки выглядит следующим образом:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{N_r+N_h-2} x(i)h(n-i) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=jN_s}^{jN_s+N_h-1} x_j(i)h(n-i) = \sum_{j=0}^{J-1} [x_j(n) * h(n)].$$

Длина первой свертки  $N_r + N_h - 1$ , т.е.  $0 \leq i \leq N_r + N_h - 2$ . Последняя сумма описывает суммирование откликов на каждую секцию входного сигнала (суммирование частных сверток), \* – символическое обозначение операции свертки. Как видно из формулы, каждая частная свертка представляет собой линейную свертку.

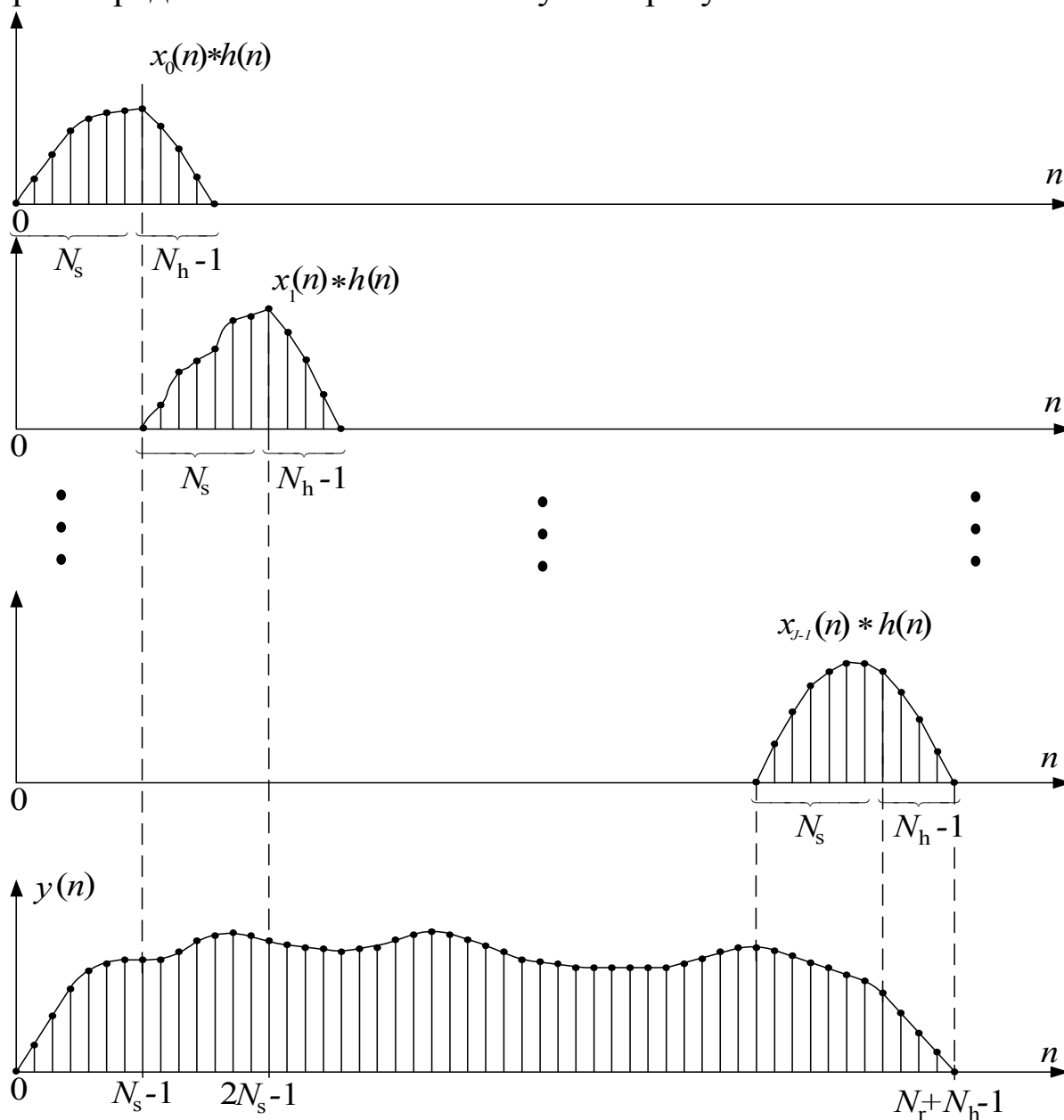


Рис. 3.10

Если линейная свертка вычисляется через циклическую (см. п. 2.5.8), для совпадения результатов линейной свертки и циклической каждая секция должна быть дополнена не менее чем  $N_h - 1$  нулями, а ИХ – не менее чем  $N_h - 1$  нулями.

Алгоритм **перекрытия с накоплением** более эффективен ввиду отсутствия (в явном виде) операции суммирования выходных секций. В этом алгоритме перекрываются не выходные, а входные секции. Для расчета откликов на входные секции используется циклическая свертка (2.16) длиной  $N_s + N_h - 1$  отсчетов, операндами которой являются секция длиной  $N_s + N_h - 1$  отсчетов и ИХ  $h(n)$ , дополненная  $N_s - 1$  нулями в конце. Входные секции перекрываются на участках длиной  $N_h - 1$  отсчетов. Вследствие цикличности свертки последние  $N_h - 1$  отсчетов выходной секции будут неверными (поскольку не совпадают с линейной сверткой) и отбрасываются, а первые  $N_s$  отсчетов присоединяются к предыдущей секции выходного сигнала.

Если  $N_r / N_h > 16$  и для вычисления линейной свертки используется алгоритм БПФ, секционирование свертки дает выигрыш в вычислительных затратах (ВЗ). Покажем это. При этом дискретность изменения размерности (длины) БПФ  $N$  не учитываем (для БПФ Кули-Тьюки  $N = 2^k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ ). ВЗ свертки без секционирования составят  $C_1 \approx 3N \log_2 N$ , где  $N \geq N_r + N_h - 1 \approx N_r$  (см. п. 2.6). Если разбить входной сигнал длиной  $N_r$  на секции длиной  $N_h$ , то число секций  $J = \lceil N_r / N_h \rceil \approx N_r / N_h$ , где  $\lceil x \rceil$  – наименьшее целое, не меньшее  $x$  (квантование до ближайшего целого с увеличением). Для алгоритма перекрытия с накоплением ИХ дополняется  $N_h$  нулями, т.е. ее длина (и длина секций входного сигнала) будет равна  $2N_h$ . ВЗ секционированной свертки  $C_2 = 3J 2N_h \log_2(2N_h) \approx 6N \log_2(2N_h)$ . Выигрыш в ВЗ при секционировании свертки  $R = C_1 / C_2 \approx (\log_2 N_r) / [2(\log_2(2N_h))]$  и начинает проявляться (больше единицы) при  $N_r / N_h > 16$ .

## 3.10. Основные схемы соединения фильтров

### 3.10.1. Параллельное соединение

Соединение двух фильтров называют параллельным, если их входы объединены (запараллелены), а выходные сигналы суммируются (рис. 3.11). Здесь  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$  – импульсные характеристики (ИХ) блоков,  $x(n)$  – входной сигнал,  $y(n)$  – выходной. Системные функции блоков параллельного соединения  $H_1(z) \Leftrightarrow h_1(n)$ ,  $H_2(z) \Leftrightarrow h_2(n)$ . Определим ИХ  $h_{эКВ}(n)$  и передаточную (системную) функцию  $H_{эКВ}(z)$  структуры (рис. 3.11).

Для определения ИХ подадим на вход структуры (рис. 3.11) единичный импульс, т.е.  $x(n) = \delta(n)$  и рассчитаем выходной сигнал, который по определению и будет ИХ  $h_{\text{экв}}(n)$  (п. 3.2.3). Поскольку на вход каждого блока поступает единичный импульс, выходные сигналы блоков будут представлять собой соответственно ИХ  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$ . На выходе сумматора будет их сумма, т.е.  $h_1(n) + h_2(n)$ , что является откликом структуры, т.е. ее ИХ. Следовательно,

$$h_{\text{экв}}(n) = h_1(n) + h_2(n). \quad (3.15)$$

Для определения эквивалентной системной функции  $H_{\text{экв}}(z)$  подставим  $h_{\text{экв}}(n)$  в формулу прямого z-преобразования

$$H_{\text{экв}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\text{экв}}(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [h_1(n) + h_2(n)]z^{-n} = H_1(z) + H_2(z), \quad (3.16)$$

т.е. эквивалентная системная функция равна сумме исходных.

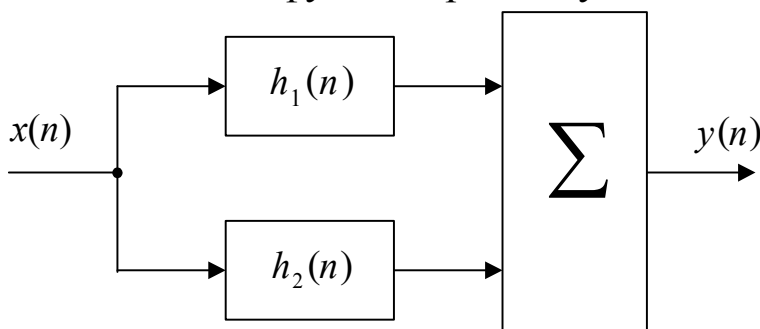


Рис. 3.11

Таким образом, при параллельном соединении линейных инвариантных к сдвигу фильтров эквивалентная ИХ равна сумме ИХ, системная функция – сумме системных функций.

