

Бабаев Аливерд Бахтиярович

**Анизотропные псевдодифференциальные операторы в
анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда на $\mathbb{R}^n$**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» на кафедре алгебры и дискретной математики.

Научный руководитель:

Кряквин Вадим Донатович

кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Псху Арсен Владимирович,

доктор физико-математических наук, доцент,

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал ФГБНУ «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», г. Нальчик, директор

Поляков Дмитрий Михайлович,

кандидат физико-математических наук,

Южный математический институт — филиал ФГБНУ «Владикавказский научный центр Российской академии наук», г. Владикавказ, с.н.с.

Защита состоится «22» декабря 2026 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.21 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21Ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1357272/>.

Автореферат разослан «__» ____ 2026 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

д.ф.-м.н.



Говорухин В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются классы анизотропных псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$, обобщающие изотропные классы Хёрмандера и исследуется их действие в анизотропных пространствах Гёльдера–Зигмунда $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости s . Актуальность темы обусловлена как достаточно важной ролью псевдодифференциальных операторов в теории линейных уравнений в частных производных, так и необходимостью учитывать естественную анизотропию некоторых уравнений, например, параболических уравнений. Теория псевдодифференциальных операторов, созданная в работах Кона Дж. Дж., Ниренберга Л. (1965), Хёрмандера Л. (1965), Унтербергера А., Бокобзы Дж. (1965), во многом основана на построенном в ней символьном исчислении. Здесь также следует указать важные для теории работы Стейна Э. М. (1974), Кумано-го Х. (1970), Грушина В. В. (1970), Егорова Ю. В. (1969), Кальдерона А., Вайянкура Р. (1971), Шубина М. А. (1978), Аграновича М. С. (1965), Рабиновича В. С. (1969), и многих других математиков. Большинство классов символов псевдодифференциальных операторов ориентировано на изотропный случай, наиболее известный из которых есть класс символов Хёрмандера $S_{\rho,\delta}^m$. Но если в таких (изотропных) классах рассматривать псевдодифференциальные операторы с символами, имеющими различное поведение на разных направлениях в $\mathbb{R}^n$, то возникают трудно преодолимые препятствия, например, для оператора теплопроводности $\partial_{x_1} - \sum_{j=2}^n \partial_{x_j}^2$ с символом из класса Хёрмандера $S_{1,0}^2$ его «почти обратный» символ принадлежит лишь классу Хёрмандера $S_{1/2,0}^{-1}$. Введение классов анизотропных символов позволяют устранить такие препятствия. Для описания таких классов символов будем использовать вектор анизотропности $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, определяющий анизотропную длину вектора в $\mathbb{R}^n$. Так, например, для оператора теплопроводности $\kappa_1 = 2n/(n+1)$, $\kappa_2 = \dots = \kappa_n = n/(n+1)$, символ оператора получает порядок $m = 2n/(n+1)$, а «почти обратный»

порядок $-m$. В работе изучаются классы анизотропных псевдодифференциальных операторов $OPS_{\rho,\delta,\kappa}^m$, введенные Леопольдом Х.-Г. (1986). Более широкие классы символов были введены и изучены в работах Билза Р. (1975) и Хёрмандера Л. (1979), но они слишком общие для тех результатов, которые получены в диссертации. Отметим, что одним из важных и центральных результатов исследования является теорема об ограниченности введенных анизотропных псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера–Зигмунда переменной гладкости $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Этот результат можно рассматривать как уточнение свойства псевдолокальности псевдодифференциальных операторов: если распределение u имеет в точке x_0 гладкость порядка $s(x_0)$, то образ $Op(a)u$ в этой точке обладает гладкостью порядка $s(x_0) - m$, где m — порядок оператора. Полученные результаты позволяют рассматривать широкий класс анизотропных уравнений в функциональных пространствах с переменной гладкостью, что открывает возможности для более точного качественного и количественного анализа решений.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является исследование основных свойств анизотропных псевдодифференциальных операторов в анизотропных пространствах Гёльдера–Зигмунда с переменным показателем гладкости, характеристизация (по Билзу) в случае постоянного показателя гладкости, а также применение полученных результатов к исследованию разрешимости некоторых полулинейных уравнений.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие задачи:

1. Ввести анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда с переменным показателем гладкости для функций (или распределений), заданных на $\mathbb{R}^n$. Исследовать эквивалентностные нормы в этих пространствах.
2. Построить символическое исчисление для классов анизотропных псевдодифференциальных операторов и доказать ограниченность соответствующих псевдодифференциальных операторов в введенных пространствах.

