

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Моралес Арробо Эвелин Хиомара

ОПЕРАТОРЫ АДАМАРА-БЕРГМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ
ТИПА ЛЕБЕГА И ГЕЛЬДЕРА

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Карапетянц Алексей Николаевич

Содержание

Введение	4
Предварительные замечания и определения	16
Глава 1. Ограниченность операторов Адамара-Бергмана на весовых пространствах типа Лебега и Бергмана	26
1.1 Определение допустимых весов и примеры	27
1.2 Ограниченность в $L^p(v)$: достаточные условия	29
1.3 Ограниченность в $L^p(v)$: необходимые условия	31
1.4 Ограниченность в $L^p(v)$ для одного частного случая	36
1.5 Ограниченность на весовых пространствах Бергмана	37
1.6 Ограниченность в пространствах Харди	38
1.7 Ограниченность в пространстве Блоха	41
1.8 Весовое пространство Бергмана: случай радиального веса	44
Глава 2. Ограниченность весовых операторов Адамара-Бергмана в весовых пространствах Лебега с каноническими весами	49
2.1 Ограниченность в $L^p_\lambda(\mathbb{D})$: использование подхода для операторов с однородными ядрами	50
2.2 Ограниченность из $L^p_{\lambda_1}(\mathbb{D})$ в $L^p_{\lambda_2}(\mathbb{D})$: достаточные условия	65
2.3 Ограниченность из $L^p_{\lambda_1}(\mathbb{D})$ в $L^p_{\lambda_2}(\mathbb{D})$: необходимые условия	67
2.4 Ограниченность из $\mathcal{A}^p_{\lambda_1}(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}^p_{\lambda_2}(\mathbb{D})$: достаточные условия	72
2.5 Ограниченность из $L^p_{\lambda_1}(\mathbb{D})$ в $L^p_{\lambda_2}(\mathbb{D})$: использование подхода для операторов с однородными ядрами	75
Глава 3. Весовые оценки для операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка	82
3.1 Обобщенные пространства Гельдера переменного порядка	85
3.2 Оценки типа Зигмунда	86

3.3	Ограниченность операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка	90
	Заключение	92
	Список литературы	93

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Операторы Адамара-Бергмана были введены и изучены в работах [29, 30] (см. также [1]), в которых в основном рассматривался непереманный случай, т.е. когда ядро g оператора не зависит от внешней переменной

$$\mathbb{K}_g f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z) f(z\bar{w}) dA(w), \quad g, f \in H(\mathbb{D}). \quad (1)$$

Эти операторы возникли как естественное обобщение ортогонального проектора, и дают интегральную реализацию мультипликаторных операторов (множителей коэффициентов Тейлора) при рассмотрении в пространствах аналитических функций. Изучение операторов в интегральной форме дает ряд преимуществ в контексте применения теории интегральных операторов, особенно при работе с пространствами функций, даже с пространствами аналитических функций, для которых теория мультипликаторов неприменима. Конечно, при рассмотрении операторов типа (1) на пространствах функций, не являющихся аналитическими, использование мультипликаторов Тейлора вообще не имеет смысла.

Мы продолжаем изучение более общих операторов, то есть исследуем общие операторы Адамара-Бергмана переменного порядка следующего вида

$$\mathbb{K}_{g,\mu} f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D} \quad (2)$$

где μ обозначает произвольную положительную меру Радона на $\mathbb{D}$, при условии, что $g(z, w)$ является $dA \otimes d\mu$ -измеримой. Важно отметить, что для этих типов операторов теория мультипликаторов больше не работает. Эти общие операторы впервые появились в [30] в связи с изучением пространств Гельдера переменного порядка (и даже более общих пространств, построенных с переменным модулем непрерывности). Изучение этих операторов было продолжено в [32–36, 47], большинство результатов этих работ,

которые будут представлены позже, были получены соискателем, см. также [39].

Существенной мотивацией для этого исследования является то, что в классе этих операторов есть также классические и важные операторы анализа. Например, оператор интегрирования переменного порядка следующего вида

$$\mathbb{I}^{\alpha(\cdot)} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z\bar{w})}{(1-w)^{2-\alpha(z)}} dA(w), \quad \operatorname{Re} \alpha(z) \geq 0, \quad (3)$$

который является частным случаем операторов (2). Как отмечалось ранее, этот оператор и его обобщения естественным образом возникают в контексте изучения пространств Гельдера переменного порядка. Другим хорошим примером являются некоторые операторы Вольтерра, изученные в классических пространствах аналитических функций в [2], [52], и [42] следующего вида

$$T_h f(z) = \int_0^z h'(\zeta) f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 (h'(zt)z) f(zt) dt, \quad (4)$$

где $g(z, t) = h'(zt)z$, h - фиксированная аналитическая функция на единичном диске, а мера $d\mu(t) = dt$ сосредоточена на $(0, 1)$.

Важно отметить одно замечательное свойство операторов вида (1) и, в определенном случае, оператора (2), которое проявляется именно в контексте интегрального представления. А именно, эти операторы фактически являются комплексным аналогом операторов с однородными ядрами, которые стали классическими в рамках вещественного анализа и теории интегральных операторов и уравнений. Классическая теория представлена в книгах [18, 55] и продолжена в недавних работах [3–7]. Мы также обращаем внимание на статью [24], где были рассмотрены и подробно изучены общие однородные операторы. Это наблюдение позволяет нам, по возможности, строить аналогии с известными фактами из теории операторов с однородными ядрами и разрабатывать дальнейшие методы теории операторов с однородными ядрами в комплексном анализе.

Методы исследования. В данной диссертационном исследовании мы используем методы функционального анализа, теорию функций веще-

ственного и комплексного переменного, теорию интерполяции операторов, теорию интеграла Бохнера, методы гармонического анализа и теорию операторов с однородными ядрами.

Научная новизна. Основным объектом исследования являются операторы Адамара-Бергмана и операторы Адамара-Бергмана переменного порядка в весовых пространствах типа Лебега и в некоторых пространствах комплексного анализа. Ограниченность операторов Адамара-Бергмана переменного порядка в весовых пространствах типа Лебега впервые изучается в работах автора диссертации. Некоторые понятия вводятся впервые, например, допустимые веса для пространств типа Лебега. Подход, основанный на интеграле Бохнера, также впервые используется в этих ситуациях, а также впервые изучены оценки типа $L^p_{\lambda_1}(\mathbb{D}) \rightarrow L^p_{\lambda_2}(\mathbb{D})$ для весовых операторов Адамара-Бергмана (переменного порядка) с различными показателями веса, с использованием теории операторов с однородными ядрами. Также пришлось использовать другие новые подходы и методы.

Цель работы. Основной целью диссертационного исследования является изучение общих, весовых операторов Адамара - Бергмана (в том числе переменного порядка) в весовых пространствах типа Лебега и Бергмана, а также в других пространствах аналитических функций, таких как Харди, Блоха и аналитические пространства Гельдера на единичном диске. Также изучаются весовые оценки для операторов дробного интегрирования переменного порядка, которые являются частным случаем операторов Адамара-Бергмана переменного порядка, в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанные методы могут быть использованы в исследованиях по теории операторов и теории функций комплексного переменного. Кроме того, в определенном смысле класс операторов Адамара-Бергмана можно сравнить с операторами Теплица, которые были изучены многими авторами и имеют множество применений. В некоторых особых случаях радиального веса опера-

торы Адамара–Бергмана реализуются как операторы Теплица с радиальными символами. Поэтому, в общем, операторы Адамара–Бергмана также можно рассматривать как обобщение операторов Теплица и дальнейшее развитие теории.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертационном исследовании, основана на применении методов функционального анализа, теории вещественных и комплексных переменных функций, теории интерполяции операторов, теории интеграла Бохнера, методов гармонического анализа и теории операторов с однородными ядрами.

Апробация результатов. Диссертация выполнена в Южном федеральном университете на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений при поддержке Регионального математического центра Южного федерального университета в рамках проектов Министерства образования и науки России, соглашения № 075-02-2022-893, 075-02-2023-924, 075-02-2024-1427, 075-02-2025-1720, 075-02-2026-1316.

Соискатель выступал с докладами на следующих международных конференциях:

1. Международная научная конференция «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа-X» (Ростов-на-Дону, 22-27 августа 2021 г.);
2. XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2021, 17-26 сентября 2021 г.);
3. Международная научная конференция «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа-2022» (Ростов-на-Дону, 21-26 августа 2022 г.);
4. International Conference on Mathematical Analysis and Differential Equations (Tsakhkadzor, Armenia, September 23, 2022);
5. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смеж-

- ные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (Республика Северная Осетия-Алания, 2023 г.);
6. Международная научная конференция «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа-2023» (Ростов-на-Дону, 20-25 августа 2023 г.);
 7. III Конференция математических центров России (Майкоп, Республика Адыгея, 10–15 октября 2023 г.);
 8. Студенческая научная конференция «Неделя науки — 2024» (Ростов-на-Дону, 24–29 апреля 2024 г.);
 9. XIX Владикавказская молодежная математическая школа (онлайн, 24–28 июня 2024 г.);
 10. Международная научная конференция «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа» (Нальчик, 11–14 марта 2025 г.);
 11. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVIII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (Владикавказ, 29 июня–5 июля 2025 г.);
 12. V Конференция математических центров России (Красноярск, 11–16 августа 2025 г.);
 13. Международная научная конференция «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа - 2025» (Ростов-на-Дону, 24–29 августа 2025 г.);
 14. Семинар по дифференциальным уравнениям и анализу «Seminario de Analisis y Ecuaciones Diferenciales» (CINVESTAV (онлайн), руководители – Х. Джассо, Р. М. Портер и С. М. Торба, 27 марта 2026 г.);

15. «Студенческий математический семинар» ЮФУ (Ростов-на-Дону, руководители – Карапетянц А.Н. и Кравченко В.В., 02 апреля 2026 г.);
16. Научный семинар Математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, руководители – Скубачевский А.Л., 07 апреля 2026 г.);
17. VI Конференция математических центров России (Казань, 17–22 августа 2026 г.);
18. Международная научная конференция «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа - XVI» (Ростов-на-Дону, 23–28 августа 2026 г.).

Личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 8 публикациях: [32–34, 37, 38, 47]. В совместных работах [32–34, 37, 38] научному руководителю принадлежит постановка задач и общее руководство работой, а соискателю – проведение исследования и получение основных результатов. В совместной работе с научным руководителем и А.Р.Миротиным [35], этому автору принадлежат общие результаты относительно интеграла Бохнера и также идея метода исследования ограниченности с привлечением леммы Бохнера - Миротина. В совместной работе с научным руководителем и Ф. Сааведра [36] этому автору принадлежат примеры конкретных ядер (условия ограниченности). В этих двух статьях соискатель также в целом осуществлял исследования и получение основных результатов. Все основные результаты, выносимые на защиту получены лично соискателем.

Список публикаций, опубликованных по теме диссертации:

1. **Karapetyants, A.** Weighted estimates for operators of fractional integration of variable order in generalized variable Hölder spaces / A. Karapetyants, E. Morales // Fract Calc Appl Anal. – 2022. – Vol. 25. – P. 1250–1259. – DOI: 10.1007/s13540-022-00040-4. (Scopus, Q1)

2. **Karapetyants, A.** A note on Hadamard-Bergman convolution operators / A. Karapetyants, E. Morales // Bol. Soc. Mat. Mex. – 2022. – Vol. 28, № 65. – DOI: 10.1007/s40590-022-0045. (Scopus, Q2)
3. **Karapetyants, A.** Boundedness of Hadamard–Bergman and Variable Hadamard–Bergman Convolution Operators / A. Karapetyants, E. Morales // Math Notes. – 2023. – Vol. 114. – P. 804–817. – DOI: 10.1134/S0001434623110160 (Scopus, Q2)
4. **Karapetyants, A.** Hadamard–Bergman Operators on Weighted Spaces / A. Karapetyants, A. Mirotin, E. Morales // Complex Anal. Oper. Theory. – 2024. – Vol. 18, № 37. – DOI: 10.1007/s11785-024-01483-8. (Scopus, Q2)
5. **Morales, E.** Boundedness of weighted Hadamard–Bergman and weighted variable Hadamard–Bergman convolution operators / E. Morales // Bol. Soc. Mat. Mex. – 2024. – Vol. 30, № 70. – DOI: 10.1007/s40590-024-00643-2. (Scopus, Q2)
6. **Karapetyants, A.** Hadamard–Bergman type operators in weighted Lebesgue and Bergman spaces / A. Karapetyants, F. Leon-Saavedra, E. Morales // Bol. Soc. Mat. Mex. – 2025. – Vol. 31, № 98. – DOI: 10.1007/s40590-025-00788-8. (Scopus, Q2)
7. **Karapetyants, A.** Hadamard-Bergman Operators in Weighted Lebesgue and Bergman Type Spaces on the Unit Disc: an Overview of Recent Advances / A. Karapetyants, E. Morales // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2026. – Vol. 47, № 3. – P. 1022–1034. (Scopus, Q2)
8. **Karapetyants, A.** Growth of Holomorphic Functions in Banach Function Space and in Weighted Bergman Spaces as a Special Case / A. Karapetyants, E. Morales // Math Notes. — 2026. — Vol. 120, no. 4. — P. 679–687. (Scopus, Q2)

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя А.Н.Карапетянца за чуткое наставничество, создание исключительно дружелюбной атмосферы общения и теплую поддержку.

Структура и объем диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, предварительных сведений, трех глав и списка литературы. Первая и вторая главы посвящены ограниченности общих операторов Адамара-Бергмана (переменного порядка) и весовых операторов Адамара-Бергмана (переменного порядка) на весовых пространствах типа Лебега и Бергмана. В третьей главе мы изучаем весовые оценки для подкласса операторов Адамара-Бергмана дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка аналитических функций.

Содержание работы

Основная идея главы 1 заключается в изучении ограниченности общих операторов (2) в весовых пространствах Лебега. Мы вводим определение допустимых весов для пространств Лебега и получаем достаточные и необходимые условия ограниченности для общих операторов Адамара-Бергмана (2) в весовом пространстве типа Лебега $L^p(v) = L^p(\mathbb{D}, v)$. Далее мы приводим достаточные условия ограниченности общего оператора Адамара-Бергмана переменного порядка (2) (теорема 1.1). Необходимое условие получено для оператора $\mathbb{K}_{g,\mu}$ с ядром $g = g(z)$ (теорема 1.2). Также, было получено необходимое условие для оператора $\mathbb{K}_{g,\mu}$ с ядром $g = g\left(\frac{z}{|z|}, w\right)$ (теорема 1.3), то есть для случая особой зависимости от внешней переменной. Эти результаты опубликованы в [35].

Кроме того, доказана ограниченность общих операторов (2) в некоторых пространствах аналитических функций. Эти результаты получены с использованием теории интеграла Бохнера. Мы начинаем с весового пространства Бергмана $\mathcal{A}_v^p = \mathcal{A}_v^p(\mathbb{D}) := H(\mathbb{D}) \cap L_v^p(\mathbb{D})$ (теорема 1.6), продолжаем с пространством Харди (теорема 1.7) и пространством Блоха (теорема

1.8). Далее мы рассмотрим частный случай весового пространства Бергмана с радиальным весом (теорема 1.9), в котором мы смогли в определенном смысле улучшить условие ограниченности, используя аналитическую природу функций в таком пространстве и оценки роста функций (теорема 2). Кроме того, для операторов Адамара-Бергмана неперенного порядка, заданных относительно $\mu = dA$, мы устанавливаем теорему типа Юнга в $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ (теорема 1.10). Все вышеупомянутые результаты являются новыми и были опубликованы в [35].

В главе 2 мы рассмотрим случай оператора (2), заданного относительно $d\mu = dA_\lambda$, т.е. оператора вида

$$\mathbb{K}_g^\lambda f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) dA_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (5)$$

где $dA_\lambda(w) = (\lambda + 1)(1 - |w|^2)^\lambda dA(w)$ и $\lambda > -1$. Мы будем называть операторы (5) весовыми операторами Адамара-Бергмана переменного порядка и изучать ограниченность таких операторов в весовых пространствах Лебега $L_\lambda^p(\mathbb{D})$. Мы имеем дело с каноническими весами, связанными с границей единичного диска, т.е. весами типа $(1 - |z|^2)^\lambda$, $\lambda > -1$. Исследование в случае канонических весов, связанных с границей единичного диска, является наиболее интересным и важным в контексте теории функций комплексной переменной в диске.

Мы приводим достаточные и необходимые условия ограниченности как для весовых операторов Адамара-Бергмана, так и для весовых операторов Адамара-Бергмана переменного порядка в весовых пространствах Лебега $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, используя технику операторов с однородными ядрами. На самом деле, мы имеем две разные ситуации в зависимости от знака весового параметра λ . Веса допустимы только для $\lambda \geq 0$, но мы не применяем результаты предыдущей главы напрямую к этим случаям и используем прямые оценки, которые позволяют нам получить результаты в более точной форме в этом случае. Случай $-1 < \lambda < 0$ не рассматривается в предыдущей главе, поскольку вес недопустим при таком λ .

Итак, достаточные и необходимые условия ограниченности в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$

приведены в следующих теоремах диссертации: теорема 2.1, теорема 2.2, теорема 2.3, теорема 2.4 и теорема 2.5. Также отметим, что в качестве примера мы приводим достаточное условие ограниченности для невесовых операторов Адамара-Бергмана в невесовых пространствах Лебега $L^1(\mathbb{D})$ (пример 2.10), которое упрощается в этом конкретном случае. Эти результаты опубликованы в [47].

Кроме того, мы изучаем случай, когда весовой параметр пространства и параметр веса, используемый в определении оператора различны. Таким образом, мы рассматриваем $\mathbb{K}_g^\alpha$, действующий из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$. Ранее, в статьях [14–16], в случае единичного диска изучалась динамика свойств теплицевых операторов при изменении весового параметра (к бесконечности), и эта теория получила очень интересное развитие в связи с классическими объектами математической физики. Мы ссылаемся на статью [40] для более подробной информации по этому вопросу и многих других интересных фактов. Это открывает возможности для дальнейшего развития исследования при изменении параметров веса.

Мы приводим достаточные и необходимые условия ограниченности весовых операторов Адамара - Бергмана и весовых операторов Адамара - Бергмана переменного порядка в весовых пространствах типа Лебега и Бергмана с разными весовыми показателями, т.е. из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$, и из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ соответственно. Мы использовали два метода для получения достаточных условий ограниченности между весовыми пространствами Лебега: прямые интегральные неравенства (оценки) и подход для операторов с однородными ядрами.

Сначала рассматриваем достаточные условия, полученные путем прямых вычислений. Достаточное условие ограниченности весовых операторов Адамара - Бергмана переменного порядка (5) в весовых пространствах типа Лебега существуют дополнительные ограничения на параметры пространств, как λ_1 , так и λ_2 являются положительными (теорема 2.6).

Далее, мы приводим достаточные условия для весовых операторов Адамара - Бергмана переменного порядка (5) с аналитическим ядром, то

есть $g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$ (теорема 2.9 и теорема 2.10). В теореме 2.9 параметры λ_1 и λ_2 также положительны.

Также обратим внимание, что когда $f, g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$, весовой оператор Адамара-Бергмана переменного порядка может быть записан в следующем виде

$$\mathbb{K}_g^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w}) f(w) dA_\alpha(w).$$

Мы приводим достаточное условие для весового оператора Адамара-Бергмана переменного порядка, представленного в этой форме из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$. В этом случае нам не нужно, чтобы значения λ_1 и λ_2 были положительными.

Далее, мы приводим достаточные условия для ограниченности весовых операторов Адамара - Бергмана и весовых операторов Адамара - Бергмана переменного порядка (теорема 2.11 и теорема 2.12 соответственно) из $L_{\lambda_1}^1(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^2(\mathbb{D})$, применяя подход для операторов с однородными ядрами.

Наконец, мы приводим необходимые условия ограниченности весовых операторов Адамара - Бергмана (теорема 2.7) и весовых операторов Адамара - Бергмана переменного порядка (теорема 2.8).

Также ядра, для которых выполняется необходимое условие (теорема 2.8) приведены в следующих примерах диссертации: пример 2.11 и пример 2.12.

В главе 3 мы сосредоточиваемся на операторах дробного интегрирования переменного порядка, которые являются частным случаем весовых операторов Адамара-Бергмана переменного порядка (5):

$$\mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(z)}} dA_\lambda(w), \quad \operatorname{Re} \alpha(z) \geq 0, \lambda \geq -1. \quad (6)$$

Эта глава посвящена весовыми оценками для этих операторов в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка аналитических функций на единичном диске $\mathbb{D}$. Наш подход основан на методе, связанном с оценками типа Зигмунда, который был недавно разработан в рамках вещественного анализа в связи с соответствующими обобщенными пространствами Гельдера переменного порядка. Благодаря выбору методики можно включить в рассмотрение случай, когда действительная часть комплексно-

го порядка оператора вырождается, так что появляются потенциалы чисто мнимого порядка.