Заметим, что этот результат справедлив и для аналоговых линейных стационарных (с постоянными параметрами) фильтров, если рассмотреть вместо единичного импульса  $\delta$ -функцию Дирака, вместо дискретных ИХ – аналоговые, вместо  $H(z)$  – преобразование Фурье  $\dot{H}(\omega)$  или передаточную функцию по Лапласу  $H(p)$  (передаточная функция  $\dot{H}(\omega)$  получается из  $H(p)$  подстановкой  $p = j\omega$ ).

### 3.10.2. Последовательное (каскадное) соединение

Структурная схема для каскадного (последовательного) соединения фильтров представлена на рис. 3.12. Здесь  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$  – импульсные характеристики (ИХ) блоков,  $x(n)$  – входной сигнал,  $y(n)$  – выходной,  $y_1(n)$  – выходной сигнал первого блока. Системные функции блоков каскадного соединения  $H_1(z) \Leftrightarrow h_1(n)$ ,  $H_2(z) \Leftrightarrow h_2(n)$ . Определим

параметры структуры (рис. 3.12): ИХ  $h_{\text{эКВ}}(n)$ , системную функцию  $H_{\text{эКВ}}(z)$ , амплитудно-частотную характеристику (АЧХ)  $H_{\text{эКВ}}(\omega)$  и фазо-частотную характеристику (ФЧХ)  $\varphi_{\text{эКВ}}(\omega)$ .

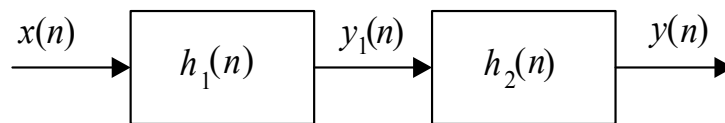


Рис. 3.12

Для определения ИХ подадим на вход схемы единичный импульс, т.е.  $x(n) = \delta(n)$ . Тогда по определению выходной сигнал первого блока будет представлять собой ИХ, т.е.  $y_1(n) = h_1(n)$ , которая подается на вход второго блока. Как известно, выходной сигнал фильтра есть свертка входного сигнала с ИХ, т.е.  $h_{\text{эКВ}}(n) = y(n) = y_1(n) * h_2(n)$ . С учетом того, что  $y_1(n) = h_1(n)$ , получим  $y(n) = h_1(n) * h_2(n)$ . Таким образом,

$$h_{\text{эКВ}}(n) = h_1(n) * h_2(n). \quad (3.17)$$

Для определения системной (передаточной) функции  $H_{\text{эКВ}}(z)$  вспомним, что передаточная функция есть комплексный коэффициент передачи спектральной составляющей. При прохождении через первый блок спектральные компоненты умножатся на  $H_1(z)$ , через второй – еще на  $H_2(z)$ , в итоге – на  $H_1(z)H_2(z)$ . Таким образом,

$$H_{\text{эКВ}}(z) = H_1(z)H_2(z). \quad (3.18)$$

Этот результат также следует из того, что **свертке в одной области (временной или частотной) соответствует произведение в другой.**

Для определения АЧХ и ФЧХ вспомним, что комплексная частотная передаточная функция  $\dot{H}(\omega)$  получается из системной функции  $H(z)$  подстановкой  $z = e^{j\omega T_d}$ . Сделав такую замену в формуле (3.18), получим

$$\dot{H}_{\text{эКВ}}(\omega) = \dot{H}_1(\omega) \dot{H}_2(\omega). \quad (3.19)$$

С учетом того, что для любой частотной передаточной функции  $\dot{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , вместо (3.19) будем иметь

$$\dot{H}_{\text{эКВ}}(\omega) = H_{\text{эКВ}}(\omega)e^{j\varphi_{\text{эКВ}}(\omega)} = H_1(\omega)H_2(\omega)e^{j[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)]}, \quad (3.20)$$

$$\text{откуда } H_{\text{эКВ}}(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega), \quad \varphi_{\text{эКВ}}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \quad (3.21)$$

Таким, образом, при последовательном (каскадном) соединении линейных инвариантных к сдвигу фильтров эквивалентная ИХ равна свертке ИХ, системная и передаточная функция, а также АЧХ – произведению соответствующих функций, ФЧХ – сумме ФЧХ.

Заметим, что эти результаты (для ИХ, передаточной функции, АЧХ и ФЧХ) справедливы и для аналоговых линейных стационарных (с постоянными параметрами) фильтров, если рассмотреть вместо единичного импульса  $\delta$ -функцию Дирака, вместо дискретных ИХ – аналоговые, вместо  $H(z)$  – преобразование Фурье  $\dot{H}(\omega)$  или передаточную функцию по Лапласу  $H(p)$  ( $\dot{H}(\omega)$  получается из  $H(p)$  подстановкой  $p = j\omega$ ).

### 3.10.3 Включение фильтра в цепь обратной связи

Структура такого соединения изображена на рис. 3.13.

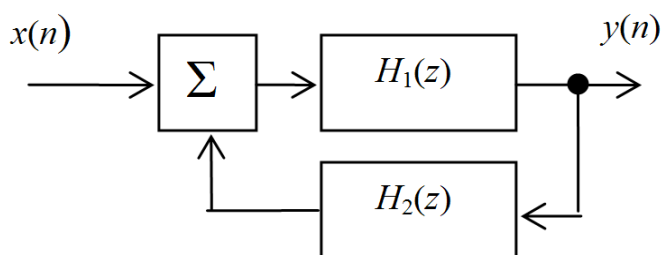


Рис. 3.13

Системная функция выражается формулой

$$H(z) = H_1(z) / [1 - H_1(z)H_2(z)]. \quad (3.22)$$

Доказательство. Имеем входной сигнал  $x(n) \Leftrightarrow X(z)$ , выходной –  $y(n) \Leftrightarrow Y(z)$  и импульсные характеристики (ИХ) блоков  $h_1(n) \Leftrightarrow H_1(z)$ ,  $h_2(n) \Leftrightarrow H_2(z)$ . Сигнал на выходе сумматора  $x'(n) = x(n) + y(n) * h_2(n)$ , где  $*$  – операция свертки. Выходной сигнал  $y(n) = x'(n) * h_1(n)$ . Подставив первое уравнение во второе, получим:  $y(n) = [x(n) + y(n) * h_2(n)] * h_1(n)$ . Взяв  $z$ -преобразования от обеих частей этого уравнения, с учетом свойств линейности и свертки  $z$ -преобразования получим:  $Y(z) = [X(z) + Y(z)H_2(z)]H_1(z)$ . После приведения подобных членов и деления обеих частей уравнения на  $X(z)$  получим формулу для отноше-

ния  $Y(z) / X(z)$ , которое по определению и есть передаточная функция  $H(z)$ . Эта формула совпадает с формулой (3.22).

Аналогичный результат получится для аналоговых фильтров, если вместо  $x(n)$ ,  $y(n)$ ,  $h_1(n)$ ,  $h_2(n)$ ,  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  соответственно рассмотреть аналоговые входной и выходной сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ , импульсные характеристики  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ , преобразования Лапласа сигналов  $X(p)$ ,  $Y(p)$  и импульсных характеристик  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ .

### 3.11. Цифровые дифференциаторы и интеграторы

Если задана последовательность (дискретный сигнал)  $x(n)$ , то ее прямая конечная разность

$$\Delta\{x(n)\} = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n),$$

обратная конечная разность

$$\nabla\{x(n)\} = \nabla x(n) = x(n) - x(n-1).$$

Для цифровой фильтрации большее значение имеют обратные конечные разности, поскольку они в отличие от прямых могут быть получены путем фильтрации сигнала  $x(n)$  физически реализуемым фильтром, разностное уравнение которого  $y(n) = x(n) - x(n-1)$ , где  $y(n)$  – выходной сигнал,  $x(n)$  – входной. Сигнальный граф фильтра изображен на рис. 3.14, системная функция фильтра  $H_{\nabla}(z) = 1 - z^{-1}$ .

В цифровой фильтрации операция  $\nabla$  играет ту же роль, что и дифференцирование аналогового сигнала.

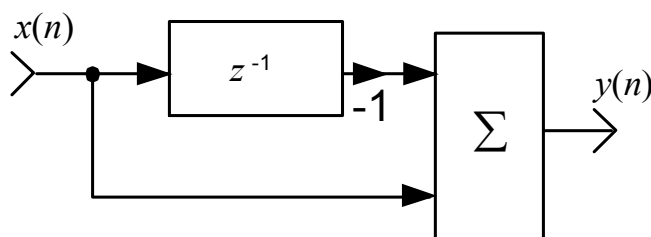


Рис. 3.14

Операцией  $\Sigma$  называется операция  $\Sigma x(n) = \Sigma\{x(n)\} = \sum_{i=-\infty}^n x(i)$  и эк-

вивалентна интегрированию аналогового сигнала.

Этой операции соответствует разностное уравнение  $y(n) = y(n-1) + x(n)$  (где  $y(n)$  – выходной сигнал,  $x(n)$  – входной) и фильтр с сигнальным графом (рис. 3.15), называемый дискретным интегратором (накапливающим сумматором). Его системная функция

$$H_{\Sigma}(z) = 1/(1 - z^{-1}). \quad (3.23)$$

Операции  $\nabla$  и  $\Sigma$  – взаимобратные, т.е.  $\Sigma \nabla h(n) = \Sigma \{ \nabla \{ h(n) \} \} = \nabla \Sigma h(n) = \nabla \{ \Sigma \{ h(n) \} \} = h(n)$ . Данное тождество легко доказать. Как известно, последовательная (каскадная) фильтрация дискретных функций (эквивалентна каскадному включению фильтров) соответствует произведению их системных функций, которые равны  $H_{\nabla}(z)$  и  $H_{\Sigma}(z)$ . Перемножив их, получим  $H_{\nabla}(z)H_{\Sigma}(z) = 1$ .