3. Получить достаточные условия компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера–Зигмунда переменной гладкости.
4. Исследовать существование и единственность решения на $\mathbb{R}^n$ в анизотропных пространствах Гёльдера–Зигмунда с переменным показателем гладкости полулинейного анизотропного псевдодифференциального уравнения.
5. Провести характеристику (по Билзу) анизотропных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах Гёльдера–Зигмунда. С помощью этой характеристики доказать, что если анизотропный псевдодифференциальный оператор из класса $OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ обратим из $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то его обратный является псевдодифференциальным оператором из класса $OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$.

Области исследований. Диссертация соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика»:

6. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений;

9. Теория псевдодифференциальных операторов.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории псевдодифференциальных операторов, теории обобщенных функций, а также вещественного и функционального анализа. В частности, используются теория осцилляторных интегралов и принцип сжимающих отображений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Введены анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ переменного порядка гладкости, отвечающие вектору анизотропности $\varkappa$. Установлены их основные свойства, необходимые в дальнейшем.
2. Для классов анизотропных символов $S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, построено символьное исчисление: получены формулы для символа композиции, формулы для

символов формально транспонированного и формально сопряженного операторов. Доказана теорема об ограниченности псевдодифференциальных операторов, принадлежащих классу $OPS_{1,\delta,\kappa}^m$, из $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$; получены оценки операторной нормы через полунормы символов.

3. Получены достаточные условия компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов с медленно меняющимися на бесконечности символами в соответствующих парах пространств Гёльдера-Зигмунда.
4. Установлены существование и единственность решения на $\mathbb{R}^n$ в анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда с переменным показателем гладкости полулинейного анизотропного псевдодифференциального уравнения.
5. В случае постоянного показателя гладкости установлена характеристика (по Билзу) анизотропных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах Гёльдера-Зигмунда. Доказано, что если анизотропный псевдодифференциальный оператор из класса $OPS_{1,\delta,\kappa}^m$ обратим из $\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\kappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то его обратный является псевдодифференциальным оператором из $OPS_{1,\delta,\kappa}^{-m}$.

Теоретическая и практическая значимость работы определяется возможностью применения полученных результатов к исследованию разрешимости анизотропных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений и гладкости их решений. Кроме того, они могут быть использованы при изучении краевых задач, теории потенциала и в смежных разделах математической физики.

Степень достоверности. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств. Положения диссертации, выносимые на защиту, прошли апробацию на конференциях, опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК.

Апробация работы. Основные результаты настоящей работы были представлены на следующих конференциях:

1. XVIII Владикавказская молодежная математическая школа (Республика Северная Осетия-Алания, 22–26 мая 2023 года);
2. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-А, Дзинага, 29 июня – 5 июля 2023 года);
3. XIX Владикавказская молодежная математическая школа (онлайн, 24-28 июня 2024 года);
4. XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Широкая Балка, 27 мая – 3 июня 2024 года);
5. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVIII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-А, Дзинага, 29 июня – 5 июля 2025 года);
6. Международная конференция «Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis» (ОТНА-XV) (Ростов-на-Дону, 24–29 августа 2025 года);
7. Международная научная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2026» (Воронеж, 24–27 января 2026 года);
8. Международная конференция «Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis» (ОТНА-XVI) (Ростов-на-Дону, 23–28 августа 2026 года).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 публикациях: [1–7]. Статьи [1–3] изданы в журнале, входящем в перечень ВАК. Статья [3] издана в журнале, индексируемом в Scopus. Статья [1] издана в журнале, переводная версия которого индексируется в Scopus и Web of Science. Статьи [4–7] опубликованы в материалах конференций.

