

Южный федеральный университет

На правах рукописи

Бабаев Аливерд Бахтиярович

**Анизотропные псевдодифференциальные операторы в
анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда на $\mathbb{R}^n$**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Кряквин Вадим Донатович

Ростов-на-Дону — 2026

Содержание

Введение	4
1 Анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$	17
1.1 Основные обозначения, определения и предварительные сведения	17
1.2 Анизотропное пространство Гёльдера–Зигмунда при $s_- > 0$. . .	22
1.3 Анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда при произвольном $s(x)$	26
1.4 Об эквивалентности норм при $s_- > 0$	28
1.5 О компактном вложении в пространствах Гёльдера–Зигмунда . .	40
2 Анизотропные псевдодифференциальные операторы	42
2.1 Символ псевдодифференциального оператора	42
2.2 Двойные символы	45
2.3 Композиция псевдодифференциальных операторов	53
2.4 Амплитуда псевдодифференциального оператора	55
2.5 Сопряженные и транспонированные псевдодифференциальные операторы	58
2.6 Оценка ядра псевдодифференциального оператора	60
2.7 Теорема ограниченности псевдодифференциального оператора . .	64
2.8 Полулинейное уравнение гипоеллиптического типа	67
2.9 Анизотропные псевдодифференциальные операторы с медленно меняющимися на бесконечности символами	72
3 Характеризация псевдодифференциальных операторов	80

3.1	Две вспомогательные леммы	80
3.2	Теорема о характеристизации анизотропных псевдодифференциаль- ных операторов	82
3.3	Теорема об обратном операторе	86
	Заключение	89
	Приложение	91
	Приложение 1	91
	Приложение 2	95
	Список обозначений	97
	Список литературы	99

Введение

Актуальность темы исследования.

В диссертации рассматриваются классы анизотропных псевдодифференциальных операторов, обобщающие (изотропные) классы Хёрмандера и, с другой стороны, являющиеся анизотропными аналогами этих классов. Эти операторы изучаются в анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда с функциями (и распределениями), определенными на $\mathbb{R}^n$.

Исследования по псевдодифференциальным операторам и соответствующим уравнениям начались в шестидесятых годах XX века, благодаря работам Кона Дж. Дж., Ниренберга Л. [51], [52], Хёрмандера Л. [42], [43] см. также [45–48], Унтербергер А., Бокобзы Дж. [81] и были подхвачены и развиты многими авторами. Здесь нужно отметить работы Аграновича М. С. [1], Волевича Л. Р. [6], Егорова Ю. В. [10, 11], Рабиновича В. С. [20], выполненные в этот период. В докладе на симпозиуме по сингулярным интегральным операторам [43] Л. Хёрмандер говорит: «Сингулярные интегральные операторы Михлина (см. [16]) и Зигмунда-Кальдерона интенсивно изучались в последние годы. Основные усилия были направлены на то, чтобы более аккуратно построить исчисление Кальдерона-Зигмунда [34] (см. Кумано-го Х. [58], Кон Дж. Дж., Ниренберг Л. [51], Бокобза Дж., Унтербергер А. [80, 82], Хёрмандер Л. [42], Пэлайс Р. С. [63], Сили Р. Т. [73, 74]). Особое значение в этих работах было придано преобразованию Фурье, в результате сингулярные операторы исчезли, а термин «псевдодифференциальный оператор» стал более предпочтительным.

Класс псевдодифференциальных операторов, изученный в этих работах, по сути дела, является наименьшей алгеброй операторов, содержащей все диффе-

ренциальные операторы, все фундаментальные решения эллиптических дифференциальных операторов и все интегральные операторы с ядрами из $C^\infty \dots$ ».

Обычно [42–44] псевдодифференциальный оператор A на функциях $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задается по формуле

$$Au(x) = \int a(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

где (прямое) преобразование Фурье

$$\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Функция $a(x, \xi)$ называется символом псевдодифференциального оператора $A = a(x, D) = Op(a)$ и, если она является многочленом по ξ

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

то псевдодифференциальный оператор A является дифференциальным. Л. Хёрмандер ввел в рассмотрение удобные классы символов $S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$, состоящие из бесконечнодифференцируемых функций $a(x, \xi)$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, для которых выполняются оценки

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

где $1 \leq \rho \leq 1$, $1 \leq \delta \leq 1$, K — компакт в Ω , $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Псевдодифференциальные операторы можно задать по формуле

$$Au(x) = \iint a(x, y, \xi) u(y) e^{i(x-y) \cdot \xi} dy d\xi,$$

где амплитуда (двойной символ) должна удовлетворять условиям

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta| + \delta|\gamma|}.$$

Если $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, то класс псевдодифференциальных операторов, построенных с использованием амплитуд, совпадает с классом псевдодифференциальных операторов, построенных по символу. Введенные Л. Хёрмандером классы псевдодифференциальных операторов (как и все последующие) замечательны тем, что композиция таких операторов лежит в этих классах, а также формально сопряженные и транспонированные операторы не выходят из этих классов ([42, 43, 45–48]). Подклассы $S_{\rho, \delta}^m \subset S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n)$ ограниченных по x со всеми производными на всем $\mathbb{R}^n$ символов исследовались Грушиным В. В. [8, 9] и Кумано-го Х. [57, 59].

На сегодняшний день имеются результаты об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Лебега и Соболева (беселевых потенциалов) ([33, 45–48]), в пространствах Бесова-Лизоркина-Трибеля ([2, 17, 37, 38, 77, 78]), в пространствах Гёльдера и Гёльдера-Зигмунда ([7, 40, 69, 77, 78, 84]) и др. Более того, установлены оценки операторной нормы через полунормы символов псевдодифференциальных операторов.

Билз Р. в работе [25] (см. также работы [26, 29, 30, 49, 76]) ввел и исследовал очень широкие классы псевдодифференциальных операторов, построил их символьное исчисление, нашел условия, которые гарантировали ограниченность псевдодифференциальных операторов из введенных классов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и соответствующих этим операторам пространствах Соболева. Класс символов Билза основан на использовании трех функций λ , Φ , φ , удовлетворяющих подходящим условиям. Тогда функция $a(x, \xi)$ принадлежит классу символов Билза, если для

всех мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ имеют место неравенства

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} e^{\lambda(x, \xi)} \Phi(x, \xi)^{-|\alpha|} \varphi(x, \xi)^{-|\beta|}$$

для всех $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Конечно, если $\varphi(x, \xi) = (1 + |\xi|)^{-\delta}$, $\Phi(x, \xi) = (1 + |\xi|)^\rho$ и $\lambda(x, \xi) = m \ln(1 + |\xi|)$, то введенный класс символов совпадает с классом Хёрмандера $S_{\rho, \delta}^m$. Кроме того, в работах [27], [28] были установлены условия ограниченности в пространствах L_p и пространствах Гёльдера.

В последние десятилетия получили развитие теории функциональных пространств с переменными показателями: пространства Лебега $L_{p(\cdot)}$ и Соболева (беселевых потенциалов) $H_{p(\cdot)}^{s(\cdot)}$ (см. [36]), пространства Бесова-Лизоркина-Трибеля $B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{s(\cdot)}$ и $F_{p(\cdot), q(\cdot)}^{s(\cdot)}$ ([3–5, 24, 31, 61, 62]), пространства Гёльдера [72] и Гёльдера-Зигмунда $\Lambda^{s(\cdot)} = B_{\infty, \infty}^{s(\cdot)}$ и другие, а также изучалось действие различных операторов в этих пространствах (см. напр. [13, 50, 54, 55, 66]). В основном в работах изучались изотропные по направлениям в $\mathbb{R}^n$ пространства функций и классы операторов, действующих в этих пространствах, рассматривались тоже изотропные. Исключение составляют вышепротитированные работы Р. Билза и Л. Хёрмандера, но общность изложения не позволяет получать более тонкие (более частные) результаты для, например, анизотропного случая. В работе Х.-Г. Леопольда [60] (см. также [32, 35, 39, 83]) были введены классы анизотропных псевдодифференциальных операторов, которые являются обобщением классов Хёрмандера $S_{\rho, \delta}^m$ и получаются из классов Билза при $\varphi(x, \xi) = (1 + |\xi|_\varkappa)^{-\delta}$, $\Phi(x, \xi) = (1 + |\xi|_\varkappa)^\rho$ и $\lambda(x, \xi) = m \ln(1 + |\xi|_\varkappa)$, где $|\cdot|_\varkappa$ — анизотропная длина вектора (анизотропная функция расстояния), соответствующая вектору анизотропности $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ (см. определение 1.1.1). Были получены формулы для символа композиции анизотропных псевдодифференциальных операторов

и теорема об ограниченности в анизотропных аналогах пространств Бесова, Харди, Соболева. Пространства Гёльдера не рассматривались. В диссертации рассматриваются классы анизотропных псевдодифференциальных операторов, введенные Х.-Г. Леопольдом в работе [60], в анизотропных функциональных пространствах Гёльдера-Зигмунда переменного порядка, аналогах изотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменного порядка, рассмотренных в работах [13], [54]. Так как псевдодифференциальные операторы обладают свойством псевдолокальности: если распределение u в окрестности точки x_0 бесконечно дифференцируемо, то $Op(a)u$ тоже бесконечно дифференцируемо в этой окрестности (см. напр. [18, 21–23, 42, 43, 45–48, 59]), то теоремы об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости можно трактовать как уточнение свойства псевдолокальности: если $u(x)$ в точке x_0 имеет гёльдерову (или обобщенную, в смысле пространств Гёльдера-Зигмунда) гладкость порядка $s(x_0)$, то $Op(a)u(x)$ в этой точке имеет гладкость порядка $s(x_0) - m$, где m — порядок псевдодифференциального оператора $Op(a)$.

Интерес к классам анизотропных псевдодифференциальных операторов мотивируется, в частности, следующим обстоятельством. Например, уравнение теплопроводности (см. напр. [15]) $\partial/\partial x_1 - \sum_{j=2}^n \partial^2/\partial x_j^2$ имеет символ $2\pi i\xi_1 + 4\pi^2 \sum_{j=2}^n \xi_j^2$, который принадлежит (изотропному) классу Хёрмандера $S_{1,0}^2$. Символ «почти обратного» оператора имеет вид $b(\xi) = \psi(\xi)/a(\xi)$ с функцией $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которая равна нулю при $|\xi| < 1$ и единице при $|\xi| > 2$. Однако символ b принадлежит только классу Хёрмандера с $m = -1$ и $\rho = 1/2$, $\delta = 0$, а, следовательно, даже не удовлетворяет условиям теоремы об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера, не говоря уже

о не согласованности порядков этих операторов (см. напр. [54]). Введение классов анизотропных символов разрешает это несоответствие порядков. Для этой цели вводится вектор анизотропности $\varkappa$ (см. стр. 17), а также анизотропная длина, определяемая формулой (1), и классы анизотропных символов рассматриваются по определению (33). Тогда для оператора теплопроводности вектор анизотропности имеет компоненты $\varkappa_1 = \frac{2n}{n+1}$, $\varkappa_2 = \varkappa_3 = \dots = \varkappa_n = \frac{n}{n+1}$, а символ оператора имеет порядок $m = \frac{2n}{n+1}$ и символ b имеет порядок $-m$.

Оператор теплопроводности достаточно часто определяют на параболическом пространстве Гёльдера $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (см. напр. [56]), элементы которого обладают гладкостью Гёльдера $1 + \alpha/2$ по переменной x_1 и $2 + \alpha$ по переменным $x_2, \dots, x_n$. В этом случае пространство $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с анизотропным пространством Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ с показателем $s = \frac{(2+\alpha)n}{n+1}$. Полученные в этой работе результаты позволяют рассматривать такого сорта операторы уже на анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда с любым, в том числе и с переменным показателем.

Цели работы

1. Введение и исследование анизотропных функциональных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$.
2. Построение символьного исчисления для классов анизотропных псевдодифференциальных операторов, введенных Х.-Г. Леопольдом [60], доказательство ограниченности операторов из этих классов в анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости.
3. Получение достаточных условий компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов в анизотропных пространствах

Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости.

4. Исследование анизотропных гипоеллиптических полулинейных псевдодифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^n$: существование и единственность решения.

5. Характеризация анизотропных псевдодифференциальных операторов, действующих анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда с постоянным показателем на $\mathbb{R}^n$. Доказательство замкнутости алгебры анизотропных псевдодифференциальных операторов относительно взятия обратного оператора в пространствах Гёльдера-Зигмунда.

Методы исследования

В диссертации используются методы теории псевдодифференциальных операторов, теории обобщенных функций, а также вещественного и функционального анализа. В частности, используются теория осцилляторных интегралов и принцип сжимающих отображений.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно.

Апробация работы

Основные результаты настоящей работы были представлены на следующих конференциях:

1. XVIII Владикавказская молодежная математическая школа (Республика Северная Осетия-Алания, 22–26 мая 2023 года);

2. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-А, Дзинага, 29 июня – 5 июля 2023 года);
3. XIX Владикавказская молодежная математическая школа (онлайн, 24-28 июня 2024 года);
4. XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Обращение». XIV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Широкая Балка, 27 мая – 3 июня 2024 года);
5. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVIII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-А, Дзинага, 29 июня – 5 июля 2025 года);
6. Международная конференция «Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis» (ОТНА-XV) (Ростов-на-Дону, 24–29 августа 2025 года);
7. Международная научная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2026» (Воронеж, 24–27 января 2026 года);
8. Международная конференция «Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis» (ОТНА-XVI) (Ростов-на-Дону, 23–28 августа 2026 года).

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Введены анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ переменного порядка гладкости, отвечающие вектору анизотропности $\varkappa$. Установлены их основные свойства, необходимые в дальнейшем.

2. Для классов анизотропных символов $S_{\rho,\delta,\chi}^m$, построено символьное исчисление: получены формулы для символа композиции, формулы для символов формально транспонированного и формально сопряженного операторов. Доказана теорема об ограниченности соответствующих псевдодифференциальных операторов из $\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$; получены оценки операторной нормы через полунормы символов.
3. Получены достаточные условия компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов с медленно меняющимися на бесконечности символами в соответствующих парах пространств Гёльдера-Зигмунда.
4. Установлены существование и единственность решения на $\mathbb{R}^n$ в анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда с переменным показателем гладкости полулинейного анизотропного псевдодифференциального уравнения.
5. В случае постоянного показателя гладкости установлена характеристикация (по Билзу) анизотропных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах Гёльдера-Зигмунда. Доказано, что если анизотропный псевдодифференциальный оператор из класса $OPS_{1,\delta,\chi}^m$ обратим из $\Lambda_{\chi}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\chi}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то его обратный является псевдодифференциальным оператором из $OPS_{1,\delta,\chi}^{-m}$.

Публикации и личный вклад автора

Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 публикациях: [85–91]. Статьи [85–87] изданы в журнале, входящем в перечень ВАК. Статья [87] издана в журнале, индексируемом в Scopus. Статья [85] издана в

журнале, переводная версия которого индексируется в Scopus и Web of Science. Статьи [88–91] опубликованы в материалах конференций.

В совместных с научным руководителем В.Д. Кряквинным статьях [85, 87, 90] В.Д. Кряквину принадлежит постановка задач, указание метода исследования, окончательная редактура текста и общее руководство, а автору работы — проведение исследования и доказательство результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, приложения, заключения и списка литературы. Ее объем составляет 111 страниц. Библиография содержит 91 наименование.

Глава 1 посвящена анизотропным пространствам Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости и состоит из 5 разделов. В разделе 1.1 даются основные определения и обозначения, в том числе и функциональных пространств. Вводится вектор анизотропности $\varkappa$, анизотропная длина $|x|_{\varkappa}$ и его свойства, а также условие логарифмической непрерывности показателя гладкости $s(x)$. В разделе 1.2 вводятся пространства Гёльдера-Зигмунда $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ положительной переменной гладкости $s(x)$ и соответствующая норма $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ для вектора анизотропности $\varkappa$ и $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x) > 0$. Также приведены и другие способы задания норм: $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\circ}$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$. Между этими нормами устанавливаются некоторые оценки. В разделе 1.3 строится разбиение единицы Литлвуда-Пэли, модифицированного для анизотропного случая. С помощью этого разбиения вводится пространство Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и соответствующая ему норма $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ с показателем гладкости $s(x)$, возможно принимающем и отрицательные значения. В разделе 1.4 находятся главные результаты главы 1. Эти результаты составляют содержание теорем 1.4.1 и 1.4.2. В первой теореме доказывается оценка $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$, и как следствие, вложение $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Во второй теореме доказывается оценка $\| \cdot \|_{C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| \cdot \|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, и, как следствие обоих неравенств, совпадение пространств $C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x) > 0$. В этих теоремах попутно устанавливается эквивалентность всех норм $\| \cdot \|_{C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, $\| \cdot \|_{C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^\circ$, $\| \cdot \|_{C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$, $\| \cdot \|_{C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$ и $\| \cdot \|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$. В разделе 1.5 приведена теорема о компактном вложении пространства $\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(K)$ (K — компактное множество) в пространство $\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $0 < s_2(x) < s_1(x)$, $x \in K$.