Таким образом, из сказанного следует важный вывод: операция  $\nabla$  не ведет к потере информации о постоянной составляющей (если входной сигнал конечен во времени). Сама постоянная составляющая будет потеряна, но информация о ней сохраняется в виде начального скачка сигнала или ИХ. Поступая на вход интегратора этот скачок “за-цикливается” в нем, обеспечивая восстановление постоянной составляющей.

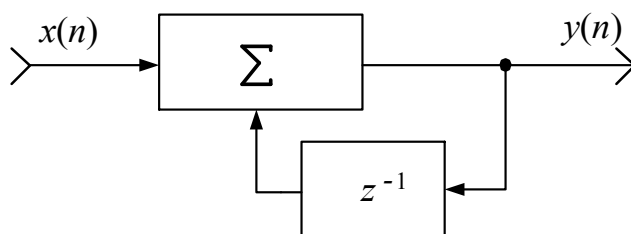


Рис. 3.15

Упростить запись обратных конечных разностей произвольного ( $r$ -го) порядка позволяет операторная запись. Так, обратная конечная разность  $r$ -го порядка дискретной функции  $h(n)$  обозначается как  $\nabla^r h(n)$ , операция дискретного интегрирования  $r$ -го порядка – как  $\Sigma^r h(n)$ . Подчеркнем, что  $r$  обозначает не степень, а порядок операции.

### 3.12. Условия линейности фазочастотной характеристики цифрового фильтра

Для многих областей применения цифровых и аналоговых фильтров важно, чтобы фильтр имел линейную фазочастотную характеристику (ФЧХ) или близкую к линейной.

Линейную ФЧХ, проходящую через ноль системы координат ( $\varphi(0) = 0$ ) и единичную АЧХ имеет идеальная линия задержки. Она задерживает сигнал не искажая его формы. Реальная аналоговая линия задержки в определенной полосе частот может быть реализована на

пассивных элементах (резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности) с некоторой погрешностью в полосе пропускания; вне ее ФЧХ будет существенно отличаться от линейной, а АЧХ от единичной.

Электронные (в том числе цифровые) фильтры предназначены для пропускания одной полосы частот и подавления другой, вследствие чего изменяются амплитуды гармонических составляющих спектра сигнала. Это ведет к изменению формы сигнала. Но форма определяется в большей степени фазовыми соотношениями, чем амплитудными. Поэтому *фильтр с линейной ФЧХ, проходящей через ноль, обеспечивает наилучшее сохранение формы сигнала*, задерживая его во времени, как линия задержки.

Требование наилучшего сохранения формы сигнала важно в следующих областях:

- корреляционная обработка (вычисление взаимно-корреляционных функций); применяется, например, при вычислении временной задержки между двумя сигналами;
- пространственная фильтрация (формирование характеристик направленности, в том числе с помощью цифровой фильтрации);
- цифровая фильтрация изображений;
- цифровая фильтрация биомедицинских сигналов (форма сигнала важна для медицинской диагностики);
- аналого-цифровое преобразование со встроенными фильтрами, например, сигма-дельта-АЦП (АЦП должен быть максимально универсальным, для чего должен обеспечивать наилучшее сохранение формы сигнала);
- информационно-измерительные системы (по той же причине, что и АЦП).

Для демонстрации важности сохранения формы сигнала рассмотрим следующий пример. Имеется фотография человека, многократно увеличенная, вследствие чего изображение имеет большую зернистость. Для улучшения изображения используется двумерный сглаживающий фильтр (т.е. сглаживание происходит по двум координатам). Если его ФЧХ линейна, все спектральные составляющие (низкочастотные – крупные детали изображения, например, овал лица; высокочастотные – мелкие, например, глаза) сдвигаются на *одно и то же расстояние*, что эквивалентно сдвигу портрета в целом. Если же ФЧХ будет нелинейна, высокочастотные и низкочастотные составляющие (овал лица и глаза) сместятся на разные расстояния, и изображение «расползется», при сильной нелинейности – до неузнаваемости.

ФЧХ аналоговых физически реализуемых фильтров *принципиально нелинейна*. Наиболее близка к линейной ФЧХ фильтра Бесселя. Точного цифрового эквивалента аналогового фильтра Бесселя не существует, однако цифровые КИХ-фильтры (нерекурсивные и рекурсивные) могут иметь строго линейную ФЧХ.

Следует отметить, что ФЧХ *устойчивых рекурсивных БИХ-фильтров* также *принципиально нелинейна*. ФЧХ линейна у БИХ-фильтра с ИХ в виде единичной ступенчатой функции, однако такой фильтр неустойчив или, как иногда говорят, находится на грани устойчивости, поскольку ИХ его не возрастает и не затухает во времени (см. п. 3.5).

Можно показать, что для линейности ФЧХ фильтр должен иметь симметричную (формула (3.24)) либо антисимметричную (симметрия относительно точки) ИХ (формула (3.25)).

$$h(n + M/2) = h(n - M/2), \quad (3.24)$$

$$h(n + M/2) = -h(n - M/2), \quad (3.25)$$

где  $M$  – правая граница интервала, на котором ИХ отлична от нуля.

Поскольку левая граница интервала равна нулю, длина ИХ равна  $M + 1$ , а центр симметрии/антисимметрии будет в точке  $n = M/2$ . Если  $M$  – нечетное,  $M/2$  – целое. Если  $M$  – четное,  $M/2$  – нецелое, кратное 0,5, т.е. вида  $0,5 + k$ , где  $k$  – целое (рис. 3.16, б, г).

Поскольку ИХ может быть двух видов и  $n_0$  – также двух видов, возможны 4 варианта ИХ, соответствующих фильтрам с линейной ФЧХ (рис. 3.16).

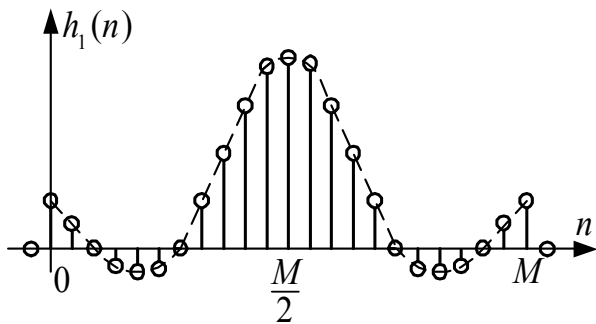
Рассчитаем ФЧХ фильтров, ИХ которых удовлетворяют формулам (3.24), (3.25). Расчет будет наиболее простым, если сместить каждую ИХ  $h(n)$  на рис. 3.16 влево по оси абсцисс до совмещения центра симметрии/антисимметрии  $M/2$  с точкой  $n = 0$ . Таким образом, для рис. 3.16, а, б имеем четные ИХ, для рис. 3.16, в, г – нечетные. Как было сказано выше (это следует из формулы (1.2)), в случае четной ИХ передаточная функция фильтра будет чисто вещественной, нечетной – чисто мнимой. Это значит, что в первом случае ФЧХ будет нулевой, во втором – равна  $\pi/2$  радиан ( $90^\circ$ ) во всем диапазоне частот. Если теперь сместить все ИХ «на место», это будет эквивалентно каскадному включению линии задержки на  $M/2$  тактов. Согласно теореме запаздывания, задержка на время  $MT_d/2$  соответствует умножению на

$e^{-j\omega n T_d}$ , что является передаточной функцией линии задержки. Таким образом, ко всем ФЧХ прибавится ФЧХ линии задержки  $\varphi(\omega) = -(M/2)\omega T_d$  (см. п. 3.10.2), т.е. ФЧХ фильтров с ИХ вида рис. 3.15 а-г будут линейными. Для симметричной ИХ (рис. 3.16, а, б) ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -M\omega T_d/2, \quad (3.26)$$

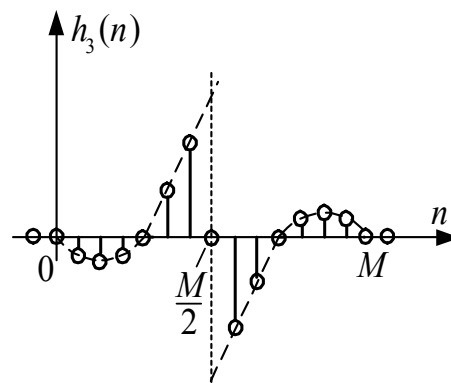
для антисимметричной ИХ (рис. 3.16, в, г) –

$$\varphi(\omega) = (\pi - M\omega T_d)/2. \quad (3.27)$$



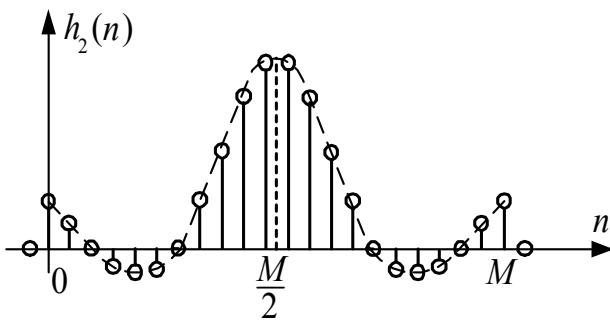
а

$M$  четно, ИХ симметрична (тип 1)



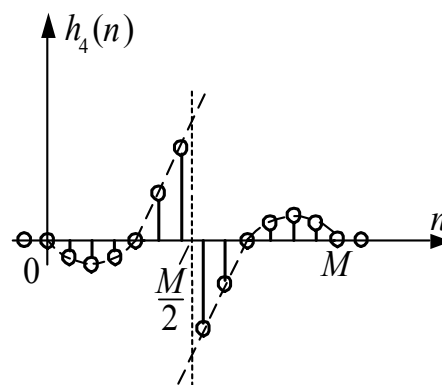
в

$M$  четно, ИХ антисимметрична (тип 3)



б

$M$  нечетно, ИХ симметрична (тип 2)



г

$M$  нечетно, ИХ антисимметрична (тип 4)

Рис. 3.16

ФЧХ (3.27) имеет каскадное соединение линии задержки на  $M/2$  тактов и фазовращателя на  $\pi/2$  радиан.