Недавно были изучены обобщенные пространства Гельдера, определяемые через модуль непрерывности, и еще более общие пространства Гельдера с модулем непрерывности переменного порядка, см. [9, 10, 28–31]. В таких пространствах были исследованы операторы дробного интегрирования, см. [29, 30]. В то же время в этих статьях используется подход, который основан на характеристике функций Гельдера в терминах поведения производных вблизи границы. Однако этот подход подразумевает существенные дополнительные ограничения на модуль непрерывности, который определяет соответствующее пространство Гельдера. Целью данной главы является получение весовых оценок ограниченности для операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка с минимальными условиями на переменный модуль непрерывности (определение 3.4). Как уже упоминалось выше, применяется подход, разработанный в рамках вещественного анализа в работах [49–51] (отметим также обзорную работу [48]). Отметим, что роль условий типа Зигмунда в изучении свойств отображения дробных интегралов в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка была, в частности, показана в работе [20].

Мы приводим оценки типа Зигмунда модуля непрерывности (теорема 3.1), которые представляют самостоятельный интерес. Мы используем эти оценки для доказательства теорем о весовой ограниченности для операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка аналитических функций $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ (теорема 3.2 и теорема 3.3).

Предварительные замечания и определения

Пусть $\mathbb{D}$ - единичный диск в комплексной плоскости. Пусть $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ – нормированная мера Лебега на единичном диске, $z = x + iy \in \mathbb{D}$. Пусть

$-1 < \lambda < \infty$ и

$$dA_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda dA(z).$$

Символ $L^p(\mathbb{D})$ обозначает пространство Лебега на единичном диске с мерой dA , т.е. $L^p(\mathbb{D}) := L^p(\mathbb{D}, dA)$. Кроме того, $L_\lambda^p(\mathbb{D}) := L^p(\mathbb{D}, dA_\lambda)$ обозначает пространство для весовых пространств Лебега, $L^p(d\mu) := L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ обозначает пространство Лебега на единичном диске с произвольной положительной мерой Радона μ . Наконец, для веса v на $\mathbb{D}$, символ $L^p(v) := L^p(\mathbb{D}, v dA)$ обозначает весовое пространство. Для краткости мы пишем $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{D})}$ и $\|\cdot\|_{p,\lambda} := \|\cdot\|_{L_\lambda^p(\mathbb{D})}$. Для других случаев, мы всегда будем указывать пространство в индексе нормы, т.е. $\|\cdot\|_{L^p(v)}$, и т.д. (на самом деле, из контекста будет интуитивно понятно, какая норма используется).

Пусть $H(\mathbb{D})$ - множество функций f , аналитических в $\mathbb{D}$.

Пространство Бергмана $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ является подпространством аналитических функций в $L^p(\mathbb{D})$ (см., например, [12, 54]). Напомним, что проекция Бергмана $B_{\mathbb{D}}$, определенная на $f \in L^1(\mathbb{D})$ следующим образом

$$B_{\mathbb{D}}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} dA(w), \quad z \in \mathbb{D} \quad (7)$$

ограничена из $L^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$. Как мы увидим ниже, интеграл в (7) существует как несобственный для любой $f \in H(\mathbb{D})$. Весовое пространство Бергмана определяется следующим образом: $\mathcal{A}_\lambda^p(\mathbb{D}) = L_\lambda^p(\mathbb{D}) \cap H(\mathbb{D})$.

Оператор $\mathbb{T}$ называется сублинейным, если (см., например, [11])

1. $\mathbb{T}f$ определяется однозначно, если $f = f_1 + f_2$, $\mathbb{T}f_1$ и $\mathbb{T}f_2$ определены,
2. для любой константы k , определяется значение $\mathbb{T}(kf)$, если $\mathbb{T}f$ определено,
3. $|\mathbb{T}(f_1 + f_2)| \leq |\mathbb{T}(f_1)| + |\mathbb{T}(f_2)|$,
4. $|\mathbb{T}(kf)| = |k| |\mathbb{T}f|$.

Весовые операторы Адамара-Бергмана переменного порядка

Мы начинаем наше изучение с общего оператора, который имеет вид

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D} \quad (8)$$

где μ обозначает положительную меру Радона на $\mathbb{D}$ (обычная мера Бореля, такая, что мера каждого компактного подмножества $\mathbb{D}$ конечна), при условии, что $g(z, w)$ является $dA \otimes d\mu$ -измеримой и приведенный выше интеграл существует в смысле Лебега.

Пример 1. Следующий частный случай интегральных операторов свертки Адамара-Бергмана ("операторы Вольтерра") интенсивно изучался в классических пространствах аналитических функций (см., например, [2], [52], [42]):

$$T_h f(z) = \int_0^z h'(\zeta) f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 (h'(zt)z) f(zt) dt,$$

где $g(z, t) = h'(zt)z$, h - фиксированная аналитическая функция на единичном диске, а мера $d\mu(t) = dt$ сосредоточена на интервале $(0, 1)$.

Другой хороший пример связан с оператором интегрирования переменного порядка.

Пример 2. Оператор (дробного) интегрирования переменного порядка был введен в [30] в виде

$$\mathbb{I}^{\alpha(\cdot)} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z\bar{w})}{(1-w)^{2-\alpha(z)}} dA(w), \quad \operatorname{Re} \alpha(z) \geq 0.$$

Такие операторы и их обобщения естественным образом возникают в теории функций, например, при изучении пространств Гельдера переменного порядка аналитических функций, см. [30, 32, 39].

Частным случаем приведенного выше оператора (8) является оператор с ядром $g : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, аналитический по второй переменной, т.е. функция $w \mapsto g(z, w)$ является аналитической по $w \in \mathbb{D}$ для каждого $z \in \mathbb{D}$. Пусть также μ будет такой, что $\mu(\mathbb{D}) < \infty$.

Обозначим

$$\begin{aligned}\mu_k &= \int_{\mathbb{D}} |w|^{2k} dA(w), \\ g_k(z) &= \mu_k^{-1} \int_{\mathbb{D}} g(z, w) \bar{w}^k d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D}.\end{aligned}$$

Следующий результат справедлив для случая μ , когда одночлены z^n , $n = 0, 1, \dots$, образуют ортогональный базис на единичном диске относительно меры μ . Это тот случай, например, когда $d\mu(z) = v(z)dA(z)$ с положительной радиальной функцией (весом) $v(z) = v(|z|)$ такой, что $rv(r) \in L^1(0, 1)$.

Лемма 1. Пусть $f, g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$. Пусть μ будет такой, что $\mu(\mathbb{D}) < \infty$ и такой, что z^n , $n = 0, 1, \dots$, образуют ортогональный базис на единичном диске. Тогда интеграл

$$\int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

существует как несобственный:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|w| < r} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k(z) z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (9)$$

и, более того,

$$\int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w) = \int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w}) f(w) d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (10)$$

Доказательство. Зафиксируем $z \in \mathbb{D}$. Для $g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) w^n \in H(\mathbb{D})$ и для $f(w) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m w^m \in H(\mathbb{D})$ мы имеем

$$\begin{aligned}\int_{|w| < r} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w) &= \int_{|w| < r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) w^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m (z\bar{w})^m \right) d\mu(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_m g_n(z) z^m \int_{|w| < r} w^n \bar{w}^m d\mu(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n(z) z^n \int_{|w| < r} |w|^{2n} d\mu(w).\end{aligned}$$

Поскольку $g(z, \cdot), f \in H(\mathbb{D})$, и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n g_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq 1,$$

все приведенные выше ряды равномерно сходятся на компактных подмножествах $\mathbb{D}$, поэтому замена сумм и интегралов допустима.

Из этого следует (9). Теперь (10) следует из симметрии приведенного выше вычисления. На этом доказательство заканчивается. $\square$

На самом деле, верно более общее утверждение. Доказательство аналогично, и мы его опускаем.

Замечание 1. Пусть $g(z, \cdot), h(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$. Для любого $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w})h(z, w)d\mu(w) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w)h(z, z\bar{w})d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (11)$$

где оба интеграла существуют как несобственные интегралы.

Мы также изучаем случай оператора (8), заданного относительно $d\mu = dA_\lambda$:

$$\mathbb{K}_g^\lambda f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w)f(z\bar{w})dA_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (12)$$

Мы будем называть операторы (12) весовыми операторами Адамара-Бергмана переменного порядка. Для этих операторов с аналитическим ядром $g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$ и для функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \in H(\mathbb{D})$ мы имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|w| < r} g(z, w)f(z\bar{w})dA_\lambda(w) = (\lambda + 1) \sum_{k=0}^{\infty} B(k + 1, \lambda + 1) f_k g_k(z) z^k.$$

где

$$g_k(z) = \mu_k^{-1} \int_{\mathbb{D}} g(z, w)\bar{w}^k dA_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\mu_k = \int_{\mathbb{D}} |w|^{2k} dA_\lambda(w).$$

Замечание 2. Пусть $f, g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$ и $\lambda > -1$. Интеграл в (12) существует как несобственный интеграл для любого $z \in \mathbb{D}$, и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} g(z, w)f(z\bar{w})dA_\lambda(w) &= \int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w})f(w)dA_\lambda(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B(n + 1, \lambda + 1) f_n g_n(z) z^n, \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вспомогательные результаты

Нам понадобятся следующие леммы, приведенные ниже.

Лемма 2. ([46]). Пусть $(G; t)$ - измеримое пространство, $\mathcal{F}(G)$ - некоторое банахово пространство t -измеримых функций на G , (Ω, μ) - σ -компактное квазиметрическое пространство с положительной мерой Радона μ , а $F(w, z)$ - функция на $\Omega \times G$. Предположим, что

- (a) сходимость последовательности в норме в $\mathcal{F}(G)$ приводит к сходимости некоторой подпоследовательности к той же функции для t -п.в. $z \in G$;
- (b) $F(w, \cdot) \in \mathcal{F}(G)$ для μ -п.в. $w \in \Omega$;
- (c) отображение $w \mapsto F(w, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(G)$ интегрируемо по Бохнеру относительно μ .

Тогда для интеграла Бохнера справедлива следующая формула

$$\left((B) \int_{\Omega} F(w, \cdot) d\mu(w) \right) (z) = \int_{\Omega} F(w, z) d\mu(w)$$

для t - п.в. $z \in G$.

Следующая лемма является новой версией предыдущей, которая принадлежит А. Миротину.

Лемма 3. ([46]). Пусть (Ω, μ) - измеримое пространство, G -множество и $\mathcal{F}(G)$ - некоторое банахово пространство функций на G . Рассмотрим функцию $F : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{C}$ и предположим, что

- (a) функционал $T_{z_0} : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывен для некоторого $z_0 \in G$;
- (b) $F(w, \cdot) \in \mathcal{F}(G)$ для п.в. $w \in \Omega$;
- (c) функция $w \mapsto F(w, \cdot)$ принадлежит $L^1(\mu, \mathcal{F}(G))$.
- (d) функция $w \mapsto F(w, z_0)$ принадлежит $L^1(\mu)$, для п. в. $z_0 \in G$.

Тогда

$$\left(\int_{\Omega} F(w, \cdot) d\mu \right) (z_0) = \int_{\Omega} F(w, z_0) d\mu.$$

Теорема 1 ([53]). Предположим, что $0 < p < \infty$ и $\lambda > -1$. Тогда

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{p,\lambda}}{(1 - |z|^2)^{\frac{2+\lambda}{p}}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

для всех $f \in \mathcal{A}_{\lambda}^p(\mathbb{D})$.

Следующая лемма интуитивно понятно, но мы приводим ее ниже для ясности.

Лемма 4 ([54]). Предположим, что $w \in \mathbb{D}$, $\theta < 2$, $\tau > -1$, и

$$I_{\theta,\tau,\beta}(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{|z|^{-\theta}(1 - |z|^2)^{\tau}}{(1 - |zw|^2)^{\beta}} dA(z)$$

тогда

1. если $\beta - \tau < 1$, то $I_{\theta,\tau,\beta}(w)$ ограничен на $\mathbb{D}$ снизу и сверху положительной константой.

2. если $\beta - \tau > 1$, то

$$I_{\theta,\tau,\beta}(w) \sim \frac{1}{(1 - |w|^2)^{\beta-1-\tau}}, \quad |w| \rightarrow 1. \quad (14)$$

3. если $\beta - \tau = 1$, то

$$I_{\theta,\tau,\beta}(w) \sim \ln \frac{1}{1 - |w|^2}, \quad |w| \rightarrow 1. \quad (15)$$

Доказательство. Мы используем следующее представление

$$\frac{1}{(1 - xt)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} x^n t^n, \quad |xt| < 1, \alpha > 0, \quad (16)$$

для вычисления интеграла (14)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{|z|^{-\theta}(1-|z|^2)^\tau}{(1-|zw|^2)^\beta} dA(z) &= \int_0^1 \frac{2rr^{-\theta}(1-r^2)^\tau}{(1-|w|^2r^2)^\beta} dr \\
&= \int_0^1 \frac{t^{-\frac{\theta}{2}}(1-t)^\tau}{(1-|w|^2t)^\beta} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)} |w|^{2n} \int_0^1 t^{n-\frac{\theta}{2}}(1-t)^\tau dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)} |w|^{2n} B\left(1+n-\frac{\theta}{2}, 1+\tau\right) \\
&= \frac{\Gamma(1+\tau)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(1+n-\frac{\theta}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(2+n+\tau-\frac{\theta}{2})} |w|^{2n}.
\end{aligned}$$

По формуле Стирлинга, имеем

$$\frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(1+n-\frac{\theta}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(2+n+\tau-\frac{\theta}{2})} \sim \frac{n^\beta \cdot n^{1-\frac{\theta}{2}}}{n \cdot n^{2+\tau-\frac{\theta}{2}}} = n^{\beta-2-\tau}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $\beta-1-\tau < 0$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\beta-2-\tau} |w|^{2n}, \quad |w| \rightarrow 1,$$

ограничен на $\mathbb{D}$ снизу и сверху положительной константой. Если $\beta-1-\tau = 0$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1} |w|^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|w|^{2n}}{n} = \ln \frac{1}{1-|w|^2}, \quad |w| \rightarrow 1.$$

Если $\beta-1-\tau > 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-2-\tau} |w|^{2n} \sim \frac{1}{(1-|w|^2)^{\beta-1-\tau}}, \quad |w| \rightarrow 1$$

так как

$$\frac{1}{(1-|w|^2)^{\beta-1-\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta-1-\tau)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta-1-\tau)} |w|^{2n}$$

и

$$\frac{\Gamma(n-\beta-1-\tau)}{n!} \sim n^{\beta-2-\tau}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Оценки роста функций в $\mathcal{A}^p(v)$

Напомним, что $\mathcal{A}^p(v) = L^p(v) \cap H(\mathbb{D})$. Следующий результат о росте аналитических функций вблизи границы единичного диска известен для весовых пространств. По крайней мере, в случае специального радиального веса $v(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda$, $\lambda > -1$, этот результат является классическим, и его можно найти в [53, 54]. Мы предпочитаем привести здесь доказательство (для случая общего радиального веса).

Как видно из доказательства, результат может быть дополнительно обобщен для общих банаховых функциональных пространств, однако необходимы некоторые дополнительные предположения. Мы оставляем этот вопрос открытым.

Теорема 2. Пусть v - радиальная неотрицательная функция (вес). Пусть $D(z, \delta)$ обозначает евклидов диск на $\mathbb{D}$ с центром z и радиусом δ , и $\chi_{D(z, \delta)}$ обозначает характеристическую функцию области $D(z, \delta)$, и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($1 \leq p < \infty$). Тогда для $f \in \mathcal{A}_v^p$ мы имеем

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{L^p(v)}}{\|\chi_{D(z, \delta)}\|_{L^p(v)}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (17)$$

где δ - фиксированное значение $0 < \delta \leq 1 - |z|$, и констант C_δ не зависит от f . В дополнение,

$$|f(z)| = o\left(\frac{1}{\|\chi_{D(z, 1-|z|)}\|_{L^p(v)}}\right), \quad |z| \rightarrow 1. \quad (18)$$

Доказательство. Зафиксируем $z \in \mathbb{D}$. Для всех $0 \leq \rho < 1 - |z|$ у нас есть

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{i\alpha})| d\alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Интегрирование переменной ρ по $(0, \delta)$ для фиксированного $\delta \leq 1 - |z|$ относительно меры $2\rho v(\rho) d\rho$ дает

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\|\chi_{D(z, \delta)}\|_{L^1(v)}} \int_{D(z, \delta)} |f(w)| v(w) dA(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Применяя неравенство Гельдера, мы имеем

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\|\chi_{D(z, \delta)}\|_{L^1(v)}} \|f \chi_{D(z, \delta)}\|_{L^p(v)} \|\chi_{D(z, \delta)}\|_{L^q(v)}.$$

Поскольку $L^p(v)$ является пространством, инвариантным относительно перестановок, то (см. страницу 9 из [8])

$$\|\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^q(v)} \approx \|\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^p(v)}^{-1} \|\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^1(v)},$$

и следовательно

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^p(v)}}{\|\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^p(v)}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 < \delta \leq 1 - |z|.$$

Поскольку $L^p(v)$ обладает свойством непрерывности нормы, то отсюда следует (18). Из-за $\|f\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^p(v)} \leq \|f\|_{L^p(v)}$ оценка (17) верна. $\square$

Глава 1.

Ограниченность операторов Адамара-Бергмана на весовых пространствах типа Лебега и Бергмана

Здесь мы изучаем ограниченность общих операторов Адамара-Бергмана переменного порядка

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.1)$$

в весовых пространствах типа Лебега и Бергмана. Начнем с пространства $L^p(v)$, где v - это вес на $\mathbb{D}$. Мы приводим определение допустимых весов и приводим ряд примеров. Далее мы приводим достаточное условие ограниченности операторов, заданных равенством (1.1) в $L^p(v)$ (теорема 1.1). Необходимые условия получены для оператора $\mathbb{K}_{g,\mu}$, заданного равенством (1.1) с ядром $g = g(w)$ (теорема 1.2), а также для оператора $\mathbb{K}_{g,\mu}$, заданного равенством (1.1) с ядром $g = g\left(\frac{z}{|z|}, w\right)$, то есть для случаев особой зависимости от внешней переменной (теорема 1.3). Мы также изучаем ограниченность таких общих операторов Адамара-Бергмана (переменного порядка) в весовом пространстве Бергмана (теорема 1.6), пространстве Харди (теорема 1.7) и пространстве Блоха (теорема 1.8) используя технику интеграла Бохнера. Мы завершаем раздел частным случаем пространства Бергмана с радиальным весом (теорема 1.9), в котором нам удалось в определенном смысле улучшить условие ограниченности, используя аналитическую природу функций в таком пространстве и оценку роста, упомянутую выше. Также, как отдельный интересный результат приводим теорему Юнга для операторов Адамара-Бергмана в $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ (теорема 1.10).

1.1 Определение допустимых весов и примеры

Определение 1.1. Мы называем измеримую функцию $v : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ допустимым весом на $\mathbb{D}$, если для некоторой измеримой функции $c : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ выполняется следующее неравенство

$$v(\zeta\eta) \leq c(\eta)v(\zeta), \quad \text{если } |\zeta| < 1 \leq |\eta|, \text{ и } |\zeta\eta| < 1.$$

Определение 1.2. Вес v называется допустимым сильным весом, если в дополнение

$$c'(\eta) \leq \frac{v(\zeta\eta)}{v(\zeta)} \leq c(\eta), \quad |\zeta| < 1 \leq |\eta|, \text{ и } |\zeta\eta| < 1.$$

для некоторых измеримых функций $c, c' : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$, которые не равны тождественно нулю.

Пример 1.3. Пусть $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет $\rho(st) \leq \rho(s)\rho(t)$ для $s \in [0, 1)$, $t \in [1, \infty)$. Тогда $v_0(z) = \rho(|z|)$ и $v_1(z) = 1 + \rho(|z|)$ являются допустимыми весами на $\mathbb{D}$. Из этого следует, что для $\alpha > 0$ функция $v_\alpha(z) = (1 + \rho(|z|))^\alpha$ также является допустимым весом на $\mathbb{D}$.

Пример 1.4. Если мы возьмем в предыдущем примере $\rho(x) = x^\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$), то функция $v_\alpha(z) = (1 + |z|^\beta)^\alpha$ является положительным допустимым сильным весом на $\mathbb{D}$.

Пример 1.5. Для $\alpha > 0$ функция $u_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ является положительным допустимым весом на $\mathbb{D}$. Действительно,

$$u_1(\zeta\eta) = 1 - |\zeta\eta|^2 = (1 + |\zeta\eta|)(1 - |\zeta||\eta|) \leq 2(1 - |\zeta||\eta|) \leq 2(1 - |\zeta|^2)$$

если $|\zeta| < 1 \leq |\eta|$, и $|\zeta\eta| < 1$.

Заметим также, что произведение двух допустимых (сильных) весов на $\mathbb{D}$ также является допустимым (сильным) весом на $\mathbb{D}$.

В дальнейшем мы полагаем

$$g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|, \quad w \in \text{supp}(\mu).$$

Пример 1.6. Рассмотрим оператор дробного интегрирования переменного порядка из Примера 2 и для простоты предположим, что функция α является вещественнозначной. Тогда

$$g_0(w) = \begin{cases} |1 - w|^{M_\alpha - 2}, & |1 - w| > 1 \\ |1 - w|^{m_\alpha - 2}, & |1 - w| \leq 1, \end{cases}$$

где $M_\alpha = \sup_{z \in \mathbb{D}} \alpha(z)$, $m_\alpha = \inf_{z \in \mathbb{D}} \alpha(z)$.