Глава 2 состоит из 9 разделов. В ней исследуются анизотропные псевдодифференциальные операторы и действие этих операторов в анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$. В разделе 2.1 определяется класс символов $S_{\rho, \delta, \mathcal{K}}^m$ анизотропных псевдодифференциальных операторов, полунормы символов $|\cdot|_{q, p}^m$ и описываются простейшие свойства. В разделе 2.2 вводится класс двойных символов $S_{\rho, \delta, \mathcal{K}}^{m, m'}$. Устанавливаются свойства двойного символа, его связь с символами анизотропных псевдодифференциальных операторов. Раздел 2.3 посвящен построению символа произведения анизотропных псевдодифференциальных операторов (теорема 2.3.1) с использованием осцилляторного интеграла и асимптотического разложения. Приведено приложение этой теоремы к построению параметрикса. В разделе 2.4 вводится класс амплитуд $DS_{\rho, \delta, \mathcal{K}}^m$ и соответствующих псевдодифференциальных операторов, находятся выражения для символов этих операторов (теорема 2.4.1). В разделе 2.5 даются определения формально сопряженного и формально транспонированного операторов для анизотропного псевдодифференциального оператора. Дается описание символов этих операторов (теоремы 2.5.1 и 2.5.2). Раздел 2.6 содержит вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы об ограниченности анизотропного псевдодифференциального оператора с символом из класса $S_{1, \delta, \mathcal{K}}^m$ из пространства Гёльдера-Зигмунда переменной гладко-

сти $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$, которая сформулирована и доказана в разделе 2.7 (теорема 2.7.1). В этой же теореме устанавливается оценка операторной нормы псевдодифференциального оператора через полунормы его символа. Приводится также приложение теоремы 2.7.1 к исследованию гладкости решения псевдодифференциального уравнения $Op(a)v = f$ с «хорошим» символом (теорема 2.7.2). В разделе 2.8 исследуется полулинейное уравнение вида

$$Au(x) = \varepsilon T^+ u(x) + h(x), \quad h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

С учетом накладываемых условий на операторы A и T^+ доказано существование и единственность решения при достаточно малых ε . В разделе 2.9 рассматриваются анизотропные псевдодифференциальные операторы с медленно меняющимися на бесконечности символами. Найдены достаточные условия компактности и фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов с символами, медленно меняющимися на бесконечности.

Глава 3 посвящена характеристике (по Билзу) анизотропных псевдодифференциальных операторов при постоянном показателе гладкости s . Глава 3 состоит из 3 разделов. В разделе 3.1 приводятся вспомогательные утверждения, которые используются в следующих разделах. В разделе 3.2 вводятся основные определения о коммутаторах с операторами умножения на координатными функции x_j и операторами дифференцирования D_{x_j} . Формулируется и доказывается основная теорема 3.2.1 о характеристике анизотропных псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда постоянного показателя гладкости. Раздел 3.3 посвящен применению предыдущей теоремы к доказательству следующего утверждения: если оператор $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ обратим из $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то его обратный $A^{-1} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$

(теорема 3.3.1).

В приложение вынесены список обозначений, примеры функций, принадлежащих пространству Гёльдера-Зигмунда, а также вывод оценки в анизотропном аналоге сферической системы координат.

Благодарности. Диссертационная работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России 075-05-2026-1316 от 20.02.2026 года.

1 Анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$

1.1 Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Множество целых, рациональных и действительных чисел обозначим соответственно через $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, а индексные обозначения $\geq_0$ и $>_0$, выделяют в них множества всех неотрицательных и положительных чисел соответственно. Как обычно $\mathbb{R}^n$ — вещественное n -мерное евклидово пространство, со скалярным произведением $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ (последнее подразумевается как $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$) порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, будем использовать обозначения $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ и $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}}$. Стандартным образом обозначим через $B(X, Y)$ банахово пространство всех ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y . Для упрощения записи символом C будем обозначать различные положительные константы. Анизотропность в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается вектором анизотропности $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n) \in \mathbb{Q}_{>0}^n$, удовлетворяющий условию $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_n = n$. В дальнейшем понадобятся положительные константы $\varkappa_- = \min(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ и $\varkappa_+ = \max(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$.

Определение 1.1.1. (см. [32, 35, 39, 60, 79, 83]) *Анизотропная длина (анизотропная функция расстояния, анизотропное расстояние) $|x|_\varkappa$ для элемента*

$x \in \mathbb{R}^n$ с вектором анизотропности $\varkappa \in \mathbb{Q}_{>0}^n$ определено по правилу:

$$|x|_{\varkappa} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ t > 0 & \text{при } \frac{x_1^2}{t^{2\varkappa_1}} + \dots + \frac{x_n^2}{t^{2\varkappa_n}} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

В изотропном случае, когда $\varkappa = (1, \dots, 1)$, верно $|x|_{\varkappa} = |x|$. Например, в работах [32, 35, 60] использовалось другое определение анизотропного расстояния, зависящего от $p > 1$:

$$|x|_{\varkappa,p} = (|x_1|^{p/\varkappa_1} + \dots + |x_n|^{p/\varkappa_n})^{1/p},$$

при этом существует константа $c \in \mathbb{R}_{>0}$, зависящая от p , такая что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верны неравенства $c|x|_{\varkappa} \leq |x|_{\varkappa,p} \leq (1/c)|x|_{\varkappa}$. Евклидова норма $|x|$ при фиксированном значении $|x|_{\varkappa} = t > 0$ достигает экстремальных значений, когда $x = (0, \dots, t^{\varkappa_-}, \dots, 0)$ и $x = (0, \dots, t^{\varkappa_+}, \dots, 0)$, при этом справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x|_{\varkappa}^{\varkappa_+} &\leq |x| \leq |x|_{\varkappa}^{\varkappa_-} \text{ если } |x|_{\varkappa} \leq 1, \\ |x|_{\varkappa}^{\varkappa_+} &\geq |x| \geq |x|_{\varkappa}^{\varkappa_-} \text{ если } |x|_{\varkappa} \geq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Для любого скаляра $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ будем использовать анизотропное умножение, заданное по формуле $t^{\varkappa}x = (t^{\varkappa_1}x_1, \dots, t^{\varkappa_n}x_n)$. Если же $t > 0$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, по определению, $t^{\alpha\varkappa}x = (t^{\alpha})^{\varkappa}x$.

Предложение 1.1.1. *Анизотропное расстояние удовлетворяет условиям*

1. $|x|_{\varkappa} \geq 0$, причем $|x|_{\varkappa} = 0$, если и только если $x = (0, \dots, 0)$;
2. $|t^{\varkappa}x|_{\varkappa} = t|x|_{\varkappa}$, $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
3. $\exists C > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ верно неравенство $|x + y|_{\varkappa} \leq C(|x|_{\varkappa} + |y|_{\varkappa})$,

причем $C = 2^{1/\varkappa_- - 1}$ является наименьшей из всех возможных констант в

этом неравенстве.

Свойства 1, 2, 3 известны (см. [35, 60]). Так как нам не известно точное значение наименьшей константы C , то докажем для нее это равенство.

Доказательство. Покажем, что неравенство

$$\frac{|x + y|_{\varkappa}}{|x|_{\varkappa} + |y|_{\varkappa}} \leq 2^{1/\varkappa_- - 1} \quad (3)$$

верно для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x|_{\varkappa} + |y|_{\varkappa} \neq 0$. В силу общности предположим, что $|x|_{\varkappa} \geq |y|_{\varkappa}$. Поделив числитель и знаменатель неравенства (3) на положительное $t = |x|_{\varkappa}$, по свойству 2 предложения 1.1.1 получим, что неравенство (3) равносильно неравенству

$$\frac{|X + Y|_{\varkappa}}{1 + |Y|_{\varkappa}} \leq 2^{1/\varkappa_- - 1},$$

где $X = t^{-\varkappa}x$ и $Y = t^{-\varkappa}y$, причем $|X|_{\varkappa} = 1$ и $|Y|_{\varkappa} \leq 1$. Случай $|X + Y|_{\varkappa} \leq 1$ очевиден, поэтому пусть $|X + Y|_{\varkappa} > 1$. Используя неравенства (2), имеем

$$|X + Y|_{\varkappa} \leq |X + Y|^{1/\varkappa_-} \leq (1 + |Y|)^{1/\varkappa_-}.$$

Аналогично

$$1 + |Y|_{\varkappa} \geq 1 + |Y|^{1/\varkappa_-}.$$

Тогда

$$\frac{|X + Y|_{\varkappa}}{1 + |Y|_{\varkappa}} \leq \frac{(1 + |Y|)^{1/\varkappa_-}}{1 + |Y|^{1/\varkappa_-}}.$$

Рассмотрим правую часть этого неравенства как функцию $f(|Y|)$. Поскольку $1/\varkappa_- \geq 1$, на отрезке $[0, 1]$ при $|Y| = 1$ функция $f(|Y|)$ достигает максимум, равный $2^{1/\varkappa_- - 1}$.

Пусть для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $\varkappa_- = \varkappa_i$. Выберем $x = y = e_i$.

Анизотропная длина базисного вектора равна единице. Тогда

$$\frac{|x+y|_{\varkappa}}{|x|_{\varkappa}+|y|_{\varkappa}} = \frac{|2e_i|_{\varkappa}}{|e_i|_{\varkappa}+|e_i|_{\varkappa}} = \frac{2^{1/\varkappa_i}|e_i|_{\varkappa}}{2} = 2^{1/\varkappa-1}. \quad \square$$

Нам часто придется использовать наибольшую компоненту x_k вектора x в анизотропном смысле, то есть такую, что верно равенство

$$\frac{|x_k|}{|x|_{\varkappa}^{\varkappa_k}} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i|}{|x|_{\varkappa}^{\varkappa_i}}. \quad (4)$$

Для краткости эту компоненту будем называть анизотропной наибольшей компонентой. Тогда, опираясь на определение 1.1.1 несложно установить, что для анизотропной наибольшей компоненты справедливы неравенства

$$|x_k| \leq |x|_{\varkappa}^{\varkappa_k} \leq \sqrt{n}|x_k|. \quad (5)$$

Следует отметить, что левое неравенство в этой формуле справедливо для любой компоненты x_j при $j \in \{1, \dots, n\}$, откуда следует, что для любого мультииндекса α выполняется неравенство

$$|x^\alpha| \leq |x|_{\varkappa}^{\alpha \cdot \varkappa}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Ниже будут встречаться следующие хорошо известные пространства определенных на $\mathbb{R}^n$ функций: $C^N(\mathbb{R}^n)$, $N \leq \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — соответственно пространство всех N раз непрерывно дифференцируемых функций, пространство Шварца и пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными в $\mathbb{R}^n$ носителями. Двойственное к $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пространство умеренных распределений будем обозначать через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ задается формулой $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ и продолжается по

двойственности на пространство умеренных распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Норма элемента u в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ будет, как обычно, обозначаться через $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Значение функции $s(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ будет задавать средний (в определенном далее смысле) показатель гладкости исследуемой функции в этой точке. Потребуем, чтобы функция $s(x)$ была вещественнозначной, ограниченной и непрерывной, а также чтобы для нее существовала постоянная $L_s > 0$, такая что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|y|_{\varkappa} < 1$, выполнялось неравенство

$$|\log_2 |y|_{\varkappa}| \cdot |s(x+y) - s(x)| \leq L_s. \quad (7)$$

Условие (7) эквивалентно (см. напр. [13]) следующему

$$2^{-L_s} |y|_{\varkappa}^{s(x)} \leq |y|_{\varkappa}^{s(x+y)} \leq 2^{L_s} |y|_{\varkappa}^{s(x)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < |y|_{\varkappa} < 1. \quad (8)$$

Обозначим $s_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$, $s_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$, $s_{\Delta} = s_+ - s_-$. Множество всех таких функций, удовлетворяющих перечисленным выше условиям обозначим $C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$. Далее увидим (см. (14)), что показатель гладкости по переменной x_j задается формулой $s_j(x) = s(x)/\varkappa_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если $s(x) \neq 0$, то

$$s(x) = \frac{n}{\sum_{j=1}^n 1/s_j(x)}. \quad (9)$$

Действительно, так как $\varkappa_j = s(x)/s_j(x)$ и $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_n = n$, то

$$n = s(x)/s_1(x) + \dots + s(x)/s_n(x) = s(x) \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j(x)},$$

откуда получаем (9).

Нам понадобится конечная разность δ_h , которая, как обычно, действует на

непрерывную функцию u по правилу $\delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, а его целые положительные степени определены по формуле $\delta_h^k = \delta_h \delta_h^{k-1}$, $k > 1$. Легко видеть, что

$$\delta_h^k u(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j u(x+jh), \quad k \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (10)$$

где $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ — биномиальные коэффициенты. В частности, верно равенство $\delta_h^2 u(x) = u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)$.

Если функция $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, то имеет место равенство (см. напр. [41], стр. 38)

$$\delta_h^N f(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{|\alpha|=N} h^\alpha \partial_x^\alpha f(x + (t_1 + \cdots + t_N)h) dt_1 \cdots dt_N. \quad (11)$$

1.2 Анизотропное пространство Гёльдера–Зигмунда при $s_- > 0$

Определение 1.2.1. Анизотропное пространство $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости $s(\cdot)$ при $s_- > 0$ и вектором анизотропности $\varkappa$ состоит из непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}}, \quad (12)$$

где $N = [s_+/\varkappa_-] + 1$ (здесь и далее скобки $[t]$ означают целую часть числа t).

Если в формуле (12) супремум взять по всем $|h|_{\varkappa} \in (0, 1)$, то получим эквивалентную норму

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^\circ = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{0 < |h|_{\varkappa} < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}}.$$

Очевидно, что $\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\circ} \leq \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$. Используя (10), находим

$$\begin{aligned} \sup_{|h|_{\varkappa} \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}} &\leq \sum_{j=0}^N C_N^j \sup_{|h|_{\varkappa} \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x + jh)| = \\ &= \sum_{j=0}^N C_N^j \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 2^N \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Поэтому $\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq (2^N + 1) \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\circ}$. Если обозначить через $\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$ правую часть в формуле (12) при $N > [s_+/\varkappa_-] + 1$, то условие (7) и формула (10) позволяют заключить, что для любого такого N существует $C > 0$, такое что для всех f верно неравенство

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)} \leq C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (13)$$

Для любого $k > N = [s_+/\varkappa_-] + 1$ с учетом (10) получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(k)} &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{0 < |h|_{\varkappa} < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^k f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}} \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=0}^{k-N} C_{k-N}^j \sup_{0 < |h|_{\varkappa} < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x + jh)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством (8) j раз

$$2^{-jL_s} |h|_{\varkappa}^{s(x+jh)} \leq |h|_{\varkappa}^{s(x)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(k)} &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=0}^{k-N} C_{k-N}^j \sup_{0 < |h|_{\varkappa} < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x + jh)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}} \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=0}^{k-N} C_{k-N}^j 2^{jL_s} \sup_{0 < |h|_{\varkappa} < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x + jh)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x+jh)}} \leq C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}. \end{aligned}$$

Введем семейство норм следующего вида

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_{te_j}^{N_j} f(x)|}{|t|^{s(x)/\varkappa_j}}, \quad (14)$$

где $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ и натуральные числа $N_j > s_+/\varkappa_j$ при $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, а $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем x_k для всех $k \neq j$, и рассмотрим функцию f и показатель гладкости s как функции от одной переменной x_j . Введем обозначение $\tilde{s}_j(\cdot) = s(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n)/\varkappa_j$. Тогда для любых двух натуральных чисел N_j , удовлетворяющих условию $N_j > s_+/\varkappa_j$, нормы

$$\|f\|_{C_{\tilde{s}_j(\cdot)}^{(N_j)}(\mathbb{R})}^{(N_j)} = \sup_{x_j \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x_j \in \mathbb{R}} \frac{|\delta_{te_j}^{N_j} f(x)|}{|t|^{s(x)/\varkappa_j}}$$

эквивалентны (см. [13], [79] стр. 243). Иными словами, верно $\|f\|_{C_{\tilde{s}_j(\cdot)/\varkappa_j}^{(N_j)}(\mathbb{R})}^{(N_j)} \leq C \|f\|_{C_{\tilde{s}_j(\cdot)/\varkappa_j}^{(N'_j)}(\mathbb{R})}^{(N'_j)}$ с константой $C > 0$, зависящая лишь от натуральных чисел N_j и N'_j , показателя гладкости s , но независящая от x_k при $k \neq j$ и функции f . Следовательно, существует постоянная $C > 0$, независящая от f , такая что верны неравенства $C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N}')} \leq \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} \leq C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N}')}$ при указанных в определении (14) векторах $\vec{N}$ и $\vec{N}'$.