В совместных с научным руководителем В.Д. Кряквиним статьях [1;3;6] В.Д. Кряквину принадлежит постановка задач, указание метода исследования, окончательная редактura текста и общее руководство, а автору работы проведение исследования и доказательство результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Ее объем составляет 111 страниц. Библиография содержит 91 наименование.

Благодарности. Диссертационная работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России 075-05-2026-1316 от 20.02.2026 года.

Содержание работы

Глава 1 посвящена анизотропным пространствам Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости. В частности, вводится несколько различных норм в этих пространствах и доказывается их эквивалентность. Результаты этой главы необходимы во второй и третьей главах.

Анизотропность в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается вектором анизотропности $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n) \in \mathbb{Q}^n$ с положительными рациональными компонентами, удовлетворяющим условию $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_n = n$. Обозначим $\varkappa_- = \min(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ и $\varkappa_+ = \max(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$. С помощью вектора анизотропии для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ вводится анизотропная длина по правилу:

$$|x|_{\varkappa} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ t > 0 & \text{при } \frac{x_1^2}{t^{2\varkappa_1}} + \dots + \frac{x_n^2}{t^{2\varkappa_n}} = 1. \end{cases}$$

В изотропном случае, когда $\varkappa = (1, \dots, 1)$, верно $|x|_{\varkappa} = |x|$.

Для любого скаляра $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ анизотропное умножение задается по формуле $t^{\varkappa}x = (t^{\varkappa_1}x_1, \dots, t^{\varkappa_n}x_n)$. Если же $t > 0$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, по определению, $t^{\alpha\varkappa}x = (t^{\alpha})^{\varkappa}x$.

Значение функции $s(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ будет задавать средний (в определенном далее смысле) показатель гладкости исследуемой функции в этой

точке. Потребуем, чтобы функция $s(x)$ была вещественнозначной и ограниченной, а также чтобы для нее существовала постоянная $L_s > 0$, такая что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|y|_{\varkappa} < 1$, выполнялось условие логарифмической непрерывности

$$|\log_2 |y|_{\varkappa}| \cdot |s(x+y) - s(x)| \leq L_s.$$

Множество всех таких функций, удовлетворяющих перечисленным выше условиям обозначим $C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $s_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$ и $s_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$.

Нам понадобится конечная разность δ_h , которая, как обычно, действует на непрерывную функцию u по правилу $\delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, а его целые положительные степени определены по формуле $\delta_h^k = \delta_h \delta_h^{k-1}$, $k > 1$.

Анизотропное пространство $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ при $s_- > 0$ и вектором анизотропности $\varkappa$ состоит из непрерывных функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}}, \quad (1)$$

где $N = [s_+/\varkappa_-] + 1$ ($[t]$ означает целую часть числа t), а $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ — существенный супремум. Если в формуле (1) супремум взять по всем $|h|_{\varkappa} \in (0,1)$, то получим эквивалентную норму

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^\circ = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{0 < |h|_{\varkappa} < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}}.$$

Через $\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$ будет обозначаться норма из (1) при $N > [s_+/\varkappa_-] + 1$.

Введем семейство норм следующего вида

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_{te_j}^{N_j} f(x)|}{|t|^{s(x)/\varkappa_j}}, \quad (2)$$

где компоненты вектора $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$ являются натуральными числами и удовлетворяют неравенствам $N_j > s_+/\varkappa_j$ при $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, а $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Из нормы (2) видно, что гладкость $s_j(x)$ по переменной x_j определяется из равенства $s_j(x) = s(x)/\varkappa_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Отметим лишь, что введенные нормы определены в случае, когда показатель гладкости принимает только положительные значения. Для введения анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда, когда показатель гладкости может принимать и отрицательные значения, нам потребуется разбиение единицы Литлвуда-Пэли, модифицированное для анизотропного случая. Пусть функция $\lambda_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\lambda_0(\xi) = 1$ при $|\xi|_{\varkappa} \leq 1$ и $\lambda_0(\xi) = 0$ при $|\xi|_{\varkappa} \geq 2$. Если $\lambda(\xi) = \lambda_0(\xi) - \lambda_0(2^\varkappa \xi)$, то, по определению, $\lambda_j(\xi) = \lambda(2^{-j\varkappa} \xi)$ при $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \lambda_j(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Для функций λ_j , $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ поставим в соответствие операторы $\lambda_j(D)$, действующие на функцию $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца) по правилу

$$\lambda_j(D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_j(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