Поскольку мы имеем дело с весовыми пространствами, стоит отметить, что многочлены плотны в $L^p(v)$, $1 \leq p < \infty$. Действительно, для $g \in L^{p'}(v)$ поскольку многочлены плотны в $L^p(\mathbb{D})$ из

$$\int_{\mathbb{D}} z^n g(z) v(z) dA(z) = 0, \quad \forall n = 0, 1, \dots,$$

следует $g(z)v(z) = 0$, dA - п.в. $\Rightarrow g(z) = 0$, $v dA$ - п.в.

Здесь, естественно, если $p' = \infty$, то соответствующее пространство состоит из функций, которые существенно ограничены после умножения на v . Таким образом, каждый ограниченный линейный функционал на $L^p(v)$, который обращается в нуль на многочленах, равен нулю. Следовательно, многочлены плотны в $L^p(v)$ по теореме Хана - Банаха.

1.2 Ограниченность в $L^p(v)$: достаточные условия

В следующей теореме функция $c : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ соответствует определению 1.1, и $g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|$, $w \in \text{supp}(\mu)$.

Теорема 1.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Пусть функция $g(z, \cdot)$ является μ -измеримой для каждого $z \in \mathbb{D}$, а v допустимым весом. Тогда оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$ заданный равенством (1.1) ограничен $L^p(v)$ при условии

$$\kappa_{p,\mu,c}(g_0) = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} c(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} d\mu(w) < \infty, \quad (1.2)$$

и его операторная норма не превышает $\kappa_{p,\mu,c}(g_0)$ (мы принимаем, что $\kappa_{\infty,\mu,c}(g_0) = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) d\mu(w)$).

Доказательство. Случай, когда $p = \infty$ очевиден. Пусть $p \in [1, \infty)$. В силу неравенства Минковского для интегралов

$$\|\mathbb{K}_{g,\mu} f\|_{L^p(v)} \leq \int_{\mathbb{D}} \|g(\cdot, w) f(\cdot \bar{w})\|_{L^p(v)} d\mu(w). \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что

$$\|g(\cdot, w) f(\cdot \bar{w})\|_{L^p(v)} \leq g_0(w) \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z \bar{w})|^p v(z) dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

После замены переменной в приведенном выше интеграле $z \rightarrow \zeta$ ($z \bar{w} = \zeta$) и принимая во внимание определение 1.1, мы получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(z \bar{w})|^p v(z) dA(z) &= \frac{1}{|w|^2} \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right) dA(\zeta) \\ &\leq \frac{c(\bar{w}^{-1})}{|w|^2} \|f\|_{L^p(v)}^p. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Теперь, объединив (1.3), (1.4), и (1.5) мы, наконец, получаем, что

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_{g,\mu} f\|_{L^p(v)} &\leq \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} c(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} d\mu(w) \|f\|_{L^p(v)}^p \\ &= \kappa_{p,\mu,c}(g_0) \|f\|_{L^p(v)}^p. \end{aligned}$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Пример 1.7. В примере 1 у нас есть оператор Адамара-Бергмана переменного порядка, где $g(z, t) = h'(zt)z$ и мера $d\mu(t) = dt$ сосредоточена на $(0, 1)$. В этом случае,

$$g_0(t) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |h'(zt)z| = \frac{1}{t} \sup_{|\zeta| \leq t} |h'(\zeta)\zeta| = \max_{|\zeta|=t} |h'(\zeta)|.$$

Таким образом, если

$$\kappa'_{p,\mu,c}(g_0) \equiv \int_0^1 g_0(t) c(t^{-1})^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{2}{p}} dt < \infty$$

$g_0(t)$, как указано выше, то оператор T_h ограничен в $L^p(v)$ и его норма не превышает $\kappa'_{p,\mu,c}(g_0)$.

1.3 Ограниченность в $L^p(v)$: необходимые условия

Докажем необходимое условие ограниченности в $L^p(v)$ для следующего оператора

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(w)f(z\bar{w})d\mu(w), \quad (1.6)$$

то есть мы рассматриваем случай, в котором ядро g не зависит от внешней переменной.

Теорема 1.2. *Пусть ядро g неотрицательно. Пусть v - положительный допустимый сильный вес. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$ заданный равенством (1.6), ограничен на $L^p(v), 1 \leq p < \infty$. Тогда*

$$g(w)|w|^{-\frac{2}{p}+\varepsilon}c'(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} \in L^1(d\mu),$$

для каждого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Предположим, что $1 < p < \infty$. Пусть $1/p + 1/p' = 1$, и

$$\phi(z) = |z|^{\frac{\alpha}{p}}v(z)^{-\frac{1}{p}}, \quad \psi(z) = v(z)^{-\frac{1}{p'}}, \quad \alpha > -2.$$

Тогда $\phi \in L^p(v), \psi \in L^{p'}(v)$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\mathbb{D}} (\mathbb{K}_{g,\mu}\phi)(z)\psi(z)v(z)dA(z).$$

Этот интеграл существует, поскольку $\mathbb{K}_{g,\mu}\phi \in L^p(v)$ и $\psi \in L^{p'}(v)$. Таким

образом,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{D}} g(w) d\mu(w) \int_{\mathbb{D}} \phi(z\bar{w}) \psi(z) v(z) dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{|w|^2} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} \phi(\zeta) \psi\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right) v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right) dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{|w|^2} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right)}{v(\zeta)^{\frac{1}{p}} v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right)^{\frac{1}{p'}}} dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{|w|^2} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right)^{\frac{1}{p}}}{v(\zeta)^{\frac{1}{p}}} dA(\zeta) \\
&\geq \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} c'(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} |\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} dA(\zeta) \\
&= \frac{1}{2 + \frac{\alpha}{p}} \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{\frac{\alpha}{p}} c'(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} d\mu(w).
\end{aligned}$$

Следовательно, интеграл

$$\int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{\frac{\alpha}{p}} c'(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} d\mu(w)$$

существует для каждого $\alpha > -2$, и результат следует для $1 < p < \infty$.

Для случая $p = 1$ мы полагаем

$$\phi(z) = |z|^\alpha v(z)^{-1}, \quad \psi(z) = 1, \quad \alpha > -2,$$

и действуем, как описано выше. □

В некоторых случаях, по-видимому, можно избавиться от ε при определенных дополнительных условиях. Например, когда оператор задан равенством (1.6), в котором $d\mu = u dA$, где u - общий вес, не обязательно допустимый, но такой, что $1 \in L^1(u)$.

Замечание 1.1. Пусть ядро g неотрицательно. Пусть v - положительный допустимый сильный вес, и, кроме того, v таков, что $1 \in L^1(v)$. Пусть $d\mu = u dA$ с некоторым весом u , не обязательно допустимым, но таким, что $1 \in L^1(u)$. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$, заданный равенством (1.6), в котором $d\mu = u dA$, ограничен в $L^1(v)$. Тогда

$$g(w) |w|^{-2} c'(\bar{w}^{-1}) \in L^1(d\mu).$$

Доказательство. Возьмем $f_0 \equiv 1$. Видно, что

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_{g,\mu}f_0\|_{L^1(v)} &= \int_{\mathbb{D}} v(z) dA(z) \int_{\mathbb{D}} g(w) f_0(z\bar{w}) u(w) dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} v(z) dA(z) \frac{1}{|z|^2} \int_{|\zeta| < |z|} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) f_0(\zeta) u\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) v(z) u\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|w|^2} g(w) v\left(\frac{\zeta}{w}\right) u(w) dA(w) \\
&\geq \int_{\mathbb{D}} v(\zeta) dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} c'(\bar{w}^{-1}) u(w) dA(w) \\
&= \|f_0\|_{L^1(v)} \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} c'(\bar{w}^{-1}) u(w) dA(w).
\end{aligned}$$

Поскольку $f_0 \in L^1(v)$, получаем требуемое. $\square$

Теперь докажем необходимое условие ограниченности в $L^p(v)$ для следующего оператора

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f(z) = \int_{\mathbb{D}} g\left(\frac{z}{|z|}, w\right) f(z\bar{w}) d\mu(w), \quad (1.7)$$

то есть мы рассматриваем случай, в котором ядро g зависит от внешней переменной специальным образом.

Теорема 1.3. Пусть ядро g неотрицательно. Пусть v - положительный допустимый сильный вес. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$, заданный равенством (1.7) ограничен в $L^p(v)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$\frac{c'(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}}}{|w|^2} \int_{|\zeta| < |w|} g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) |\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} dA(\zeta) \in L^1(d\mu),$$

для любого $\alpha > -2$.

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1.2, полагая

$$\phi(z) = |z|^{\frac{\alpha}{p}} v(z)^{-\frac{1}{p}}, \quad \alpha > -2, \quad \psi(z) = v(z)^{-\frac{1}{p}} \quad (\psi(z) = 1, \quad p = 1),$$

МЫ ВЫЧИСЛЯЕМ

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{D}} d\mu(w) \int_{\mathbb{D}} g(z', w) \phi(z\bar{w}) \psi(z) v(z) dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|w|^2} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} g(\zeta' w', w) \phi(\zeta) \psi\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right) v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right) dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|w|^2} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} g(\zeta' w', w) \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right)}{v(\zeta)^{\frac{1}{p}} v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right)^{\frac{1}{p'}}} dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|w|^2} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} g(\zeta' w', w) \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right)^{\frac{1}{p}}}{v(\zeta)^{\frac{1}{p}}} dA(\zeta) \\
&\geq \int_{\mathbb{D}} |w|^{-2} c'(\bar{w}^{-1})^{\frac{1}{p}} d\mu(w) \int_{|\zeta| < |w|} g(\zeta' w', w) |\zeta|^{\frac{\alpha}{p}} dA(\zeta),
\end{aligned}$$

из этого следует утверждение. $\square$

Операторы переменного порядка с зависимостью ядра от внешней переменной заслуживают серьезного внимания, поскольку, на диске иногда достаточно учитывать именно такую зависимость. Проиллюстрируем это с помощью оператора интегрирования из примера 2. В теории пространств и операторов переменного порядка на экспоненту обычно накладывается так называемое логарифмическое условие Гельдера.

Определение 1.3. Мы говорим, что $\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет логарифмическому условию Гельдера на $\mathbb{D}$ если

$$|\alpha(z) - \alpha(w)| \leq \frac{C}{\ln \frac{1}{|z-w|}}, \quad z, w \in \mathbb{D}, \quad |z - w| < \frac{1}{2},$$

где C не зависит от $z, w \in \mathbb{D}$.

Известно, что если α удовлетворяет логарифмическому условию Гельдера, то α ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{D}$, и, следовательно, может быть продолжена до непрерывной функции на $\bar{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq 1\}$. Мы будем использовать ту же запись α для продолженной функции. Напомним также, что если α удовлетворяет логарифмическому условию Гельдера на $\mathbb{D}$, то существует $C > 0$ такое, что

$$\frac{1}{C} h^{\operatorname{Re} \alpha(z)} \leq h^{\operatorname{Re} \alpha(w)} \leq C h^{\operatorname{Re} \alpha(z)}, \quad z, w \in \mathbb{D}, \quad |z - w| < \min\{h, \frac{1}{2}\}.$$

Следовательно, при таком логарифмическом условии Гельдера на α оператор (дробного) интегрирования переменного порядка α из примера 2 может быть записан в виде

$$\mathbb{I}^{\alpha(\cdot)} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{u(z, w) f(z\bar{w})}{(1 - w)^{2 - \alpha(\frac{z}{|z|})}} dA(w), \quad \operatorname{Re} \alpha(z) \geq 0,$$

где функция

$$u(z, w) = (1 - w)^{\alpha(z) - \alpha(\frac{z}{|z|})}$$

остается ограниченной снизу и сверху для всех $w \in \mathbb{D}$, при условии, что $|1 - w| > \varepsilon (\varepsilon > 0)$, и всех $z \in \mathbb{D}$, и границы зависят только от ε .

1.4 Ограниченность в $L^p(v)$ для одного частного случая

Здесь мы выделяем частный случай, в котором операторы задаются относительно меры Лебега:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_g f(z) &= \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) dA(w) \\ &= \frac{1}{|z|^2} \int_{|\zeta| < |z|} g\left(z, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) f(\zeta) dA(\zeta),\end{aligned}\tag{1.8}$$

и действуют на весовом пространстве Лебега $L^p(v)$ с допустимым весом v .

Пусть $1 \leq p < \infty$, и пусть

$$\kappa_p = \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} \left(\int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{c(\bar{z}^{-1})^p}{|z|^{2p}} \left| g\left(z, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \right|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}$$

при условии, что это выражение существует. Здесь функция c взята из определения 1.1.

Теорема 1.4. Пусть $1 \leq p, r < \infty$. Пусть v - допустимый вес на $\mathbb{D}$.

Если $\kappa_p < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g$ ограничен из $L^1(v)$ в $L^p(v)$ и его операторная норма не превышает κ_p .

Если, кроме того, $1 \in L^{r'}(v)$, то оператор $\mathbb{K}_g$ ограничен из $L^r(v)$ в $L^p(v)$ и его операторная норма не превышает $\kappa_p \|1\|_{L^{r'}(v)}$.

Доказательство. Доказательство следует из применения интегрального неравенства Минковского к оператору (1.8):

$$\begin{aligned}\|\mathbb{K}_g f\|_{L^p(v)} &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \left(\int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^{2p}} \left| g\left(z, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \right|^p v\left(\frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \kappa_p \|f\|_{L^1(v)}.\end{aligned}$$

Остальное вытекает из неравенства Гельдера. □

1.5 Ограниченность на весовых пространствах Бергмана

Для доказательства следующих результатов будет полезна следующая теорема из [43].

Теорема 1.5. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ - измеримое пространство, пусть $G \subset \mathbb{C}$ является открытым, а $\phi : G \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ - функцией, подчиняющейся следующим предположениям:

(A_1) : $\phi(z, \cdot)$ является $\mathcal{B}$ -измеримой для всех-measurable $z \in G$;

(A_2) : $\phi(\cdot, w)$ является аналитической для всех $w \in \Omega$;

(A_3) : $\int_{\Omega} |\phi(\cdot, w)| d\mu(w)$ локально ограничен.

Тогда $\int_{\Omega} \phi(\cdot, w) d\mu(w)$ является аналитической в G функцией и допускаем дифференцирование под знаком интеграла.

В следующем результате мы принимаем, что $A_v^{\infty}(\mathbb{D}) := L^{\infty}(v) \cap H(\mathbb{D})$.

Теорема 1.6. Предположим в дополнение к предположениям Теоремы 1.1, что функция $g(\cdot, w)$ аналитична в $\mathbb{D}$ для всех $w \in \mathbb{D}$. Тогда оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$ заданный равенством (1.1) ограничен в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{A}_v^p(\mathbb{D})$ при условии (1.2) и его операторная норма не превышает $\kappa_{p,\mu,c}(g_0)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{A}_v^p(\mathbb{D})$. Справедливость условий (A_1) и (A_2) для функции $\phi(z, w) = g(z, w)f(z\bar{w})$ и для множества $\Omega = \mathbb{D}$ очевидна. Теперь пусть $B \subset \mathbb{D}$ - любой замкнутый диск. Тогда $B\bar{\mathbb{D}}$ является компактным подмножеством $\mathbb{D}$. Пусть $C = \max_{B\bar{\mathbb{D}}} |f|$. Тогда $|\phi(z, w)| \leq Cg_0(w)$ для всех $z \in B$ и условие (A_3) выполняется. Из Теоремы 1.5 следует, что $\mathbb{K}_{g,\mu}f$ аналитична в $\mathbb{D}$ и, следовательно, по Теореме 1.1 принадлежит $\mathcal{A}_v^p(\mathbb{D})$ вместе с f . Ограниченность $\mathbb{K}_{g,\mu}$ в $\mathcal{A}_v^p(\mathbb{D})$ также следует из Теоремы 1.1. $\square$

1.6 Ограниченность в пространствах Харди

Напомним, что для $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p = H^p(\mathbb{D})$ состоит из аналитических функций f на единичном диске $\mathbb{D}$ таких, что

$$\|f\|_{H^p}^p := \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Если $p \in [1, \infty)$, то $\|\cdot\|_{H^p}^p$ - норма в H^p .

Обратим внимание, что для $1 \leq p < \infty$ и всех функций $f \in H^p(\mathbb{D})$ есть $f(\cdot\bar{w}) \in H^p(\mathbb{D})$ и $\|f(\cdot\bar{w})\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$ для всех $w \in \mathbb{D}$.

Теорема 1.7. Пусть $0 < p \leq \infty$ и

$$g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|.$$

Предположим, что $g_0 \in L^1(\mu)$, и функция $g(\cdot, w)$ является аналитической на $\mathbb{D}$ для всех $w \in \mathbb{D}$. Тогда оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$ ограничен в пространстве Харди $H^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\|g_0\|_{L^1(\mu)}$.

Доказательство. Случай, когда $p = \infty$ очевиден. Пусть $0 < p < \infty$. Неравенство

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p} (1 - |z|)^{-\frac{1}{p}}, \quad f \in H^p(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D},$$

(см. [12, с. 36]) показывает, что условие (а) леммы 3 выполняется для $(G, \mu) = (\mathbb{D}, dA)$ и $\mathcal{F}(G) = H^p(\mathbb{D})$. В этой лемме мы также берем $\Omega = \mathbb{D}$.

Пусть $f \in H^p(\mathbb{D})$. Теперь нам нужно убедиться, что функция $F(w, z) = g(z, w)f(z\bar{w})$ удовлетворяет условиям (b) и (c) леммы 3. Поскольку $F(w, \cdot)$ является аналитической в $\mathbb{D}$ и

$$\|F(w, \cdot)\|_{H^p} \leq g_0(w) \|f(\cdot\bar{w})\|_{H^p} \leq g_0(w) \|f\|_{H^p} < \infty, \quad (1.9)$$

(b) выполняется.

Чтобы доказать (c), сначала заметим, что пространство $H^p(\mathbb{D})$ является сепарабельным, если $0 < p < \infty$, поскольку многочлены в этом пространстве плотны [12, с. 112]. Таким образом, для доказательства строгой измеримости векторной функции $w \mapsto F(w, \cdot) : \mathbb{D} \rightarrow H^p(\mathbb{D})$ достаточно доказать ее слабую измеримость (см., например, [17]). Слабая измеримость

следует из описания дуального пространства для $H^p(\mathbb{D})$ [12, теоремы 7.2 и 7.5]. Действительно, согласно этому описанию, каждый ограниченный линейный функционал Λ на $H^p(\mathbb{D})$ имеет вид

$$\Lambda(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta})} d\theta, \quad \varphi \in H^p(\mathbb{D})$$

для некоторого $h \in H^{p'}(\mathbb{D})$ если $1 \leq p < \infty$, и

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) h(e^{-i\theta}) d\theta, \quad \varphi \in H^p(\mathbb{D})$$

для некоторого h в алгебре $A = A(\mathbb{D})$ (набор аналитических функций в $\mathbb{D}$ которые расширяются до непрерывной функции при замыкании $\mathbb{D}$), если $0 < p < 1$.

Теперь из неравенства (1.9) следует (с), а из аналитичности f следует (d).

Итак, согласно лемме 3 у нас есть для dA в. п. $z \in \mathbb{D}$

$$\mathbb{K}_{g,\mu} f(z) = \left((B) \int_{\mathbb{D}} g(\cdot, w) f(\cdot \bar{w}) d\mu(w) \right) (z),$$

где символ (B) указывает на интеграл Бохнера для $H^p(\mathbb{D})$. Но, поскольку обе части этого равенства непрерывны (и даже аналитичны), оно справедливо для всех $z \in \mathbb{D}$ правая часть аналитична по определению, и тот факт, что левая часть также аналитична, может быть доказан с помощью теоремы 1.5 как в доказательстве теоремы 1.6. Таким образом,

$$\mathbb{K}_{g,\mu} f = (B) \int_{\mathbb{D}} g(\cdot, w) f(\cdot \bar{w}) d\mu(w)$$

и поэтому

$$\|\mathbb{K}_{g,\mu} f\|_{H^p} \leq \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)| \|f(\cdot \bar{w})\|_{H^p} d\mu(w) \leq \|g_0\|_{L^1(\mu)} \|f\|_{H^p}.$$

□

Пример 1.8. Рассмотрим обобщенный оператор дробного интегрирования переменного порядка

$$\mathbb{I}_{\mu}^{\alpha(\cdot)} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z \bar{w})}{(1 - w)^{2-\alpha(z)}} d\mu(w),$$

где $\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть $g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |(1-w)^{\alpha(z)-2}| \in L^1(\mu)$. Тогда оператор $\mathbb{I}_\mu^{\alpha(\cdot)}$ ограничен на $H^p(\mathbb{D})$ ($0 < p \leq \infty$), и его операторная норма не превышает $\|g_0\|_{L^1(\mu)}$.