Покажем, что существует константа C , зависящая от N и $\vec{N}$, такая что

$$\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} \leq C \|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)} \quad (15)$$

при $N \geq [s_+/\varkappa_-] + 1$. Так как нормы $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$ эквивалентны, то зафиксируем вектор $\vec{N}$ с компонентами $N_1 = \dots = N_n = N$. Используя свойство 2 из определения 1.1.1 для вектора te_j , имеем

$$|te_j| = |t^{(1/\varkappa_j)\varkappa_j} e_j| = |t|^{1/\varkappa_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_{te_j}^N f(x)|}{|te_j|^{s(x)}} \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|^{s(x)}} \leq n \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}. \end{aligned}$$

В качестве примера можно привести популярное параболическое пространство Гёльдера $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ функций, показатель гладкости которых по первой переменной $s_1 = 1 + \alpha/2$, а по остальным переменным $s_j = 2 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \text{const}$, $j \neq 1$. В этом случае получим по формуле (9)

$$s = \frac{n}{\sum_{j=1}^n 1/s_j} = \frac{n}{2/(2+\alpha) + \sum_{j=2}^n 1/(2+\alpha)} = \frac{n(2+\alpha)}{n+1}.$$

Тогда элементы вектора анизотропности принимают значения $\varkappa_1 = s/s_1 = 2n/(n+1)$, и $\varkappa_j = n/(n+1)$ при $j \neq 1$. Тогда эквивалентная норма в параболическом пространстве Гёльдера имеет вид

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^3 f(x)|}{|h|_{\varkappa}^s}.$$

В изотропном случае при $\varkappa = (1, \dots, 1)$ пространство $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с обычным пространством Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости [13], а если, кроме того, показатель гладкости s постоянен, то получим хорошо известное пространство Гёльдера-Зигмунда $C^s(\mathbb{R}^n)$ ([41, 75, 78, 79]). Если $0 < s_-$ и $s_+ < \varkappa_-$, то норма в пространстве $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|_{\varkappa}^{s(x)}},$$

При $0 < s_-$ и $s_+ < 2\varkappa_-$ норма принимает форму

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}} \frac{|f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)|}{|h|_{\varkappa}^{s(x)}}.$$

1.3 Анизотропные пространства Гёльдера-Зигмунда при произвольном $s(x)$

Для того, чтобы построить анизотропное пространство Гёльдера-Зигмунда с переменным показателем гладкости, возможно принимающем отрицательные значения, нам потребуется разбиение единицы Литлвуда-Пэли (см. напр. [64], [79], [75], стр. 241), модифицированное для анизотропного случая ([35], [79]). Пусть функция $\lambda_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\lambda_0(\xi) = 1$ при $|\xi|_{\varkappa} \leq 1$ и $\lambda_0(\xi) = 0$ при $|\xi|_{\varkappa} \geq 2$. Если $\lambda(\xi) = \lambda_0(\xi) - \lambda_0(2^{\varkappa}\xi)$, то, по определению, $\lambda_j(\xi) = \lambda(2^{-j\varkappa}\xi)$ при $j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \lambda_j(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Для носителей введенных функций справедливы соотношения

$$\text{supp } \lambda_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi|_{\varkappa} \leq 2\}, \quad \text{supp } \lambda \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1/2 \leq |\xi|_{\varkappa} \leq 2\}$$

и, следовательно, $\text{supp } \lambda_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j-1} \leq |\xi|_{\varkappa} \leq 2^{j+1}\}$ при $j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Для функции λ поставим в соответствие оператор $\lambda(D)$, действующий на функцию $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\lambda(D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \left(\lambda(\xi) \widehat{f}(\xi) \right)^{\vee}, \quad (16)$$

где символ $\vee$ обозначает обратное преобразование Фурье. Оператор $\lambda(D)$ продолжается единственным образом до оператора из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ по непрерывности. Но так как $\lambda(\xi)$ имеет компактный носитель, то этот оператор действует из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и, более того, $\lambda(D)f(x)$ является аналитической функцией.

Ядро

$$\mathcal{K}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(\xi) e^{2\pi i z \cdot \xi} d\xi = \lambda^\vee(z)$$

оператора $\lambda(D)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и позволяет записать оператор $\lambda(D)$ в виде свертки

$$\lambda(D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x - z) f(z) dz = \mathcal{K} * f(x), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (17)$$

Пусть $\mathcal{K}_j$ — ядро оператора $\lambda_j(D)$ при $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Если $j > 0$, то имеет место равенство

$$\mathcal{K}_j(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(2^{-j\varkappa}\xi) e^{2\pi i \xi \cdot z} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(\eta) e^{2\pi i \eta \cdot 2^{j\varkappa} z} 2^{jn} d\eta = 2^{jn} \mathcal{K}(2^{j\varkappa} z). \quad (18)$$

Отсюда непосредственное вычисление с помощью замены переменных показывает, что нормы равны $\|\mathcal{K}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ для любого $j > 0$.

Определение 1.3.1. Пространство $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ и вектором анизотропности $\varkappa \in \mathbb{Q}_{>0}^n$ состоит из всех

распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|2^{js(x)} \lambda_j(D) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Непосредственно из определения следует, что если $s_1(x) \leq s_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то имеет место непрерывное вложение $\Lambda_{\varkappa}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\varkappa}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Пусть K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(K)$ (замкнутое) подпространство пространства $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций (распределений) с компактными носителями, вложенными в K .

В качестве иллюстрации, заметим, что дельта функция П. Дирака, действующая по правилу $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, принадлежит $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, если $s(0) \leq -n$ (см. приложение 1, стр. 91).

Полезность пространств с переменным показателем гладкости можно проиллюстрировать функцией $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Эта функция принадлежит $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R})$ с показателем гладкости $s \in C_{\log}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $s(0) \leq 1/2$ (см. приложение 1, стр. 92).

1.4 Об эквивалентности норм при $s_- > 0$

Нам понадобится

Лемма 1.4.1. *Для любой функции $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следующая величина конечна*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\varkappa} y)| dy = C < \infty. \quad (19)$$

Доказательство. Так как функция s является ограниченной на $\mathbb{R}^n$ и $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

то для любого j

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy < \infty.$$

Для каждого $j > 0$ разобьем $\mathbb{R}^n$ на два множества $\mathcal{X}_j = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|_\kappa < 2^{-j/2}\}$ и $\mathcal{Y}_j = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|_\kappa \geq 2^{-j/2}\}$. На множестве $\mathcal{X}_j$ в силу неравенства (7) имеем

$$|s(x+y) - s(x)| \leq \frac{L_s}{|\log_2 |y|_\kappa|} \leq \frac{L_s}{|\log_2 2^{-j/2}|} \leq 2L_s/j,$$

откуда $j|s(x+y) - s(x)| \leq 2L_s$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}_j} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy &\leq 2^{2L_s} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} k(2^{j\kappa}y) dy = \\ &= 2^{2L_s} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} 2^{-jn} k(z) dz \leq 2^{2L_s} \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то для любого $p > 0$ существует $C_p > 0$, что

$$|k(z)| \leq C_p |z|_\kappa^{-p}$$

для всех $z \in \mathbb{R}^n$. Выберем $p \geq 2s_\Delta + n + 1$, тогда на множестве $\mathcal{Y}_j$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Y}_j} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy &\leq \\ &\leq C_p 2^{j(s_\Delta+n)} \int_{\mathcal{Y}_j} |2^{j\kappa}y|_\kappa^{-p} dy = C_p 2^{j(s_\Delta+n-p)} \int_{\mathcal{Y}_j} |y|_\kappa^{-p} dy. \end{aligned}$$

После перехода в эллиптическую систему координат (см. в приложении форму-

лы (88)) по равенству (89) получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Y}_j} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy &\leq C 2^{j(s_\Delta+n-p)} \int_{2^{-j/2}}^{\infty} r^{-p+n-1} dy = \\ &= C 2^{j(s_\Delta+n-p)} (p-n)^{-1} 2^{-j(n-p)/2} = C 2^{j(s_\Delta-(p-n)/2)} < C < \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Неравенства (20) и (21) вместе дают неравенство (19). $\square$

Из доказательства видно, что из условия леммы можно убрать требование дифференцируемости функции k , достаточно ее интегрируемости и используемой оценки на убывание. Воспользовавшись свойством (18), по лемме 1.4.1 для ядра $\mathcal{K}_j$ оператора $\lambda_j(D)$ имеем оценку

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j(s(x+y)-s(x))} |\mathcal{K}_j(y)| dy = C < \infty.$$

Теорема 1.4.1. Пусть $s(x) \geq s_- > 0$. Для любого вектора $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$ с компонентами $N_j > s_+/\kappa_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, существует константа $C > 0$, зависящая от чисел N_j , такая что для любой функции $f \in C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}, \quad (22)$$

и, следовательно, $C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Из оценок (13) и (15) следует, что для любой функции $f \in C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ конечны нормы $\|f\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} < \infty$. Достаточно доказать, что для любого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место оценка

$$\|2^{js(\cdot)} \lambda_j(D) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$$

с независимой от j и f постоянной C . При $j = 0$ с использованием представления (17) легко видеть, что

$$\|\lambda_0(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{K}_0 * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathcal{K}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\mathfrak{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\mathcal{K}_0$ — ядро оператора $\lambda_0(D)$.

Пусть теперь $j > 0$. На множестве $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1/2 \leq |\xi|_{\mathfrak{K}} \leq 2\}$ (на котором находится носитель функции $\lambda(\xi)$) построим конечное покрытие открытыми множествами и соответствующее бесконечно дифференцируемое разбиение единицы ν_k , $1 \leq k \leq n$, такие что каждое множество покрытия с носителем функции ν_m находится в множестве

$$\left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{4^{\mathfrak{K}_m} \sqrt{n}} \leq |\xi_m| \right\}, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Рассмотрим вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, не принадлежащий ни одному из носителей функций ν_m . Тогда для компонент этого вектора справедливы неравенства $|\xi_m| < 1/(4^{\mathfrak{K}_m} \sqrt{n})$, $m \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку длина следующего вектора $(1/(4^{\mathfrak{K}_1} \sqrt{n}), \dots, 1/(4^{\mathfrak{K}_n} \sqrt{n}))$ равна $1/4$, а значит $\xi \notin \text{supp } \lambda$, следовательно, семейство носителей функций ν_m есть открытое покрытие носителя функции λ . Теперь, если ввести функции $\lambda^{(m)}(\xi) = \lambda(\xi)\nu_m(\xi)$, то получим $\lambda = \sum_{m=1}^n \lambda^{(m)}$. Аналогично, для функции λ_j обозначим $\lambda_j^{(m)}(\xi) = \lambda_j(\xi)\nu_m(\xi)$, $1 \leq m \leq n$. Далее понадобятся векторы $h_{j,m} = t_{j,m}e_m \in \mathbb{R}^n$, где $e_m = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — m -й вектор стандартного базиса и $t_{j,m} = 2^{(-j-3)\mathfrak{K}_m}$, $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, $1 \leq m \leq n$. Тогда для заданной функции $f \in C_{\mathfrak{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ по формуле (16), заменяя единицу на $(e^{2\pi i \xi_m t_{j,m}} - 1)^{-N_m} (e^{2\pi i \xi_m t_{j,m}} - 1)^{N_m}$, получим

$$\lambda_j^{(m)}(D)f = \left(\lambda^{(m)}(2^{-j\mathfrak{K}}\xi) (e^{2\pi i \xi_m t_{j,m}} - 1)^{-N_m} (e^{2\pi i \xi_m t_{j,m}} - 1)^{N_m} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee.$$

В последней формуле выражение $\xi_m t_{j,m}$ можно рассматривать как скалярное произведение $\xi \cdot h_{j,m}$. Применение хорошо известной формулы (см. напр. [41], стр. 40)

$$\widehat{\delta_h^k f}(\xi) = (e^{2\pi i \xi \cdot h} - 1)^k \widehat{f}(\xi)$$

дает следующее равенство

$$\lambda_j^{(m)}(D)f = \left(\lambda^{(m)}(2^{-j\mathbf{z}}\xi) (e^{2\pi i 2^{-j\mathbf{z}}\xi_m 8^{-\mathbf{z}_m}} - 1)^{-N_m} \widehat{\delta_{h_{j,m}}^{N_m} f}(\xi) \right)^\vee.$$

Рассмотрим функцию $\zeta^{(m)}(\xi) = \lambda^{(m)}(\xi) (e^{2\pi i \xi_m 8^{-\mathbf{z}_m}})^{-N_m}$. Если $\xi \in \text{supp } \lambda^{(m)}$, то с одной стороны по определению ν_m справедливо $1/(4^{\mathbf{z}_m} \sqrt{n}) \leq |\xi_m|$, а с другой стороны, из определения λ верно $|\xi|_{\mathbf{z}} \leq 2$, то есть $|\xi_m| \leq 2^{\mathbf{z}_m}$. Собирая эти оценки, получим

$$\frac{1}{4^{\mathbf{z}_m} \sqrt{n}} \leq |\xi_m| \leq 2^{\mathbf{z}_m} \iff \frac{1}{32^{\mathbf{z}_m} \sqrt{n}} \leq |\xi_m 8^{-\mathbf{z}_m}| \leq 4^{-\mathbf{z}_m},$$

откуда $0 < |\xi_m 8^{-\mathbf{z}_m}| < 1$ и тогда $e^{2\pi i \xi_m 8^{-\mathbf{z}_m}} - 1 \neq 0$. Значит, функция $\zeta^{(m)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, поскольку $\nu_m, \lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Теперь, если рассмотреть функцию $\zeta_j^{(m)}(\xi) = \zeta^{(m)}(2^{-j\mathbf{z}}\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, попутно замечая, что

$$\zeta_j^{(m)}(\xi) = \lambda^{(m)}(2^{-j\mathbf{z}}\xi) (e^{2\pi i 2^{-j\mathbf{z}}\xi_m 8^{-\mathbf{z}_m}} - 1)^{-N_m},$$

то получим равенство

$$\lambda_j^{(m)}(D)f = \zeta_j^{(m)}(D) \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f = \mathcal{T}_j^{(m)} * \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f,$$

где ядро $\mathcal{T}_j^{(m)}$ оператора $\zeta_j^{(m)}(D)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда, умножая левую и правую части предыдущего равенства на $2^{js(x)}$ и предполагая,

что $N_m > s_+/\varkappa_m$ при $m \in \{1, \dots, n\}$, получим

$$\begin{aligned} \left| 2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D) f(x) \right| &= \left| 2^{js(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{T}_j^{(m)}(x-y) \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f(y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{T}_j^{(m)}(x-y) 2^{j(s(x)-s(y))} 2^{js(y)} \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

Используя равенство $(8^{-s(y)} |h_{j,m}|^{-s(y)} =) 8^{-s(y)} |t_{j,m}|^{-s(y)/\varkappa_m} = 2^{js(y)}$, а также учитывая, что $8^{-s_+} \leq 8^{-s(y)} \leq 8^{-s_-}$, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| 2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D) f(x) \right| &\leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}_j^{(m)}(x-y)| 2^{j(s(x)-s(y))} 8^{-s(y)} |t_{j,m}|^{-s(y)/\varkappa_m} |\delta_{h_{j,m}}^{N_m} f(y)| dy \leq \\ &\leq C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}_j^{(m)}(z)| 2^{j(s(x)-s(x-z))} dz. \end{aligned}$$

По лемме 1.4.1 последний интеграл ограничен по j и x , следовательно,

$$\left| 2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D) f(x) \right| \leq C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}.$$

Таким образом, имеем

$$\left| 2^{js(x)} \lambda_j(D) f(x) \right| \leq \sum_{m=1}^n \left| 2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D) f(x) \right| \leq C \|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$$

с независимой от x , j и f постоянной C . Простым следствием этого неравенства получаем $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, откуда следует вложение $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Теорема 1.4.2. Пусть $s_- > 0$. Тогда любое распределение $f \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (после коррекции на множестве меры ноль), причем суще-

существует постоянная $C > 0$, такая что для любых таких f верно неравенство $\|f\|_{C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ и, следовательно, имеет место непрерывное вложение $\Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset C_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Достаточно доказать справедливость неравенства для норм. Из того, что $f \in \Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, получаем неравенство

$$\|\lambda_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|2^{-js_-} 2^{js(x)} \lambda_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 2^{-js_-} \|f\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $\psi_j = \lambda_{j-1} + \lambda_j + \lambda_{j+1}$ (где $\lambda_{-1} = 0$). В силу определения λ_j функция $\psi_j(\xi) = 1$ при $\xi \in \text{supp } \lambda_j$, откуда $\psi_j(\xi) \lambda_j(\xi) = \lambda_j(\xi)$. Тогда из определения (16) следует равенство для операторов $\psi_j(D) \lambda_j(D) = \lambda_j(D)$ для любого j . Учитывая, что $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \lambda_j(D) = I$ (I — тождественное отображение), то для каждого распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующее равенство

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(D) \lambda_j(D) f, \quad (23)$$

причем последний ряд сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Формулу (23) можно записать в следующем виде

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}_j * \lambda_j(D) f, \quad (24)$$

где $\mathcal{T}_j = \mathcal{K}_{j-1} + \mathcal{K}_j + \mathcal{K}_{j+1}$ — ядро интегрального оператора $\psi_j(D)$. Если вести обозначение $\mathcal{T}(z) = 2^{-n} \mathcal{K}(2^{-\mathcal{K}} z) + \mathcal{K}(z) + 2^n \mathcal{K}(2^{\mathcal{K}} z)$, то по свойству (18) для $j > 0$ получим

$$\mathcal{T}_j(z) = 2^{(j-1)n} \mathcal{K}(2^{(j-1)\mathcal{K}} z) + 2^{jn} \mathcal{K}(2^{j\mathcal{K}} z) + 2^{(j+1)n} \mathcal{K}(2^{(j+1)\mathcal{K}} z) = 2^{jn} \mathcal{T}(2^{j\mathcal{K}} z).$$

Заметим, что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ при $j > 0$ справедливы равен-

ства

$$\partial^\alpha \mathcal{T}_j(x) = 2^{jn} \partial^\alpha \mathcal{T}(2^{j\kappa} x) = 2^{jn} 2^{\alpha \cdot \kappa} (\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\kappa} x) = 2^{\alpha \cdot \kappa} (\partial^\alpha \mathcal{T})_j(x).$$

Используя замену переменных $2^{j\kappa} x = y$, легко видеть, что аналогично равенству $\|\mathcal{K}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, получаем, что $\|\mathcal{T}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{T}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ и $\|(\partial^\alpha \mathcal{T})_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\partial^\alpha \mathcal{T}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Пусть теперь $f \in \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ при $j > 0$

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (\psi_j(D) \lambda_j(D) f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|\partial^\alpha \mathcal{T}_j * \lambda_j(D) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq 2^{j\alpha \cdot \kappa} \|(\partial^\alpha \mathcal{T})_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\lambda_j(D) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq 2^{j\alpha \cdot \kappa} \|\partial^\alpha \mathcal{T}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|2^{-js_-} 2^{js(x)} \lambda_j(D) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{j(\alpha \cdot \kappa - s_-)} \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если взять α , такое что $\alpha \cdot \kappa < s_-$, воспользовавшись оценкой (25) и подставив в (24), имеем

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha \cdot \kappa - s_-)} \leq C \frac{2^{s_- - \alpha \cdot \kappa}}{2^{s_- - \alpha \cdot \kappa} - 1} \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \quad (26)$$

в частности, при $\alpha = 0$ ряд в (23) сходится по норме $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. А так как слагаемые ряда (23) являются гладкими функциями, то распределение f регулярно и совпадает с ограниченной и непрерывной функцией (вне множества меры ноль). Попутно из (25) также можно заметить, что с помощью умножения распределения f на гладкую срезающую функцию, в том случае, когда в точке x средняя гладкость $s(x) > \alpha \cdot \kappa$, функция f в этой точке x имеет производную порядка α .