Линия задержки сдвигает сигнал не изменяя его формы. *Фазовращатель будет искажать форму сигнала*, поскольку все спектральные компоненты будут сдвинуты на одну и ту же фазу, а сдвиг фаз для различных частот соответствует разным сдвигам по оси времени. Это приводит к искажению формы выходных сигналов.

Следовательно, *минимальные искажения формы сигнала* обеспечивает только линейная ФЧХ (3.26) (рис. 3.17, а), *проходящая через центр системы координат* ( $\varphi(0) = 0$ ), что соответствует симметричной ИХ вида (рис. 3.16, а, б).

Таким образом, *не всякая линейная ФЧХ обеспечивает минимальные искажения формы сигнала*. К сожалению, во многих литературных источниках этот момент остается без внимания.

ИХ вида (рис. 3.16, в, г) имеют фильтры, предназначенные для дифференцирования и преобразования Гильберта (вычислитель мнимой части вещественного сигнала) широкополосных сигналов (сигнал, у которого  $f_n \ll f_v$ , где  $f_n$  – нижняя граничная частота его спектра,  $f_v$  – верхняя). Соответствующая ФЧХ (формула (3.27)) изображена на рис. 3.17, б. Чем широкополоснее сигнал и меньше допустимая погрешность преобразования, тем длиннее должна быть ИХ фильтра, осуществляющего преобразование Гильберта.

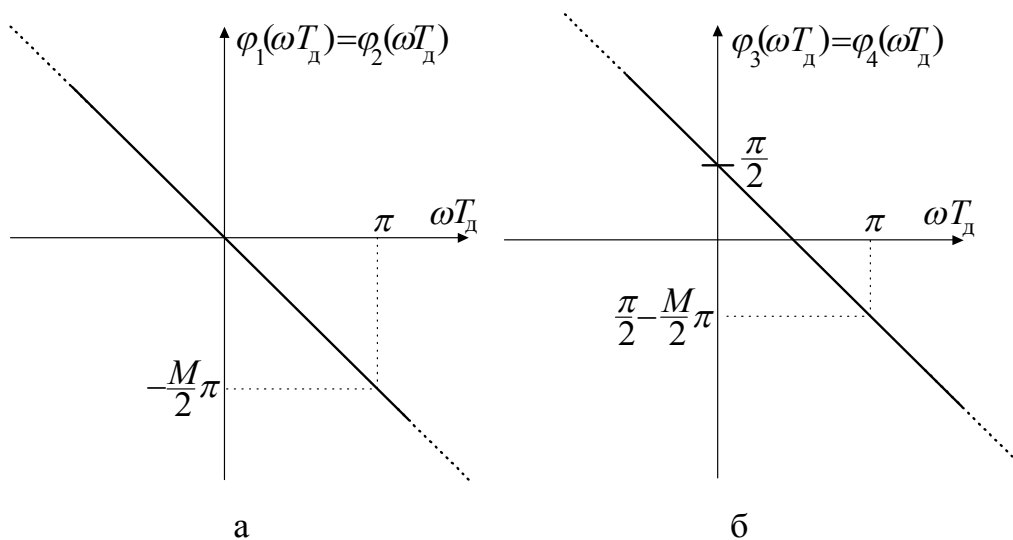


Рис. 3.17

## 3.13. Синтез цифровых фильтров

### 3.13.1. Постановка задачи синтеза фильтра

Обычно исходной характеристикой при проектировании фильтров является амплитудно-частотная характеристика (АЧХ). Исходя из конкретной задачи выбирается наиболее подходящий **тип** аппроксимации АЧХ (Баттерворта, Чебышева и т.д.). Иногда накладываются требования к степени нелинейности фазочастотной характеристики.

В случае нерекурсивных фильтров, для которых последовательность коэффициентов  $a_m$  совпадает с ИХ  $h_m$ , т.е.  $a_m = h_m$ , иногда цифровой фильтр может быть задан импульсной характеристикой (ИХ). В некоторых случаях для экономии вычислительных затрат ИХ нерекурсивного фильтра аппроксимируют импульсной характеристикой рекурсивного БИХ-фильтра.

### 3.13.2. Синтез фильтра по ФНЧ-прототипу

Этот метод называется также методом частотных преобразований. Применяется для расчета как аналоговых, так и цифровых фильтров. Здесь имеется в виду не преобразование частоты (спектра) сигнала, а преобразования передаточной функции  $H(z)$ , а значит и амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $H(\omega)$  фильтра. Преобразование производится путем замены переменной  $z$  в передаточной функции  $H(z)$  цифровых фильтров или переменной  $p$  в передаточной функции  $H(p)$  – аналоговых. Формулы замен переменных  $z$  и  $p$  будут разными.

Метод состоит в следующем. Сначала рассчитывается (или выбирается готовый) фильтр нижних частот (ФНЧ) с частотой среза  $\omega_c = 1$  рад/с, называемый прототипом. Затем путем замены переменной  $z$  в передаточной функции  $H(z)$  ФНЧ-прототипа  $H(z)$  преобразуется в передаточную функцию фильтра с АЧХ любого из 4-х **классов**: ФНЧ с другой частотой среза  $\omega_c$ , фильтра верхних частот (ФВЧ) с частотой среза  $\omega_c$ , полосно-пропускающего фильтра (ППФ) или полосно-заграждающего (запирающего) фильтра (ПЗФ или ЗФ) с заданными граничными частотами АЧХ  $\omega_n, \omega_b$  (рис. 3.18).

Для расчета режекторных фильтров (фильтр для подавления сигнала какой-либо одной частоты, точнее, сигналов в узкой полосе частот) обычно используются другие методы.

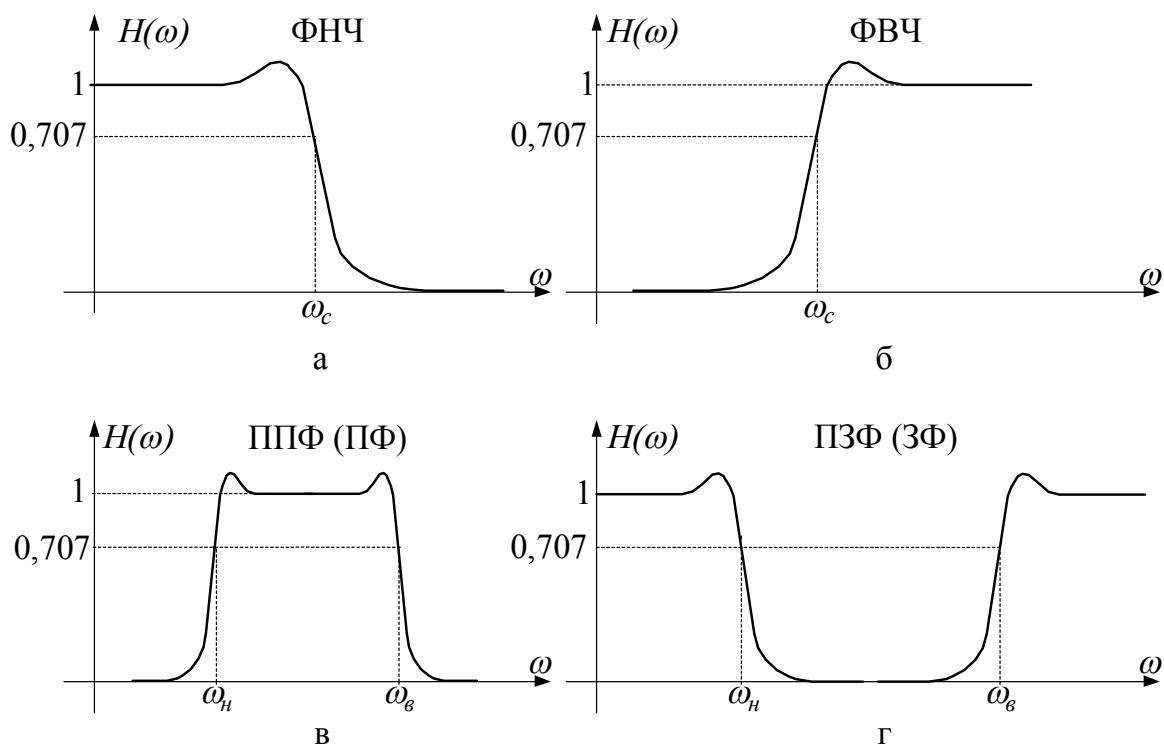


Рис.. 3.18

Процесс частотных преобразований (трансформации АЧХ ФНЧ-прототипа, изображенной на рис. 3.18, а ( $\omega_c = 1$  рад/с)) удобно наблюдать по рис. 3.18, в-г.

Таким образом, достаточно иметь набор ФНЧ-прототипов с нужным **типом** аппроксимации АЧХ (Баттерворта; Чебышева и т.п.).

В справочниках приводятся рассчитанные передаточные функции этих прототипов ( $H(z)$  – для цифровых или  $H(p)$  – для аналоговых), их нули и полюсы (**нуль** – корень числителя, **полюс** – корень знаменателя). Фильтр четного порядка представляется в виде каскадного (последовательного) соединения звеньев II порядка, имеющих комплексно-сопряженные полюса (звено эквивалентно колебательному контуру). Фильтр нечетного порядка  $2n + 1$  ( $n$  – целое) представляется как фильтр четного порядка  $2n$  плюс один каскадно включенный фильтр I порядка.