Замечание 1.2. Пусть $g = \mathbf{1}$ - тождественно единичная функция, а $\mu = \delta$ - мера Дирака. В этом случае $\|\mathbb{K}_{g,\mu}\| = 1 = \|g_0\|_{L^1(\mu)}$. Таким образом, в общем случае оценка нормы оператора $\mathbb{K}_{g,\mu}$ в Теореме 1.7 не может быть улучшена.

1.7 Ограниченность в пространстве Блоха

Пространство Блоха $\mathcal{B}$ на $\mathbb{D}$ определяется как пространство аналитических функций f на $\mathbb{D}$ таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup\{(1 - |z|^2)|f'(z)| : z \in \mathbb{D}\} < +\infty.$$

Тогда $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ является полной полунормой на $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ можно превратить в банахово пространство, введя норму

$$\|f\|'_{\mathcal{B}} := \|f\|_{\mathcal{B}} + |f(0)|.$$

Малое блохово пространство $\mathbb{D}$, обозначаемое $\mathcal{B}_0$, является замкнутым подпространством $\mathcal{B}$ состоящий из функций f с

$$\lim_{|z| \rightarrow 1-} (1 - |z|^2)f'(z) = 0,$$

см., например, [54].

В этом подразделе мы снова обратимся к оператору неперемногого порядка, т.е. к оператору следующего вида.

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(w)f(z\bar{w})d\mu(w), \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.10)$$

Теорема 1.8. *Если $g \in L^1(\mu)$, то оператор $\mathbb{K}_{g,\mu}$ заданный формулой (1.10) ограничен на $\mathcal{B}_0$ и его норма не превышает $\|g\|_{L^1(\mu)}$.*

Доказательство. Заметим, что условия леммы 3 справедливы для $X = \Omega = \mathbb{D}$, $m = A$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{B}_0$ и $F(w, z) = g(w)f(z\bar{w})$. Действительно,

(а) когда $|z| \geq \frac{1}{2}$, то это следует из известной оценки

$$|f(z)| \leq \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \|f\|_{\mathcal{B}}$$

(см. [12, стр. 43]), и для случая $|z| < \frac{1}{2}$ мы получим

$$|f(z)| \leq \sup_{|w|=\frac{1}{2}} |f(w)| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Следовательно, для каждого $z \in \mathbb{D}$ мы имеем, что

$$|f(z)| \leq C(z) \|f\|_{\mathcal{B}}, \quad f \in \mathcal{B}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(b) для каждого $w \in \mathbb{D}$ аналитическая функция $z \rightarrow f(z\bar{w})$ принадлежит $\mathcal{B}_0$, потому что

$$\lim_{|z| \rightarrow 1-} (1 - |z|^2)(f(z\bar{w}))' = \lim_{|z| \rightarrow 1-} (1 - |z|^2)f'(z\bar{w})\bar{w} = 0,$$

поскольку функция $f'(\zeta)$ ограничена диском $\{|\zeta| \leq |w|\}$.

(c) Пространство $\mathcal{B}_0$ является сепарабельным, см. [54]. Таким образом, чтобы проверить сильную μ -измеримость векторной функции $w \mapsto g(w)f(\cdot\bar{w})$ достаточно проверить ее слабую μ -измеримость. Последнее свойство следует из μ -измеримости функции $w \mapsto g(w)f(z\bar{w})$ и следующего общего вида ограниченного линейного функционала на $\mathcal{B}_0$, см. [54, Теорема 5.15]:

$$\Lambda(\phi) = \int_{\mathbb{D}} \phi(z) \overline{h(z)} dA(z), \quad \phi \in \mathcal{B}_0,$$

где $h \in \mathcal{A}^1$.

Далее, обратим внимание, что

$$\|f(\cdot\bar{w})\|_{\mathcal{B}}' \leq \|f\|_{\mathcal{B}}'.$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \|f(\cdot\bar{w})\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |(f(z\bar{w}))'| \\ &= |w| \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z\bar{w})| \\ &\leq |w| \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z\bar{w}|^2) |f'(z\bar{w})| \\ &\leq |w| \|f\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

И поэтому

$$\begin{aligned} \|f(\cdot\bar{w})\|_{\mathcal{B}}' &= |f(0)| + \|f(\cdot\bar{w})\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq |f(0)| + |w| \|f\|_{\mathcal{B}} \\ &= |f(0)| + |w| (\|f\|_{\mathcal{B}}' - |f(0)|) \\ &= |f(0)| (1 - |w|) + |w| \|f\|_{\mathcal{B}}' \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{B}}' (1 - |w|) + |w| \|f\|_{\mathcal{B}}' = \|f\|_{\mathcal{B}}'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|F(w, \cdot)\|_{\mathcal{B}}' \leq |g(w)| \|f\|_{\mathcal{B}}'.$$

Это подразумевает (с).

(d) вытекает из аналитичности функции f .

Итак, как и в доказательстве теоремы 1.7 по лемме 3, мы имеем

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f = \int_{\mathbb{D}} g(w)f(\cdot\overline{w})d\mu(w)$$

(интеграл Бохнера для $\mathcal{B}_0$) и, следовательно

$$\|\mathbb{K}_{g,\mu}f\|_{\mathcal{B}}' \leq \int_{\mathbb{D}} |g(w)| \|f(\cdot\overline{w})\|_{\mathcal{B}}' d\mu(w) \leq \|g\|_{L^1(\mu)} \|f\|_{\mathcal{B}}',$$

на этом доказательство заканчивается. □

1.8 Весовое пространство Бергмана: случай радиального веса

Здесь мы рассмотрим общий оператор

$$\mathbb{K}_{g,\mu}f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) d\mu(w). \quad (1.11)$$

действующее в весовом пространстве $L^q(v)$ где v - радиальный вес $v(z) = v(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$. Как и ранее, $g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|$, $w \in \text{supp}(\mu)$.

Мы наложим следующее дополнительное ограничение на вес v : существует $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ для которого $\inf_{|z| < \frac{1}{2}} \|\chi_{D(z, \delta)}\|_{L^p(v)} > 0$, где $D(z, \delta)$ - диск с центром в точке z и радиусом δ . В принципе, это ограничение означает, что вес не обращается в нуль внутри диска, за исключением, вероятно, $z = 0$ (предполагается, что он может исчезать на границе единичного диска). Это вполне естественно предположить для допустимых весов. Действительно, если допустимый вес равен нулю при $z = z_0$, то он также равен нулю для всех $z \in \mathbb{D}$ таких что $|z| \geq |z_0|$.

Теорема 1.9. Пусть $1 \leq p < \infty$. Пусть v - допустимый радиальный вес, такой, что существует $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ для которого $\inf_{|z| < \frac{1}{2}} \|\chi_{D(z, \delta)}\|_{L^p(v)} > 0$, где $D(z, \delta)$ - диск с центром в точке δ . Пусть

$$\begin{aligned} & \int_{|w| < \frac{1}{2}} g_0(w) c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) |w|^{-\frac{2}{p}} \left(\int_{|\zeta| < |w|} v(\zeta) dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(w) \\ & + \int_{\frac{1}{2} < |w| < 1} g_0(w) c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) d\mu(w) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда $\mathbb{K}_{g,\mu}$, заданный равенством 1.11 ограничен в $\mathcal{A}_v^p$.

Обратим внимание, что для $v \equiv 1$, приведенное выше условие читается как $g_0 \in L^1(d\mu)$.

Доказательство. Отметим, что доказательство этого результата для случая $g = g(w)$ и $L^p(v) = L^p(\mathbb{D})$ приведено в теореме 5.1 из [29], и это было обобщено в [34] для случая $g = g(z, w)$ и $L^p(v) = L^p(\mathbb{D})$.

Согласно неравенству Минковского для интегралов, аналогично (1.3),

(1.4), и (1.5), мы имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_{g,\mu}f\|_{L^p(v)} &\leq \int_{\mathbb{D}} g_0(w) d\mu(w) \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p v(z) dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} d\mu(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p v\left(\frac{\zeta}{\bar{w}}\right) dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) d\mu(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p v(\zeta) dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \int_{|w|<\frac{1}{2}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) d\mu(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p v(\zeta) dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \int_{\frac{1}{2}<|w|<1} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) d\mu(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p v(\zeta) dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Оценка I_2 тривиальна:

$$I_2 \leq \|f\|_{L^p(v)} 2^{\frac{2}{p}} \int_{\frac{1}{2}<|w|<1} g_0(w) c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) d\mu(w).$$

Для оценки I_1 мы используем (17) с фиксированной $\delta < \frac{1}{2}$ исходя из приведенного выше предположения этой теоремы:

$$I_1 \leq C_\delta \|f\|_{L^p(v)} \int_{|w|<\frac{1}{2}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} c^{\frac{1}{p}}(\bar{w}^{-1}) d\mu(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} v(\zeta) dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$C_\delta = \sup_{|z|<\frac{1}{2}} \|\chi_{D(z,\delta)}\|_{L^p(v)}^{-1} < \infty.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Наконец, заметим, что для случая $L^p(v) = L^p(\mathbb{D})$, $d\mu = dA$ справедлив более общий результат (Теорема Юнга):

Теорема 1.10. (Теорема Юнга). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и

$$g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|.$$

Предположим, что $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ и $g_0 \in L^q(\mathbb{D})$. Тогда

$$\|\mathbb{K}_g f\|_r \leq \|g_0\|_q \|f\|_p, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1. \quad (1.12)$$

Доказательство. Пусть $1 \leq s \leq \infty$. Поскольку

$$\|\mathbb{K}_g f\|_s = \left\| \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(w) dA(w) \right\|_s \leq \left\| \int_{\mathbb{D}} g_0(w) f(w) dA(w) \right\|_s = \|\mathbb{K}_{g_0} f\|_s,$$

мы докажем ограниченность оператора $\mathbb{K}_{g_0}$. Пусть сначала $q = 1$. Для случая $p = \infty$ мы имеем

$$|\mathbb{K}_{g_0} f(z)| \leq \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)| |f(z\bar{w})| dA(w) \leq \|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)| dA(w).$$

Следовательно,

$$\|\mathbb{K}_{g_0} f\|_{\infty} \leq \|g_0\|_1 \|f\|_{\infty}. \quad (1.13)$$

Теперь пусть $q = p = 1$. Здесь мы рассмотрим два случая

1. Возьмем любую функцию $f \in H(\mathbb{D})$. По теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_{g_0} f\|_1 &= \int_{\mathbb{D}} \left(\left| \int_{\mathbb{D}} |g_0(w) f(z\bar{w})| dA(w) \right| \right) dA(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} dA(w) \int_{\mathbb{D}} |g_0(w) f(z\bar{w})| dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(w)}{|w|^2} \int_{|\zeta| < |w|} |g_0(w)| |f(\zeta)| dA(\zeta) \\ &= \int_{|w| < \frac{1}{2}} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} dA(w) \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)| dA(\zeta) \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} dA(w) \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)| dA(\zeta). \end{aligned}$$

В силу теоремы (1) мы имеем $|f(z)| \leq \frac{16}{9} \|f\|_1$ для $|z| < \frac{1}{2}$, следовательно

$$\begin{aligned} &\int_{|w| < \frac{1}{2}} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} dA(w) \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)| dA(\zeta) \\ &\leq \frac{16}{9} \|f\|_1 \int_{|w| < \frac{1}{2}} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} dA(w) \int_{|\zeta| < |w|} dA(\zeta) \\ &\leq \frac{16}{9} \|g_0\|_1 \|f\|_1. \end{aligned}$$

Оценка для второго члена также является тривиальной

$$\int_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} dA(w) \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)| dA(\zeta) \leq 4 \|f\|_1 \int_{\frac{1}{2} < |w| < 1} |g_0(w)| dA(w).$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathbb{K}_{g_0}f\|_1 \leq C\|g_0\|_1 \|f\|_1. \quad (1.14)$$

2. Теперь возьмём $f(z) = z^n$,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_{g_0}f\|_1 &= \int_{\mathbb{D}} \left(\left| \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)f(z\bar{w})| dA(w) \right| \right) dA(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} dA(w) \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)f(z\bar{w})| dA(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)| dA(w) \int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})| dA(z) \\ &= \|g_0\|_1 \int_{\mathbb{D}} |z\bar{w}|^n dA(z) \leq \|g_0\|_1 \int_{\mathbb{D}} |z|^n dA(z) \\ &= \|g_0\|_1 \int_{\mathbb{D}} |f(z)| dA(z) = \|g_0\|_1 \|f\|_1. \end{aligned}$$

На основании вышеизложенного получаем

$$\|\mathbb{K}_{g_0}f\|_1 \leq \|g_0\|_1 \|f\|_1. \quad (1.15)$$

Из (1.14) и (1.15) ясно, что операторная норма $\mathbb{K}_g$ равна 1, т.е. $C = 1$ и определяется из $L^1(\mathbb{D})$ в $L^1(\mathbb{D})$. Опираясь на (1.13) и (1.15) и используя теорему Риса–Торина о интерполяции, имеем

$$\|\mathbb{K}_{g_0}f\|_p \leq \|g_0\|_1 \|f\|_p. \quad (1.16)$$

Наконец, случай $q > 1$. Для $q = p'$ по неравенству Гельдера получаем

$$\begin{aligned} |\mathbb{K}_{g_0}f(z)| &\leq \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)f(z\bar{w})| dA(w) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p dA(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{D}} |g_0(w)|^{p'} dA(w) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{D}} |g_0(w)|^{p'} dA(w) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{D}} |g_0(w)|^{p'} dA(w) \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали принцип максимума модуля для $|f(z\overline{w})|$ под знаком интеграла. Таким образом, мы получаем

$$\|\mathbb{K}_{g_0}f\|_\infty \leq \|g_0\|_{p'} \|f\|_p. \quad (1.17)$$

Объединив (1.16) с (1.17) и выполнив интерполяцию между $q = 1$ и $q = p'$ в итоге мы получим

$$\|\mathbb{K}_{g_0}f\|_r \leq \|g_0\|_q \|f\|_p. \quad (1.18)$$

Так как $\|\mathbb{K}_g f\|_r \leq \|\mathbb{K}_{g_0} f\|_r$, то

$$\|\mathbb{K}_g f\|_r \leq \|g_0\|_q \|f\|_p.$$

На этом доказательство заканчивается. □

Глава 2. Ограниченность весовых операторов Адамара-Бергмана в весовых пространствах Лебега с каноническими весами

Здесь мы изучаем ограниченность весовых операторов Адамара-Бергмана в весовых пространствах типа Лебега с каноническими весами типа $(1 - |z|^2)^\lambda$, $\lambda > -1$. Мы имеем в виду, что и оператор, и пространство построены с использованием канонического веса. Кроме того, веса могут быть разными. Обратим внимание, что, в отличие от условий, полученных в предыдущем разделе, канонические веса позволяют нам получить новые и более точные условия для таких операторов.

Будем рассматривать весовой оператор Адамара-Бергмана переменного порядка

$$\mathbb{K}_g^\lambda f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, w) f(z\bar{w}) dA_\lambda(w), \quad f \in \mathbb{D}, \quad (2.1)$$

его частный случай

$$\mathbb{K}_g^\lambda f(z) = \int_{\mathbb{D}} g\left(\frac{z}{|z|}, w\right) f(z\bar{w}) dA_\lambda(w), \quad f \in \mathbb{D}, \quad (2.2)$$

и наконец, оператор Адамара-Бергмана с ядром, не зависящем от внешней переменной (2.1), т.е. $g = g(z)$,

$$\mathbb{K}_g^\lambda f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(w) f(z\bar{w}) dA_\lambda(w). \quad (2.3)$$

В некоторых результатах мы также используем другой показатель степени для веса, т.е. мы рассматриваем $\mathbb{K}_g^\alpha$, что означает, что оператор типа Адамара-Бергмана построен с мерой $dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$.

2.1 Ограниченность в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$: использование подхода для операторов с однородными ядрами

Мы начнем с изучения оператора $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданного равенством (2.3). После замены переменных этот оператор может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_g^\lambda f(z) &= \frac{(\lambda+1)}{|z|^2} \int_{|\zeta| < |z|} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) f(\zeta) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) f(\zeta) dA(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}\end{aligned}\tag{2.4}$$

где

$$\mathcal{K}(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{(\lambda+1)}{|z|^2} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda & |\zeta| < |z|; \\ 0, & |z| \leq |\zeta| < 1. \end{cases}$$

Ядро $\mathcal{K}(z, \zeta)$ определено на $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, и является однородным степени (-2) :

$$\mathcal{K}(\gamma z, \gamma \zeta) = \gamma^{-2} \mathcal{K}(z, \zeta), \quad \gamma \in \mathbb{R}_+,$$

и инвариантным относительно вращений:

$$\mathcal{K}(ze^{i\theta}, \zeta e^{i\theta}) = \mathcal{K}(z, \zeta), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Следовательно, оператор (2.3) записанный в виде (2.4) представляет собой оператор с однородным ядром степени (-2) . Операторы с однородными ядрами хорошо изучены в вещественном анализе (см. книги [55], [18], и обзорную статью [19]).

Обозначим

$$\begin{aligned}\kappa_{1,p}(g) &= \int_{\mathbb{D}} |g(w)| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(w), \\ \kappa_{2,p}(g) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_{|z| < |w| < 1} \frac{|g(w)| |w|^{2(|\lambda| - \frac{1}{p})}}{(|w|^2 - |z|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w).\end{aligned}$$

Теорема 2.1. Пусть $1 \leq p < \infty$.

1. Пусть $\lambda \geq 0$. Если $\kappa_{1,p}(g) < \infty$ тогда оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданный равенством (2.3) ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\kappa_{1,p}(g)$.

2. Пусть $-1 < \lambda < 0$. Если $\kappa_{1,p}(g) < \infty$ и $\kappa_{2,p}(g) < \infty$ тогда оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданный равенством (2.3) ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{2,p}(g)^{\frac{1}{p}}$ (мы принимаем, что если $p = 1$, то $\kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} = 1$).

Доказательство. Пусть $p = 1$. Согласно неравенству Минковского для интегралов, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| dA_\lambda(z) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \right|}{|z|^2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w). \end{aligned}$$

Для $\lambda \geq 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} &\leq (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^2} (1 - |\zeta|^2)^\lambda dA_\lambda(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^2} dA_\lambda(w) \leq \kappa_{1,1}(g) \|f\|_{1,\lambda}, \end{aligned}$$

а для $-1 < \lambda < 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} &= \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) \frac{1}{(1 - |\zeta|^2)^\lambda} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda}{|w|^2} dA_\lambda(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{|\lambda|} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)| |w|^{2(|\lambda|-1)}}{(|w|^2 - |\zeta|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w) \\ &\leq \kappa_{2,1}(g) \|f\|_{1,\lambda}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$. В следующих расчетах и оценках мы предполагаем, что $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Применяя неравенство Гельдера,

получим

$$\begin{aligned}
|\mathbb{K}_g^\lambda f(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{pp'}} \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{pp'}} f(\zeta) dA(\zeta) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \left| \mathcal{K}(z, \zeta)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{pp'}} \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{pp'}} f(\zeta) \right| dA(\zeta) \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{p}} dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

По замене переменных $\zeta = |z|w$ в первом интеграле получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{p}} dA(\zeta) &= |z|^2 \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, |z|w)| |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| \mathcal{K} \left(\frac{z}{|z|}, w \right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \left| g \left(\frac{\bar{w}|z|}{\bar{z}} \right) \right| \frac{(1 - |w|^2)^\lambda}{|w|^{\frac{2}{p}}} dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |g(\zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(\zeta) = \kappa_{1,p}(g).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$|\mathbb{K}_g^\lambda f(z)| \leq \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} &\leq \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} dA_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} dA_\lambda(z) \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

а после замены переменных во втором интеграле выше, мы получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \\
&= (\lambda + 1) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} \left| g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \right| \left(1 - \left| \frac{\zeta}{z} \right|^2 \right)^\lambda \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} dA_\lambda(z) \\
&= (\lambda + 1) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^{2-\frac{2}{p'}}} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^\lambda dA_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Мы разделяем на два случая. Сначала мы анализируем случай, когда $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \\
&\leq \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|(1 - |\zeta|^2)^\lambda}{|w|^{\frac{2}{p}}} dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

отсюда,

$$\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \leq \kappa_{1,p}(g) \|f\|_{p,\lambda}.$$

Теперь, когда $-1 < \lambda < 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \\
&\leq \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA_\lambda(\zeta) \frac{1}{(1 - |\zeta|^2)^\lambda} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^\lambda dA_\lambda(w) \right. \\
&= \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA_\lambda(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{|\lambda|} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)| |w|^{2(|\lambda| - \frac{1}{p})}}{(|w|^2 - |\zeta|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \leq \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{2,p}(g)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Пример 2.9. При $-1 < \lambda < 0$, условия $\kappa_{1,p}(g)$, $\kappa_{2,p}(g)$ выполняются для $g(w) = |w|^{-2(|\lambda| - \frac{1}{p})}$.