Пусть $N \geq [s_+/ \varkappa_-] + 1$, тогда для любого $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$,

$$|h|_{\varkappa}^{-s(x)} \delta_h^N f(x) = |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_h^N \mathcal{T}_j * \lambda_j(D) f(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \delta_h^N f(x) \right| &\leq \left| \sum_{j=0}^{\infty} |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_h^N \mathcal{T}_j(y) 2^{-js(x-y)} 2^{js(x-y)} \lambda_j(D) f(x-y) dy \right| \leq \\ &\leq \|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}} \sum_{j=0}^{\infty} |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy. \quad (27) \end{aligned}$$

Используя неравенство (8) m раз и формулу (10), получим

$$\begin{aligned} |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy &\leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m=0}^N C_N^m |h|_{\varkappa}^{-s(x+mh)} |\mathcal{T}_j(y+mh)| 2^{-js(x-y)} dy \leq \\ &\leq C \sum_{m=0}^N |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s(x+mh)} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}_j(z)| 2^{j(s(x+mh)-s(x+mh-z))} dz, \quad (28) \end{aligned}$$

где была осуществлена замена переменной $z = y + mh$, и использовалось равенство $|2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s(x+mh)} = 2^{-js(x+mh)} |h|_{\varkappa}^{-s(x+mh)}$. По лемме 1.4.1 интеграл в (28) ограничен константой, независимой от j , x , m , h . Значит, при условии $|2^{j\varkappa} h|_{\varkappa} \geq 1$ получаем

$$|h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq C |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s-}. \quad (29)$$

Используя формулу (11), получим

$$\begin{aligned}
& |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq \\
& \leq |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{|\alpha|=N} \left| h^\alpha \partial^\alpha \mathcal{T}_j(y + \sum_{k=1}^N t_k h) \right| 2^{-js(x-y)} dt_1 \cdots dt_N.
\end{aligned}$$

Выполним замены переменных $v = y + \sum_{k=1}^N t_k h$ и $u = x + \sum_{k=1}^N t_k h$. Для ядра свертки $\mathcal{T}_j(y)$ при $j > 0$ верно $\partial^\alpha \mathcal{T}_j(y) = 2^{jn} 2^{j\alpha \cdot \varkappa} (\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\varkappa} y)$. Тогда, используя теорему Фубини о перестановке порядка интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}
& |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{|\alpha|=N} |h^\alpha 2^{j\alpha \cdot \varkappa}| \cdot \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} |(\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\varkappa} v)| 2^{-js(u-v)} dv dt_1 \cdots dt_N.
\end{aligned}$$

Используя неравенство (8) N раз, имеем $|h|_{\varkappa}^{-s(x)} \leq 2^{NL_s} |h|_{\varkappa}^{-s(u)}$. Учитывая, что $2^{-js(u)} |h|_{\varkappa}^{-s(u)} = |2^{j\varkappa} h|^{-s(u)}$, находим что

$$\begin{aligned}
& |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq \\
& 2^{NL_s} |h|_{\varkappa}^{-s(u)} 2^{-js(u)} 2^{js(u)} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{|\alpha|=N} |(2^{j\varkappa} h)^\alpha| \cdot \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} |(\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\varkappa} v)| 2^{-js(u-v)} dy dt_1 \dots dt_N \leq \\
& \leq 2^{NL_s} \int_0^1 \dots \int_0^1 |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s(u)} \sum_{|\alpha|=N} |(2^{j\varkappa} h)^\alpha| \cdot \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\varkappa} v)| 2^{j(s(u)-s(u-v)+n)} dv dt_1 \dots dt_N.
\end{aligned}$$

Последний внутренний интеграл ограничен константой по лемме 1.4.1. Используя неравенство (6), мы имеем $|(2^{j\varkappa} h)^\alpha| \leq |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{\alpha \cdot \varkappa}$. Тогда

$$|h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq C \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s(u)} \sum_{|\alpha|=N} |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{\alpha \cdot \varkappa}.$$

Для $j = 0$ нужно провести те же выкладки с заменой функции $\mathcal{T}$ функцией $\mathcal{T}_0$. Тогда при $|2^{j\varkappa} h|_{\varkappa} < 1$ имеем

$$|h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq C |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{N\varkappa - s_+}, \quad (30)$$

где C не зависит от h, x, j . Пусть целое число $j_0 = j_0(h)$ такое, что $2^{j_0-1} |h|_{\varkappa} < 1$ и $2^{j_0} |h|_{\varkappa} \geq 1$. В случае, когда $|h|_{\varkappa} \geq 1$ положим $j_0 = 0$. Из (27) следует, что

$$\| |h|_{\varkappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{j_0-1} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \right) |h|_{\varkappa}^{-s(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy.$$

С учетом неравенств (29) и (30) имеем

$$\| |h|_{\varkappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{j=0}^{j_0-1} |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{\gamma} + \sum_{j=j_0}^{\infty} |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s_-} \right),$$

где $\gamma = N\varkappa_- - s_+ > 0$, поскольку, по определению, $N > s_+/\varkappa_-$. Из определения j_0 следует неравенство $|h|_{\varkappa}^{\gamma} \leq 2^{-(j_0-1)\gamma}$, тогда получаем для первой суммы

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{\gamma} = |h|_{\varkappa}^{\gamma} \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{j\gamma} \leq 2^{-(j_0-1)\gamma} \frac{2^{j_0\gamma} - 1}{2^{\gamma} - 1} \leq \frac{2^{\gamma}}{2^{\gamma} - 1}.$$

Для второй суммы сделаем замену $H = 2^{j_0\varkappa} h$, значит $|H|_{\varkappa} \geq 1$. Тогда, при $s_- > 0$ имеем

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |2^{j\varkappa} h|_{\varkappa}^{-s_-} = \sum_{j=0}^{\infty} |2^{j\varkappa} H|_{\varkappa}^{-s_-} = |H|_{\varkappa}^{-s_-} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js_-} \leq \frac{2^{s_-}}{2^{s_-} - 1}.$$

Собирая оценки для этих сумм, получим

$$\| |h|_{\varkappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{2^{\gamma}}{2^{\gamma} - 1} + \frac{2^{s_-}}{2^{s_-} - 1} \right).$$

Так как выражение, стоящее справа в неравенстве, не зависит от h , то

$$\sup_{h \neq 0} \| |h|_{\varkappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (31)$$

Наконец, с учетом (26) при $|\alpha| = 0$ и (31) получаем, что существует постоянная $C > 0$, такая что для любого распределения $f \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \quad (32)$$

откуда следует $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. □

Таким образом, в теоремах 1.4.1 и 1.4.2 при $s_- > 0$ доказана эквивалентность норм $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ и совпадение пространств $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Из оценок (13), (15), (22), (32) получаем следующее

Следствие 1.4.1. Нормы $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$, $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентны при $s_- > 0$, $N > s_+/\varkappa_-$, $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$ при $N_j > s_+/\varkappa_j$, $1 \leq j \leq n$.

1.5 О компактном вложении в пространствах Гёльдера-Зигмунда

Напомним, что для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ через $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(K)$ обозначается (замкнутое) подпространство пространства $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций (распределений) с компактными носителями, вложенными в K .

Теорема 1.5.1. Пусть K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $0 < s_{2-} \leq s_2(x) < s_1(x)$ при $x \in K$ и $s_1, s_2 \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\Lambda_{\varkappa}^{s_1(\cdot)}(K)$ компактно вложено в $\Lambda_{\varkappa}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть u_k — ограниченная последовательность в $\Lambda_{\varkappa}^{s_1(\cdot)}(K) \subset \Lambda_{\varkappa}^{s_1-}(\mathbb{R}^n)$. Тогда эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывная, а значит, по теореме Асколи (см. [53]) содержит подпоследовательность $v_k = u_{n_k}$, равномерно сходящуюся на множестве K (по норме $C(K)$). Покажем, что последовательность v_k фундаментальна в $\Lambda_{\varkappa}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что из сходимости в $C(K)$ следует, что $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v_k(x) - v_m(x)| \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$. Докажем теперь, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{h \neq 0} |\delta_h^N(v_k(x) - v_m(x))| \cdot |h|_{\varkappa}^{-s_2(x)} \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, используя линейность оператора δ_h^N , после

элементарных преобразований получим неравенство

$$\begin{aligned} & |\delta_h^N(v_k(x) - v_m(x))| \cdot |h|_{\mathcal{K}}^{-s_2(x)} = |\delta_h^N v_k(x) - \delta_h^N v_m(x)| \cdot |h|_{\mathcal{K}}^{-s_2(x)} = \\ & = |h|_{\mathcal{K}}^{s_1(x)-s_2(x)} \left| \frac{\delta_h^N v_k(x)}{|h|_{\mathcal{K}}^{s_1(x)}} - \frac{\delta_h^N v_m(x)}{|h|_{\mathcal{K}}^{s_1(x)}} \right| \leq C_{s_1} |h|_{\mathcal{K}}^{s_1(x)-s_2(x)} (\|v_k\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|v_m\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}), \end{aligned}$$

где C_{s_1} — положительная константа, такая что верно неравенство $\|\cdot\|_{C_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{s_1} \|\cdot\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$. Пусть

$$\tau(x) = \left(\frac{\varepsilon}{2C_{s_1} \sup_k \|v_k\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \right)^{1/(s_1(x)-s_2(x))}.$$

Так как на компактном множестве K для некоторого $\Delta > 0$ верно $s_1(x) - s_2(x) \geq \Delta$, то существуют числа τ_- и τ_+ , такие что

$$0 < \tau_- \leq \tau(x) \leq \tau_+ < \infty, \quad x \in K.$$

Если $|h|_{\mathcal{K}} < \tau(x)$, то

$$|\delta_h^N(v_k(x) - v_m(x))| \cdot |h|_{\mathcal{K}}^{-s_2(x)} < \varepsilon.$$

Пусть $|h|_{\mathcal{K}} \geq \tau(x)$. Заметим, что если $\varepsilon/(2C_{s_1} \sup_k \|v_k\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}) < 1$, то $|h|_{\mathcal{K}}^{-s_2(x)} < 1$, если же $\varepsilon/(2C_{s_1} \sup_k \|v_k\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}) \geq 1$, то $|h|_{\mathcal{K}}^{-s_2(x)} < \tau_-^{-s_2+}$. Тогда оценка

$$|\delta_h^N(v_k(x) - v_m(x))| \cdot |h|_{\mathcal{K}}^{-s_2(x)} \leq 2^N \|v_k - v_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \max(1, \tau_-^{-s_2+}) < \varepsilon$$

справедлива для всех k, m , для которых

$$\|v_k - v_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2^N \max(1, \tau_-^{-s_2+})}.$$

□

2 Анизотропные псевдодифференциальные операторы

2.1 Символ псевдодифференциального оператора

Будем рассматривать класс символов $S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ состоящее из всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функций $a(x, \xi)$ таких, что для любых $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ конечны полунормы

$$|a|_{q,p}^m := \max_{|\alpha| \leq q, |\beta| \leq p} \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| (1 + |\xi|_\varkappa)^{\rho\alpha \cdot \varkappa - \delta\beta \cdot \varkappa - m} < \infty. \quad (33)$$

Полунормы (33) зависят от $\varkappa$, но в обозначении мы это не указываем для упрощения записи. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ справедливо неравенство

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq |a|_{|\alpha|, |\beta|}^m (1 + |\xi|_\varkappa)^{m - \rho\alpha \cdot \varkappa + \delta\beta \cdot \varkappa}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Каждому символу $a(x, \xi)$ ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор $Op(a)$, действующее на функцию $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$Op(a)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Тогда соответствующий классу символов $S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ класс псевдодифференциальных операторов обозначим $OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$.

Используя неравенства (2), при $\xi \in \mathbb{R}^n$ легко получить оценки

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|_\varkappa) &\leq 2(1 + |\xi|)^{1/\varkappa_-}, \\ (1 + |\xi|) &\leq 2(1 + |\xi|_\varkappa)^{\varkappa_+}. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $m \in \mathbb{R}$ и $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Из соотношений (34) находим, что

$$(1 + |\xi|_\varkappa)^m \leq C(1 + |\xi|)^{m'},$$

$$(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta\beta \cdot \varkappa} \leq C(1 + |\xi|)^{\delta\beta \cdot \varkappa / \varkappa_-} \leq C(1 + |\xi|)^{\delta'|\beta|},$$

$$(1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\rho\alpha \cdot \varkappa} \leq C(1 + |\xi|)^{-\rho\alpha \cdot \varkappa / \varkappa_+} \leq C(1 + |\xi|)^{-\rho'|\alpha|},$$

где $\delta' = \delta\varkappa_+ / \varkappa_-$, $\rho' = \rho\varkappa_- / \varkappa_+$ и

$$m' = \begin{cases} m / \varkappa_- & \text{при } m \geq 0, \\ m / \varkappa_+ & \text{при } m < 0. \end{cases}$$

Эти выкладки позволяют заключить, что класс анизотропных символов $S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ вложен в известный класс Хёрмандера $S_{\rho', \delta'}^{m'}$ при тех же m', ρ', δ' (см. [59]). В виду этого вложения, в частности, наследуется свойство, что анизотропный псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ непрерывен в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Очевидно справедливы следующие свойства: $\forall a, b \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ сумма $a + b \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ и для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ произведение $\alpha a \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$. Пусть символ b не зависит от x . Так как для любого $f \in \mathcal{S}'$ верно $Op(b)f = (b\hat{f})^\vee$, то в виду независимости b от x верно $\widehat{Op(b)f} = b\hat{f}$, а тогда

$$Op(a)Op(b)f = (a\widehat{Op(b)f})^\vee = (ab\hat{f})^\vee = Op(ab)f,$$

откуда следует, что $Op(a)Op(b) = Op(ab)$ в случае, когда символ b не зависит от x . Попутно отметим, что символ a может зависеть от x , однако если b будет зависеть от x , то указанное равенство, вообще говоря, не выполняется. Из этого всего дополнительно следует, что если оба символа не зависят от x , то операторы коммутируют.

Пусть D^α — псевдодифференциальный оператор с символом ξ^α . Из цепочки

равенств

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) (2\pi i)^{-|\alpha|} (2\pi i \xi)^\alpha e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha (e^{2\pi i x \cdot \xi}) d\xi = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha f(x)
\end{aligned}$$

получаем, что $D^\alpha = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha$. Следовательно, дифференциальный оператор $\sum_\alpha k_\alpha(x) D^\alpha$ с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными со всеми производными k_α является псевдодифференциальным оператором с символом $\sum_\alpha k_\alpha(x) \xi^\alpha$.

Введем наименьшее $M \in \mathbb{Q}_{>0}$, такое что для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ числа $M/\varkappa_i$ были четными. Определим символ равенством

$$\langle \xi \rangle_\varkappa = (1 + |\xi_1|^{M/\varkappa_1} + \dots + |\xi_n|^{M/\varkappa_n})^{1/M}. \quad (35)$$

Символу (35) отвечает псевдодифференциальный оператор $\langle D \rangle_\varkappa = Op(\langle \xi \rangle_\varkappa)$, $\langle D \rangle_\varkappa \in S_{1,0,\varkappa}^1$. В случае, когда отношение положительного N на M есть натуральное число, то оператор $\langle D \rangle_\varkappa^N$ является дифференциальным. Заметим, что существуют положительные константы c_1, c_2 , не зависящие от ξ , такие что

$$c_1(1 + |\xi|_\varkappa) \leq \langle \xi \rangle_\varkappa \leq c_2(1 + |\xi|_\varkappa), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (36)$$

Действительно, из неравенств (5) следует

$$|\xi_k|^{M/\varkappa_k} \leq |\xi|_\varkappa^M \leq (1 + |\xi|_\varkappa)^M, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

откуда $\langle \xi \rangle_\varkappa^M \leq (n+1)(1 + |\xi|_\varkappa)^M$, что равносильно второму неравенству в (36). Если $|\xi|_\varkappa \leq 1$, тогда $(1 + |\xi|_\varkappa)^M \leq 2^M \leq 2^M \langle \xi \rangle_\varkappa^M$. Если же $|\xi|_\varkappa > 1$, то Ис-

пользуя неравенство для анизотропной наибольшей компоненты ξ_k из того же неравенства (5), имеем

$$(1 + |\xi|_{\varkappa})^M < 2^M |\xi|_{\varkappa}^M \leq 2^M n^{M/(2\varkappa_k)} |\xi_k|^{M/\varkappa_k} < 2^M n^{M/(2\varkappa_-)} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^M.$$

Поэтому справедливо первое неравенство в (36). Отметим еще два свойства для символов псевдодифференциальных операторов:

1 Если $a \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1}$ и $b \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_2}$, то $ab \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1+m_2}$.

2 Пусть $a \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ и существует константа $C > 0$ такая, что $a \geq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^m$.