где $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ — преобразование Фурье. Действие оператора $\lambda_j(D)$ по двойственности можно продолжить на пространство умеренных распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Пространство $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ и вектором анизотропности $\varkappa$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|2^{js(\cdot)} \lambda_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Непосредственно из определения следует, что если $s_1(x) \leq s_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то имеет место непрерывное вложение $\Lambda_{\varkappa}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\varkappa}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Основными результатами первой главы изложены в теоремах 1.4.1 и 1.4.2, которые можно объединить в одну общую теорему.

Теорема. Пусть $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ и $s_- > 0$. Анизотропные пространства Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ переменной гладкости $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ совпадают (после коррекции функций из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ на множестве меры ноль).

Более того, нормы $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^\circ$, семейство норм $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$ при $N > [s_+/\varkappa_-] + 1$, семейство норм $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$ при векторе $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$ с компонентами $N_j > s_+/\varkappa_-$ и норма $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентны.

Обозначим через $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(K)$ (замкнутое) подпространство пространства $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций (распределений) с носителями, вложенными в множество $K \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.5.1. Пусть K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $0 < s_2(x) < s_1(x)$ при $x \in K$ и $s_1, s_2 \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\Lambda_{\varkappa}^{s_1(\cdot)}(K)$ компактно вложено в $\Lambda_{\varkappa}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Эта теорема используется при доказательстве теоремы 2.9.3 о достаточном условии компактности анизотропных псевдодифференциальных операторов.

Глава 2 является основной в диссертации и содержит главные результаты. В ней вводятся анизотропные псевдодифференциальные операторы, строится символьное исчисление, доказывается теорема ограниченности, и как приложение, изложенные во второй главе методы применяются для исследования полулинейного уравнения гипоеллиптического типа. В заключении этой главы даются достаточные условия компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда переменной гладкости.

Рассматривается класс символов $S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ состоящий из всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функций $a(x, \xi)$ таких, что для любых $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ конечны полунормы

$$|a|_{q, p}^m = \max_{|\alpha| \leq q, |\beta| \leq p} \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} a(x, \xi)| (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\rho\alpha \cdot \varkappa - \delta\beta \cdot \varkappa - m}.$$

Каждому символу $a(x, \xi)$ ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор $Op(a)$, действующий на функцию $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$Op(a)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Тогда соответствующий классу символов $S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ класс псевдодифференциальных операторов обозначим $OPS_{\rho, \delta, \varkappa}^m$.

Класс анизотропных символов $S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ вложен в известный класс Хёрман-дера $S_{\rho',\delta'}^{m'}$ при $\rho' = \rho\kappa_-/\kappa_+$, $\delta' = \delta\kappa_+/\kappa_-$ и $m' = \max(m/\kappa_-, m/\kappa_+)$. В виду этого вложения, в частности, наследуется то, что анизотропный псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ непрерывен в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Бесконечно дифференцируемая функция $p(x,y,\xi)$ принадлежит классу $DS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ если для любых мультииндексов α, β, γ следующие полуноормы конечны

$$|p|_{q,l,v}^m = \max_{|\alpha| \leq q, |\beta| \leq l, |\gamma| \leq v} \sup_{x,y,\xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma p(x,y,\xi)| (1 + |\xi|_\varkappa)^{\rho\alpha \cdot \varkappa - \delta(\beta+\gamma) \cdot \varkappa - m}.$$

Класс всех функций, удовлетворяющих этому условию называется классом анизотропных амплитуд порядка m . Тогда соответствующий амплитуде $p \in DS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ оператор P действует на функцию $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$Pu(x) = \iint p(x,y,\xi) u(y) e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} dy d\xi, \quad (3)$$

где двойной интеграл понимается как осцилляторный. Для дальнейшего введем оператор $D_x^\alpha = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha$.