Доказательство. Сначала мы подставим $g(w) = |w|^{-2(|\lambda|-\frac{1}{p})}$ в $\kappa_{2,p}(g)$

$$\begin{aligned}\kappa_{2,p}(g) &= (\lambda + 1) \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_{|z| < |w| < 1} \frac{dA(w)}{(|w|^2 - |z|^2)^{|\lambda|} (1 - |w|^2)^{|\lambda|}} \\ &= (\lambda + 1) \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_{|z|}^1 \frac{2r dr}{(r^2 - |z|^2)^{|\lambda|} (1 - r^2)^{|\lambda|}} \\ &= (\lambda + 1) \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_{|z|^2}^1 \frac{dt}{(t - |z|^2)^{|\lambda|} (1 - t)^{|\lambda|}}\end{aligned}$$

мы сделаем замену переменных, $s = \frac{t-|z|^2}{1-|z|^2}$, чтобы получить

$$\begin{aligned}\kappa_{2,p}(g) &= (\lambda + 1) \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_0^1 \frac{(1 - |z|^2) ds}{(s(1 - |z|^2))^{| \lambda |} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} (1 - s)^{|\lambda|}} \\ &= (\lambda + 1) \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{1-\lambda} \int_0^1 s^\lambda (1 - s)^\lambda ds \\ &= (\lambda + 1) \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{1-\lambda} B(1 + \lambda, 1 + \lambda) < c_1, \quad c_1 > 0.\end{aligned}$$

Затем мы подставим $g(w) = |w|^{-2(|\lambda|-\frac{1}{p})}$ в $\kappa_{1,p}(g)$ и получим

$$\kappa_{1,p}(g) = \int_{\mathbb{D}} |w|^{-2|\lambda|} dA_\lambda(w) < c_2, \quad c_2 > 0.$$

□

Теперь перейдем к необходимым условиям ограниченности оператора $\mathbb{K}_g^\lambda$, заданный равенством (2.3) на $L_\lambda^p(\mathbb{D})$.

Теорема 2.2. Пусть g неотрицательно и $\lambda > -1$. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданный равенством (2.3) ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $p = 1$, функция $g \in L_\lambda^1(\mathbb{D})$.

2. Если $1 < p < \infty$, то

$$\int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-\frac{\alpha}{p}} dA_\lambda(w) < \infty, \quad \alpha < 2.$$

Доказательство. Сначала предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ ограничен в $L_\lambda^1(\mathbb{D})$. Тогда для $\phi(z) = 1$, получим

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\lambda \phi\|_{1,\lambda} &= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) \phi(\zeta) dA(\zeta) \right| dA_\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) dA_\lambda(z) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} g(w) |w|^{-2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} dA_\lambda(w) \int_{|\zeta| < |w|} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA(\zeta) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} dA_\lambda(w) \int_0^{|w|} 2r \left(1 - \left(\frac{r}{|w|}\right)^2\right)^\lambda dr \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) dA_\lambda(w) \int_0^1 (1 - s)^\lambda ds = \int_{\mathbb{D}} g(w) dA_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Теперь предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$ для $1 < p < \infty$.

Тогда для всех $\phi \in L_\lambda^p(\mathbb{D})$ и $\psi \in L_\lambda^{p'}(\mathbb{D})$ мы имеем

$$\left| \int_{\mathbb{D}} (\mathbb{K}_g^\lambda \phi)(z) \psi(z) dA_\lambda(z) \right| \leq \|\mathbb{K}_g^\lambda\| \|\phi\|_{p,\lambda} \|\psi\|_{p',\lambda}.$$

Пусть

$$\phi(z) = |z|^{-\frac{\alpha}{p}}, \quad \psi(z) = 1, \quad \alpha < 2.$$

Будем иметь,

$$\begin{aligned}
& \infty > \|\mathbb{K}_g^\lambda\| \|\phi\|_{p,\lambda} \|\psi\|_{p',\lambda} \geq \int_{\mathbb{D}} (\mathbb{K}_g^\lambda \phi)(z) \psi(z) dA_\lambda(z) \\
& = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) \phi(\zeta) dA(\zeta) \right) dA_\lambda(z) \\
& = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(\zeta)}{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}}} \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\
& = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(\zeta)}{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}}} \int_{|\zeta| < |w| < 1} g(w) |w|^{-2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w) \\
& = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} dA_\lambda(w) \int_{|\zeta| < |w|} |\zeta|^{-\frac{\alpha}{p}} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA(\zeta) \\
& = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-2} dA_\lambda(w) \int_0^{|w|} 2r r^{-\frac{\alpha}{p}} \left(1 - \left(\frac{r}{|w|}\right)^2\right)^\lambda dr \\
& = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) dA_\lambda(w) \int_0^1 (|w| s^{\frac{1}{2}})^{-\frac{\alpha}{p}} (1 - s)^\lambda ds \\
& = (\lambda + 1) B\left(1 - \frac{\alpha}{2p}, 1 + \lambda\right) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-\frac{\alpha}{p}} dA_\lambda(w)
\end{aligned}$$

для всех α таких, что $\alpha < 2$. На этом доказательство заканчивается. $\square$

Для случая, когда $\lambda = 0$ как в операторе (2.3), так и в пространстве $L_\lambda^1(\mathbb{D})$, необходимое условие ограниченности для операторов Адамара-Бергмана в пространстве Лебега представлено в следующем примере.

Пример 2.10. Пусть g неотрицательно. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^0$ заданный равенством (2.3) ограничен в $L^1(\mathbb{D})$, тогда функция

$$\mathbb{D} \ni \zeta \rightarrow \int_{|\zeta| < |w| < 1} g(w) |w|^{-2} dA(w),$$

принадлежит $L^1(\mathbb{D})$.

Доказательство. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_g$ ограничен в $L^1(\mathbb{D})$. То-

гда, для $\phi(z) = 1$. Мы имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g \phi\|_1 &= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) \phi(\zeta) dA(\zeta) \right| dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \phi(\zeta) dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{g(w)}{|z|^2} dA(w).
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ с ядром $g\left(\frac{z}{|z|}, w\right)$, т.е. случай оператора, заданного равенством (2.2). В этом случае мы все еще можем применить технику операторов с однородными ядрами. Таким образом, по замене переменных оператор (2.2) может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_g^\lambda f(z) &= \frac{(\lambda+1)}{|z|^2} \int_{|\zeta| < |z|} g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{z}\right) f(\zeta) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) f(\zeta) dA(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{(\lambda+1)}{|z|^2} g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda & |\zeta| < |z|; \\ 0, & |z| \leq |\zeta| < 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\kappa_{3,p}(g) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{|z| < |w| < 1} \left| g\left(\frac{z}{|z|}, w\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(w), \\
\kappa_{4,p}(g) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{|z| < |w| < 1} \left| g\left(\frac{zw}{|z||w|}, w\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(w), \\
\kappa_{5,p}(g) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_{|z| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{zw}{|z||w|}, w\right) \right| |w|^{2(|\lambda| - \frac{1}{p})}}{(|w|^2 - |z|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Теорема 2.3. Пусть $1 \leq p < \infty$.

1. Пусть $\lambda \geq 0$. Если $\kappa_{3,p}(g) < \infty$ и $\kappa_{4,p}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданный равенством (2.2) ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, и его операторная норма не превышает $\kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p}} \kappa_{4,p}(g)^{\frac{1}{p}}$.

2. Пусть $-1 < \lambda < 0$. Если $\kappa_{3,p}(g) < \infty$ и $\kappa_{5,p}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданный равенством (2.2) ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, и его операторная норма не превышает $\kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{5,p}(g)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. Согласно неравенству Минковского для интегралов, мы имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} \\ & \leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| dA_\lambda(z) \\ & = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} \left| g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \right| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\ & = (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| |w|^{-2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w). \end{aligned}$$

Для $\lambda \geq 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} & \leq (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| \left(1 - |\zeta|^2\right)^\lambda dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right|}{|w|^2} dA_\lambda(w) \\ & \leq \kappa_{4,1} \|f\|_{1,\lambda}, \end{aligned}$$

а для $-1 < \lambda < 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} \\ & \leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) \frac{1}{(1 - |\zeta|^2)^\lambda} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| |w|^{-2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w) \\ & = \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{|\lambda|} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| |w|^{2(|\lambda|-1)}}{(|w|^2 - |\zeta|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w) \\ & \leq \kappa_{5,1} \|f\|_{1,\lambda}. \end{aligned}$$

В следующих расчетах и оценках мы предполагаем, что $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Применяя неравенство Гельдера, мы имеем

$$|\mathbb{K}_g^\lambda f(z)| \leq \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| \left| \frac{z}{\bar{\zeta}} \right|^{\frac{2}{p}} dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

Изменив переменную $\zeta = |z|w$ в первом интеграле получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) \right| \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{p}} dA(\zeta) &= |z|^2 \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}(z, |z|w) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}\left(\frac{z}{|z|}, w\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \left| g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{w}|z|}{\bar{z}}\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} (1 - |w|^2)^\lambda dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| g\left(\frac{z}{|z|}, \zeta\right) \right| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(\zeta) \leq \kappa_{3,p}(g).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$\left| \mathbb{K}_g^\lambda f(z) \right| \leq \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) \right| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbb{K}_g^\lambda f \right\|_{p,\lambda} &\leq \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} dA_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) \right| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) \right| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} dA_\lambda(z) \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

вычислим,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) \right| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \\
&= (\lambda + 1) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \right|}{|z|^2} \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{z} \right|^2 \right)^\lambda dA_\lambda(z) \\
&= (\lambda + 1) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{|\zeta|}{\zeta} \frac{w}{|w|}, w\right) \right|}{|w|^{2-\frac{2}{p'}}} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^\lambda dA_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Мы разделяем на два случая. Сначала мы анализируем случай, когда $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{K}_g^\lambda f \right\|_{p,\lambda} \\
&\leq \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| (1 - |\zeta|^2)^\lambda}{|w|^{\frac{2}{p}}} dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Из приведенных выше расчетов следует, что

$$\left\| \mathbb{K}_g^\lambda f \right\|_{p,\lambda} \leq \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{4,p}(g)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda}.$$

Теперь, когда $-1 < \lambda < 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{K}_g f\|_{p,\lambda} \\ & \leq \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA_\lambda(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{|\lambda|} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| |w|^{2|\lambda| - \frac{2}{p}}}{(|w|^2 - |\zeta|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Из приведенных выше расчетов следует, что

$$\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \leq \kappa_{3,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{5,p}(g)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Теперь перейдем к доказательству необходимых условий ограниченности оператора $\mathbb{K}_g^\lambda$, заданного равенством (2.2) в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \varkappa(g, z) &= \int_{|z| < |w| < 1} g\left(\frac{zw}{|z||w|}, w\right) |w|^{-2(1+\lambda)} (|w|^2 - |z|^2)^\lambda dA_\lambda(w), \\ \varkappa_{p,\alpha}(g, z) &= |z|^{-\frac{\alpha}{p}} \int_{|z| < |w| < 1} g\left(\frac{zw}{|z||w|}, w\right) |w|^{-2(1+\lambda)} (|w|^2 - |z|^2)^\lambda dA_\lambda(w). \end{aligned}$$

Теорема 2.4. Пусть g неотрицательно и $\lambda > -1$. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ заданный равенством (2.2) ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $p = 1$, то $\varkappa(g, \cdot) \in L^1(\mathbb{D})$.
2. Если $1 < p < \infty$, то $\varkappa_{p,\alpha}(g, \cdot) \in L^1(\mathbb{D})$, для любого $\alpha < 2$.

Доказательство. Сначала предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ ограничен в $L_\lambda^1(\mathbb{D})$. Тогда для $\phi(z) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_g^\lambda \phi\|_{1,\lambda} &= \int_{\mathbb{D}} \phi(\zeta) dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) dA_\lambda(z) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) |w|^{-2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) |w|^{-2(1+\lambda)} (|w|^2 - |\zeta|^2)^\lambda dA_\lambda(w). \end{aligned}$$

Это подразумевает, что $\varkappa(g, \cdot) \in L^1(\mathbb{D})$. Теперь предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$ ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$. Тогда для всех $\phi \in L_\lambda^p(\mathbb{D})$ и $\psi \in L_\lambda^{p'}(\mathbb{D})$ мы имеем

$$\left| \int_{\mathbb{D}} (\mathbb{K}_g^\lambda \phi)(z) \psi(z) dA_\lambda(z) \right| \leq \|\mathbb{K}_g^\lambda\| \|\phi\|_{p,\lambda} \|\psi\|_{p',\lambda}.$$

Пусть

$$\phi(z) = |z|^{-\frac{\alpha}{p}}, \quad \psi(z) = 1, \quad \alpha < 2.$$

Подставляя во внимание приведенные выше функции, мы получаем

$$\begin{aligned} \infty &> \|\mathbb{K}_g^\lambda\| \|\phi\|_{p,\lambda} \|\psi\|_{p',\lambda} \geq \int_{\mathbb{D}} (\mathbb{K}_g^\lambda \phi)(z) \psi(z) dA_\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) \phi(\zeta) dA(\zeta) \right) \psi(z) dA_\lambda(z) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(\zeta)}{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}}} \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(\zeta)}{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}}} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{1}{|w|^2} g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w) \\ &= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(\zeta)}{|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}}} \int_{|\zeta| < |w| < 1} g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) (|w|^2 - |\zeta|^2)^\lambda |w|^{-2(1+\lambda)} dA_\lambda(w). \end{aligned}$$

Это подразумевает, что $\varkappa_{p,\alpha}(g, \cdot) \in L^1(\mathbb{D})$, для любого $\alpha < 2$. $\square$

Наконец, рассмотрим весовой оператор Адамара-Бергмана переменного порядка $\mathbb{K}_g^\lambda$, заданный равенством (2.1). В данном случае исследование не сводится к технике работы с операторами с однородными ядрами. Однако анализ доказательства теоремы 2.1 позволяет нам утверждать следующий результат.

Обозначим

$$\begin{aligned} \kappa_{1,p}(g_0) &= \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(w), \\ \kappa_{2,p}(g_0) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{|\lambda|} \int_{|z| < |w| < 1} \frac{g_0(w) |w|^{2(|\lambda| - \frac{1}{p})}}{(|w|^2 - |z|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w). \end{aligned}$$

Теорема 2.5. Пусть $1 \leq p < \infty$ и

$$g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|.$$

1. Пусть $\lambda \geq 0$. Если $\kappa_{1,p}(g_0) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$, заданный равенством (2.1), ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\kappa_{1,p}(g_0)$.
2. Пусть $-1 < \lambda < 0$. Если $\kappa_{1,p}(g_0) < \infty$ и $\kappa_{2,p}(g_0) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\lambda$, заданный равенством (2.1), ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p}} \kappa_{2,p}(g_0)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. Согласно неравенству Минковского для интегралов, мы имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| dA_\lambda(z) \\
&\leq (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{|g_0\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right)|}{|z|^2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(z) \\
&= (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda dA_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Для $\lambda \geq 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} &\leq (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} (1 - |\zeta|^2)^\lambda dA_\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^2} dA_\lambda(w) \leq \kappa_{1,1}(g_0) \|f\|_{1,\lambda},
\end{aligned}$$

а для $-1 < \lambda < 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{1,\lambda} &= \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) \frac{1}{(1 - |\zeta|^2)^\lambda} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^\lambda}{|w|^2} dA_\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA_\lambda(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{|\lambda|} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)| |w|^{2(|\lambda|-1)}}{(|w|^2 - |\zeta|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w) \\
&\leq \kappa_{2,1}(g_0) \|f\|_{1,\lambda}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$. В следующих расчетах и оценках мы предполагаем, что $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Применяя неравенство Гельдера,

получим

$$\begin{aligned}
|\mathbb{K}_g^\lambda f(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{pp'}} \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{pp'}} f(\zeta) dA(\zeta) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \left| \mathcal{K}(z, \zeta)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{pp'}} \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{pp'}} f(\zeta) \right| dA(\zeta) \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{p}} dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

По замене переменных $\zeta = |z|w$ в первом интеграле получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{\frac{2}{p}} dA(\zeta) &= |z|^2 \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, |z|w)| |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| \mathcal{K} \left(\frac{z}{|z|}, w \right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&\leq (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} \left| g_0 \left(\frac{\overline{w}|z|}{\overline{z}} \right) \right| \frac{(1 - |w|^2)^\lambda}{|w|^{\frac{2}{p}}} dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |g_0(\zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA_\lambda(\zeta) = \kappa_{1,p}(g_0).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$|\mathbb{K}_g^\lambda f(z)| \leq \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} &\leq \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} dA_\lambda(z) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} dA_\lambda(z) \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

а после замены переменных во втором интеграле выше, мы получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \\
& \leq (\lambda + 1) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} \left| g_0 \left(\frac{\bar{\zeta}}{z} \right) \right| \left(1 - \left| \frac{\zeta}{z} \right|^2 \right)^\lambda \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{p'}} dA_\lambda(z) \\
& = (\lambda + 1) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^{2 - \frac{2}{p'}}} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^\lambda dA_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Мы разделяем на два случая. Сначала мы анализируем случай, когда $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \\
& \leq \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \left\{ (\lambda + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|(1 - |\zeta|^2)^\lambda}{|w|^{\frac{2}{p}}} dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

отсюда,

$$\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \leq \kappa_{1,p}(g_0) \|f\|_{p,\lambda}.$$

Теперь, когда $-1 < \lambda < 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \\
& \leq \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA_\lambda(\zeta) \frac{1}{(1 - |\zeta|^2)^\lambda} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)|}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^\lambda dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA_\lambda(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{|\lambda|} \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g_0(w)| |w|^{2(|\lambda| - \frac{1}{p})}}{(|w|^2 - |\zeta|^2)^{|\lambda|}} dA_\lambda(w) \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\|\mathbb{K}_g^\lambda f\|_{p,\lambda} \leq \kappa_{1,p}(g_0)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{2,p}(g_0)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

2.2 Ограниченность из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$: достаточные условия

Докажем достаточные условия ограниченности из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ для весового оператора Адамара-Бергмана переменного порядка $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданного равенством (2.1), используя непосредственные оценки.

Теорема 2.6. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, и $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Пусть

$$g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|.$$

Тогда оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.1), ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ при условии

$$\kappa_{1,\lambda_1,\lambda_2,p}(g_0) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g_0(w)|w|^{-\frac{2}{p}}}{(1-|w|^2)^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{p}}} dA_\alpha(w) < \infty, \quad (2.5)$$

и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1} \right]^{\frac{1}{p}} \kappa_{1,\lambda_1,\lambda_2,p}(g_0)$ (мы принимаем, что $\kappa_{1,\lambda_1,\lambda_2,\infty}(g_0) = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) dA_\alpha(w)$).

Доказательство. Пусть $p \in [1, \infty)$. Согласно неравенству Минковского для интегралов, мы имеем

$$\|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \leq \int_{\mathbb{D}} \|g(\cdot, w)f(\cdot\bar{w})\|_{p,\lambda_2} dA_\alpha(w), \quad (2.6)$$

где

$$\|g(\cdot, w)f(\cdot\bar{w})\|_{p,\lambda_2} \leq g_0(w) \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p dA_{\lambda_2}(z) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

По замене переменных в приведенном выше интеграле $z \rightarrow \zeta$ таким обра-

зом, что $z\bar{w} = \zeta$ и заметив, что $\lambda_2 > 0$, мы получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p dA_{\lambda_2}(z) = \int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p \frac{(1 - |zw|^2)^{\lambda_1 - \lambda_2}}{(1 - |zw|^2)^{\lambda_1 - \lambda_2}} dA_{\lambda_2}(z) \\
& \leq (1 - |w|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p (1 - |zw|^2)^{\lambda_1 - \lambda_2} dA_{\lambda_2}(z) \\
& = (\lambda_2 + 1)(1 - |w|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2} \frac{dA(\zeta)}{|w|^2} \\
& \leq (\lambda_2 + 1)(1 - |w|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(1 - |\zeta|^2\right)^{\lambda_2} \frac{dA(\zeta)}{|w|^2} \\
& = \frac{(\lambda_2 + 1)(1 - |w|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)}}{|w|^2} \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1} dA(\zeta) \\
& = \frac{(\lambda_2 + 1)(1 - |w|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)}}{(\lambda_1 + 1)|w|^2} \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p dA_{\lambda_1}(\zeta). \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Теперь, сложив вместе (2.6) и (2.7), мы, наконец, получим

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p, \lambda_2} & \leq \left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} (1 - |w|^2)^{-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p}} dA_\alpha(w) \|f\|_{p, \lambda_1} \\
& = \left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \kappa_{1, \lambda_1, \lambda_2, p}(g_0) \|f\|_{p, \lambda_1}.
\end{aligned}$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Замечание 2.1. Если $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ в теореме 2.6, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$ заданный равенством (2.1), ограничен в $L_\lambda^p(\mathbb{D})$, при условии

$$\kappa_{3, p}(g_0) = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(w) < \infty, \tag{2.8}$$

и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \kappa_{3, \lambda_1, \lambda_2, p}(g_0)$ (мы принимаем, что $\kappa_{3, \lambda_1, \lambda_2, \infty}(g_0) = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) dA_\alpha(w)$).

2.3 Ограниченность из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$: необходимые условия

Докажем необходимое условие ограниченности из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ для весового оператора Адамара-Бергмана неперемного порядка $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданного равенством (2.3).

Теорема 2.7. *Пусть ядро g неотрицательно. Пусть $\alpha > -1$, $\lambda_1 > -1$ и $\lambda_2 > -1$. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.3), ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда*

$$g(w)|w|^{-\frac{\beta}{p}}(1-|w|^2)^{-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{p}+\epsilon} \in L_\alpha^1(\mathbb{D}), \quad (2.9)$$

для любого $\beta < 2, \epsilon > 0$.