Существуют программы автоматизированного расчета фильтров. Например, программа Filter Solutions позволяет рассчитывать пассивные (на резисторах, конденсаторах, индуктивностях или на отрезках линий передачи), активные (на резисторах, конденсаторах и операционных усилителях), на переключаемых конденсаторах (на, конденса-

торах, переключателях (ключах) и операционных усилителях) и цифровые фильтры.

Чем больше порядок фильтра<sup>1</sup>  $N$ , тем круче АЧХ в переходной полосе (при прочих равных условиях). Чем ниже уровень пульсаций АЧХ (если таковые имеются) в полосах пропускания и/или заграждения, тем выше порядок фильтра.

Рассмотрим основные типы АЧХ прототипов, их особенности и свойства получаемых фильтров. Каждый из прототипов имеет свои преимущества и недостатки. Выбирается исходя из решаемой задачи. Наилучшим является прототип, достоинства которого существенны для разрабатываемого устройства, а недостатки – нет.

ФНЧ Баттерворта – это фильтр с максимально плоской АЧХ (рис. 3.19).

У ФНЧ Чебышева I и II рода будет более узкая переходная полоса, чем у фильтра Баттерворта (при одинаковом  $N$ ). АЧХ фильтра Чебышева I рода (рис. 3.20, а) – максимально плоская в полосе заграждения и имеет одинаковые (равноволновые) пульсации в полосе пропускания. На рис. 3.20  $\varepsilon$  – параметр, определяющий уровень пульсаций в полосе пропускания,  $A$  – в полосе заграждения. АЧХ фильтра Чебышева II рода (Золотарева, инверсный Чебышева) (рис. 3.20, б), наоборот, имеет максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и равноволновые пульсации в полосе заграждения. Фильтр Чебышева I рода имеет только полюса, II рода – и нули, и полюса.

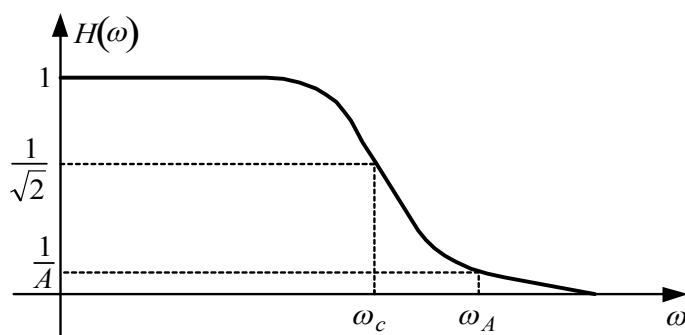


Рис. 3.19

---

<sup>1</sup> Для аналогового или большинства цифровых БИХ-фильтров – степень знаменателя функции  $H(p)$  или  $H(z)$ .

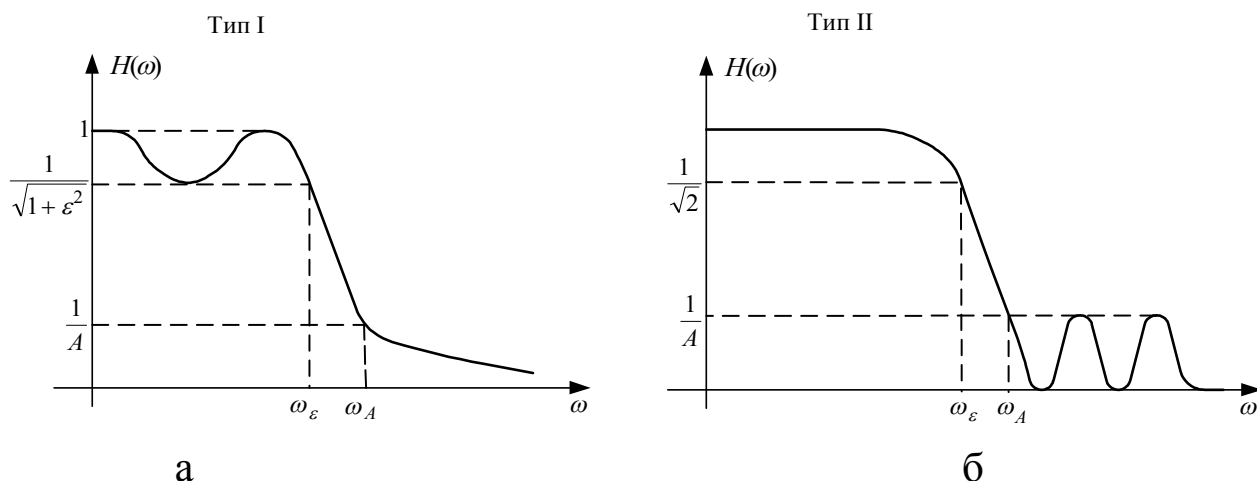


Рис. 3.20

У АЧХ (рис. 3.21) эллиптического ФНЧ (ФНЧ Кауэра) минимальна ширина переходной полосы по сравнению с другими прототипами (при одинаковом порядке  $N$  и одинаковой неравномерности АЧХ). Фильтр имеет равноволновые пульсации в полосах пропускания и заграждения. Уровень пульсаций в полосах пропускания и заграждения может быть разным и определяется параметрами  $\varepsilon$  и  $A$  соответственно.

Аналоговый фильтр Бесселя и его цифровая аппроксимация (цифрового фильтра Бесселя, строго говоря, не существует) имеют максимально плоскую характеристику групповой задержки (групповое время или просто задержка – задержка информации при прохождении через фильтр)  $\tau_{гр}(\omega)$  (формула (3.14)), изображенную на рис. 3.22, что соответствует более линейной ФЧХ, чем у других прототипов.

Ниже приводится сравнительный анализ фильтров с различными типами АЧХ.

**1. Плоскостность АЧХ.** Максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания имеют фильтры Баттерворта и Чебышева II рода, в полосе заграждения – Баттерворта и Чебышева I рода.

**2. Узость переходной полосы.** При одинаковом порядке фильтров самая узкая переходная полоса у эллиптических фильтров, у фильтров Чебышева I и II рода – шире, у фильтров Баттерворта – еще шире.

**3. Линейность фазочастотной характеристики (ФЧХ).** Фильтры с линейной ФЧХ при прочих равных условиях обеспечивают наилучшее сохранение формы сигнала. Подробное объяснение этого дается в п. 3.12. ФЧХ аналоговых фильтров принципиально нелинейна. В по-

рядке роста нелинейности ФЧХ фильтры располагаются следующим образом: Бесселя, Баттерворта, Чебышева I и II рода, эллиптический.

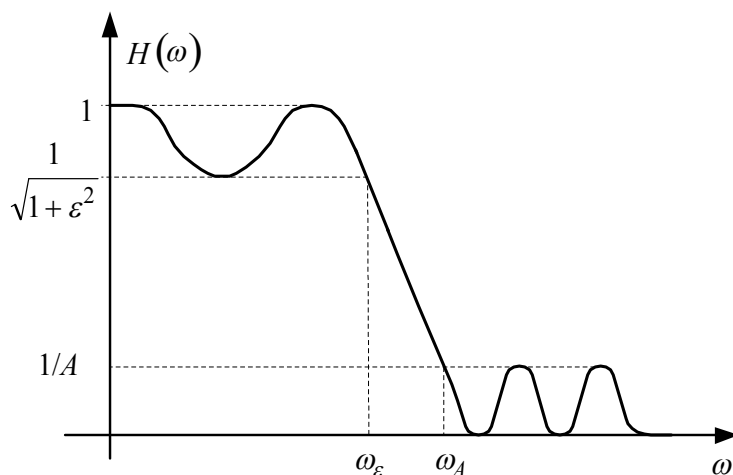


Рис. 3.21

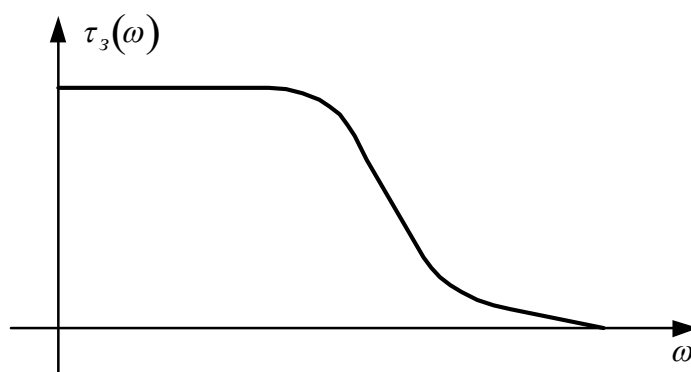


Рис. 3.22

**4. Полюсная чувствительность.** Этот параметр характеризует степень влияния на АЧХ фильтра погрешностей квантования коэффициентов цифрового фильтра (для аналогового фильтра – нестабильностей и разброса значений сопротивлений, емкостей и индуктивностей). Чем меньше чувствительность, тем стабильнее фильтр. По возрастанию полюсной чувствительности фильтры располагаются так: Баттерворта, Чебышева I и II рода, эллиптический.

Заметим, что цифровые КИХ-фильтры в отличие от аналоговых могут иметь абсолютно линейную ФЧХ (см. п. 3.12).

### 3.13.3. Обзор некоторых методов и программ расчета цифровых фильтров

Существуют различные методы расчета цифровых фильтров, которые можно найти в литературе [1, 3, 4, 8]. Наиболее распространены следующие методы.

**Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики** аналогового фильтра позволяет получить цифровой рекурсивный БИХ-фильтр, ИХ которого в дискретных точках совпадает с ИХ исходного аналогового фильтра. Из-за дискретизации ИХ возникает эффект наложения в частотной области: АЧХ цифрового фильтра есть сумма бесконечного числа копий АЧХ аналогового фильтра (см. п. 3.15).

**Метод билинейного (дробно-линейного) преобразования** не имеет эффекта наложения, поскольку интервал  $0 \leq \omega < \infty$  аналогового фильтра отображается на интервал  $0 \leq \omega < \omega_d / 2$ . Результатом такого отображения является деформация оси частот, а значит, искажение АЧХ цифрового рекурсивного БИХ-фильтра. Поэтому метод применяют только для прямоугольных аппроксимаций идеальных АЧХ (реальная АЧХ прямоугольной быть не может).

**Метод дискретизации и усечения ИХ аналогового фильтра** (весовой метод). Позволяет получить нерекурсивный КИХ-фильтр, ФЧХ которого может быть линейной [11]. ИХ аналогового фильтра дискретизируется и усекается по времени с помощью окна – функции, плавно спадающей к краям.

Пульсации АЧХ фильтра, синтезированного этим методом, затухают при удалении от частоты среза.

В [11] приведены описания лабораторных работ, посвященных расчету и исследованию цифровых фильтров тремя перечисленными выше методами.

**Метод Ремеза** (алгоритм подстановки Ремеза) [8; п. 3.30] позволяет синтезировать нерекурсивный КИХ-фильтр с линейной ФЧХ и равновоновыми пульсациями АЧХ в полосах пропускания и заграждения. Благодаря этому при прочих равных условиях порядок фильтра, а значит и вычислительные затраты, оказываются в несколько раз меньшими, чем для весового метода. Метод основан на обобщенной теореме Чебышева (получается чебышевская аппроксимация АЧХ, но не для рекурсивных БИХ-фильтров (фильтры Чебышева), а для нерекурсивных КИХ-фильтров).

Основной метод расчета **рекурсивных КИХ-фильтров** изложен в [12].

Как уже говорилось существуют программы расчета различных аналоговых и цифровых фильтров. В то же время надо знать основы теории обработки сигналов, чтобы правильно применить результаты, полученные с помощью программ.

В качестве примеров таких программ можно привести упомянутую выше программу Filter Solutions, а также подсистемы расчета фильтров систем MATLAB, LabVIEW, библиотеку программ ЦОС SPL фирмы Intel. При этом следует иметь в виду, что в этих программах (а иногда в подсистемах одной системы, например, LabVIEW) зачастую коэффициенты фильтров обозначаются иначе, чем в данном пособии (обозначения в пособии соответствуют большинству книг по цифровой обработке сигналов).

Следует сказать несколько слов о библиотеке программ Intel SPL. В процессорах IBM-совместимых компьютеров начиная с Pentium MMX (выпускается с 1997 г.) имеется ядро (подсистема) цифровой обработки сигналов (ЦОС) (сигнальный процессор). Реализация функций ЦОС на сигнальном процессоре дает выигрыш в быстродействии примерно на порядок по сравнению с универсальным процессором, поскольку операции, требующие больших вычислительных затрат, реализованы аппаратно и выполняются обычно за один период тактовой частоты процессора (такт). Циклы также реализованы аппаратно. Переполнение приводит только к ограничению результата на уровне минимального или максимального значения (насыщение), а не к смене знака результата, как при переполнении целых чисел в универсальном процессоре. Умножение, сложение и выборка следующего операнда могут выполняться одновременно. В библиотеку SPL входит около тысячи функций ЦОС, реализованных с применением эффективных алгоритмов (БПФ, быстрой свертки). Например, линейная свертка двух массивов из  $2^{16}$  элементов происходит на 2-3 порядка быстрее для процессора Intel Pentium IV, чем при прямой реализации формулы линейной свертки на языке высокого уровня. Фирма Intel разрабатывала библиотеку для своих процессоров, однако и на совместимых процессорах других фирм библиотека работает достаточно эффективно. У фирмы Intel есть еще несколько библиотек, с которыми можно ознакомиться на сайте фирмы.

### 3.14. Согласованный фильтр

При передаче сигналов по линиям связи, радиоканалу (в пространстве), а также в гидро- и радиолокации возникает задача обеспечения максимального отношения сигнал/помеха, при условии, что на вход поступает сумма известного полезного (эталонного) сигнала  $s_0(n)$  и помехи (шума)  $s_n(n)$  с известным спектром. Надо определить, *имеется ли полезный сигнал во входном, обеспечение наилучшего воспроизведения формы сигнала не требуется.*

Фильтр, решающий эту задачу, называется **оптимальным**.

Если  $s_n(n)$  – **белый шум**<sup>2</sup>, оптимальным является фильтр, импульсная характеристика (ИХ) которого

$$h(n) = A \cdot s_0(N - n), \quad (3.28)$$

где  $s_0(n)$  – цифровой эталонный сигнал длиной  $N$  отсчетов;

$A$  – постоянный коэффициент.

Такой фильтр называется **согласованным** (СФ) и его ИХ с *точностью до постоянного множителя равна эталонному сигналу, зеркально отраженному относительно своего центра* (на временной оси) или, что то же самое, зеркально отраженному относительно оси ординат, а затем сдвинутому (задержанному) на  $N$ .

Если рассчитать модуль спектра  $S(\omega)$  сигнала  $s_0(n)$ , амплитудно-частотную характеристику (АЧХ)  $H(\omega)$  СФ и сравнить их, окажется, что  $H(\omega) = A \cdot S(\omega)$ , а фазочастотная характеристика (ФЧХ)  $\varphi(\omega) = -\varphi_0(\omega) - \omega N T_d$ . Первое слагаемое в правой части формулы ФЧХ – инвертированный фазовый спектр сигнала – результат зеркального отражения сигнала относительно оси ординат, второе – ФЧХ линии задержки на время  $T$ .

Таким образом, коэффициент передачи СФ пропорционален уровню той или иной гармоники: сильный сигнал усиливается, слабый ослабляется. Это важно, поскольку уровень гармоник белого шума постоянен, и там, где сигнал слаб, шум плохо пропускается на выход фильтра. ФЧХ фильтра инверсна фазовому спектру сигнала плюс ФЧХ блока задержки на  $N$  тактов, что обеспечивает нулевые фазы спектральных составляющих выходного сигнала в момент окончания эта-

---

<sup>2</sup> Шум с равномерным спектром. Содержит колебания всех частот и подобен белому цвету, содержащему все цвета.

лонного. Нулевые фазы означают, что эти составляющие – чистые косинусоиды (синусоидальные компоненты равны нулю). Суммирование вершин косинусоид с нулевыми фазами дает пик отклика СФ на эталонный сигнал в момент  $N$ , что и обеспечивает максимальное отношение сигнал/шум. Строгие математические выкладки с доказательством оптимальности фильтра можно найти в различных книгах по обработке сигналов, например, в [14, 15, 16].

Можно доказать, что цифровой *согласованный фильтр вычисляет дискретную взаимно-корреляционную функцию (ВКФ) входной смеси и эталонного сигнала* с точностью до постоянного множителя  $A$  (отклик СФ на смесь есть эта ВКФ, сдвинутая на  $N$  отсчетов вправо).

При расчете ВКФ эталонный сигнал скользит по оси времени относительно входной смеси. Смещение сигнала по оси времени есть  $k$  – аргумент ВКФ. При совпадении  $s_0(n)$  и такого же сигнала в смеси наблюдается пик ВКФ. Устройство, вычисляющее данную ВКФ, называется корреляционным приемником.

Если шум небелый, то оптимальный фильтр можно построить на базе согласованного (рис. 3.23). Здесь ОФ – обеляющий фильтр, АЧХ которого с точностью до множителя обратна амплитудному спектру шума. Поскольку фазы гармоник шума случайны, ФЧХ обеляющего фильтра может быть произвольной (но постоянной и должна быть учтена при построении СФ). Пройдя через ОФ, эталонный сигнал преобразуется в сигнал  $s'_0(t)$ . Для  $s'_0(t)$  строится согласованный фильтр СФ'.

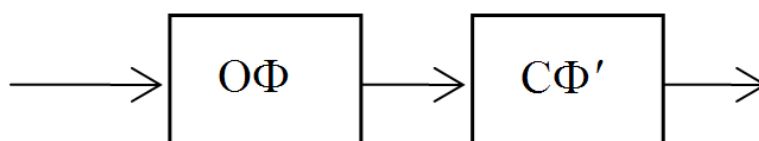


Рис. 3.23

СФ желательно реализовать на основе рекурсивных БИХ-фильтров, поскольку они требуют минимальных вычислительных затрат. Однако не для всех сигналов можно синтезировать оптимальный БИХ-фильтр. Это связано с тем, что его ИХ является суперпозицией экспонент (для устойчивого фильтра – затухающих). Если нельзя реализовать СФ в виде такого фильтра, то его, в отличие от аналогового СФ, всегда можно реализовать в виде нерекурсивного КИХ-фильтра, правда, ценой существенных вычислительных затрат. Иногда удается

реализовать БИХ-фильтр, обеспечивающий отношение сигнал/помеха, близкое к максимальному. Такой фильтр называется **квазиоптимальным**.

Для уменьшения вычислительных затрат дискретной свертки или дискретной корреляционной функции можно применить алгоритм быстрой свертки (см. пп. 2.7, 2.8).

### 3.15. Эффект наложения АЧХ

Этот эффект математически тождественен эффекту наложения спектров при дискретизации, поскольку передаточная функция фильтра – это спектр импульсной характеристики (ИХ) фильтра.