Теорема 2.4.1. Пусть $p \in DS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ и $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Тогда оператор P , определенный по формуле (3) является псевдодифференциальным, его символ $\sigma_p \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ и может быть вычислен по формуле

$$\sigma_p(x,\xi) = \iint p(x, x+y, \xi+\eta) e^{-2\pi i \xi \cdot \eta} dy d\eta,$$

где двойной интеграл понимается как осцилляторный. Для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место представление

$$\sigma_p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha p(x,y,\xi) \Big|_{y=x} + t_N(x,\xi),$$

где $t_N \in S_{\varkappa}^{m-(\rho-\delta)N\kappa_-}$. Более того, для любых $L, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существуют числа $l, q, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что выполняются неравенства

$$|\sigma_p|_{Q,L}^m, |t_N|_{Q,L}^{m-(\rho-\delta)N\kappa_-} \leq C |p|_{q,l,v}^m.$$

Теорема 2.3.2. Пусть $a \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ и $b \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m'}$. Тогда произведение операторов $Op(c) = Op(a)Op(b) \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^{m+m'}$, символ которого можно найти по формуле

$$c(x, \xi) = \iint e^{-2\pi i y \cdot \eta} a(x, \xi + \eta) b(x + y, \xi) dy d\eta,$$

где интеграл понимается как осцилляторный. Для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место представление

$$c(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha a(x, \xi) D_\xi^\alpha b(x, \xi) + t_N(x, \xi),$$

где $t_N \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m+m'-(\rho-\delta)N\varkappa_-}$. Более того, для любых $L, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существуют числа $l, q, l', q' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что выполняются неравенства

$$|c|_{Q,L}^{m+m'}, |t_N|_{Q,L}^{m+m'-(\rho-\delta)N\varkappa_-} \leq C |a|_{q,l}^m |b|_{q',l'}^{m'}.$$

Оператор A^* называется формально сопряженным к псевдодифференциальному оператору $A \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, если для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ верно равенство

$$(A\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\varphi, A^*\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

где

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx,$$

а $\overline{\psi}(x)$ — комплексное сопряжение функции $\psi(x)$.

Теорема 2.5.1. Пусть A^* — формально сопряженный оператор к оператору $A \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Тогда $A^* = Op(a^*) \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, его символ равен осцилляторному интегралу

$$a^*(x, \xi) = \iint \overline{a}(x + y, \xi + \eta) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta.$$

Также для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ справедливо разложение

$$a^*(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a}(x, \xi) + t_N(x, \xi),$$

где $t_N \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m-(\rho-\delta)N\varkappa_-}$.

Оператор A^T — формально транспонированный к псевдодифференциальному оператору $A \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, если для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ верно равенство

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^T\psi),$$

где $(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x) dx$.

Теорема 2.5.2. Пусть A^T является формально транспонированным для оператора $A \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Тогда $A^T = Op(a^T) \in OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, его символ вычисляется через осцилляторный интеграл

$$a^T(x, \xi) = \iint a(x + y, -\xi - \eta) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta.$$

Также для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ верно равенство

$$a^T(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x, -\xi) + t_N(x, \xi),$$

где $t_N \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m-(\rho-\delta)N\varkappa-}$.

Теорема 2.7.1. Пусть $m \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0, 1)$ и $s \in C_{\log}^\varkappa(\mathbb{R}^n)$. Анизотропный псевдодифференциальный оператор $Op(a) \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ ограничен из пространства Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$. Существуют независимые от символа a постоянные $C > 0$ и $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что для операторной нормы справедлива оценка

$$\|Op(a)\|_{B(\Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \Lambda_\varkappa^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n))} \leq C|a|_{q,p}^m.$$

Теорема 2.7.2. Пусть оператор $Op(a) \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, где $\delta \in [0, 1)$, и распределение $v \in \cup_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda_\varkappa^s(\mathbb{R}^n)$, причем $Op(a)v \in \Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Если существуют положительные константы C и R такие, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ неравенство $|a(x, \xi)| \geq C|\xi|_\varkappa^m$ выполняется при любом $|\xi|_\varkappa \geq R$, то $v \in \Lambda_\varkappa^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$.