Доказательство. Предположим, что $1 < p < \infty$. Пусть $1/p + 1/p' = 1$ и

$$\phi(z) = |z|^{-\frac{\beta}{p}}(1-|z|^2)^{-\frac{\gamma}{p}}, \quad \psi(z) = (1-|z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}},$$

где $\beta < 2$, $\gamma < 1 + \lambda_1$ и $\delta < 1 + \lambda_2$. Тогда $\phi \in L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$, $\psi \in L_{\lambda_2}^{p'}(\mathbb{D})$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\mathbb{D}} (\mathbb{K}_g^\alpha \phi)(z) \psi(z) dA_{\lambda_2}(z).$$

Этот интеграл существует, поскольку $\mathbb{K}_g^\alpha \phi \in L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и $\psi \in L_{\lambda_2}^{p'}(\mathbb{D})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{D}} g(w) dA_\alpha(w) \int_{\mathbb{D}} \phi(z\bar{w}) \psi(z) dA_{\lambda_2}(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} g(w) dA_\alpha(w) \int_{\mathbb{D}} |zw|^{-\frac{\beta}{p}} (1-|zw|^2)^{-\frac{\gamma}{p}} (1-|z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \\ &= (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-\frac{\beta}{p}} dA_\alpha(w) \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{\beta}{p}} (1-|zw|^2)^{-\frac{\gamma}{p}} (1-|z|^2)^{\lambda_2 - \frac{\delta}{p'}} dA(z). \end{aligned}$$

Вычислим второй указанный выше интеграл (для краткости обозначим его через $I_{\frac{\beta}{p}, \lambda_2 - \frac{\delta}{p'}, \frac{\gamma}{p}}(w)$). Если $\beta < 2p$ и $\frac{\gamma}{p} > 1 + \lambda_2 - \frac{\delta}{p'} > 0$, то по лемме 4 мы имеем, что

$$I_{\frac{\beta}{p}, \lambda_2 - \frac{\delta}{p'}, \frac{\gamma}{p}}(w) \sim \frac{\Gamma\left(1 + \lambda_2 - \frac{\delta}{p'}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)} (1-|w|^2)^{-\frac{\gamma}{p} + 1 + \lambda_2 - \frac{\delta}{p'}}, \quad |w| \rightarrow 1.$$

Наконец, мы получим

$$\frac{(\lambda_2 + 1)\Gamma\left(1 + \lambda_2 - \frac{\delta}{p'}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)} \int_{\mathbb{D}} g(w) |w|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |w|^2)^{-\frac{\gamma}{p} + 1 + \lambda_2 - \frac{\delta}{p'}} dA_{\alpha}(w) < \infty$$

и это утверждение следует для случая $1 < p < \infty$.

Для случая $p = 1$ мы полагаем

$$\phi(z) = |z|^{-\beta} (1 - |z|^2)^{-\gamma}, \quad \psi(z) = 1, \quad \beta < 2, \gamma < 1 + \lambda_1,$$

и действуем, как описано выше. $\square$

Теперь докажем необходимое условие ограниченности из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ для весового оператора Адамара-Бергмана переменного порядка $\mathbb{K}_g^{\alpha}$, заданного равенством (2.1).

Теорема 2.8. Пусть ядро g неотрицательно. Пусть $\alpha > -1, \lambda_1 > -1$ и $\lambda_2 > -1$. Предположим, что оператор $\mathbb{K}_g^{\alpha}$, заданный равенством (2.1) ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$|z|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} \int_{\mathbb{D}} g(z, w) |w|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |zw|^2)^{-\frac{\gamma}{p}} dA_{\alpha}(w) \in L_{\lambda_2}^1(\mathbb{D})$$

для любого $\beta < 2, \gamma < 1 + \lambda_1$ и $\delta < 1 + \lambda_2$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.7, полагая

$$\phi(z) = |z|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |z|^2)^{-\frac{\gamma}{p}}, \quad \psi(z) = (1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}}, \quad \beta < 2, \gamma < 1 + \lambda_1, \delta < 1 + \lambda_2.$$

мы получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{D}} dA_{\alpha}(w) \int_{\mathbb{D}} g(z, w) \phi(z\bar{w}) \psi(z) dA_{\lambda_2}(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} dA_{\alpha}(w) \int_{\mathbb{D}} g(z, w) |zw|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |zw|^2)^{-\frac{\gamma}{p}} (1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |w|^{-\frac{\beta}{p}} dA_{\alpha}(w) \int_{\mathbb{D}} g(z, w) |z|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |zw|^2)^{-\frac{\gamma}{p}} (1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} g(z, w) |w|^{-\frac{\beta}{p}} (1 - |zw|^2)^{-\frac{\gamma}{p}} dA_{\alpha}(w). \end{aligned}$$

и это утверждение следует из того, что $I < \infty$. $\square$

Мы приводим несколько примеров ядер, для которых мы получили более подробные необходимые условия; их доказательства можно найти в работе [36].

Пример 2.11 (пример 3.6, [36]). Пусть $g(z, w) = g_1(w)|z|^\theta(1 - |z|^2)^\eta$ при $\theta \geq -\frac{2}{p'}$, $\eta \geq -\frac{1+\lambda_2}{p}$ и $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 > -1$. Необходимое условие для ограниченности из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ для оператора $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданного равенством (2.1), имеет вид

$$\int_{\mathbb{D}} g_1(w)|w|^{-\frac{\beta}{p}} dA_\alpha(w) < \infty,$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$, если $\eta \geq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p}$. Если $\eta < \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p}$, то оно имеет вид

$$\int_{\mathbb{D}} g_1(w)|w|^{-\frac{\beta}{p}}(1 - |w|^2)^{-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p} + \epsilon} dA_\alpha(w) < \infty,$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$, $\epsilon > 0$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.8 мы имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{\beta}{p}}(1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{g(z, w)}{|w|^{\frac{\beta}{p}}(1 - |zw|^2)^{\frac{\gamma}{p}}} dA_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{\beta}{p}}(1 - |z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{g_1(w)|z|^\theta(1 - |z|^2)^\eta}{|w|^{\frac{\beta}{p}}(1 - |zw|^2)^{\frac{\gamma}{p}}} dA_\alpha(w) \\ &= (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} g_1(w)|w|^{-\frac{\beta}{p}} dA_\alpha(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{|z|^{\theta - \frac{\beta}{p}}(1 - |z|^2)^{\lambda_2 + \eta - \frac{\delta}{p'}}}{(1 - |zw|^2)^{\frac{\gamma}{p}}} dA(z), \end{aligned}$$

где $\beta < 2$, $\delta < 1 + \lambda_2$, $\gamma < 1 + \lambda_1$. По лемме 4 мы анализируем два случая:

1. Если $\frac{\gamma}{p} - \lambda_2 - \eta + \frac{\delta}{p'} < 1$ и $\frac{\beta}{p} - 2 < \theta$, второй интеграл, указанный выше, ограничен в $\mathbb{D}$ снизу и сверху положительной константой. Поскольку $I < \infty$, то

$$\int_{\mathbb{D}} g_1(w)|w|^{-\frac{\beta}{p}} dA_\alpha(w) < \infty,$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$.

2. Если $\frac{\gamma}{p} - \lambda_2 - \eta + \frac{\delta}{p'} > 1$ и $\frac{\beta}{p} - 2 < \theta$,

$$I_{\theta - \frac{\beta}{p}, \lambda_2 + \eta - \frac{\delta}{p'}, \frac{\gamma}{p}}(w) \sim \frac{1}{(1 - |w|^2)^{\frac{\gamma}{p} - 1 - \lambda_2 - \eta + \frac{\delta}{p'}}}, \quad |w| \rightarrow 1.$$

Основываясь на приведенном выше расчете, поскольку $I < \infty$, мы имеем

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{g_1(w)|w|^{-\frac{\beta}{p}}}{(1-|w|^2)^{\frac{\gamma}{p}-1-\lambda_2-\eta+\frac{\delta}{p'}}} dA_{\alpha}(w) < \infty$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$ и $\frac{\gamma}{p} - \lambda_2 - \eta + \frac{\delta}{p'} > 1$.

□

Пример 2.12 (пример 3.7, [36]). Пусть

$$g(z, w) = g_2(z)|w|^{\theta}(1-|w|^2)^{\eta}$$

при $-\frac{2}{p'} \leq \theta, \eta > -1 - \alpha$ и $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 > -1$. Необходимое условие ограниченности из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ для оператора $\mathbb{K}_g^{\alpha}$, заданного равенством (2.1), имеет вид

$$\int_{\mathbb{D}} g_2(z)|z|^{-\frac{\beta}{p}}(1-|z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) < \infty,$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$ и $\delta < 1 + \lambda_2$, если $\eta \geq \frac{\lambda_1}{p} - \frac{1}{p'} - \alpha$. Если $\eta < \frac{\lambda_1}{p} - \frac{1}{p'} - \alpha$, то оно имеет вид

$$\int_{\mathbb{D}} g_2(z)|z|^{-\frac{\beta}{p}}(1-|z|^2)^{-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{p}+\epsilon} dA_{\lambda_2}(z) < \infty,$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$ и $\epsilon > 0$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.8 мы имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{\beta}{p}}(1-|z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{g(z, w)}{|w|^{\frac{\beta}{p}}(1-|zw|^2)^{\frac{\gamma}{p}}} dA_{\alpha}(w) \\ &= (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{g_2(z)}{|z|^{\frac{\beta}{p}}(1-|z|^2)^{\frac{\delta}{p'}}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{|w|^{\theta-\frac{\beta}{p}}(1-|w|^2)^{\alpha+\eta}}{(1-|zw|^2)^{\frac{\gamma}{p}}} dA(w), \end{aligned}$$

где $\beta < 2, \delta < 1 + \lambda_2, \gamma < 1 + \lambda_1$. По лемме 4 мы анализируем два случая:

1. Если $\frac{\gamma}{p} - \alpha - \eta < 1$ и $\frac{\beta}{p} - 2 < \theta$, второй интеграл, указанный выше, ограничен в $\mathbb{D}$ снизу и сверху положительной константой. Поскольку $I < \infty$, то

$$\int_{\mathbb{D}} g_2(z)|z|^{-\frac{\beta}{p}}(1-|z|^2)^{-\frac{\delta}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) < \infty,$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$ и $\delta < 1 + \lambda_2$.

2. Если $\frac{\gamma}{p} - \alpha - \eta > 1$ и $\frac{\beta}{p} - 2 < \theta$

$$I_{\theta - \frac{\beta}{p}, \alpha + \eta, \frac{\gamma}{p}}(z) \sim \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\frac{\gamma}{p} - 1 - \alpha - \eta}}, \quad |z| \rightarrow 1.$$

Основываясь на приведенном выше расчете, поскольку $I < \infty$, мы имеем

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{g_2(z) |z|^{-\frac{\beta}{p}}}{(1 - |z|^2)^{\frac{\gamma}{p} - 1 - \alpha - \eta + \frac{\delta}{p'}}} dA_{\lambda_2}(z) < \infty$$

для каждого $\beta < p(\theta + 2)$ и $\frac{\gamma}{p} - \alpha - \eta > 1$.

□

2.4 Ограниченность из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$: достаточные условия

Докажем достаточные условия ограниченности из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ для весового оператора Адамара-Бергмана $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданного равенством (2.1).

Обозначим

$$\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) = \int_{\mathbb{D}} g(w) (1 - |w|^2)^{-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p}} dA_\alpha(w) < \infty \quad (2.10)$$

Теорема 2.9. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Пусть $g_0(w) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z, w)|$. Если $\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g_0) < \infty$, то оператор (2.1), ограничен из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $C_p \kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g_0)$ (мы принимаем, что $\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,\infty}(g_0) = C_\infty \int_{\mathbb{D}} |g_0(w)| dA_\alpha(w)$), где C_p не зависит от f и g_0 .

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.6, мы имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \\ & \leq \int_{\mathbb{D}} g_0(w) \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z\bar{w})|^p dA_{\lambda_2}(z) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\ & = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) \left(\frac{(\lambda_2 + 1)}{|w|^2} \int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^{\lambda_2} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\ & = (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \int_{|w| < \frac{1}{2}} \frac{g_0(w)}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^{\lambda_2} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\ & + (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \frac{g_0(w)}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{|\zeta| < |w|} |f(\zeta)|^p \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^{\lambda_2} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\ & = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1, мы имеем $|f(z)| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2+\lambda_1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1}$ для $|z| < \frac{1}{2}$, следова-

тельно

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2+\lambda_1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{|w|<\frac{1}{2}} \frac{g_0(w)}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{|\zeta|<|w|} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\
&= (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2+\lambda_1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{|w|<\frac{1}{2}} \frac{g_0(w)}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(\int_0^{|w|} 2r \left(1 - \frac{r^2}{|w|^2}\right)^{\lambda_2} dr \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\
&= (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2+\lambda_1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{|w|<\frac{1}{2}} g_0(w) \left(\int_0^1 (1-t)^{\lambda_2} dt \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2+\lambda_1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{|w|<\frac{1}{2}} g_0(w) dA_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Для I_2 , получим

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2^{\frac{2}{p}} (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{1}{2}<|w|<1} g_0(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\lambda_2} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\
&= 2^{\frac{2}{p}} (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{1}{2}<|w|<1} g_0(w) \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_2} (1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}}{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\
&\leq 2^{\frac{2}{p}} (\lambda_2 + 1)^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{1}{2}<|w|<1} \frac{g_0(w)}{(1 - |w|^2)^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p}}} \left(\int_{|\zeta|<|w|} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1} dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\
&\leq 2^{\frac{2}{p}} \left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{\frac{1}{2}<|w|<1} \frac{g_0(w)}{(1 - |w|^2)^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p}}} dA_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Из приведенных выше оценок мы получим

$$\|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \leq C_p \kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g_0) \|f\|_{p,\lambda_1}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Для оператора Адамара-Бергмана неперемного порядка $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданного равенством (2.3), получим следующий результат.

Замечание 2.2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Если $\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный формулой (2.3) ограничен из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $C_p \kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)$ (мы принимаем, что $\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,\infty}(g) = C_\infty \int_{\mathbb{D}} |g(w)| dA_\alpha(w)$), где C_p не зависит от f и g .

Замечание 2.3. Если $\lambda_1 = \lambda_2$ в теореме 2.9, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.1) ограничен в $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ при условии

$$\kappa(g_0) = \int_{\mathbb{D}} g_0(w) dA_\alpha(w) < \infty, \quad (2.11)$$

и его операторная норма не превышает $C_p \kappa(g_0)$, где C_p не зависит от f и g_0 .

Благодаря свойству (13) мы можем рассматривать оператор (2.1) в следующем виде

$$\mathbb{K}_g^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w}) f(w) dA_\alpha(w). \quad (2.12)$$

Докажем достаточное условие ограниченности из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ оператора (2.1) представленного в виде (2.12).

Теорема 2.10. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$. Пусть $\alpha > -1$, $\lambda_1 > -1$ и $\lambda_2 > -1$. Тогда оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.1), представленный в виде (2.12), ограничен из $\mathcal{A}_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ при условии

$$\kappa_{3,p,\lambda_1,\lambda_2}(g) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\|g(\cdot, \bar{w})\|_{p,\lambda_2}}{(1 - |w|^2)^{\frac{2+\lambda_1}{p}}} dA_\alpha(w) < \infty,$$

и его операторная норма не превышает $\kappa_{3,p,\lambda_1,\lambda_2}(g)$.

Доказательство. С помощью неравенства Минковского для интегралов и теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} &\leq \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |g(z, z\bar{w}) f(w)|^p dA_{\lambda_2}(z) \right)^{\frac{1}{p}} dA_\alpha(w) \\ &\leq \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |g(z, z\bar{w})|^p dA_{\lambda_2}(z) \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dA_\alpha(w)}{(1 - |w|^2)^{\frac{2+\lambda_1}{p}}} \\ &= \|f\|_{p,\lambda_1} \int_{\mathbb{D}} \frac{\|g(\cdot, \bar{w})\|_{p,\lambda_2}}{(1 - |w|^2)^{\frac{2+\lambda_1}{p}}} dA_\alpha(w) = \kappa_{3,p,\lambda_1,\lambda_2}(g) \|f\|_{p,\lambda_1}. \end{aligned}$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

2.5 Ограниченность из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$: использование подхода для операторов с однородными ядрами

Здесь мы применяем подход для операторов с однородными ядрами. Хотя условия аналогичны полученным ранее, отметим, что мы избегаем ограничений на параметры λ_1, λ_2 . Мы начнем с частного случая (2.3).

По замене переменных этот оператор может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_g^\alpha f(z) &= \frac{(\alpha+1)}{|z|^2} \int_{|\zeta| < |z|} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) f(\zeta) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha dA(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \mathcal{K}(z, \zeta) f(\zeta) dA(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}\end{aligned}\tag{2.13}$$

где

$$\mathcal{K}(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)}{|z|^2} g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha & |\zeta| < |z|; \\ 0, & |z| \leq |\zeta| < 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\kappa_{1,p}(g) &= \int_{\mathbb{D}} |g(w)| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(w), \\ \kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{-\lambda_1} \int_{|z| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^{\frac{2}{p}}} \left(1 - \left|\frac{z}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2} dA_\alpha(w).\end{aligned}$$

Теорема 2.11. Пусть $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 > -1$.

1. Пусть $p = 1$. Если $\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,1}(g) < \infty$, то оператор (2.3) ограничен из $L_{\lambda_1}^1(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^1(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}\right] \kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,1}(g)^{\frac{1}{p}}$.
2. Пусть $1 < p < \infty$. Если $\kappa_{1,p}(g) < \infty$ и $\kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) < \infty$, то оператор (2.3) ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}\right]^{\frac{1}{p}} \kappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \kappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. Используя неравенство Минковского для интегралов и заменив переменную в интеграле $z \rightarrow w$ таким образом, что

$\frac{\bar{\zeta}}{z} = w$, получим

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{1,\lambda_2} \leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| dA_{\lambda_2}(z) \\
&= (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \right|}{|z|^2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha dA_{\lambda_2}(z) \\
&= (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}}{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)|}{|w|^2} \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2} dA_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$\|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{1,\lambda_2} \leq \frac{(\lambda_2 + 1)}{(\lambda_1 + 1)} \varkappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,1}(g) \|f\|_{1,\lambda_1}.$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$. В следующих поточечных расчетах и оценках мы предполагаем, что $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{K}_g^\alpha f(z)| \leq \int_{\mathbb{D}} \left| \mathcal{K}(z, \zeta)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \left| \frac{\zeta}{z} \right|^{\frac{2}{pp'}} f(\zeta) \right| dA(\zeta) \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

По замене переменных $\frac{\bar{w}|z|}{\bar{z}} = \zeta$ для первого интеграла, мы получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA(\zeta) \\
&= |z|^2 \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, |z|w)| |zw|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= (\alpha + 1) |z|^{-\frac{2}{p}} \int_{\mathbb{D}} \left| g\left(\frac{|z|\bar{w}}{\bar{z}}\right) \right| (1 - |w|^2)^\alpha |w|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\
&= |z|^{-\frac{2}{p}} \int_{\mathbb{D}} |g(\zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(\zeta) = |z|^{-\frac{2}{p}} \varkappa_{1,p}(g).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$|\mathbb{K}_g^\alpha f(z)| \leq \varkappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} |z|^{-\frac{2}{pp'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \\
& \leq \varkappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{2}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \varkappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |z|^{-\frac{2}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \varkappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \right| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha}{|z|^{2+\frac{2}{p'}}} dA_{\lambda_2}(z) \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

По замене переменных во втором интеграле $z \rightarrow w$ таким образом, что $\frac{\bar{\zeta}}{z} = w$, мы получим

$$\begin{aligned}
& (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right) \right| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha}{|z|^{2+\frac{2}{p'}}} dA_{\lambda_2}(z) \\
& = (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2}}{|\zeta|^{\frac{2}{p'}} |w|^{2-\frac{2}{p'}}} dA_\alpha(w) \\
& = (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}}{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{|g(w)| \left(1 - \left|\frac{\zeta}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2}}{|w|^{\frac{2}{p'}}} dA_\alpha(w) \\
& \leq \frac{(\lambda_2 + 1)}{(\lambda_1 + 1)} \varkappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) \|f\|_{p,\lambda_1}^p.
\end{aligned}$$

Из приведенных выше расчетов следует, что

$$\|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \leq \left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \varkappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \varkappa_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Для неотрицательного λ_2 мы получаем следующий результат. Обозначим

$$\varkappa_{3,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{|z| < |w| < 1} |g(w)| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(w).$$

Замечание 2.4. Пусть $\alpha, \lambda_1 > -1$ и $\lambda_2 \geq 0$.

1. Пусть $p = 1$. Если $\varkappa_{3,\lambda_1,\lambda_2,1}(g) < \infty$, то оператор (2.3) ограничен из $L_{\lambda_1}^1(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^1(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}\right] \varkappa_{3,\lambda_1,\lambda_2,1}(g)^{\frac{1}{p}}$.
2. Пусть $1 < p < \infty$. Если $\varkappa_{1,p}(g) < \infty$ и $\varkappa_{3,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) < \infty$, то оператор (2.3) ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}\right]^{\frac{1}{p}} \varkappa_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \varkappa_{3,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)^{\frac{1}{p}}$.