Тогда $a^t \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{tm}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

В частности, в силу эквивалентности $\langle \xi \rangle_{\varkappa}$ и $(1 + |\xi|_{\varkappa})$, выполняется $\langle \xi \rangle_{\varkappa}^m \in S_{1, \delta, \varkappa}^m$, $m \in \mathbb{R}$. В виду того, что данный символ не зависит от x , то символ композиции таких операторов равно произведению символов, что даст $\langle D \rangle_{\varkappa}^m \langle D \rangle_{\varkappa}^{-m} = Op(\langle \xi \rangle_{\varkappa}^m \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m}) = Op(1) = I$. Таким образом, оператор $\langle D \rangle_{\varkappa}^m$ обратим в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Двойные символы

Определение 2.2.1. Функция $p(x, \xi, x', \xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $S_{\rho, \delta, \varkappa}^{m, m'}$ при $-\infty < m, m' < +\infty$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, если для любых $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ существуют константы $C_{\beta, \beta'}^{\alpha, \alpha'}$, такие что

$$|p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')}(x, \xi, x', \xi')| \leq C_{\beta, \beta'}^{\alpha, \alpha'} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{m + \delta \beta \cdot \varkappa - \rho \alpha \cdot \varkappa} \langle \xi; \xi' \rangle^{\delta \beta' \cdot \varkappa} (1 + |\xi'|_{\varkappa})^{m' - \rho \alpha' \cdot \varkappa}, \quad (37)$$

где, для краткости, $p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')} = \partial_\xi^\alpha \partial_{\xi'}^{\alpha'} D_x^\beta D_{x'}^{\beta'} p$ и $\langle \xi, \xi' \rangle = (1 + |\xi|_{\varkappa} + |\xi'|_{\varkappa})$. Полунормы двойного символа определяются из равенства $|p|_{q, l}^{m, m'} = \max_{|\alpha + \alpha'| \leq q, |\beta + \beta'| \leq l} \inf C_{\beta, \beta'}^{\alpha, \alpha'}$

по всем $C_{\beta,\beta'}^{\alpha,\alpha'}$, для которых выполняется условие (37). Символ класса $S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m,m'}$ называется анизотропным двойным символом.

Легко видеть, что для символов $a \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ и $b \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m'}$, их произведение $a(x, \xi)b(x', \xi') = p(x, \xi, x', \xi') \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m,m'}$. Более того, для каждого из чисел $L, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ справедливо неравенство

$$|p|_{Q,L}^{m,m'} \leq \max_{l+l' \leq L} \max_{q+q'=Q} |a|_{q,l}^m |b|_{q',l'}^{m'}. \quad (38)$$

Воспользуемся результатами теории осцилляторных интегралов, которые введем, следуя изложению [59]. Пусть функция $\chi(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ определена по правилу

$$\begin{cases} \chi(x, \xi) = 1, & \text{при } |x|_\varkappa, |\xi|_\varkappa \leq 1/2, \\ \chi(x, \xi) = 0, & \text{при } |x|_\varkappa, |\xi|_\varkappa \geq 1. \end{cases}$$

Определение 2.2.2. Пусть функция $u(x, \xi)$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ удовлетворяет условиям

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta u(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|_\varkappa)^{m+\delta\beta \cdot \varkappa}, \quad m \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

с константами $C_{\alpha,\beta}$, не зависящим от x и ξ . Осцилляторным интегралом, если он существует, назовем предел, определенный по правилу

$$Os[u(x, \xi)e^{-2\pi i x \cdot \xi}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon x, \varepsilon \xi) u(x, \xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx d\xi.$$

Теорема 2.2.1. Осцилляторный интеграл от $u(x, \xi)$ существует, не зависит

от выбора функции $\chi(x, \xi)$ и может быть подсчитан по формуле

$$Os[u(x, \xi)e^{-2\pi i x \cdot \xi}] = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-N_1} \langle D_x \rangle_{\varkappa}^{N_1} \left\{ \langle x \rangle_{\varkappa}^{-N_2} \langle D_{\xi} \rangle_{\varkappa}^{N_2} u(x, \xi) \right\} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx d\xi,$$

где положительные числа N_1, N_2 делятся на M , и $N_1 > (m + n)/(1 - \delta)$, $N_2 > n$.

Укажем некоторые свойства осцилляторных интегралов (см. [59])

$$Os[\xi^{\alpha} u(x, \xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi}] = Os[D_x^{\alpha} u(x, \xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi}],$$

$$Os[x^{\alpha} u(x, \xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi}] = Os[D_{\xi}^{\alpha} u(x, \xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi}].$$

Теорема 2.2.2. Пусть $p \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{m, m'}$ и

$$c_{\theta}(x, \xi) = \iint e^{-2\pi i y \cdot \eta} p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')}(x, \xi + \theta \eta, x + y, \xi) dy d\eta, \quad (40)$$

где интеграл понимается как осцилляторный. Тогда $c_{\theta}(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{\tau}$ равномерно по $\theta \in [-1, 1]$, где $\tau = m + m' - \rho(\alpha + \alpha') \cdot \varkappa + \delta(\beta + \beta') \cdot \varkappa$. Более того, для любых $l, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существуют константы $C > 0$ и $l', q' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, не зависящие от p и θ , такие что

$$|c_{\theta}|_{q, l}^{\tau} \leq C |p|_{q', l'}^{m, m'}. \quad (41)$$

Доказательство. Поскольку двойной символ $p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')}(x, \xi + \theta \eta, x + y, \xi)$ при фиксированных x, ξ, θ удовлетворяет неравенствам (39), то выражение определено корректно. Более того (см. [59]), выражение (40) можно дифференцировать под знаком интеграла

$$\partial_{\xi}^{\mu} \partial_x^{\gamma} c_{\theta}(x, \xi) = \iint e^{-2\pi i y \cdot \eta} \partial_{\xi}^{\mu} \partial_x^{\gamma} p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')}(x, \xi + \theta \eta, x + y, \xi) dy d\eta,$$

а $\partial_{\xi}^{\mu} \partial_x^{\gamma} p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')}$ раскладывается в сумму из слагаемых вида $p_{(\beta_1, \beta'_1)}^{(\alpha_1, \alpha'_1)}$, где $\alpha_1 + \alpha'_1 =$

$\alpha + \alpha' + \mu$ и $\beta_1 + \beta'_1 = \beta + \beta' + \gamma$, то достаточно доказать, что выполняется неравенство

$$|c_\theta(x, \xi)| \leq C|p|_{l', q'}^{m, m'} (1 + |\xi|_\varkappa)^\tau. \quad (42)$$

Введем многочлен $P_\varkappa(x) = x_1^{M/\varkappa_1} + \dots + x_n^{M/\varkappa_n}$. Для этого многочлена построим дифференциальный оператор $P_\varkappa(D_x) = D_{x_1}^{M/\varkappa_1} + \dots + D_{x_n}^{M/\varkappa_n}$. Зафиксируем натуральное число $l_0 > n/M$. Так как верно равенство

$$e^{-2\pi i y \cdot \eta} = \left(1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y)\right)^{-l_0} \left(1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(D_\eta)\right)^{l_0} e^{-2\pi i y \cdot \eta},$$

то, используя интегрирование по частям, можем написать

$$c_\theta(x, \xi) = \iint e^{-2\pi i y \cdot \eta} r_\theta(x, \xi, y, \eta) dy d\eta,$$

где

$$r_\theta(x, \xi, y, \eta) = \left(1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y)\right)^{-l_0} \left(1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(D_\eta)\right)^{l_0} \cdot p_{(\beta, \beta')}^{(\alpha, \alpha')}(x, \xi + \theta\eta, x + y, \xi). \quad (43)$$

Разобьем область интегрирования по η на три части

$$\begin{aligned} \Omega_{1, \xi} &= \left\{ \eta \mid |\eta|_\varkappa \leq \frac{(1 + |\xi|_\varkappa)^\delta}{2C_\varkappa} \right\}, & \Omega_{2, \xi} &= \left\{ \eta \mid \frac{(1 + |\xi|_\varkappa)^\delta}{2C_\varkappa} \leq |\eta|_\varkappa \leq \frac{(1 + |\xi|_\varkappa)}{2C_\varkappa} \right\}, \\ & & \Omega_{3, \xi} &= \left\{ \eta \mid |\eta|_\varkappa \geq \frac{(1 + |\xi|_\varkappa)}{2C_\varkappa} \right\}, \end{aligned}$$

где $C_\varkappa = 2^{1/\varkappa_- - 1}$ и обозначим соответствующие интегралы

$$I_j = \int_{\Omega_{j, \xi}} \int_{\mathbb{R}^n} r_\theta(x, \xi, y, \eta) dy d\eta, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

На области $\Omega_{1,\xi} \cup \Omega_{2,\xi}$ справедливо неравенство $|\eta|_{\varkappa} \leq (1 + |\xi|_{\varkappa})/(2C_{\varkappa})$. Воспользовавшись предложением 1.1.1, с одной стороны

$$(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa}) \leq C_{\varkappa}(1 + |\xi|_{\varkappa}) + C_{\varkappa}|\eta|_{\varkappa} \leq (C_{\varkappa} + 1/2)(1 + |\xi|_{\varkappa}),$$

а с другой стороны

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|_{\varkappa}) &= (1 + |\xi + \theta\eta + (-\theta\eta)|_{\varkappa}) \leq C_{\varkappa}(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa}) + C_{\varkappa}|\eta|_{\varkappa} \leq \\ &\leq C_{\varkappa}(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa}) + (1/2)(1 + |\xi|_{\varkappa}), \end{aligned}$$

откуда

$$(1 + |\xi|_{\varkappa}) \leq 2C_{\varkappa}(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa}).$$

Так как

$$\langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle = (1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa} + |\xi|_{\varkappa}) \leq (C_{\varkappa} + 3/2)(1 + |\xi|_{\varkappa}),$$

с учетом неотрицательности степени для $\langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle$ в оценке (37), выражения $\langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle$ и $(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa})$ можно оценить через $(1 + |\xi|_{\varkappa})$. Действие оператора $P_{\varkappa}(D_{\eta})$ понижает степень выражения $(1 + |\xi|_{\varkappa})$ на $-\rho M$, а следовательно с множителем $(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M}$ степень не повышается. Таким образом, верна оценка

$$|r_{\theta}| \leq C(1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau}, \quad \eta \in \Omega_{1,\xi} \cup \Omega_{2,\xi},$$

где $\tau = m + m' - \rho(\alpha + \alpha') \cdot \varkappa + \delta(\beta + \beta') \cdot \varkappa$. Следовательно

$$|I_1| \leq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau} \int \int_{\Omega_{1,\xi} \mathbb{R}^n} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} dy d\eta. \quad (44)$$

Заметим, что после замены $w = (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta \varkappa} y = ((1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta \varkappa_1} y_1, \dots, (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta \varkappa_n} y_n)$,

$dw = (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta n} dy$, а $(1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y)) = (1 + P_{\varkappa}(w)) = \langle w \rangle_{\varkappa}^M$. После подстановки

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau - \delta n} \int_{\Omega_{1,\xi}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |w|_{\varkappa})^{-M l_0} dw d\eta = \\
&= C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau - \delta n} \int_{\Omega_{1,\xi}} d\eta = \\
&= C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau - \delta n} \int_{r \leq (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta} / (2C_{\varkappa})} r^{n-1} dr = C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau}. \quad (45)
\end{aligned}$$

Перед тем как перейти к оценкам интегралов I_2 и I_3 докажем неравенство

$$\partial_y^{\gamma} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} \leq C_{\gamma, l_0} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta \gamma \varkappa} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} \quad (46)$$

для любого мультииндекса $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. При дифференцировании скобки возникают множители $y_j^{M/\varkappa_j - 1}$ и $(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M}$. Дальнейшее дифференцирование удваивают количество слагаемых по правилу произведения: отдельным дифференцированием множителей $y_j^{M/\varkappa_j - 1}$ и отдельным дифференцированием скобки. Таким образом, после действия оператором ∂_y^{γ} любое слагаемое в сумме получено путем дифференцирования ∂_y^{β} скобки с мультииндексом $\beta \leq \gamma$, а оставшаяся часть $\gamma - \beta$ на дифференцирование множителей y , понижающих их порядок на 1. Тогда для любого слагаемого множитель $y^{(M/\varkappa - 1)\beta - (\gamma - \beta)} = y^{(M/\varkappa)\beta - \gamma}$, где $(M/\varkappa)\beta = ((M/\varkappa_1)\beta_1, \dots, (M/\varkappa_n)\beta_n)$. В итоге каждое слагаемое из левой части (46) имеет вид

$$C_{\beta} y^{(M/\varkappa)\beta - \gamma} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M |\beta|} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0 - |\beta|},$$

с дополнительным условием $(M/\varkappa)\beta \geq \gamma$. В виду четности степеней y в левой

и в правой частях неравенства (46), достаточно доказать при неотрицательных компонентах y . Тогда

$$\begin{aligned} y^{(M/\varkappa)\beta-\gamma} &= y^{(M/\varkappa)(\beta-\gamma\varkappa/M)} \leq \\ &\leq (P_\varkappa(y))^{\beta_1-\gamma_1\varkappa_1/M} \dots (P_\varkappa(y))^{\beta_n-\gamma_n\varkappa_n/M} = (P_\varkappa(y))^{|\beta|-\gamma\cdot\varkappa/M}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначение $R_{y,\xi} = (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y)$, то

$$\begin{aligned} y^{(M/\varkappa)\beta-\gamma} &\leq (P_\varkappa(y))^{|\beta|-\gamma\cdot\varkappa/M} (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M(|\beta|-\gamma\cdot\varkappa/M)} (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M(\gamma\cdot\varkappa/M-|\beta|)} = \\ &= R_{y,\xi}^{|\beta|-\gamma\cdot\varkappa/M} (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta\gamma\cdot\varkappa-\delta M|\beta|}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} C_\beta y^{(M/\varkappa)\beta-\gamma} (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M|\beta|} (1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y))^{-l_0-|\beta|} &\leq \\ &\leq C_\beta (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta\gamma\cdot\varkappa} (1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y))^{-l_0} R_{y,\xi}^{|\beta|-\gamma\cdot\varkappa/M} (1 + R_{y,\xi})^{-|\beta|}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $R_{y,\xi} \geq 0$ и $|\beta| - \gamma\cdot\varkappa/M \geq 0$ и тогда, функция $R_{y,\xi}^{|\beta|-\gamma\cdot\varkappa/M} \cdot (1 + R_{y,\xi})^{-|\beta|}$ ограничена, что окончательно доказывает неравенство. Обратим внимание, что при дифференцировании по y рост порядка $(1 + |\xi|_\varkappa)$ происходит также, как и для символа. С учетом того, что оператор $(1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y))^{l_0}$ из равенства (43) рост не повышает, на области $\Omega_{2,\xi}$ справедливо неравенство

$$|\partial_y^\gamma r_\theta| \leq C (1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y))^{-l_0} (1 + |\xi|_\varkappa)^{\tau+\delta\gamma\cdot\varkappa}. \quad (47)$$

В частности, оператор $D_{y_j}^{M/\varkappa_j}$ повышает порядок $(1 + |\xi|_\varkappa)$ на δM , значит и $P_\varkappa(D_y)$ тоже. Интегрируя по частям, и учитывая эквивалентность $|\eta|_\varkappa^M$ и $P_\varkappa(\eta)$,

получим

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq C \int_{\Omega_{2,\xi}} P_{\varkappa}(\eta)^{-l_0} \int_{\mathbb{R}^n} |P_{\varkappa}(D_y)^{l_0} r_{\theta}| dy d\eta \leq \\
&\leq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau + \delta M l_0} \int_{\Omega_{2,\xi}} |\eta|_{\varkappa}^{-M l_0} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} dy d\eta = \\
&= C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau + \delta(M l_0 - n)} \int_{\Omega_{2,\xi}} |\eta|_{\varkappa}^{-M l_0} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |w|_{\varkappa})^{-M l_0} dw d\eta, \quad (48)
\end{aligned}$$

где была произведена такая же замена, как при оценке интеграла I_1 . Интеграл по w ограничен при $l_0 > n/M$. Тогда

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau + \delta(M l_0 - n)} \int_{r \geq (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta} / (2C_{\varkappa})} r^{-M l_0 + n - 1} dr = \\
&= C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau + \delta(M l_0 - n)} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta(n - M l_0)} = C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau}.
\end{aligned}$$

Для области $\Omega_{3,\xi}$ выполнены неравенства $(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa}) \leq C_{\varkappa}(1 + |\xi|_{\varkappa}) + C_{\varkappa}|\eta|_{\varkappa} \leq (2C_{\varkappa}^2 + C_{\varkappa})|\eta|_{\varkappa}$ и $\langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle \leq (1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa}) + (1 + |\xi|_{\varkappa}) \leq (2C_{\varkappa}^2 + 3C_{\varkappa})|\eta|_{\varkappa}$. Следовательно, все неотрицательные степени выражений $(1 + |\xi|_{\varkappa})$, $(1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa})$, $\langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle$ можно оценить через ту же степень $|\eta|_{\varkappa}$. Оператор $(1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(D_{\eta}))^{l_0}$ повышает порядок $(1 + |\xi|_{\varkappa})$ не более чем на $\delta M l_0$. Поскольку каждое слагаемое оператора $P_{\varkappa}(D_y)$ повышает порядок на δM как для выражения $(1 + |\xi|_{\varkappa})$ из (46), так и для выражения $\langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle$ из определения (37), для любого $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ можно записать оценку

$$\begin{aligned}
|P_{\varkappa}(D_y)^l r_{\theta}| &\leq \sum_{k=0}^l C_k (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M k} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M l_0} \cdot \\
&\cdot (1 + |\xi + \theta\eta|_{\varkappa})^{m + \delta\beta \cdot \varkappa - \rho\alpha \cdot \varkappa} \langle \xi + \theta\eta; \xi \rangle^{\delta\beta' \cdot \varkappa + \delta M(l-k)} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{m' - \rho\alpha' \cdot \varkappa}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$|P_{\varkappa}(D_y)^l r_\theta| \leq C |\eta|_{\varkappa}^{\tau' + \delta M l} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{m'} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0},$$