Если ИХ цифрового фильтра получается путем дискретизации ИХ аналогового фильтра, то передаточная функция цифрового фильтра будет представлять собой сумму бесконечного числа копий передаточных функций аналогового фильтра, отстоящих друг от друга на величину частоты дискретизации (см. п. 1.4.1). Это же справедливо для АЧХ и ФЧХ. Иными словами, материал п. 1.4.1 будет справедлив и для фильтров, если аналоговый и дискретный сигналы заменить соответственно на аналоговую и дискретную ИХ, а модуль спектра сигнала – на АЧХ фильтра.

Процесс аналоговой или цифровой фильтрации выражается соответственно аналоговой или дискретной линейной сверткой сигнала с ИХ, а результат свертки не зависит от перемены мест ее операндов. Подчеркнем еще раз, что математически нет разницы между сигналом и ИХ – сворачиваются две функции. Физически разница есть: сигнал поступает на вход, а ИХ «защита» в аппаратуру или программу.

### 3.16. Эффект Гиббса

Если функция усекается (берется ее существенная часть, несущественная, обычно близкая к нулю и бесконечная, обнуляется), то в другой области возникают пульсации. Это называется явлением (эффектом) Гиббса. Явление Гиббса является следствием разрывов функции при усечении. Уменьшить пульсации можно, если для усечения использовать весовые функции, плавно спадающие к краям (окна) [1, 3, 4, 8]. При этом разрыв становится не таким резким.

В качестве примера рассмотрим реализацию идеального ФНЧ с прямоугольной АЧХ  $H_n(\omega)$  (рис. 3.24), которой соответствует ИХ  $h_n(t)$  вида  $\sin(x)/x$  (рис. 3.25). Если вырезать центральную часть ИХ  $h_n(t)$  путем умножения ее на прямоугольное окно (3.29) длительностью  $T$ , то в АЧХ фильтра появляются пульсации и она становится бесконечной по оси частот (рис. 3.24). Если использовать окно Хэмминга (3.30) плавно спадающее к краям, пульсации уменьшатся примерно в 30 раз, но примерно в 1,5 раза расширится переходная полоса фильтра (переход от полосы пропускания к полосе заграждения).

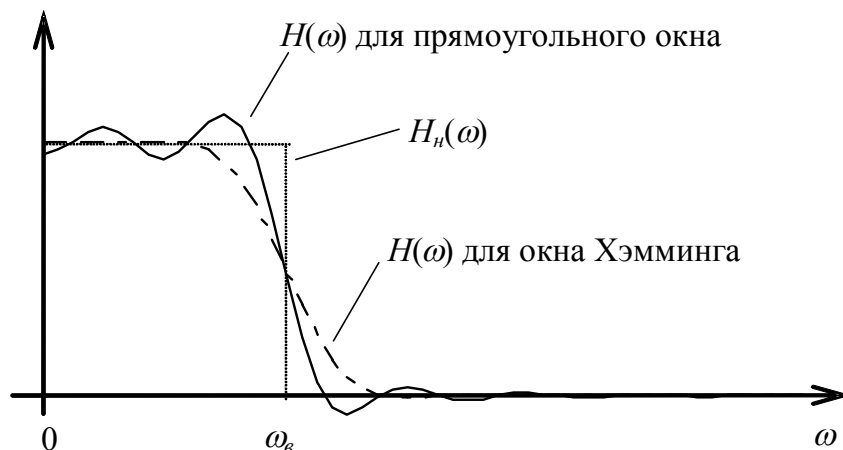


Рис.. 3.24

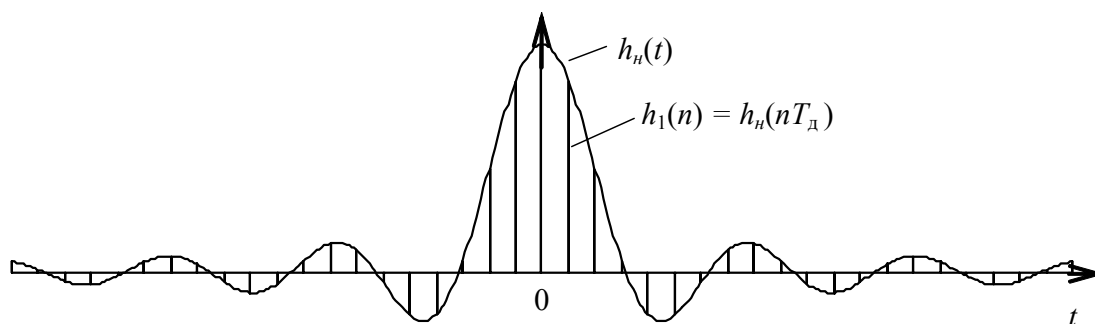


Рис. 3.25

$$w_n(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 0,5T, \\ 0, & \text{прочие } t; \end{cases} \quad (3.24)$$

$$w_x(t) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right), & |t| \leq 0,5T, \\ 0, & \text{прочие } t; \end{cases} \quad (3.25)$$

Существуют различные окна с различным подавлением пульсаций и различным коэффициентом расширения спектра окна, а значит и

другой переходной полосы фильтра (этот коэффициент показывает, во сколько раз расширяется спектр окна относительно спектра прямоугольного окна).

Усеченную ИХ можно дискретизировать и на ее основе строить нерекурсивный КИХ-фильтр.

### 3.17. Погрешности (шумы) квантования при фильтрации

Под шумами квантования (эффектами конечной разрядности) понимаются флуктуации (шумы) выходного сигнала фильтра, вызванные погрешностями округления и усечения.

Для примера рассмотрим процессы округления и усечения в аналого-цифровых преобразователях (АЦП). Пусть имеется АЦП, разрядность которого  $M = 8$ , диапазон входного напряжения – от  $u_{min} = 0$  В до  $u_{max} = 10$  В. Число кодовых комбинаций  $m = 2^M = 256$ . Цена младшего разряда  $\Delta = (u_{max} - u_{min})/2^M = 10/256 \approx 39,1$  мВ. Уровни квантования входных напряжений:  $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, 255\Delta$ . Им соответствуют выходные числа АЦП  $m_{вых}$ :  $0, 1, 2, 3, \dots, 255$ . Предположим, что  $0 \leq u \leq 10$  В. Если в АЦП происходит квантование типа **округления**, то

$$m_{вых} = \begin{cases} k, & k\Delta \leq u < k\Delta + \Delta/2, \\ k+1, & k\Delta + \Delta/2 \leq u < (k+1)\Delta. \end{cases} \quad \text{В случае квантования типа усечения}$$

**чения**  $m_{вых} = k$ , если  $k\Delta \leq u < (k+1)\Delta$ . Формулы для округления и усечения можно записать компактнее: для округления  $m_{вых} = \lfloor u/\Delta + 0,5 \rfloor$ , для усечения  $m_{вых} = \lfloor u/\Delta \rfloor$ , где  $\lfloor x \rfloor$  – наибольшее целое, не большее  $x$  ( $\lfloor 2,1 \rfloor = 2, \lfloor 2,8 \rfloor = 2, \lfloor -2,1 \rfloor = -3$ ), т.е. целая часть.

Аналогичные операции происходят в процессе вычислений при фильтрации, когда размер числа, полученного, например, в результате умножения двух вещественных чисел, превосходит размер разрядной сетки процессора. В большинстве программ расчета цифровых фильтров можно задавать разрядность чисел фильтра, что позволяет оценить погрешность квантования и ее влияние на характеристики фильтра.

Если погрешности квантования значительно меньше, чем амплитуда полезного сигнала, то действие их проявится почти как аддитивный (прибавляемый к сигналу) шум, который называют шумом квантования.

Квантование может привести к потере полезного сигнала, если его амплитуда  $U_m$  станет соизмеримой с шагом квантования  $\Delta$ . Если система имеет автоматическую регулировку усиления, благодаря которой входная смесь полезного сигнала и помехи масштабируется (растяги-

вается) на всю шкалу АЦП, все равно имеется опасность потери полезного сигнала. Объясняется это тем, что типичным является случай, когда во входной смеси помеха намного больше сигнала, и сигнал может быть соизмерим с  $\Delta$ . Поэтому разрядности АЦП и цифровых фильтров должны быть выбраны так, чтобы в случае максимальной помехи и минимального сигнала имелся запас разрядности, т.е. было  $U_m \gg \Delta$ . Этот запас зависит от решаемой задачи, но в большинстве случаев достаточно, чтобы минимальная амплитуда полезного сигнала соответствовала не менее чем 5...8 младшим разрядам, т.е.  $U_m / \Delta > 2^{5...8}$ .

Основные эффекты конечной разрядности классифицируются следующим образом.

1. Некоррелированный шум квантования.
2. Коррелированный шум квантования (в теории автоматического управления это называется предельными циклами).
3. Погрешности квантования коэффициентов  $a_m, b_n$  фильтра.

Следует отметить, что эффекты конечной разрядности представляют собой нелинейные операции (кроме погрешностей квантования коэффициентов фильтра, если значения коэффициентов не изменяются в процессе фильтрации). Нелинейная обработка сигнала вызывает появление дополнительных спектральных компонент. При  $U_m \gg \Delta$  эти компоненты проявляют себя как аддитивный (прибавляемый) шум. В этом случае для упрощения расчетов фильтр можно считать линейным, к выходному сигналу которого добавляется шум квантования. Рассмотрим перечисленные эффекты конечной разрядности более подробно.

**Некоррелированный шум квантования.** К такому шуму относятся шум АЦП и шум при квантовании результатов операций (умножений и сложений) в процессе фильтрации, т.е. при вычислении выходного цифрового сигнала согласно разностному уравнению.