Рассмотрим оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$ с ядром $g\left(\frac{z}{|z|}, w\right)$, т.е. случай оператора (2.2), в котором внешняя переменная относится к единичной окружности (границе единичного диска). В этом случае мы все еще можем применить технику операторов с однородными ядрами. Напомним, что путем замены переменных этот оператор может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_g^\alpha f(z) &= \frac{(\alpha+1)}{|z|^2} \int_{|\zeta| < |z|} g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) f(\zeta) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha dA(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) f(\zeta) dA(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)}{|z|^2} g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \left(1 - \left|\frac{\zeta}{z}\right|^2\right)^\alpha & |\zeta| < |z|; \\ 0, & |z| \leq |\zeta| < 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{\varkappa}_{1,p}(g) &= \int_{\mathbb{D}} \left| g\left(\frac{z}{|z|}, w\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(w), \\ \tilde{\varkappa}_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{-\lambda_1} \int_{|z| < |w| < 1} \left| g\left(\frac{zw}{|z||w|}, w\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} \left(1 - \left|\frac{z}{w}\right|^2\right)^{\lambda_2} dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

Теорема 2.12. Пусть $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 > -1$.

1. Пусть $p = 1$. Если $\tilde{\varkappa}_{2,\lambda_1,\lambda_2,1}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.2), ограничен из $L_{\lambda_1}^1(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^1(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}\right] \tilde{\varkappa}_{2,\lambda_1,\lambda_2,1}(g)^{\frac{1}{p}}$.
2. Пусть $1 < p < \infty$. Если $\tilde{\varkappa}_{1,p}(g) < \infty$ и $\tilde{\varkappa}_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.2), ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}\right]^{\frac{1}{p}} \tilde{\varkappa}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \tilde{\varkappa}_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. Используя неравенство Минковского для интегралов и заменив переменную в интеграле $z \rightarrow w$ таким образом, что $\frac{\bar{\zeta}}{z} = w$, получим

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{K}_g^\alpha f \|_{1, \lambda_2} \\ & \leq \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| dA_{\lambda_2}(z) \\ & = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{1}{|z|^2} \left| g \left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{z} \right) \right| \left(1 - \left| \frac{\zeta}{z} \right|^2 \right)^\alpha dA_{\lambda_2}(z) \\ & = (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)| \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}}{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g \left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w \right) \right|}{|w|^2} \left(1 - \left| \frac{\zeta}{w} \right|^2 \right)^{\lambda_2} dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$\| \mathbb{K}_g^\alpha f \|_{1, \lambda_2} \leq \left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \tilde{\mathfrak{K}}_{2, \lambda_1, \lambda_2, 1}(g) \| f \|_{1, \lambda_1}.$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$. В следующих поточечных расчетах и оценках мы предполагаем, что $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Применяя неравенство Гельдера, мы имеем

$$| \mathbb{K}_g^\alpha f(z) | \leq \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| |\zeta|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

при замене переменных $\zeta = |z|w$ для первого интеграла, мы получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, \zeta)| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA(\zeta) & = |z|^2 \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\mathcal{K}}(z, |z|w)| |zw|^{-\frac{2}{p}} dA(w) \\ & = (\alpha + 1) |z|^{-\frac{2}{p}} \int_{\mathbb{D}} \left| g \left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{w}|z|}{z} \right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} (1 - |w|^2)^\alpha dA(w) \\ & = |z|^{-\frac{2}{p}} \int_{\mathbb{D}} \left| g \left(\frac{z}{|z|}, \zeta \right) \right| |\zeta|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(\zeta) \leq |z|^{-\frac{2}{p}} \tilde{\mathfrak{K}}_{1, p}(g). \end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше оценки, мы имеем

$$| \mathbb{K}_g^\alpha f(z) | \leq \tilde{\mathfrak{K}}_{1, p}(g)^{\frac{1}{p'}} |z|^{-\frac{2}{pp'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \\
& \leq \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |z|^{-\frac{2}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |\zeta|^{\frac{2}{p'}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{K}(z, \zeta)| |z|^{-\frac{2}{p'}} dA_{\lambda_2}(z) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |z| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{z}{|z|}, \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right) \right| (1 - |\frac{\zeta}{z}|^2)^\alpha}{|z|^{2+\frac{2}{p'}}} dA_{\lambda_2}(z) \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

По замене переменных во втором интеграле $z \rightarrow w$ таким образом, что $\frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}} = w$, мы получим

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \\
& \leq \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ (\lambda_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\frac{2}{p'}} dA(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| (1 - |\frac{\zeta}{w}|^2)^{\lambda_2}}{|\zeta|^{\frac{2}{p'}} |w|^{2-\frac{2}{p'}}} dA_\alpha(w) \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \frac{(\lambda_2 + 1)}{(\lambda_1 + 1)} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\zeta)|^p}{(1 - |\zeta|^2)^{\lambda_1}} dA_{\lambda_1}(\zeta) \int_{|\zeta| < |w| < 1} \frac{\left| g\left(\frac{\zeta w}{|\zeta||w|}, w\right) \right| (1 - |\frac{\zeta}{w}|^2)^{\lambda_2}}{|w|^{\frac{2}{p}}} dA_\alpha(w) \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Из приведенных выше расчетов следует, что

$$\|\mathbb{K}_g^\alpha f\|_{p,\lambda_2} \leq \left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \tilde{\mathfrak{K}}_{2,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\lambda_1}.$$

На этом доказательство заканчивается. $\square$

Для неотрицательного λ_2 мы получаем следующий результат. Обозначим

$$\tilde{\mathfrak{K}}_{3,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{|z| < |w| < 1} \left| g\left(\frac{zw}{|z||w|}, w\right) \right| |w|^{-\frac{2}{p}} dA_\alpha(w).$$

Замечание 2.5. Пусть $\alpha, \lambda_1 > -1$, и $\lambda_2 \geq 0$.

1. Пусть $p = 1$. Если $\tilde{\mathfrak{K}}_{3,\lambda_1,\lambda_2,1}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.2), ограничен из $L_{\lambda_1}^1(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^1(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1} \right] \tilde{\mathfrak{K}}_{3,\lambda_1,\lambda_2,1}(g)^{\frac{1}{p}}$.

2. Пусть $1 < p < \infty$. Если $\tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g) < \infty$ и $\tilde{\mathfrak{K}}_{3,\lambda_1,\lambda_2,p}(g) < \infty$, то оператор $\mathbb{K}_g^\alpha$, заданный равенством (2.2), ограничен из $L_{\lambda_1}^p(\mathbb{D})$ в $L_{\lambda_2}^p(\mathbb{D})$ и его операторная норма не превышает $\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1} \right]^{\frac{1}{p}} \tilde{\mathfrak{K}}_{1,p}(g)^{\frac{1}{p'}} \tilde{\mathfrak{K}}_{3,\lambda_1,\lambda_2,p}(g)^{\frac{1}{p}}$.

Глава 3. Весовые оценки для операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка

Теперь мы сосредоточимся на операторах дробного интегрирования переменного порядка, которые являются частным случаем операторов Адамара-Бергмана переменного порядка (5):

$$\mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(z)}} dA_\lambda(w), \quad \operatorname{Re} \alpha(z) \geq 0, \lambda \geq -1. \quad (3.1)$$

Эта глава посвящена весовыми оценками для этих операторов в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка аналитических функций на единичном диске $\mathbb{D}$. Наш подход основан на методе, связанном с оценками типа Зигмунда, который был недавно разработан в рамках вещественного анализа в связи с соответствующими обобщенными пространствами Гельдера переменного порядка. Благодаря выбору методики можно включить в рассмотрение случай, когда действительная часть комплексного порядка оператора вырождается, так что появляются потенциалы чисто мнимого порядка.

Недавно были изучены обобщенные пространства Гельдера, определяемые через модуль непрерывности, и еще более общие пространства Гельдера с модулем непрерывности переменного порядка, см. [9, 10, 28–31]

Пусть $\mathbb{T}$ - граница единичного диска $\mathbb{D}$. Мы говорим, что $\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет логарифмическому условию на $\mathbb{D}$, если

$$|\alpha(z) - \alpha(w)| \leq \frac{C}{\ln \frac{1}{|z-w|}}, \quad z, w \in \mathbb{D}, \quad |z - w| < \frac{1}{2}, \quad (3.2)$$

где C не зависит от z и w .

Хорошо известен следующий факт: если функция α удовлетворяет логарифмическому условию, то α ограничена и равномерно непрерывна на

$\mathbb{D}$. Следовательно, α может быть продолжена до непрерывной функции на $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq 1\}$. Мы всегда используем одно и то же обозначение α для такой продолженной функции. Напомним, что если α удовлетворяет логарифмическому условию на $\mathbb{D}$, то существует $C > 0$ такое, что

$$\frac{1}{C}h^{\Re \alpha(z)} \leq h^{\Re \alpha(\zeta)} \leq Ch^{\Re \alpha(z)}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}, \quad |z - \zeta| < h. \quad (3.3)$$

Через $\text{Lip}(\mathbb{D})$ мы обозначаем класс функций на $\mathbb{D}$, которые удовлетворяют условию Липшица.

Функция $\omega : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется неубывающей (невозрастающей) на $[0, 2]$, если существует $C > 0$ такая, что $\omega(h) \leq C\omega(\xi)$ ($\omega(\xi) \leq C\omega(h)$) для всех $0 \leq h \leq \xi \leq 2$.

В дальнейшем мы применим понятие "неубывающей" ("невозрастающей") к функции $\omega = \omega(z, h)$ как функции от h с параметром z . В таком случае мы всегда предполагаем, что свойство неубывания (не возрастания) является равномерным по z , что означает, что соответствующая константа C в приведенном выше определении не зависит от z .

Определение 3.4. Функция $\omega(z, h) : \mathbb{D} \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ называется модулем непрерывности переменного порядка, если

1. $\omega(z, h)$ непрерывна в h на $[0, 2]$ равномерно по $z \in \mathbb{D}$;
2. $\omega(z, h)$ неубывающая в h на $[0, 2]$ равномерно по $z \in \mathbb{D}$.
3. $\omega(z, h)/h$ невозрастающая на $[0, 2]$ равномерно по $z \in \mathbb{D}$.
4. $\inf_{z \in \mathbb{D}} \omega(z, h) > 0$ для $h > 0$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(z, h) = 0$ равномерно по $z \in \mathbb{D}$.

Через Ω мы будем обозначать множество таких модулей непрерывности. Мы также принимаем во внимание обобщение этого модуля

$$U(z, t) := U_\omega(z, t) = t \int_{\min\{t, 1\}}^2 \frac{\omega(z, s)}{s^2} ds, \quad t \in (0, 2], z \in \mathbb{D}. \quad (3.4)$$

Из леммы [39] известно, что

$$\omega(z, t) \leq CU_\omega(z, t), \quad 0 < t \leq 2, z \in \mathbb{D}, \quad (3.5)$$

где $C > 0$ не зависит от z .

Пусть функция f , определенная на $\mathbb{D}$, и $z \in \mathbb{D}$. Локальный модуль непрерывности переменного порядка функции f в точке z определяется следующим образом

$$\omega(f, z, h) = \sup_{w \in \mathbb{D}: |w-z| < h} |f(z) - f(w)|. \quad (3.6)$$

Напомним следующее условие типа Зигмунда

$$\int_h^2 \left(\frac{h}{t}\right)^{\nu(z)} \frac{\omega(z, t)}{t} dt \leq C \omega(z, h), \quad z \in \mathbb{D}, \quad h \in [0, 1], \quad (3.7)$$

при котором C не зависит от z и h . Через $\Phi_{\nu(\cdot)}$ мы обозначаем класс, для которого выполнено это условие. Из определения класса $\Phi_{\nu(\cdot)}$ легко следует, что функция $\omega(z, h)$ удовлетворяет свойству $\omega(z, h) \geq Ch^{\nu(z)}$ с константой $C > 0$, не зависящей от z и h .

Нам также понадобится следующий результат.

Лемма 3.1. Пусть $f \in H(\mathbb{D})$, и $g(z, \cdot) \in H(\mathbb{D})$ для каждого $z \in \mathbb{D}$, $\Re \lambda > -1$. Тогда

$$\int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w}) f(\bar{w}) dA_{\lambda}(w) = \int_{\mathbb{D}} g(z, z\bar{w}) \overline{f(w)} dA_{\lambda}(w) = g(z, 0) \overline{f(0)}, \quad (3.8)$$

для каждого $z \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Зафиксируем $0 < r < 1$. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ где f_k - коэффициенты Тейлора функции f . Мы получим

$$\begin{aligned} \int_{|w| < r} g(z, z\bar{w}) \overline{f(w)} dA_{\lambda}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f_n} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z) z^k \int_{|w| < r} \bar{w}^{n+k} dA_{\lambda}(w) \\ &= (1 + \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f_n} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z) z^k \int_0^r (1 - r^2)^{\lambda} 2r^{n+k+1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \bar{\sigma}^{n+k} d\sigma \\ &= \overline{f_0} g_0(z) = \overline{f(0)} g(z, 0). \end{aligned}$$

□

3.1 Обобщенные пространства Гельдера переменного порядка

Обобщенное пространство Гельдера переменного порядка $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ определяется следующим образом

$$A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) : \omega(f, z, h) \leq C\omega(z, h)\},$$

где C не зависит от z и h . Полунорма и норма функции $f \in A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ определяются следующим образом

$$\|f\|_{\#, A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})} = \sup_{z \in \mathbb{D}, h \in [0, 2]} \frac{\omega(f, z, h)}{\omega(z, h)}, \|f\|_{A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})} = \|f\|_{\#, A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})} + \|f\|_{C(\mathbb{D})}.$$

Обобщенное весовое пространство Гельдера переменного порядка $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}, v)$ определяется следующим образом

$$A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}, v) = \{f \in H(\mathbb{D}) : \omega(vf, z, h) \leq C\omega(z, h)\}.$$

Полунорма и норма функции $f \in A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}, v)$ определяется следующим образом

$$\|f\|_{\#, A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}, v)} = \sup_{z \in \mathbb{D}, h \in [0, 2]} \frac{\omega(vf, z, h)}{\omega(z, h)}, \|f\|_{A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}, v)} = \|f\|_{\#, A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D}, v)} + \|f\|_{C(\mathbb{D})}.$$

3.2 Оценки типа Зигмунда

Здесь мы приводим оценки типа Зигмунда, которые представляют самостоятельный интерес. Мы используем эти оценки для доказательства наших основных теорем, представленных ниже.

Обозначим

$$\Pi_\alpha = \{z \in \mathbb{D} : \Re \alpha(z) = 0\}.$$

$$\alpha_h(z) = \inf_{\zeta \in \mathbb{D}: |z-\zeta| < h} \Re \alpha(\zeta).$$

Теорема 3.1. Пусть $\alpha \in H(\mathbb{D})$, $0 \leq \Re \alpha(z) \leq 2$, $\Re \lambda > -1$. Пусть функция $\Re \alpha$ удовлетворяет логарифмическому условию на $\mathbb{D}$. Тогда для всех $z \in \mathbb{D} \setminus \Pi_\alpha$ таких, что $\alpha_h(z) \neq 0$, допустима следующая оценка типа Зигмунда:

$$\begin{aligned} \omega(\Re \alpha \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f, z, h) &\leq Ch^{\Re \alpha(z)} \omega(f, z, h) + Ch \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re \alpha(z)}} dt \\ &+ C \omega(\alpha, z, h) \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re \alpha(z)}} dt + Ch \|f\|_{C(\mathbb{D})}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где C не зависит от f , z и h .

Доказательство. Зафиксируем числа $0 < \delta < \delta_1 < \delta_0 < 1$ и предположим, что h всегда меньше, чем $\delta_1 - \delta$, что гарантирует, что если $z \in \delta \mathbb{D}$ и $|z - \zeta| < h$, то $\zeta \in \delta_1 \mathbb{D}$.

Как следствие, поскольку функция $\Re \alpha$ является Липшицевой в произвольном $\delta \mathbb{D}$, $0 < \delta < 1$, и $|\mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(z)| \leq C \|f\|_{C(\mathbb{D})}$ для $z \in \delta \mathbb{D}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \Re \alpha(z) \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(z) - \Re \alpha(\zeta) \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(\zeta) \right| &\leq |\Re \alpha(z) - \Re \alpha(\zeta)| |\mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(z)| \\ &+ \Re \alpha(z) \left| \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(z) - \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f(\zeta) \right| \\ &\leq Ch \|f\|_{C(\mathbb{D})}, \end{aligned}$$

где C не зависит от f , z и h , когда $z \in \delta \mathbb{D}$ and $\zeta \in \mathbb{D}$ таковы, что $|\zeta - z| < \delta$.

Теперь пусть $z \in \mathbb{D} \setminus \delta \mathbb{D}$. Обратим внимание, что следующее свойство

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(z)}} - \frac{1}{(1 - \zeta\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}} \right) dA_\lambda(w) = 0, \quad z, \zeta \in \mathbb{D},$$

непосредственно следует из (3.8). С учетом этого свойства, имеем

$$\begin{aligned}
& \Re\alpha(z)\mathbb{I}_\lambda^\alpha f(z) - \Re\alpha(\zeta)\mathbb{I}_\lambda^\alpha f(\zeta) = \\
&= \Re\alpha(z) \int_{|z-w|<2h} \frac{f(w) - f(z)}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(z)}} dA_\lambda(w) \\
&- \Re\alpha(\zeta) \int_{|z-w|<2h} \frac{f(w) - f(z)}{(1 - \zeta\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}} dA_\lambda(w) \\
&+ \Re\alpha(\zeta) \int_{|z-w|>2h} (f(w) - f(z)) \left(\frac{1}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}} - \frac{1}{(1 - \zeta\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}} \right) dA_\lambda(w) \\
&+ \Re\alpha(z) \int_{|z-w|>2h} (f(w) - f(z)) \left(\frac{1}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(z)}} - \frac{1}{(1 - \zeta\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}} \right) dA_\lambda(w) \\
&+ (\Re\alpha(z) - \Re\alpha(\zeta)) \int_{|z-w|>2h} \frac{f(w) - f(z)}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}} dA_\lambda(w) \\
&= I_{1,\alpha} + I_{2,\alpha} + I_{3,\alpha} + I_{4,\alpha} + I_{5,\alpha}.
\end{aligned}$$

Для интеграла $I_{1,\alpha}$ мы имеем

$$\begin{aligned}
|I_{1,\alpha}| &\leq \Re\alpha(z)\omega(f, z, 2h) \int_{|z-w|<2h} \frac{|dA_\lambda(w)|}{|(1 - z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(z)}|} \\
&\leq \Re\alpha(z)C\omega(f, z, 2h) \int_{|z-w|<2h} \frac{|dA_\lambda(w)|}{|1 - z\bar{w}|^{2+\Re\lambda-\Re\alpha(z)}} \\
&\leq \Re\alpha(z)C_1\omega(f, z, 2h) \int_{|z-w|<2h} \frac{dA(w)}{|1 - z\bar{w}|^{2-\Re\alpha(z)}} \\
&\leq \Re\alpha(z)C_1\omega(f, z, 2h) \int_{|z-w|<2h} \frac{dA(w)}{|z - w|^{2-\Re\alpha(z)}} \\
&= 2\Re\alpha(z)C_1\omega(f, z, 2h) \int_0^{2h} \frac{dt}{t^{1-\Re\alpha(z)}} \\
&\leq C_2h^{\Re\alpha(z)}\omega(f, z, h),
\end{aligned}$$

где C_2 не зависит от f, z и h . Здесь мы также использовали свойство $\omega(f, z, 2h) \leq 2\omega(f, z, h)$ модуля непрерывности.

Поскольку

$$\{w \in \mathbb{D} : |z - w| < 2h\} \subset \{w \in \mathbb{D} : |\zeta - w| < 3h\},$$

для интеграла $I_{2,\alpha}$, имеем

$$\begin{aligned}
|I_{2,\alpha}| &\leq \Re\alpha(\zeta)\omega(f, z, 2h) \int_{|z-w|<2h} \frac{|dA_\lambda(w)|}{|(1-\zeta\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}|} \\
&\leq \Re\alpha(\zeta)\omega(f, z, 2h) \int_{|z-w|<3h} \frac{|dA_\lambda(w)|}{|(1-\zeta\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}|} \\
&\leq C\Re\alpha(\zeta) \frac{h^{\Re\alpha(z)}\omega(f, z, h)}{\Re\alpha(\zeta)} \leq Ch^{\Re\alpha(z)}\omega(f, z, h),
\end{aligned}$$

где C не зависит от f, z и h .