где $\tau' = \max(0, m) + \delta M l_0 + \delta(\beta + \beta') \cdot \varkappa$. Интегрируя по частям и выбирая l достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\tau' - (1 - \delta) M l < -n, \quad \tau' + m' + (1 - \delta) n - (1 - \delta) M l \leq \tau,$$

и учитывая эквивалентность $P_{\varkappa}(\eta)^{-l}$ и $|\eta|_{\varkappa}^{-M l}$ получим

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \int_{\Omega_3} P_{\varkappa}(\eta)^{-l} \int_{\mathbb{R}^n} |P_{\varkappa}(D_y)^l r_\theta| dy d\eta \leq \\ &\leq C (1 + |\xi|_{\varkappa})^{m'} \int_{\Omega_3} |\eta|_{\varkappa}^{\tau' - (1 - \delta) M l} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} dy d\eta \leq \\ &\leq C (1 + |\xi|_{\varkappa})^{m' - \delta n} \int_{|\eta|_{\varkappa} \geq (1 + |\xi|_{\varkappa}) / (2C\varkappa)} |\eta|_{\varkappa}^{\tau' - (1 - \delta) M l} d\eta \leq C (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau} \quad (49) \end{aligned}$$

Собирая оценки интегралов I_1, I_2, I_3 , получаем (42). □

2.3 Композиция псевдодифференциальных операторов

Теорема 2.3.1. Пусть $a \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ и $b \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^{m'}$. Тогда произведение операторов $Op(c) = Op(a)Op(b) \in OPS_{\rho, \delta, \varkappa}^{m+m'}$, символ которого можно найти по формуле

$$c(x, \xi) = \iint e^{-2\pi i y \cdot \eta} a(x, \xi + \eta) b(x + y, \xi) dy d\eta, \quad (50)$$

где интеграл понимается как осцилляторный, для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место представление

$$c(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha a(x, \xi) D_\xi^\alpha b(x, \xi) + t_N(x, \xi), \quad (51)$$

где $t_N \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m+m'-(\rho-\delta)N\kappa_-}$. Более того, для любых $L, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существуют числа $l, q, l', q' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что выполняются неравенства

$$|c|_{Q, L}^{m+m'}, |t_N|_{Q, L}^{m+m'-(\rho-\delta)N\kappa_-} \leq C |a|_{q, l}^m |b|_{q', l'}^{m'}. \quad (52)$$

Доказательство. Согласно работам [59] и [60], осцилляторный интеграл (50) и разложение в ряд (51) имеют место быть, а остаточный член определяется по формуле

$$t_N(x, \xi) = \sum_{|\gamma|=N} \frac{N}{\gamma!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} d\theta \iint \partial_\xi^\gamma a(x, \xi + \theta\eta) D_x^\gamma b(x + y, \xi) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta. \quad (53)$$

Поскольку $a(x, \xi)b(x', \xi') \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m, m'}$, то применяя теорему 2.2.2 при $\theta = 1$ к формуле (50) получаем, что $c \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m+m'}$. С учетом неравенств (38) и (41) легко получается первая оценка из (52). Так как $\partial_\xi^\gamma a(x, \xi) D_x^\gamma b(x', \xi') \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m-\rho\gamma\cdot\kappa, m'+\delta\gamma\cdot\kappa}$, то по теореме 2.2.2 осцилляторный интеграл

$$p_\theta(x, \xi) = \iint \partial_\xi^\gamma a(x, \xi + \theta\eta) D_x^\gamma b(x + y, \xi) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta$$

принадлежит $S_{\rho, \delta, \kappa}^{m+m'-(\rho-\delta)\gamma\cdot\kappa}$ равномерно по $\theta \in [0, 1]$, следовательно, $t_N(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m+m'-(\rho-\delta)N\kappa_-}$. Поскольку полунормы двойного символа $\partial_\xi^\gamma a(x, \xi) D_x^\gamma b(x', \xi')$ при некоторых натуральных l, q, l', q' оцениваются через полунормы $|a|_{q, l}^m |b|_{q', l'}^{m'}$, то несложно получить вторую оценку из (52). $\square$

Лемма 2.3.1. Пусть $a \in S_{\rho,\delta,\kappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ и существуют $C > 0$ и $R > 0$, такие что

$$|a(x, \xi)| > C(1 + |\xi|_\kappa)^m, \quad |\xi|_\kappa \geq R. \quad (54)$$

Тогда существует оператор $\mathcal{P} \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{-m}$, для которого выполнены равенства

$$\mathcal{P} Op(a) = I + \mathcal{T}_1, \quad Op(a) \mathcal{P} = I + \mathcal{T}_2, \quad (55)$$

где $\mathcal{T}_j \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{-(\rho-\delta)\kappa_-}$, $j \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с условиями $\varphi(\xi) = 1$ при $|\xi|_\kappa \leq 1$ и $\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi|_\kappa \geq 2$. Обозначим $\varphi_R(\xi) = \varphi(R^{-\kappa}\xi)$ и $\psi_R(\xi) = 1 - \varphi_R(\xi)$. Введем символ $b_R(x, \xi) = a^{-1}(x, \xi)\psi_R(\xi)$. Из условия (54) следует, что $b_R \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{-m}$. Тогда, для символа c_R оператора $Op(c_R) = Op(b_R)Op(a_R)$ по теореме 2.3.1 при $N = 1$ находим, что

$$c_R(x, \xi) = a_R(x, \xi)b_R(x, \xi) + t_1(x, \xi) = 1 - \varphi_R(x, \xi) + t_1(x, \xi),$$

где $\varphi_R, t_1 \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{-(\rho-\delta)\kappa_-}$ и $\mathcal{T}_1 = Op(t_1 - \varphi_R)$. Аналогично доказывается и второе равенство из (55). $\square$

2.4 Амплитуда псевдодифференциального оператора

Функция $p(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $DS_{\rho,\delta,\kappa}^m$, если для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ удовлетворяет условиям

$$|p|_{q,l,v}^m = \max_{|\alpha| \leq q, |\beta| \leq l, |\gamma| \leq v} \sup_{x,y,\xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma p(x, y, \xi)| (1 + |\xi|_\kappa)^{\rho\alpha \cdot \kappa - \delta(\beta+\gamma) \cdot \kappa - m} < \infty. \quad (56)$$

Класс всех функций, удовлетворяющих (56) называется классом анизотропных амплитуд порядка m . Тогда соответствующий амплитуде $p \in DS_{\rho,\delta,\kappa}^m$ оператор P действует на функцию $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$Pu(x) = \iint p(x, y, \xi) u(y) e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} dy d\xi, \quad (57)$$

где двойной интеграл понимается как осцилляторный. Класс анизотропных амплитуд $DS_{\rho,\delta,\kappa}^m$ вложен в класс амплитуд Хермандера $\Psi_{\rho',\delta'}^{m'}$ при указанных выше соотношениях на ρ', δ', m' (см. стр. 43).

Обратим внимание, что если $p \in DS_{\rho,\delta,\kappa}^m$, то $p(x, x', \xi) = p_0(x, \xi, x', \xi') \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{m,0}$ и для любых $L, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существуют числа $l, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что верно неравенство

$$|p_0|_{Q,L}^{m,0} \leq \max_{l+v=L} |p|_{Q,l,v}^m. \quad (58)$$

Теорема 2.4.1. Пусть $p \in DS_{\rho,\delta,\kappa}^m$ и $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Тогда оператор P , определенный по формуле (57) является псевдодифференциальным, символ $\sigma_p \in S_{\rho,\delta,\kappa}^m$ которого может быть вычислен по формуле

$$\sigma_p(x, \xi) = \iint p(x, x+y, \xi+\eta) e^{-2\pi i\xi\cdot\eta} dy d\eta, \quad (59)$$

где двойной интеграл понимается как осцилляторный, для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место представление

$$\sigma_p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha p(x, y, \xi) \Big|_{y=x} + t_N(x, \xi), \quad (60)$$

где $t_N \in S_{\kappa}^{m-(\rho-\delta)N}$. Более того, для любых $L, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существуют числа

$l, q, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что выполняются неравенства

$$|\sigma_p|_{Q,L}^m, |t_N|_{Q,L}^{m-(\rho-\delta)N\kappa_-} \leq C|p|_{q,l,v}^m. \quad (61)$$

Доказательство. Достаточно доказать оценки (61) и принадлежность σ_p классу $S_{\rho,\delta,\kappa}^m$. Для остаточного члена t_N справедлива формула

$$t_N(x, \xi) = \sum_{|\gamma|=N} \frac{N}{\gamma!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} d\theta \iint D_y^\gamma \partial_\xi^\gamma p(x, x+y, \xi+\theta\eta) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta,$$

где внутренний двойной интеграл понимается как осцилляторный (см. напр. [59]). Поскольку $p \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{m,0}$, то применяя теорему 2.2.2 при $\theta = 1$ к интегралу (59), получим что $\sigma_p \in S_{\rho,\delta,\kappa}^m$. Из неравенств (41) и (58) получается первая оценка из (61).

Затем, что $\partial_\xi^\gamma D_x^\gamma p(x, x+y, \xi+\theta\eta) \in DS_{\rho,\delta,\kappa}^{m-(\rho-\delta)\gamma\cdot\kappa}$ и является двойным символом из класса $S_{\rho,\delta,\kappa}^{m-(\rho-\delta)\cdot\kappa,0}$. Тогда по теореме 2.2.2 осцилляторный интеграл

$$p_\theta(x, \xi) = \iint \partial_\xi^\gamma D_x^\gamma p(x, x+y, \xi+\theta\eta) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta$$

принадлежит классу $S_{\rho,\delta,\kappa}^{m-(\rho-\delta)\gamma\cdot\kappa}$ равномерно по $\theta \in [0, 1]$, а значит, символ $t_N \in S_{\rho,\delta,\kappa}^{m-(\rho-\delta)N\kappa_-}$. Полунормы двойного символа $\partial_\xi^\gamma D_x^\gamma p(x, x+y, \xi+\theta\eta)$ при некоторых числах q, l, v оцениваются через полунормы $|p|_{q,l,v}^m$, откуда с учетом неравенств (41) получаем вторую оценку из (61), что завершает доказательство. $\square$

2.5 Сопряженные и транспонированные псевдодифференциальные операторы

Оператор A^* называется формально сопряженным к псевдодифференциальному оператору $A \in OPS_{\rho, \delta, \kappa}^m$, если

$$(A\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\varphi, A^*\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, где

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx,$$

$\overline{\psi}(x)$ — комплексное сопряжение функции $\psi(x)$.

Теорема 2.5.1. Пусть A^* — формально сопряженный оператор к оператору $A \in OPS_{\rho, \delta, \kappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Тогда $A^* = Op(a^*) \in OPS_{\rho, \delta, \kappa}^m$, его символ равен осцилляторному интегралу

$$a^*(x, \xi) = \iint \overline{a}(x + y, \xi + \eta) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta. \quad (62)$$

Также для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$a^*(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a}(x, \xi) + t_N(x, \xi), \quad (63)$$

где $t_N \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m-(\rho-\delta)N\kappa_-}$

Доказательство. После небольших выкладок (см. [59]), действие оператора A^* можно выразить следующим образом

$$A^*u(x) = \iint \overline{a}(y, \xi) e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} dy d\xi,$$

где, как можем видеть, $\bar{a}(y, \xi) \in DS_{\rho, \delta, \kappa}^m$ является амплитудой оператора A^* . Следовательно, по теореме 2.4.1 символ $a^* \in S_{\rho, \delta, \kappa}^m$, формулы (59) и (60) преобразуются соответственно в формулы (62) и (63), а остаточный член $t_N \in S_{\kappa}^{m-(\rho-\delta)N}$, что завершается доказательство. $\square$

Оператор A^T — формально транспонированный к псевдодифференциальному оператору $A \in OPS_{\rho, \delta, \kappa}^m$, если

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^T\psi)$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, и где $(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\psi(x) dx$.

Теорема 2.5.2. Пусть A^T является формально транспонированным для оператора $A \in OPS_{\kappa}^m$ при $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Тогда $A^T = Op(a^T) \in OPS_{\rho, \delta, \kappa}^m$, его символ вычисляется через осцилляторный интеграл

$$a^T(x, \xi) = \iint a(x + y, -\xi - \eta) e^{-2\pi i y \cdot \eta} dy d\eta. \quad (64)$$

Также для любого $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ верно равенство

$$a^T(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} a(x, -\xi) + t_N(x, \xi), \quad (65)$$

где $t_N \in S_{\rho, \delta, \kappa}^{m-(\rho-\delta)N}$.

Доказательство. По аналогии с предыдущим доказательством действие оператора A^T на функцию $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можно записать в виде

$$A^T u(x) = \iint a(y, -\xi) e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} dy d\xi,$$

значит $a(y, -\xi) \in DS_{\rho, \delta, \kappa}^m$ является амплитудой этого оператора. Следовательно-

но, по теореме 2.4.1 символ $a^T \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$, формулы (59) и (60) преобразуются соответственно в формулы (64) и (65), а остаточный член $t_N \in S_{\varkappa}^{m-(\rho-\delta)N}$, что завершается доказательство. $\square$

2.6 Оценка ядра псевдодифференциального оператора

Обозначим ядро псевдодифференциального оператора $Op(a)\lambda_j(D)$ через

$$k_j(x, z) = \int a(x, \xi) \lambda_j(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot z} d\xi. \quad (66)$$

Лемма 2.6.1. Пусть $a \in S_{1, \delta, \varkappa}^m$, $\delta \in [0, 1)$. Тогда для любого $N > 0$, удовлетворяющего условию $N/\varkappa_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, существует C_N , не зависящая от j и символа a , такая что для любого $q > N/\varkappa_-$ и любых $x, z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$, верно неравенство

$$|k_j(x, z)| \leq C |a|_{q, 0}^m |z|_{\varkappa}^{-N} 2^{j(n+m-N)}. \quad (67)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(-2\pi i z)^\alpha k_j(x, z) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha (a(x, \xi) \lambda_j(\xi)) e^{2\pi i z \cdot \xi} d\xi.$$

Используя обобщенную формулу Лейбница и определение полунорм (33), находим

$$\begin{aligned} |(-2\pi i z)^\alpha k_j(x, z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \partial_\xi^{\alpha - \beta} \lambda_j(\xi) \right| d\xi \leq \\ &\leq C |a|_{|\alpha|, 0}^m \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |\xi|_{\varkappa})^{m - \beta \cdot \varkappa} 2^{-j(\alpha - \beta) \cdot \varkappa} (\partial^{\alpha - \beta} \lambda)(2^{-j \varkappa} \xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Так как на носителе функции $\lambda(2^{-j \varkappa} \xi)$ имеет место неравенство $2^{j-1} \leq 1 + |\xi|_{\varkappa} \leq 2^{j+2}$, то там верно и неравенство $(1 + |\xi|_{\varkappa})^{m - \beta \cdot \varkappa} \leq C 2^{j(m - \beta \cdot \varkappa)}$ с кон-

стантой C зависящей от $m, \beta, \varkappa$. Значит,

$$|z^\alpha k_j(x, z)| \leq C |a|_{|\alpha|, 0}^m \sum_{\beta \leq \alpha} 2^{jn} 2^{j(m-\beta \cdot \varkappa)} 2^{-j(\alpha-\beta) \cdot \varkappa},$$

откуда

$$|k_j(x, z)| \leq C |a|_{|\alpha|, 0}^m |z|^{-\alpha} 2^{j(n+m-\alpha \cdot \varkappa)}.$$

Для каждого вектора z его анизотропную наибольшую компоненту обозначим через z_t и выберем мультииндекс α с одной ненулевой компонентой α_t , тогда $|\alpha| = \alpha_t$. Воспользовавшись неравенством (5), имеем

$$|k_j(x, z)| \leq C |a|_{\alpha_t, 0}^m |z|_{\varkappa}^{-\alpha_t \varkappa_t} 2^{j(n+m-\alpha_t \varkappa_t)}.$$

Так как частное от деления N на любую компоненту $\varkappa$ является натуральным числом, то для $\varkappa_t$ возьмем такие α , что $\alpha_t \varkappa_t = N$. Таким образом, при $q \geq N/\varkappa_-$ для любых $x, z, z \neq 0$, верно неравенство

$$|k_j(x, z)| \leq C |a|_{q, 0}^m |z|_{\varkappa}^{-N} 2^{j(n+m-N)},$$

с константой C , зависящей от m и N . □

Лемма 2.6.2. Пусть $a \in S_{1, \delta, \varkappa}^m$ при $\delta \in [0, 1)$ и $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует константа $C > 0$ и $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, зависящие от m и $s(\cdot)$ такие, что для любого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и любой $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\|2^{js(\cdot)} Op(a) \lambda_j(D) u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C |a|_{q, 0}^m 2^{jm} \|2^{js(\cdot)} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (68)$$

Доказательство. Для $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ запишем псевдодифференциальный оператор

$Op(a)\lambda_j(D)$ в виде оператора свертки с ядром (66). Тогда

$$\begin{aligned}
|2^{js(x)}Op(a)\lambda_j(D)u(x)| &= \left| 2^{js(x)} \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x, x-z)u(z) dz \right| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j(s(x)-s(z))} k_j(x, x-z) 2^{js(z)} u(z) dz \right| \leq \\
&\leq \operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{R}^n} |2^{js(z)} u(z)| \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j(s(x)-s(z))} |k_j(x, x-z)| dz. \quad (69)
\end{aligned}$$

Для выбранных $x \in \mathbb{R}^n$ и $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ разобьем $\mathbb{R}^n$ на три множества: $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid |x-z|_{\mathcal{K}} < 2^{-j}\}, \quad \mathcal{B} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |x-z|_{\mathcal{K}} \geq 2^{-j/2}\}, \\
\mathcal{C} &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-j} \leq |x-z|_{\mathcal{K}} < 2^{-j/2}\}.
\end{aligned}$$