Введем наименьшее $M \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ числа $M/\varkappa_i$ были четными. Определим символ равенством

$$\langle \xi \rangle_\varkappa = (1 + |\xi_1|^{M/\varkappa_1} + \dots + |\xi_n|^{M/\varkappa_n})^{1/M}.$$

Этому символу отвечает псевдодифференциальный оператор $\langle D \rangle_\varkappa = Op(\langle \xi \rangle_\varkappa) \in S_{1,0,\varkappa}^1$. В случае, когда отношение положительного N к M

есть натуральное число, то оператор $\langle D \rangle_{\varkappa}^N$ является дифференциальным. Отметим, что оператор $\langle D \rangle_{\varkappa}^N$, $N \in \mathbb{R}$, обратим и является изоморфизмом между анизотропными пространствами Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-N}(\mathbb{R}^n)$.

При исследовании уравнения (4) используется модификация леммы Ма-сао Ямадзаки, адаптированная для рассматриваемых пространств:

Лемма 2.8.1. Пусть последовательность распределений $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ при $n \rightarrow \infty$ и существует $K > 0$, такое что для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется неравенство $\|f_n\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq K$. Тогда $f \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq K$.

Полученные выше результаты можно применить к исследованию полулинейного уравнения, заданного на $\mathbb{R}^n$

$$Au(x) = \varepsilon T^+ u(x) + h(x), \quad h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \quad (4)$$

где псевдодифференциальный оператор $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, $\delta \in [0,1)$, а оператор T^+ такой, что для любых непрерывных функций u и v и для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняются два неравенства

1. $\|T^+ u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_{T^+} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$;
2. $|T^+ u(x) - T^+ v(y)| \leq C_{T^+} |u(x) - v(y)|$

с независимой от функций u и v положительной постоянной C_{T^+} . Потребуем, чтобы оператор $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, непрерывный из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, имел обратный псевдодифференциальный оператор $A^{-1} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$.

Теорема 2.8.1. Пусть $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, $\delta \in [0,1)$, $m > 0$ и $h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, причем $-m < s_- \leq s(x) \leq s_+ < \varkappa_-$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (4) имеет единственное решение. Это решение принадлежит $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$.

Для нахождения достаточных условий компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости рассматриваются следующие подклассы медленно меняющихся на бесконечности символов псевдодифференциальных операторов.

Символ $a \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$, по определению, принадлежит классу $\tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$, если выполнены неравенства

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}(x)(1 + |\xi|_\varkappa)^{m - \rho\alpha \cdot \varkappa + \delta\beta \cdot \varkappa}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta}(x) = 0$ для любых мультииндексов α и $\beta \neq 0$. Класс соответствующих псевдодифференциальных операторов обозначим через $OPS_{\rho, \delta, \varkappa}^m$. Подкласс класса $\tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ символов a , таких что $\lim_{x \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta}(x) = 0$ для любых мультииндексов α и β , обозначим $\mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$. Класс соответствующих псевдодифференциальных операторов обозначим через $OP\mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$.

Теорема 2.9.1. Пусть $a \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1}$ и $b \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_2}$. Тогда, для оператора $Op(c) = Op(a)Op(b)$ символ $c \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1+m_2}$ и для любого $N > 0$ верно разложение

$$c(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) D_x^\alpha b(x, \xi) + t_N(x, \xi),$$

где $t_N \in \mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N\varkappa_-}$.

Теорема 2.9.2. Пусть $a \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ и существуют $C > 0$ и $R > 0$, такие что

$$|a(x, \xi)| \geq C(1 + |\xi|_\varkappa)^m, \quad \text{при } |x|_\varkappa + |\xi|_\varkappa \geq R.$$

Тогда существует оператор $\mathcal{P} \in OP\mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{-m}$, для которого выполнены равенства

$$\mathcal{P}Op(a) = I + \mathcal{T}_1, \quad Op(a)\mathcal{P} = I + \mathcal{T}_2,$$

где $\mathcal{T}_j \in OP\mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{-(\rho-\delta)\varkappa_-}$, $j \in \{1, 2\}$.

Теорема 2.9.3. Пусть $a \in \tilde{S}_{1, \delta, \varkappa}^{m-\varepsilon}$, $\delta \in [0, 1)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда,

$$Op(a): \Lambda_\varkappa^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda_\varkappa^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$$

является компактным оператором.

Теоремы 2.9.2 и 2.9.3 позволяют легко получить достаточные условия фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов.