Шум АЦП обусловлен отличием передаточной характеристики АЦП от прямой линии, соответствующей передаточной характеристике идеального АЦП с бесконечной разрядностью. Напомним, что передаточной характеристикой (не путать с передаточной функцией) называется зависимость выходной величины устройства от входной, в данном случае – выходного цифрового кода от входного напряжения.

Рассчитаем шум квантования АЦП при  $U_m \gg \Delta$ . Для квантования типа округления погрешность квантования будет треугольной функцией с амплитудой  $\Delta/2$  и нулевым средним. Как известно, среднеквадратическое отклонение такой функции равно  $\Delta/(2\sqrt{3})$ . Для случая

усечения среднеквадратическое отклонение погрешности квантования будет таким же, среднее – равным  $(-\Delta/2)$ .

**Коррелированный шум квантования** проявляется в том, что из-за корреляции погрешностей квантования свободная составляющая колебаний на выходе фильтра затухает не до нуля, а до определенного постоянного уровня или до колебаний постоянной амплитуды [8].

### 3.18. Эффективный алгоритм реализации блоков задержки цифровых фильтров

Согласно алгоритму работы цифрового фильтра содержимое блока задержки (БЗ) при переходе к следующему такту должно быть продвинуто на один элемент задержки. Перезапись содержимого БЗ из  $i$ -ой в  $(i + 1)$ -ю ячейку должна начинаться с последней ( $M$ -ой) ячейки («от хвоста к носу»), в противном случае в БЗ будет записано одно и то же число во все ячейки, что нарушит нормальную работу фильтра. Таким образом, имеем следующий алгоритм перезаписи:  $x(n - M) \rightarrow x_M$ ;  $x(n - M + 1) \rightarrow x(n - M)$ ;  $x(n - M + 2) \rightarrow x(n - M + 1)$ ; ... ;  $x(n) \rightarrow x(n - 1)$ ;  $x_{in} \rightarrow x(n)$ , где  $x_M$  – очередная выходная дискрета (отсчет) из последней ( $M$ -ой) ячейки;  $x_{in}$  – очередной входной отсчет. Стрелки показывают направление перезаписи. Очевидно, что для БЗ длиной  $M$  ячеек требуется  $M$  сдвигов независимо от числа отводов, что требует больших вычислительных затрат. Поэтому в данном случае, независимо от того, программно или аппаратно реализован фильтр, целесообразно перемещать не информацию по ячейкам, а наращивать значение номера ячейки (указатель) БЗ, от которого отсчитываются номера других ячеек БЗ. Чтобы перейти от крайней ячейки к освободившейся с другого края, надо нарастить указателя *по модулю*  $M$ . Ниже приводится соответствующий алгоритм, который может использоваться для любого сдвига информации, например, строки или изображения на экране компьютера (при добавлении второй размерности):

1.  $x_M := a(i)$ ;
2.  $a(i) := x_{in}$ ;
3.  $x_m := a((i - m) \bmod M)$ ;
4.  $i := (i + 1) \bmod M$ .

Алгоритм реализует БЗ с отводами длиной  $M$  ячеек. Данные хранятся в массиве  $a$  размерностью  $M$  (номера элементов изменяются от 0 до  $M - 1$ ). Параметр  $i$  – указатель БЗ, т.е. номер элемента массива,

в данный момент соответствующего входному отсчету. На следующем шаге указатель наращивается, и этот отсчет становится предыдущим,  $mod$  – операция получения числа по модулю ( $x \bmod y$  равно остатку от деления  $x$  нацело на  $y$ ). Так, например,  $(M \bmod M) = 0$ ,  $(-1 \bmod M) = M - 1$ ,  $(M+1 \bmod M) = 1$ .  $x_{in}$  – текущий входной отсчет, т.е.  $x(n)$ .  $x_M$  – выходной отсчет БЗ, т.е.  $x(n - M)$ . Отсчет  $x_m = x(n - m)$ , где  $0 \leq m \leq M - 1$  – «отвод» БЗ. Таких «отводов», т.е. операторов, подобных оператору З, может быть много, у каждого свое значение  $m$ . Участок программы встраивается в цикл по дискретному времени цифрового фильтра. Заметим, что строки 1 и 2 алгоритма нельзя менять местами. Перед началом фильтрации переменной  $i$  должно быть присвоено начальное значение (любое) в диапазоне  $0 \leq i \leq M - 1$ .

Такая организация алгоритма позволяет экономно расходовать оперативную память, поскольку запоминается только содержимое БЗ, а массивы входного и выходного сигналов запоминать не нужно. Следовательно, алгоритм может использоваться для сигналов, поступающих непрерывно.

Рассмотрим разновидность реализации БЗ с задержкой и «опережением». Как уже говорилось, четная функция имеет вещественный спектр, нечетная – мнимый. Если использовать четные или нечетные ИХ  $h(n)$ , фильтр будет физически нереализуем (при числе отсчетов ИХ более одного), так как в этом случае  $h(n) \neq 0$  при  $n < 0$ . Однако использование таких ИХ упрощает расчеты в 2-4 раза, поскольку передаточные функции будут или вещественными, или мнимыми. Поэтому целесообразно рассчитывать физически нереализуемые фильтры, а в конце расчета сдвигать полученную ИХ вправо (задерживать) так, чтобы выполнялось условие  $h(n) = 0$  при  $n < 0$ .

Можно явно не сдвигать ИХ в конце расчета, перенеся операцию ее сдвига в алгоритм реализации БЗ с задержкой и «опережением». «Опережение» здесь означает меньшую задержку относительно большей, т.е. БЗ и фильтр физически реализуемы. Такой алгоритм приведен ниже:

1.  $x_M := a(i)$ ;
2.  $a(j) := x_{in}$ ;
3.  $x_m := a((i - m) \bmod (M + N))$ ;
4.  $i := (i + 1) \bmod (M + N)$ ;
5.  $j := (j + 1) \bmod (M + N)$ .

Здесь  $j$  – указатель записи,  $i$  – указатель считывания. Остальные обозначения соответствуют предыдущему алгоритму. Добавлен

оператор 5 – инкремент (наращивание) указателя записи. В данном случае  $M$  – максимальная задержка в тактах,  $N$  – максимальное «опережение». Перед началом фильтрации переменным  $i$  и  $j$  должны быть присвоены начальные значения (любые) в диапазоне от 0 до  $M + N - 1$  включительно, причем  $(i - j) \bmod (M + N) = M - 1$ , например,  $j = 0$ ,  $i = M - 1$ . Размер (число элементов) массива  $a$  должен быть не менее  $(M + N)$ . Номера его элементов изменяются от 0 до  $M + N - 1$ . Таким образом, значение  $M$  задается начальными значениями  $i$  и  $j$ , величина  $N$  определяется суммой  $(M + N)$  в алгоритме. В операторе 3 параметр  $m$  может иметь значения  $-N \leq m \leq M - 1$ , где  $m > 0$  соответствует задержке,  $m < 0$  – «опережению»,  $m = -N$  – самому большому «опережению», т.е. отсчету  $x_{in}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в пособии рассмотрены основные методы цифровой обработки сигналов.

Если возникли проблемы с пониманием материала, можно обратиться к литературе [2], [3], [4].

Книга [8], несмотря на 1978 год издания, до сих пор является настольной книгой многих специалистов по цифровой обработке сигналов.

Нужную информацию можно найти в Интернете, задав в строке поиска поискового сервера (например, yandex.ru) набор ключевых (т.е. специфичных) слов, например, «цифровой фильтр рекурсивный БИХ». Если найдено слишком много ссылок, количество ключевых слов увеличивают, если мало – уменьшают. После этого повторяют поиск.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основная литература

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пос. для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006.
2. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1983.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1990.
4. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов. радио, 1973.

### Дополнительная литература

5. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985.
6. Марпл С.Л.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: – Мир, 1990.
7. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радио и связь, 1985.
8. Рабинер Л.Р., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.Мир, 1978.
9. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов – М.: Мир, 1988.
10. Карташкин А.С. Линейные цифровые фильтры. Вопросы и задачи: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1995.
11. Турулин И.И. Сборник руководств к лабораторным работам № 2–4 по курсу «Преобразование измерительных сигналов». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004.
12. Турулин И.И. Проектирование цифровых рекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой на интеграторах // Изв. вузов. Электроника. – №6. – 1998. – С. 73–77.
13. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб., Политехника, 1999.
14. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2003.
15. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986.
16. Гоноровский И.С., Демин М.П. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1993.
17. Метод ограничения импульсной характеристики цифрового рекурсивного фильтра с помощью компенсирующих прямых связей // Радиотехника. – №11. – 2000. – С. 36–39.

## Сведения об авторах

**Турулин Игорь Ильич**, доктор технических наук, профессор кафедры информационных измерительных технологий и систем Института нанотехнологий, электроники и приборостроения Южного федерального университета;

**Шушкевич Татьяна Викторовна**, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных измерительных технологий и систем Института нанотехнологий, электроники и приборостроения Южного федерального университета.



**Учебное издание**

**Турулин Игорь Ильич,  
Шушкевич Татьяна Викторовна**

# **ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

*Учебное пособие*

*Оригинал-макет подготовлен  
Н. В. Фоменко (редактура, верстка),*

Издательство Таганрогского института имени А. П. Чехова.  
Лицензия на издательскую деятельность ИД 04246 от 24.04.2001 г.  
Адрес: 347936, Таганрог, ул. Инициативная, 46

Сдано в набор 11.03.2015. Подписано в печать с оригинала-макета 20.04.2015.  
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x90/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Уч.-изд. л. 4,02. Усл. печ. л. 5,25. Тираж 100 экз. Заказ № \_\_\_\_\_

Отпечатано в типографии издателя Ступина С.А.  
Адрес: 347900, Таганрог, пер Лермонтовский, 25