Если $|x-z|_{\mathcal{K}} < 2^{-j/2}$, что верно для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, то используя неравенство (7) при $j > 0$, получим

$$j|s(x) - s(z)| \leq \frac{jL_s}{|\log_2 |x-z|_{\mathcal{K}}|} \leq \frac{jL_s}{|-j/2|} = 2L_s. \quad (70)$$

Оценим интеграл (69) отдельно на каждом из множеств. В области $\mathcal{A}$ воспользуемся оценкой ядра (67) при $N = 0$ и неравенством (70). Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} 2^{j(s(x)-s(z))} |k_j(x, x-z)| dz &\leq 2^{2L_s} 2^{j(n+m)} |a|_{0,0}^m \int_{\mathcal{A}} |x-z|_{\mathcal{K}}^0 dz \leq \\
&\leq C_1 2^{j(n+m)} |a|_{0,0}^m 2^{-jn} = C_1 |a|_{0,0}^m 2^{jm}.
\end{aligned}$$

В области $\mathcal{B}$ выберем $N \geq n + 2s_\Delta$ в оценке (67). Тогда при $q \geq N/\varkappa_-$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} 2^{j(s(x)-s(z))} |k_j(x, x-z)| dz &\leq 2^{js_\Delta} 2^{j(n+m-N)} |a|_{q,0}^m \int_{\mathcal{B}} |x-z|_{\varkappa}^{-N} dz \\
&\leq C 2^{js_\Delta} 2^{j(n+m-N)} |a|_{q,0}^m \int_{2^{-j/2}}^{\infty} r^{-N+n-1} dr \leq \frac{C|a|_{q,0}^m}{N-n} 2^{js_\Delta} 2^{j(n+m-N)} 2^{j(N-n)/2} \\
&= C|a|_{q,0}^m 2^{jm} 2^{j(s_\Delta-(N-n)/2)} \leq C|a|_{q,0}^m 2^{jm}.
\end{aligned}$$

В области $\mathcal{C}$ при $N > n$ в оценке (67) с учетом (70) при $q \geq N/\varkappa_-$ получаем, что

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} 2^{j(s(x)-s(z))} |k_j(x, x-z)| dz &\leq 2^{2L_s} 2^{j(n+m-N)} |a|_{q,0}^m \int_{\mathcal{C}} |x-z|_{\varkappa}^{-N} dz \leq \\
&\leq C|a|_{q,0}^m 2^{2L_s} 2^{jm} 2^{j(n-N)} \int_{2^{-j}}^{2^{-j/2}} r^{-N+n-1} dr \leq \\
&\leq \frac{C|a|_{q,0}^m}{n-N} 2^{2L_s} 2^{jm} 2^{j(n-N)} (2^{-j(n-N)/2} - 2^{-j(n-N)}) = \\
&= C|a|_{q,0}^m 2^{jm} (1 - 2^{j(n-N)/2}) \leq C|a|_{q,0}^m 2^{jm}.
\end{aligned}$$

Собирая вместе неравенства, полученные на множествах $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, из (69) получим требуемое неравенство (68). $\square$

Замечание. Из доказательства видно, что для справедливости неравенства (68) достаточно, чтобы число q в полунорме символа удовлетворяло условию $q \geq (n + 2s_\Delta)/\varkappa_-$.

Теорема 2.6.1. Пусть $a \in S_{1,\delta,\varkappa}^m$, $\delta \in [0, 1)$ и $s \in C_{\log}^\varkappa(\mathbb{R}^n)$ Тогда существует

$C > 0$ и $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, такие что для любого $u \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\|2^{js(\cdot)}Op(a)\lambda_j(D)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C2^{jm}|a|_{q,0}^m\|u\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Доказательство. Заменим в неравенстве леммы функцию $u(x)$ функцией $\psi_j(D)u(x)$, где $\psi_j(D) = \lambda_{j-1}(D) + \lambda_j(D) + \lambda_{j+1}(D)$, $\lambda_{-1} = 0$. Тогда, используя лемму 2.6.2, получим

$$\begin{aligned} \|2^{js(\cdot)}Op(a)\lambda_j(D)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|2^{js(\cdot)}Op(a)\lambda_j(D)\psi_j(D)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C2^{jm}|a|_{q,0}^m\|2^{js(\cdot)}\psi_j(D)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(2^{s_+} + 1 + 2^{-s_-})2^{jm}|a|_{q,0}^m\|u\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Заметим попутно, что если символ оператора $Op(a)$ не зависит от x , то в силу коммутативности операторов $Op(a)$ и $\lambda_j(D)$ получается, что оператор $Op(a)$ ограничен из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$.

2.7 Теорема ограниченности псевдодифференциального оператора

Теорема 2.7.1. Пусть $m \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0, 1)$ и $s \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$. Анизотропный псевдодифференциальный оператор $Op(a) \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ ограничен из пространства Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство Гёльдера-Зигмунда $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$. Существуют независящие от символа a постоянные $C > 0$ и $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такие что для операторной нормы справедлива оценка

$$\|Op(a)\|_{B(\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n))} \leq C|a|_{q,p}^m.$$

Доказательство. Для любого $u \in \Lambda_{\mathcal{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$Op(a)u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} Op(a)\lambda_l(D)u(x).$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) \sum_{l=0}^{\infty} Op(a)\lambda_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \\ &\leq \left(\sum_{|l-j| \leq 2} + \sum_{|l-j| > 2} \right) \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a)\lambda_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (71)$$

Рассмотрим сначала сумму, у которой индексы слагаемых удовлетворяют условию $|l-j| > 2$. Для таких индексов $\text{supp } \psi_j \cap \text{supp } \lambda_l = \emptyset$, где $\psi_j = \lambda_{j-1} + \lambda_j + \lambda_{j+1}$ ($\lambda_{-1} = 0$). Используя коммутативность псевдодифференциальных операторов с независимыми от x символами и выбрав для дальнейшего $L > s_+ - m$, получим равенство

$$\begin{aligned} \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a)\lambda_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \\ &= \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \langle D \rangle_{\mathcal{K}}^{-L} \lambda_j(D) \psi_j(D) \langle D \rangle_{\mathcal{K}}^L Op(a)\lambda_l(D) \psi_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Теперь мы воспользуемся неравенствами $s_- \leq s(x) \leq s_+$ и теоремой 2.6.1 для псевдодифференциального оператора $\langle D \rangle_{\mathcal{K}}^{-L}$. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a)\lambda_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \\ &\leq 2^{j(s_+-m)} \left\| \langle D \rangle_{\mathcal{K}}^{-L} \lambda_j(D) \psi_j(D) \langle D \rangle_{\mathcal{K}}^L Op(a)\lambda_l(D) \psi_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq C 2^{j(s_+-m)} 2^{-jL} 2^{-ls_-} \left\| 2^{ls(\cdot)} Op(a_{l,j}) \psi_l(D)u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где символ псевдодифференциального оператора

$$Op(a_{l,j}) = \psi_j(D) \langle D \rangle_{\mathfrak{K}}^L Op(a) \lambda_l(D)$$

по формуле (51) при любом выбранном $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ принадлежит классу $S_{1,\delta,\mathfrak{K}}^{N_1}$, где $N_1 = m + L - (1 - \delta)N\mathfrak{K}_-$. Любая полунорма символа $a_{l,j}$ в классе $S_{1,\delta,\mathfrak{K}}^{N_1}$ оценивается через некоторую полунорму символа a в классе $S_{1,\delta,\mathfrak{K}}^m$ равномерно по j, l . Выберем и зафиксируем N так, чтобы $N_1 < s_-$. Снова по теореме 2.6.1, но для оператора $Op(a_{l,j})$, получим

$$\begin{aligned} & \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a) \lambda_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C 2^{j(s_+-m-L)} 2^{-ls_-} 2^{lN_1} |a_{l,j}|_{q_1,0}^{N_1} \left\| 2^{ls(\cdot)} \psi_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{lk} |a|_{q,p}^m \|u\|_{\Lambda_{\mathfrak{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где в силу условий, наложенных на L и N_1 , выполняются неравенства $s_+ - m - L < 0$ и $k = N_1 - s_- < 0$. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{|l-j|>2} \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a) \lambda_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C |a|_{q,p}^m \|u\|_{\Lambda_{\mathfrak{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{lk} = \frac{C}{1-2^k} |a|_{q,p}^m \|u\|_{\Lambda_{\mathfrak{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $|l-j| \leq 2$. Это означает, что $j = l + k$, где $k \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

Тогда для любого из пяти слагаемых первой суммы из (71) получим

$$\begin{aligned} & \left\| 2^{j(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a) \lambda_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \\ & = \left\| 2^{(l+k)(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a) \lambda_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \\ & = \left\| 2^{l(s(\cdot)-m)} 2^{k(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a) \lambda_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C_{m,s} \left\| 2^{l(s(\cdot)-m)} \lambda_j(D) Op(a) \lambda_l(D) u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C |a|_{q,p}^m \|u\|_{\Lambda_{\mathfrak{K}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где $C_{m,s} = \max(2^{2(m-s_-)}, 2^{2(s_+-m)})$. Здесь на последнем шаге учитывалось то, что $\lambda_j \in S_{1,\delta,\varkappa}^0$ равномерно по j , и затем применялась теорема 2.6.1. Для завершения доказательства осталось объединить оба случая и взять супремум по j левой части неравенств. Оценка для операторной нормы псевдодифференциального оператора через полунормы символа видна из проведенных выкладок. $\square$

Теорема 2.7.2. Пусть оператор $Op(a) \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, где $\delta \in [0, 1)$, и распределение $v \in \cup_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$, причем $Op(a)v \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Если существуют положительные константы C и R такие, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ неравенство $|a(x, \xi)| \geq C|\xi|_{\varkappa}^m$ выполняется при любом $|\xi|_{\varkappa} \geq R$, то $v \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. По лемме 2.3.1 существует оператор $\mathcal{P} \in S_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$, такой что $\mathcal{P}Op(a) = I + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in S_{1,\delta,\varkappa}^{-(1-\delta)\varkappa_-}$. Тогда

$$\mathcal{P}Op(a)v = v + \mathcal{T}v \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}. \quad (72)$$

Из условия теоремы следует, что $v \in \Lambda_{\varkappa}^t(\mathbb{R}^n)$ при некотором $t \in \mathbb{R}$. Отсюда имеем $\mathcal{T}v \in \Lambda_{\varkappa}^{t+(1-\delta)\varkappa_-}(\mathbb{R}^n)$. Тогда из формулы (72) получаем, что $v \in \Lambda_{\varkappa}^{t+(1-\delta)\varkappa_-}(\mathbb{R}^n) \cup \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$. Повторяя эти рассуждения k раз, где k должно удовлетворять условию $t + k(1 - \delta)\varkappa_- \geq s_+ + m$, получим $v \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

2.8 Полулинейное уравнение гипозэллиптического типа

Применим полученные выше результаты к исследованию полулинейного уравнения, заданного на $\mathbb{R}^n$

$$Au(x) = \varepsilon T^+ u(x) + h(x), \quad h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \quad (73)$$

где псевдодифференциальный оператор $A \in OPS_{1,\delta,\kappa}^m$, $\delta \in [0, 1)$, а оператор T^+ такой, что для любых непрерывных функций u и v и для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняются два неравенства

$$\begin{aligned} 1. \|T^+u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_{T^+}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \\ 2. |T^+u(x) - T^+v(y)| &\leq C_{T^+}|u(x) - v(y)| \end{aligned} \tag{74}$$

с независимой от функций u и v положительной постоянной C_{T^+} . Примером такого нелинейного оператора выступает отображение

$$T^+: u(x) \mapsto \max(u(x), 0) \tag{75}$$

для вещественнозначных функций u . Для комплекснозначных функций можно рассмотреть в качестве примера нелинейный оператор вида

$$T^+: u(x) = \Re u(x) + i\Im u(x) \mapsto \max(\Re u(x), 0) + i \max(\Im u(x), 0),$$

или в обоих случаях

$$T^+: u(x) \mapsto |u(x)|.$$

Уравнения вида (73) для дифференциального оператора A и с оператором (75) в изотропном случае в различных вещественных функциональных пространствах изучалось в [79], а в анизотропном случае в вещественных пространствах Бесова (в частности, в анизотропных пространствах Гёльдера-Зигмунда) с постоянным показателем гладкости — в работе [35]. Теорема 2.7.1 об ограниченности анизотропных псевдодифференциальных операторов позволяет рассмотреть уравнение (73) в более общей постановке и заодно уточнить локальную гладкость решений. Но использование не дифференциальных операторов при-

водит к необходимости рассматривать комплекснозначный случай.

Норма (12) и неравенства (74) позволяют установить, что оператор T^+ ограничен в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $0 < s_- \leq s(x) \leq s_+ < \varkappa_-$, причем операторная норма удовлетворяет неравенству $\|T^+\| \leq C_{T^+}$. Потребуем, чтобы оператор $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, непрерывный из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, имел обратный псевдодифференциальный оператор $A^{-1} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$. В случае, когда символ a оператора $A = Op(a)$ не зависит от x , его обратимость следует из неравенства $|a(\xi)| \geq c(1 + |\xi|_{\varkappa})^m$, $c > 0$, верного для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Примером такого дифференциального оператора является оператор $I - \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^4$, рассмотренный в работе [35]. Его символ равен $1 - (2\pi)^2 \xi_1^2 + (2\pi)^4 \xi_2^4$ и принадлежит $S_{1,0,\varkappa}^{8/3}$, где $\varkappa = (4/3, 2/3)$. Оператор $-I + \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ с символом $-1 + 2\pi i \xi_1 - 4\pi^2 \xi_2^2 \in S_{1,0,\varkappa}^{4/3}$ при $\varkappa = (4/3, 2/3)$.

Лемма 2.8.1 (Ср. [83], [35]). *Пусть последовательность распределений $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ при $n \rightarrow \infty$ и существует $K > 0$, такое что для любого n выполняется неравенство $\|f_n\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq K$. Тогда $f \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq K$.*

Доказательство. Для всех $n, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ введем следующие непрерывные функции равенством

$$b_n^j(x) = 2^{js(x)} \lambda_j(D) f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|b_n^j(x)| \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|2^{js(\cdot)} \lambda_j(D) f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f_n\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq K, \quad n, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (76)$$

Так как $b_n^j(x) 2^{-js(x)} = \mathcal{K}_j * f_n(x)$, где $\mathcal{K}_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — ядро интегрального оператора $\lambda_j(D)$, то из сходимости $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ следует, что при каждом x и любом j числовая последовательность $b_n^j(x) 2^{-js(x)} = f_n(\mathcal{K}_j(x - \cdot))$ стремится к $f(\mathcal{K}_j(x - \cdot))$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $b_n^j(x)$ при каждом x и любом j стремятся

при $n \rightarrow \infty$ к $b^j(x)$, равном $2^{js(x)}\lambda_j(D)f(x)$. Отсюда и из неравенства (76) следует, что $|b^j(x)| \leq K$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Поэтому $\|b^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K$ и $\|f\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|b^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K$. $\square$

Теорема 2.8.1. Пусть $m > 0$ и $h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, причем $-m < s_- \leq s(x) \leq s_+ < \varkappa_-$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (73) имеет единственное решение. Это решение принадлежит $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Обратимость псевдодифференциального оператора A позволяет уравнение (73) переписать в равносильной форме

$$u(x) = \varepsilon A^{-1} T^+ u(x) + H(x), \quad H = A^{-1} h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n). \quad (77)$$

Для большей прозрачности последующих выкладок и оценок введем функцию $s_0(x)$, равную $s(x) + m$, когда $s(x) + m \leq s_+$, и равную s_+ , если $s(x) + m > s_+$. Очевидно, что функция $s_0(\cdot) \in C_{\log}^{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$, и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства $s(x) \leq s_0(x) \leq s(x) + m$ и $0 < \tilde{s}_- \leq s_0(x) \leq s_+$, где $\tilde{s}_- = \min(s_- + m, s_+)$. Так как по условию $s_+ < \varkappa_-$, то из (74) следует ограниченность оператора T^+ в пространстве $\Lambda_{\varkappa}^{s_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Решение уравнения (77) будем искать с помощью последовательных приближений. Положим $u^0 = 0$, и каждое последующее приближение будем искать по формуле

$$u^{j+1}(x) = \varepsilon A^{-1} T^+ u^j(x) + H(x).$$

На первом шаге получим $u^1 = H \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$. Далее, если $u^j \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\begin{aligned}
\|u^{j+1}\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} &\leq \varepsilon \|A^{-1}T^+u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} + \|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}}\|T^+u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}}\|T^+u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}}C_{T^+}\|u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}}C_{T^+}\|u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} + \|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

где $C_{A^{-1}}$ — норма псевдодифференциального оператора A^{-1} , ограниченного по теореме 2.7.1 из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$. При достаточно малом ε ($\varepsilon \leq (2C_{A^{-1}}C_{T^+})^{-1}$)

$$\|u^{j+1}\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}\|u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} + \|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)},$$

откуда получаем неравенство

$$\|u^j\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)}, \quad j \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Покажем, что последовательность непрерывных функций u^j фундаментальна в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для любых $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ из неравенства (74) для оператора T^+ и ограниченности псевдодифференциального оператора A^{-1} из $\Lambda_{\varkappa}^0(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^\gamma(\mathbb{R}^n)$

для любого $0 < \gamma \leq m$, имеем

$$\begin{aligned}
\|u^{j+l} - u^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|\varepsilon A^{-1}(T^+ u^{j+l-1} - T^+ u^{j-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon \|A^{-1}(T^+ u^{j+l-1} - T^+ u^{j-1})\|_{\Lambda_{\varkappa}^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}} \|T^+ u^{j+l-1} - T^+ u^{j-1}\|_{\Lambda_{\varkappa}^0(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}} \|T^+ u^{j+l-1} - T^+ u^{j-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \varepsilon C_{A^{-1}} C_{T^+} \|u^{j+l-1} - u^{j-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon \leq (2C_{A^{-1}}C_{T^+})^{-1}$, то повторяя предыдущую выкладку j раз, получим

$$\|u^{j+l} - u^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{2} \|u^{j+l-1} - u^{j-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \dots < \frac{1}{2^j} \|u^l\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

для любых $j, l \in \mathbb{Z}_{>0}$. Таким образом, последовательность u^j стремится к некоторому элементу u в банаховом пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, в $S'(\mathbb{R}^n)$. Тогда по лемме 2.8.1 получаем, что $u \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$, причем $\|u\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|H\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

2.9 Анизотропные псевдодифференциальные операторы с медленно меняющимися на бесконечности символами

Символ $a \in S_{\rho, \delta, \varkappa}^m(\mathbb{R}^n)$, по определению, принадлежит классу $\tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m(\mathbb{R}^n)$, если выполнены условия

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}(x)(1 + |\xi|_\varkappa)^{m - \rho\alpha \cdot \varkappa + \delta\beta \cdot \varkappa}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta}(x) = 0$ для любых мультииндексов α и $\beta \neq 0$ (см. [9], [54]).