Теорема 2.9.4. Пусть $a \in \tilde{S}_{1, \delta, \varkappa}^m$, $\delta \in [0, 1)$ и существуют положительные константы C и R , такие что

$$|a(x, \xi)| \geq C(1 + |\xi|_\varkappa)^m, \quad \text{при } |x|_\varkappa + |\xi|_\varkappa \geq R.$$

Тогда оператор $Op(a)$, действующий из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$ есть фредгольмов оператор.

Глава 3. посвящена характеристизации анизотропных псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ при постоянном показателе гладкости $s \in \mathbb{R}$.

Пусть $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — линейный оператор и рассмотрим его коммутаторы с операторами умножения на координатные функции и с операторами дифференцирования

$$L_j B = [x_j, B] = x_j B - B x_j, \quad M_j B = [D_{x_j}, B] = D_{x_j} B - B D_{x_j}.$$

Тогда для мультииндексов α, β положим

$$B_{(\beta)}^{(\alpha)} = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \dots M_n^{\beta_n} B, \quad \text{где } B_{(0)}^{(0)} = B.$$

Введенные коммутаторы позволяют сформулировать следующую теорему о характеристизации.

Теорема 3.2.1. Пусть $\delta \in [0, 1)$ и $0 < s \leq (1 - \delta)\varkappa_-$. Линейное отображение $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $OPS_{1, \delta, \varkappa}^m$ тогда и только тогда, когда для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ оператор $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ продолжается до ограниченного оператора из $\Lambda_{\varkappa}^{s+m-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$.

Следствием теоремы 3.2.1 является

Теорема 3.3.1. Пусть анизотропный псевдодифференциальный оператор $A \in OPS_{1, \delta, \varkappa}^m$, $\delta \in [0, 1)$ обратим как оператор из $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$. Тогда обратный оператор $A^{-1} \in OPS_{1, \delta, \varkappa}^{-m}$.

Список публикаций автора по теме работы

Статьи в журналах из перечня изданий ВАК, баз Scopus и Web of Science

1. Бабаев, А. Б. Анизотропные псевдодифференциальные операторы и уравнения в пространствах Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости / А. Б. Бабаев, В. Д. Кряквин // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2026 — № 8. — С. 21–32. — DOI: [10.26907/0021-3446-2026-8-21-32](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2026-8-21-32) (K1)
2. Бабаев, А. Б. Об эквивалентных нормах анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости / А. Б. Бабаев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2024. — № 4-1(224-1). — С. 5–12. — DOI: [10.18522/1026-2237-2024-4-1-5-12](https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-4-1-5-12) (K2)
3. Babaev, A. Characterization of anisotropic pseudodifferential operators in anisotropic Hölder–Zygmund spaces / A. Babaev, V. Kryakvin // Journal of Mathematical sciences. — 2026. — DOI: [10.1007/s10958-026-08307-4](https://doi.org/10.1007/s10958-026-08307-4) (Q3)

В сборниках трудов конференций

4. Бабаев, А. Б. О принадлежности пространству Зигмунда решений краевой задачи для уравнения Пуассона / А. Б. Бабаев // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня — 5 июля 2023 г.) — Т. 15. — С. 168–169. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/kinrkw> (Дата обращения 09.04.2026).
5. Бабаев, А. Б. Шкала анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости / А. Б. Бабаев // XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Широкая Балка, 27 мая – 3 июня

- 2024 г.) — С. 21. — Режим доступа: https://conf-symp.sfedu.ru/2024_thesis.pdf (Дата обращения 09.04.2026).
6. Бабаев, А. Б. Анизотропные псевдодифференциальные операторы в пространствах Гёльдера - Зигмунда переменной гладкости и некоторые приложения / А. Б. Бабаев, В. Д. Кряквин // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня–5 июля 2025 г.) — Т. 17. — С. 61–63. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/kltpyk> (Дата обращения 09.04.2026).
7. Бабаев, А. Б. О характеристике анизотропных псевдодифференциальных операторов / А. Б. Бабаев // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2026 : Материалы международной Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 24–27 января 2026 г.) — С. 33–35. — Режим доступа: <https://elibrary.ru/sqlmot> (Дата обращения 09.04.2026).