Чтобы оценить $I_{3,\alpha}$, сначала отметим, что $z, \zeta \in \mathbb{D}$ и $\gamma \in \mathbb{C}$ справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{(1-z\bar{w})^\gamma} - \frac{1}{(1-\zeta\bar{w})^\gamma} \right| &= \left| \gamma \int_\zeta^z \frac{\bar{w}d\xi}{(1-\xi\bar{w})^{1+\gamma}} \right| \\
&\leq \frac{|\gamma||z-\zeta|}{\inf_{\xi \in [\zeta, z]} |(1-\xi\bar{w})^{-1-\gamma}|}.
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\delta \in (0, 1)$ достаточно близко к 1. Следовательно,

$$\begin{aligned}
|I_{3,\alpha}| &\leq \Re\alpha(\zeta)C|2+\lambda-\alpha(\zeta)||z-\zeta| \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{\inf_{\xi \in [\zeta, z]} |(1-\xi\bar{w})^{3+\lambda-\alpha(\zeta)}|} |dA_\lambda(w)| \\
&\leq \Re\alpha(\zeta)C_1h \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{|1-z\bar{w}|^{3+\lambda-\Re\alpha(\zeta)}} |dA_\lambda(w)| \\
&\leq \Re\alpha(\zeta)C_2h \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{|1-z\bar{w}|^{3-\Re\alpha(\zeta)}} dA(w) \\
&\leq \Re\alpha(\zeta)C_2h \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re\alpha(\zeta)}} dt \leq C_3h \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re\alpha(z)}} dt
\end{aligned}$$

где C_3 не зависит от f, z и h .

Для $I_{4,\alpha}$ мы аналогично имеем

$$\begin{aligned}
|I_{4,\alpha}| &\leq \Re\alpha(z) \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{|(1-z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}|} \left| \frac{1}{(1-z\bar{w})^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)}} - 1 \right| |dA_\lambda(w)| \\
&\leq C\Re\alpha(z)|\alpha(z)-\alpha(\zeta)| \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{|1-z\bar{w}|^{3+\lambda-\Re\alpha(z)}} |dA_\lambda(w)| \\
&\leq C\Re\alpha(z)\omega(\alpha, z, h) \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re\alpha(z)}} dt \leq C_1\omega(\alpha, z, h) \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re\alpha(z)}} dt,
\end{aligned}$$

где C_1 не зависит от f, z и h .

Для $I_{5,\alpha}$, получим

$$\begin{aligned}
|I_{5,\alpha}| &\leq C\omega(\Re\alpha, z, h) \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{|(1-z\bar{w})^{2+\lambda-\alpha(\zeta)}|} |dA_\lambda(w)| \\
&\leq C_1\omega(\Re\alpha, z, h) \int_{|z-w|>2h} \frac{\omega(f, z, |z-w|)}{|1-z\bar{w}|^{3-\Re\alpha(\zeta)}} dA(w) \\
&\leq C_2\omega(\Re\alpha, z, h) \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re\alpha(z)}} dt,
\end{aligned}$$

где C не зависит от f, z и h . На этом доказательство заканчивается. $\square$

3.3 Ограниченность операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка

Здесь мы докажем наши основные результаты: ограниченность операторов дробного интегрирования переменного порядка в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка аналитических функций на единичном диске, используя оценки типа Зигмунда (3.9).

Мы начинаем с результата ограниченности из $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ в пространство $A^{U_{\omega,\alpha}(\cdot)}(\mathbb{D}, \Re\alpha)$, где $U_{\omega,\alpha}(\cdot) = h^{\Re\alpha(z)}U_{\omega}(z, h)$.

Теорема 3.2. Пусть $\Re\lambda > -1$. Пусть $\alpha \in \text{Lip}(\mathbb{D})$, $0 \leq \Re\alpha(z)$, $\sup_{\mathbb{D}} \Re\alpha(z) < 1$, $\text{mes}(\Pi_{\alpha}) = 0$ и $\omega(z, h) \in \Phi_{1-\Re\alpha(z)}$. Оператор $\mathbb{I}_{\lambda}^{\alpha(\cdot)}$ ограничен из $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ в $A^{U_{\omega,\alpha}(\cdot)}(\mathbb{D}, \Re\alpha)$.

Доказательство. Поскольку $\alpha \in \text{Lip}(\mathbb{D})$,

$$\omega(\alpha, z, h) = \sup_{w \in \mathbb{D}: |w-z| < h} |\alpha(z) - \alpha(w)| \leq Ch.$$

По условию $f \in A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ и формуле (3.5), получим

$$h^{\Re\alpha(z)}\omega(f, z, h) \leq Ch^{\Re\alpha(z)}\omega(z, h) \leq C_1 h^{\Re\alpha(z)}U_{\omega}(z, h).$$

С другой стороны, из-за $\omega(z, h) \in \Phi_{1-\Re\alpha(z)}$,

$$\begin{aligned} h \int_h^2 \frac{\omega(f, z, t)}{t^{2-\Re\alpha(z)}} dt &\leq Ch \int_h^2 \frac{\omega(z, t)}{t^{2-\Re\alpha(z)}} dt \\ &\leq C_1 h^{\Re\alpha(z)}\omega(z, h) \leq C_2 h^{\Re\alpha(z)}U_{\omega}(z, h). \end{aligned}$$

и из свойства класса $\Phi_{1-\Re\alpha(z)}$ также следует, что

$$Ch \leq h^{\Re\alpha(z)}\omega(z, h) \leq C_1 h^{\Re\alpha(z)}U_{\omega}(z, h).$$

Следовательно, из (3.9) следует, что

$$\omega(\Re\alpha \mathbb{I}_{\lambda}^{\alpha(\cdot)} f, z, h) \leq C \|f\|_{\#, A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})} h^{\Re\alpha(z)}U_{\omega}(z, h) + Ch \|f\|_{C(\mathbb{D})},$$

с учетом приведенных выше предположений об α и ω . Здесь C не зависит от f, z , и h .

Тогда

$$\frac{\omega(\Re\alpha \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f, z, h)}{h^{\Re\alpha(z)} U_\omega(z, h)} \leq C \|f\|_{A^\omega(\mathbb{D})}, \quad f \in A^\omega(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.10)$$

где C не зависит от f, z и h . На этом доказательство заканчивается. $\square$

Мы продолжаем рассматривать результат ограниченности между $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ и $A^{\omega_\alpha(\cdot)}(\mathbb{D}, \Re\alpha)$, где $\omega_\alpha(z, h) = h^{\Re\alpha(z)} \Omega(z, h)$.

Теорема 3.3. Пусть $\Re\lambda > -1$. Пусть $\alpha \in \text{Lip}(\mathbb{D})$, $0 \leq \Re\alpha(z)$, $\sup_{\mathbb{D}} \Re\alpha(z) < 1$, $\text{mes}(\Pi_\alpha) = 0$ и $\omega(z, h) \in \Phi_{1-\Re\alpha(z)}$. Оператор $\mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)}$ ограничен из $A^{\omega(\cdot)}(\mathbb{D})$ в $A^{\omega_\alpha(\cdot)}(\mathbb{D}, \Re\alpha)$.

Доказательство. Из (3.9) следует, что

$$\omega(\Re\alpha \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f, z, h) \leq C \|f\|_{\#, A^\omega(\mathbb{D})} h^{\Re\alpha(z)} \omega(z, h) + Ch \|f\|_{C(\mathbb{D})},$$

с учетом приведенных выше предположений об α и ω . Здесь константа C не зависит от f, z и h . Тогда,

$$\frac{\omega(\Re\alpha \mathbb{I}_\lambda^{\alpha(\cdot)} f, z, h)}{h^{\Re\alpha(z)} \omega(z, h)} \leq C \|f\|_{A^\omega(\mathbb{D})}, \quad f \in A^\omega(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.11)$$

где C не зависит от f, z и h . На этом доказательство заканчивается. $\square$

Заключение

Все результаты этого диссертационного исследования являются новыми, но мы особенно выделим некоторые основные

1. Ограниченность общих операторов Адамара-Бергмана и общих операторов Адамара-Бергмана переменного порядка в весовых пространствах типа Лебега с общими (допустимыми) весами, а также в ряде классических пространств аналитических функций, таких как Бергмана, Харди и Блоха. Получены достаточные и необходимые условия.
2. Ограниченность весовых операторов Адамара-Бергмана и весовых операторов Адамара-Бергмана переменного порядка в весовых пространствах Лебега с каноническими весами. Получены достаточные и необходимые условия. Здесь мы в основном используем технику операторов с однородными ядрами.
3. Весовые оценки для операторов дробного интегрирования переменного порядка (это операторы Адамара-Бергмана переменного порядка) в обобщенных пространствах Гельдера переменного порядка. Доказываем оценки типа Зигмунда и получаем условие ограниченности.

Список литературы

- [1] Aghekyan, S. A. Weighted Hadamard–Bergman Convolution Operators / S. A. Aghekyan, A. N. Karapetyants // Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2020 / ed. by A. N. Karapetyants [et al.]. — Springer, Cham, 2021. — P. 17–31. — (Springer Proceedings in Mathematics and Statistics ; vol. 357).
- [2] Aleman, A. A class of integral operators on spaces of analytic functions/ A. Aleman // In Topics in Complex Analysis and Operator Theory. — Malaga: Univ. Malaga, 2007. — P. 3 —30.
- [3] Avsyankin, O. G. Volterra type integral operators with homogeneous kernels in weighted L_p -spaces / O. G. Avsyankin // Russian Mathematics. — 2017. — Vol. 61, no. 11. — P. 1 —9.
- [4] Avsyankin, O. G. Invertibility of Multidimensional Integral Operators with Bihomogeneous Kernels [Text] / O. G. Avsyankin // Math. Notes. — 2020. — Vol. 108, no. 2. — P. 277 —281.
- [5] Avsyankin, O. G. On Integral Operators with Homogeneous Kernels in Weighted Lebesgue Spaces on the Heisenberg Group / O. G. Avsyankin // Math. Notes. — 2023. — Vol. 114, no. 1. — P. 117 —121.
- [6] Avsyankin, O. G. On the Algebra Generated by Volterra Integral Operators with Homogeneous Kernels and Continuous Coefficients / O. G. Avsyankin, G. A. Kamenskikh // Sib. Math. J. — 2023. — Vol. 64, no. 4. — P. 753 — 759.
- [7] Avsyankin, O. G. On the algebra generated by canonical integral operators with homogeneous kernels/ O. G. Avsyankin // J. Math. Sci. — 2024. — Vol. 279, no. 4. — P. 359 —372. — DOI: 10.1007/s10958-024-07125-w.
- [8] Bennett, C. Interpolation of Operators / C. Bennett, R. C. Sharpley// Pure and applied mathematics. — Academic Press, 1988. — Vol. 129.

- [9] Blasco, O. Holomorphic Hölder type spaces and composition operators / O. Blasco, A. N. Karapetyants, J. E. Restrepo // Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — Vol. 43, iss. 11. — P. 10005 —10026. — DOI: 10.1002/mma.6675.
- [10] Blasco, O. Boundedness of composition operators in holomorphic Hölder type spaces / O. Blasco, A. N. Karapetyants, J. E. Restrepo // Math. Methods Appl. Sci. — 2021. — Vol. 44, iss. 17. — P. 13670 —13683.
- [11] Calderon, A. P. A note on the interpolation of sublinear operations / A. P. Calderon, A. Zygmund // Am. J. Math. — 1956. — Vol. 78, no. 2. — P. 282–288.
- [12] Duren, P. L. Theory of H^p spaces / P. L. Duren. — New York ; London : Academic Press, 1970.
- [13] Gradshteyn, I. S. Table of Integrals, Series, and Products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. — 7th ed. — Amsterdam : Elsevier/Academic Press, 2007.
- [14] Grudsky, S. M. Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols / S. M. Grudsky, A. N. Karapetyants, N. L. Vasilevski // J. Operator Theory. — 2003. — Vol. 49, no. 2. — P. 325 —346.
- [15] Grudsky, S. M. Dynamics of properties of Toeplitz operators with radial symbols / S. M. Grudsky, A. N. Karapetyants, N. L. Vasilevski // Integral Equations Operator Theory. — 2004. — Vol. 50, no. 2. — P. 217 —253.
- [16] Grudsky, S. M. Dynamics of properties of Toeplitz operators in the weighted Bergman spaces / S. M. Grudsky, A. N. Karapetyants, N. L. Vasilevski // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2006. — Vol. 3. — P. 362 —383.
- [17] Hytönen, T. Analysis in Banach Spaces / T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis. — Springer, 2016. — Vol. I : Martingales and Littlewood-Paley Theory.

- [18] Karapetiants, N. K. Equations with an Involution Operators and Their Applications / N. K. Karapetiants, S. G. Samko. — Boston : Birkhäuser, 2001.
- [19] Karapetiants, N. Multi-dimensional integral operators with homogeneous kernels / N. Karapetiants, S. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 1999. — Vol. 2, no. 1. — P. 67 —96.
- [20] Karapetiants, N. Weighted theorems on fractional integrals in the generalized Hölder spaces via the indices m_ω and M_ω / N. Karapetiants, N. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2004. — Vol. 7, no. 4. — P. 1437 —1458.
- [21] Karapetyants, A. A class of Hausdorff-Zhu operators / A. Karapetyants, A. Mirotin // Anal. Math. Phys. — 2022. — Vol. 12, no. 79. — DOI: 10.1007/s13324-022-00681-x.
- [22] Karapetyants, A. Hausdorff–Berezin operators on weighted spaces / A. Karapetyants, A. Mirotin // Math. Methods Appl. Sci. — 2023. — Vol. 46, iss. 13. — P. 14041 —14052.
- [23] Karapetyants, A. N. New classes of function spaces and singular operators / A. N. Karapetyants, G. G. Kazaryan, V. N. Margaryan, G. A. Petrosyan, A. G. Sergeev // Transactions of the Moscow Mathematical Society. — 2021. — Vol. 82, iss. 2. — P. 329 —348. — DOI: 10.1090/mosc/327.
- [24] Karapetyants, A. Homogeneous operators and homogeneous integral operators / A. Karapetyants, Zh. Avetisyan // Math. Methods Appl. Sci. — 2023. — Vol. 46, iss. 1. — P. 811 —829. — DOI: 10.1002/mma.8549.
- [25] Karapetyants, A. A class of Hausdorff-Berezin operators on the unit disc / A. Karapetyants, S. Samko, K. Zhu // Complex Anal. Oper. Theory. — 2019. — Vol. 13. — P. 3853 —3870. — DOI: 10.1007/s11785-019-00934-x.

- [26] Karapetyants, A. Estimates for singular numbers of Hausdorff-Zhu operators and applications / A. Karapetyants, S. Grudsky, A. Mirotin // Math. Methods Appl. Sci. — 2023. — Vol. 46, iss. 8. — P. 9676 —9693.
- [27] Karapetyants, A. Defining Hausdorff operators on Euclidean spaces / A. Karapetyants, E. Lifyand // Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — Vol. 43, iss. 16. — P. 9522 —9535.
- [28] Karapetyants, A. Generalized Hölder spaces of holomorphic functions in domains in the complex plane / A. Karapetyants, S. Samko // Mediterr. J. Math. — 2018. — Vol. 15, no. 226. — DOI: 10.1007/s00009-018-1272-z.
- [29] Karapetyants, A. Hadamard-Bergman convolution operators / A. Karapetyants, S. Samko // Complex Anal. Oper. Theory. — 2020. — Vol. 14, no. 77. — DOI: 10.1007/s11785-020-01035-w.
- [30] Karapetyants, A. Variable order fractional integrals in variable generalized Hölder spaces of holomorphic functions / A. Karapetyants, S. Samko // Anal. Math. Phys. — 2021. — Vol. 11, no. 156. — DOI: 10.1007/s13324-021-00587-0.
- [31] Karapetyants, A. Composition operators on holomorphic variable exponent spaces / A. Karapetyants, J. Restrepo // Math. Methods Appl. Sci. — 2022. — Vol. 45, iss. 14. — P. 8566 —8577. — DOI: 10.1002/mma.7307.
- [32] Karapetyants, A. Weighted estimates for operators of fractional integration of variable order in generalized variable Hölder spaces / A. Karapetyants, E. Morales // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2022. — Vol. 25. — P. 1250 —1259. — DOI: 10.1007/s13540-022-00040-4.
- [33] Karapetyants, A. A note on Hadamard–Bergman convolution operators / A. Karapetyants, E. Morales // Bol. Soc. Mat. Mex. . — 2022. — Vol. 28, no. 65. — DOI: 10.1007/s40590-022-00457-0.
- [34] Karapetyants, A. Boundedness of Hadamard-Bergman and variable Hadamard-Bergman convolution operators / A. Karapetyants, E. Morales

// Math. Notes. — 2023. — Vol. 114. — P. 804 —817. — DOI: 10.1134/S0001434623110160.

- [35] Karapetyants, A. Hadamard–Bergman Operators on Weighted Spaces / A. Karapetyants, A. Mirotin, E. Morales // Complex Anal. Oper. Theory. — 2024. — Vol. 18. — no. 37. — DOI: 10.1007/s11785-024-01483-8.
- [36] Karapetyants, A. Hadamard–Bergman type operators in weighted Lebesgue and Bergman spaces / A. Karapetyants, F. Leon-Saavedra, E. Morales // Bol. Soc. Mat. Mex. — 2025. — Vol. 31. — no. 98. — DOI: 10.1007/s40590-025-00788-8.
- [37] Karapetyants, A. Hadamard-Bergman Operators in Weighted Lebesgue and Bergman Type Spaces on the Unit Disc: an Overview of Recent Advances / A. Karapetyants, E. Morales // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2026. — Vol. 47, № 3. — P. 1022–1034.
- [38] Karapetyants, A. Growth of Holomorphic Functions in Banach Function Space and in Weighted Bergman Spaces as a Special Case / A. Karapetyants, E. Morales // Math Notes. — 2026. — Vol. 120, no. 4. — P. 679–687.
- [39] Karapetyants, A. A note on potentials of imaginary order in variable generalized holomorphic Hölder spaces / A. Karapetyants, L. De la Cruz Toranzo // J. Appl. Ind. Math. — 2022. — Vol. 16. — P. 203 —210. — DOI: 10.1134/S199047892202003X.
- [40] Karapetyants, A. Toeplitz Operators with Radial Symbols on Weighted Holomorphic Orlicz Space / A. Karapetyants, J. Taskinen // Operator Algebras, Toeplitz Operators and Related Topics / ed. by W. Bauer [et al.]. — Cham : Birkhäuser, 2020. — P. 189 —204. — (Operator Theory: Advances and Applications ; vol. 279).
- [41] Karapetyants, A. Toeplitz Operators with Radial Symbols on General Analytic Function Spaces / A. Karapetyants, J. Taskinen // Complex Anal.

- Oper. Theory. — 2022. — Vol. 16. — no. 110. — DOI: 10.1007/s11785-022-01294-9.
- [42] Kizgut, E. Volterra operators between limits of Bergman-type weighted spaces of analytic functions / E. Kizgut // Hacet. J. Math. Stat. — 2021. — Vol. 50, no. 4. — P. 949 —962. — DOI: 10.15672/hujms.777911.
- [43] Mattner, L. Complex differentiation under the integral / L. Mattner // Nieuw Arch. Wiskd. (5). — 2001. — Vol. 2, no. 1. — P. 32 —35.
- [44] Mirotin, A. R. Hausdorff operators on some spaces of holomorphic functions on the unit disc / A. R. Mirotin // Complex Anal. Oper. Theory. — 2021. — Vol. 15. — no. 85. — DOI: 10.1007/s11785-021-01128-0.
- [45] Mirotin, A. R. Generalized Hausdorff-Zhu operators on Möbius invariant spaces / A. R. Mirotin // Complex Anal. Oper. Theory. — 2022. — Vol. 16. — Art. 100. — DOI: 10.1007/s11785-022-01278-9.
- [46] Mirotin, A. R. Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces H^1 over locally compact groups / A. R. Mirotin // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — Vol. 473, no. 1. — P. 519 —533. — DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.065
- [47] Morales, E. Boundedness of weighted Hadamard–Bergman and weighted variable Hadamard–Bergman convolution operators / E. Morales // Bol. Soc. Mat. Mex. — 2024. — Vol. 30. — no. 70. — DOI: 10.1007/s40590-024-00643-2.
- [48] Rafeiro, H. Fractional integrals and derivatives: mapping properties / H. Rafeiro, S. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2016. — Vol. 19. — P. 580 —607. — DOI: 10.1515/fca-2016-0032.
- [49] Samko, S. Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators / S. Samko, B. Vakulov // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 310, no. 1. — P. 229 —246.

- [50] Samko, N. Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces / N. Samko, S. Samko, B. Vakulov // Journal of Function Spaces . — 2010. — Vol. 8, no. 3. — P. 215 —244. — DOI: 10.1155/2010/659456
- [51] Samko, N. Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic / N. Samko, B. Vakulov // Math. Nachr. — 2011. — Vol. 284, no. 2 —3. — P. 355 —369.
- [52] Siskakis, A. G. Volterra operators on spaces of analytic functions — a survey / A. G. Siskakis // Proceedings of the First Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis. — Seville : Univ. Sevilla Secr. Publ., 2006. — P. 51 —68.
- [53] Zhu, K. Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball / K. Zhu. — New York : Springer-Verlag, 2004. —271 p.
- [54] Zhu, K. Operator Theory in Function Spaces / K. Zhu. — 2nd ed. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2007. — 348 p. — (Mathematical Surveys and Monographs ; vol. 138).
- [55] Карапетянц, Н. К. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения / Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. — Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1988.