Класс соответствующих псевдодифференциальных операторов обозначим через $OP\tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$. Подкласс класса $\tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m(\mathbb{R}^n)$ символов a , таких что $\lim_{x \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta}(x) = 0$

для любых мультииндексов α и β , обозначим $\mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, а соответствующий класс операторов через $OPS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$. Отметим, что каждый из классов $\tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ и $\mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ замкнут относительно сложения и умножения на число. Если $a_j \in \tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_j}$, $j = 1, 2$, то $a_1 a_2 \in \tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2}$. Кроме того, если $a_1 \in \mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1}$, то $a_1 a_2 \in \mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2}$. Нам понадобится следующая

Лемма 2.9.1. *Пусть задана ограниченная функция $C(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, для которой верно $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = 0$. Тогда существует функция $C_1(x)$, такая что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} C(x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w)(1 + |w|_{\varkappa})^{-k} dw \leq C_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

при $k > n$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует положительное число $N = N(\varepsilon)$, такое что для любого $|x|_{\varkappa} > N$, выполнено $|C(x)| < \varepsilon/(2C_k)$, где $C_k = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |w|_{\varkappa})^{-k} dw$. Разобьем область интегрирования на две части

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid |x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w|_{\varkappa} < N\}, \\ \Omega_2 &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid |x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w|_{\varkappa} \geq N\}, \end{aligned}$$

а интегралы по этим областям соответственно обозначим через I_1 и I_2 . В области Ω_2 выполнено $|C(x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w)| \leq \varepsilon/(2C_k)$, поэтому

$$|I_2| \leq \varepsilon/(2C_k) \int_{\Omega_2} (1 + |w|_{\varkappa})^{-k} dw < \varepsilon/2.$$

Используя неравенство из предложения 1.1.1, получим

$$\begin{aligned} |x|_{\varkappa} &= \left| x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w - (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w \right|_{\varkappa} \leq \\ &\leq C_{\varkappa} \left(\left| x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w \right|_{\varkappa} + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta} |w|_{\varkappa} \right), \end{aligned}$$

где $C_{\varkappa} = 2^{1/\varkappa-1}$. Тогда для области Ω_1 верно

$$\frac{|x|_{\varkappa}}{C_{\varkappa}} - (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta} |w|_{\varkappa} \leq \left| x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w \right|_{\varkappa} < N,$$

откуда

$$\left(\frac{|x|_{\varkappa}}{C_{\varkappa}} - N \right) (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta} < |w|_{\varkappa} < (1 + |w|_{\varkappa}).$$

Значит, на Ω_1 выполнено неравенство

$$(1 + |w|_{\varkappa})^{-k} < \left(\frac{|x|_{\varkappa}}{C_{\varkappa}} - N \right)^{-k} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta k}.$$

Тогда

$$|I_1| < C_+ \left(\frac{|x|_{\varkappa}}{C_{\varkappa}} - N \right)^{-k} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta k} \int_{\Omega_1} dw,$$

где $C_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |C(x)|$. После замены $w' = x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w$, $dw = (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta n} dw'$, интегрирование проводится в области $|w'|_{\varkappa} \leq N$, значит интеграл ограничен $C' N^n$. Таким образом,

$$|I_1| < C' C_+ N^n \left(\frac{|x|_{\varkappa}}{C_{\varkappa}} - N \right)^{-k} (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta(k-n)} < C' C_+ N^n \left(\frac{|x|_{\varkappa}}{C_{\varkappa}} - N \right)^{-k} < \varepsilon/2,$$

для любого x , удовлетворяющего условию $|x|_{\varkappa} > C_{\varkappa} \left(N + \sqrt[k]{2C' C_+ N^n / \varepsilon} \right)$. Собирая оценки, получим $|I_1 + I_2| < \varepsilon$, что завершает доказательство. $\square$

Теорема 2.9.1. Пусть $a \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1}$ и $b \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_2}$. Тогда, для оператора $Op(c) =$

$Op(a)Op(b)$ символ $c \in \tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2}$ и для любого $N > 0$ верно разложение

$$c(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) D_x^\alpha b(x, \xi) + t_N(x, \xi), \quad t_N \in \mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N\varkappa_-}.$$

Доказательство. Слагаемое в сумме при $|\alpha| = 0$ принадлежит $\tilde{S}_{1,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2}$, а остальные слагаемые при $|\alpha| > 0$ принадлежат соответствующим классам $\mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)\alpha \cdot \varkappa}$, поэтому сумма без остаточного члена принадлежит $\tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1+m_2}$. Для оценки остаточного члена (53) будем использовать доказательство теоремы 2.2.2. Поскольку $a \in \tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1}$ и $b \in \tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_2}$, а также $\gamma \neq 0$, то двойной символ

$$\partial_\xi^\gamma a(x, \xi + \theta\eta) D_x^\gamma b(x + y, \xi) = q(x, \xi + \theta\eta, x + y, \xi) \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m_1-\rho\gamma \cdot \varkappa, m_2+\delta\gamma \cdot \varkappa}$$

ограничена функцией $C(x + y) \rightarrow 0$ при $x + y \rightarrow \infty$. Тогда оценку (44) можно переписать так:

$$|I_1| \leq C(1 + |\xi|_\varkappa)^\tau \int \int_{\Omega_{1,\xi} \mathbb{R}^n} C(x + y) (1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y))^{-l_0} dy d\eta,$$

где $\tau = m_1 + m_2 - (\rho - \delta)\gamma \cdot \varkappa$. Тогда в неравенствах (45) по лемме 2.9.1, получим

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C(1 + |\xi|_\varkappa)^{\tau-\delta n} \int \int_{\Omega_{1,\xi} \mathbb{R}^n} C(x + (1 + |\xi|_\varkappa)^{-\delta \varkappa} w) (1 + |w|_\varkappa)^{-Ml_0} dw d\eta \leq \\ &\leq C(1 + |\xi|_\varkappa)^{\tau-\delta n} \int_{\Omega_{1,\xi}} C_1(x) d\eta = C(x)(1 + |\xi|_\varkappa)^\tau, \end{aligned}$$

где $C(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Оценка (47) преобразуется в вид

$$|\partial_y^\mu r_\theta| \leq C(x + y) (1 + (1 + |\xi|_\varkappa)^{\delta M} P_\varkappa(y))^{-l_0} (1 + |\xi|_\varkappa)^{\tau+\delta\mu \cdot \varkappa},$$

значит для неравенств (48), имеем

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau + \delta(Ml_0 - n)} \cdot \int_{\Omega_{2,\xi}} |\eta|_{\varkappa}^{-Ml_0} \int_{\mathbb{R}^n} C(x + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{-\delta\varkappa} w) (1 + |w|_{\varkappa})^{-Ml_0} dw d\eta \leq \\
&\leq CC_1(x) (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau + \delta(Ml_0 - n)} \int_{\Omega_{2,\xi}} |\eta|_{\varkappa}^{-Ml_0} \leq C(x) (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau},
\end{aligned}$$

где функция $C(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Аналогично для (49) по лемме 2.9.1, получим

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^{m_2} \int_{\Omega_3} |\eta|_{\varkappa}^{\tau' - (1 - \delta)Ml} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} C(x + y) (1 + (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\delta M} P_{\varkappa}(y))^{-l_0} dy d\eta \leq \\
&\leq CC_1(x) (1 + |\xi|_{\varkappa})^{m_2 - \delta n} \int_{|\eta|_{\varkappa} \geq (1 + |\xi|_{\varkappa}) / (2C_{\varkappa})} |\eta|_{\varkappa}^{\tau' - (1 - \delta)Ml} d\eta \leq C(x) (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\tau},
\end{aligned}$$

где снова $C(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $\tau' = \max(0, m_1) + \delta Ml_0$. Таким образом, $t_N \in \mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{m_1 + m_2 - (\rho - \delta)N\varkappa_-}$. $\square$

Теорема 2.9.2. Пусть $a \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ и существуют $C > 0$ и $R > 0$, такие что

$$|a(x, \xi)| > C(1 + |\xi|_{\varkappa})^m, \quad |x|_{\varkappa} + |\xi|_{\varkappa} \geq R.$$

Тогда существует оператор $\mathcal{P} \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{-m}$, для которого выполнены свойства

$$\mathcal{P} Op(a) = I + \mathcal{T}_1, \quad Op(a) \mathcal{P} = I + \mathcal{T}_2,$$

где $\mathcal{T}_j \in \mathring{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{-(\rho - \delta)\varkappa_-}$, $j \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, такую что

$\varphi(x, \xi) = 1$ при $|x|_{\varkappa} + |\xi|_{\varkappa} \leq 1$ и $\varphi(x, \xi) = 0$ при $|x|_{\varkappa} + |\xi|_{\varkappa} \geq 2$. Обозначим $\varphi_R(x, \xi) = \varphi(R^{-\varkappa}x, R^{-\varkappa}\xi)$, $\psi_R(x, \xi) = 1 - \varphi_R(x, \xi)$. Введем символ $b_R(x, \xi) = a^{-1}(x, \xi)\psi_R(x, \xi)$. Из теоремы 2.9.2 следует, что $b_R \in \tilde{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{-m}$. Тогда, для символа c_R оператора $Op(c_R) = Op(b_R)Op(a_R)$ по теореме 2.9.2 при $N = 1$ находим, что

$$c_R(x, \xi) = a_R(x, \xi)b_R(x, \xi) + t_1(x, \xi) = 1 - \varphi_R(x, \xi) + t_1(x, \xi),$$

где $\varphi_R, t_1 \in \dot{S}_{\rho, \delta, \varkappa}^{-(\rho-\delta)\varkappa_-}$ и $\mathcal{T}_1 = Op(t_1 - \varphi_R)$. Аналогично доказывается и второе равенство из (55). $\square$

Теорема 2.9.3. (см. напр. [12]) Пусть $a \in \dot{S}_{1, \delta, \varkappa}^{m-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Тогда,

$$Op(a): \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$$

является компактным оператором.

Доказательство. Зафиксируем неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую что $\varphi(x) = 1$ при $|x|_{\varkappa} \leq 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x|_{\varkappa} \geq 2$, $\psi(x) = 1 - \varphi(x)$, и $\varphi_R(x) = \varphi(R^{-\varkappa}x)$, $\psi_R(x) = \psi(R^{-\varkappa}x)$. Будем рассматривать оператор A_R с символом $\varphi_R(x)a(x, \xi)\varphi_R(\xi)$ и пусть $a \in \dot{S}_{1, \delta, \varkappa}^{m-\varepsilon}$. Рассмотрим символ

$$a_R(x, \xi) = \varphi_R(x)a(x, \xi)\varphi_R(\xi).$$

Оператор $A_R = Op(a_R)$ действует ограниченно из пространства $\Lambda_{1, \delta, \varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\Lambda_{1, \delta, \varkappa}^{\max(\varepsilon, s_+ - m + \varepsilon)}(\mathbb{B}_{2R, \varkappa})$, где $\mathbb{B}_{2R, \varkappa} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_{\varkappa} \leq 2R\}$. Согласно теореме 1.5.1, пространство $\Lambda_{1, \delta, \varkappa}^{\max(\varepsilon, s_+ - m + \varepsilon)}(\mathbb{B}_{2R, \varkappa})$ компактно вложено в $\Lambda_{1, \delta, \varkappa}^{\max(\varepsilon/2, s_+ - m + \varepsilon/2)}(\mathbb{R}^n)$, которое, в свою очередь, вложено в $\Lambda_{1, \delta, \varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, оператор A_R компактен из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$. После элементарных

преобразований получаем

Докажем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|Op(a) - A_R\|_{\mathcal{B}(\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n))} = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} Op(a) - A_R &= Op(a) - \varphi_R(x)Op(a) + \varphi_R(x)Op(a) - \varphi_R(x)Op(a)\varphi_R(D) = \\ &= \psi_R(x)Op(a) + \varphi_R(x)Op(a)\psi_R(D). \end{aligned}$$

С учетом условия теоремы 2.9.3 и теоремы 2.7.1, получим

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\psi_R(x)a(x, \xi))| &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_\gamma^\beta \sup_{|x|_{\varkappa} \geq R} |\partial_x^\gamma \psi_R(x) \partial_x^{\beta-\gamma} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq \\ &\leq \sup_{\gamma \leq \beta} \|\partial^\gamma \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{\gamma \leq \beta} C_\gamma^\beta R^{-\gamma \cdot \varkappa} \sup_{|x|_{\varkappa} \geq R} |C_{\alpha, \beta-\gamma}(x)| \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{m-\varepsilon-\alpha \cdot \varkappa + \delta(\beta-\gamma) \cdot \varkappa}, \end{aligned}$$

где было использовано свойство $\partial_x^\gamma \psi_R(x) = R^{-\gamma \cdot \varkappa} (\partial_x^\gamma \psi)_R(x)$. В виду того, что $\sup_{\gamma \leq \beta} \sup_{|x|_{\varkappa} \geq R} |C_{\alpha, \beta-\gamma}(x)| = \varepsilon_{\alpha, \beta}(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\psi_R(x)a(x, \xi))| \leq C \varepsilon_{\alpha, \beta}(R) \sup_{\gamma \leq \beta} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{m-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa},$$

откуда следует, что полунормы символа стремятся к нулю, тогда норма оператора тоже стремится к нулю. Аналогично произведем следующую оценку

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\varphi_R(x)a(x, \xi)\psi_R(\xi))| &\leq \\ &\leq \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \mu \leq \alpha}} C_\beta^\gamma C_\alpha^\mu \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_x^\gamma \varphi_R(x) \partial_\xi^\mu \psi_R(\xi) \partial_\xi^{\alpha-\mu} \partial_x^{\beta-\gamma} a(x, \xi)| \leq \\ &\leq C \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \mu \leq \alpha}} C_\beta^\gamma C_\alpha^\mu R^{-\mu \cdot \varkappa} R^{-\gamma \cdot \varkappa} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{m-\varepsilon-(\alpha-\mu) \cdot \varkappa + \delta(\beta-\gamma) \cdot \varkappa}, \end{aligned}$$

где константа C зависит от супремумов функций φ, ψ , а также от полунорм символа a . При $R \rightarrow \infty$ выражение $\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{\mu \cdot \varkappa}$ эквивалентно $R^{\mu \cdot \varkappa}$, а в области $|\xi|_{\varkappa} \geq R$ верно неравенство $\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-\varepsilon} \leq R^{-\varepsilon}$ (при $|\xi|_{\varkappa} < R$ сумма обнуляется из-за $\psi_R(\xi)$). Таким образом,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (\varphi_R(x) a(x, \xi) \psi_R(\xi))| \leq C_1 R^{-\varepsilon} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{m - \alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa},$$

откуда получаем, что полунормы символа $\varphi_R(x) a(x, \xi) \psi_R(\xi)$ стремятся к нулю, как и норма оператора. Следовательно, компактные операторы A_R стремятся к $Op(a)$ по операторной норме, значит $Op(a)$ — компактный оператор. $\square$

Доказанная теорема о компактности псевдодифференциальных операторов позволяет нам уже довольно легко получить достаточные условия фредгольмовости анизотропных псевдодифференциальных операторов.

Теорема 2.9.4. (см. [65, 67–71]) Пусть $a \in \tilde{S}_{1, \delta, \varkappa}^m$ и существуют константы $C, R \in \mathbb{R}_{>0}$ такие, что

$$|a(x, \xi)| \geq C(1 + |\xi|_{\varkappa})^m, \quad |x|_{\varkappa} + |\xi|_{\varkappa} \geq R.$$

Тогда оператор $Op(a)$, действующий из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$ есть фредгольмов оператор.

Доказательство. По теореме 2.9.2 существует оператор $\mathcal{P} \in OPS_{1, \delta, \varkappa}^{-m}$ такой, что

$$\mathcal{P}Op(a) = I + \mathcal{T}_1, \quad Op(a)\mathcal{P} = I + \mathcal{T}_2,$$

где $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in OPS_{1, \delta, \varkappa}^{\circ - (1-\delta)\varkappa_-}$. Согласно теореме 2.9.3, операторы $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, действующие из $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$, являются компактными, что завершает доказательство. $\square$

3 Характеризация псевдодифференциальных операторов

В этой главе показатель гладкости s предполагается постоянным. Центральным утверждением этой главы является теорема 3.2.1 о характеристизации (по Билзу) анизотропных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах Гёльдера-Зигмунда постоянной гладкости. Важным следствием этой утверждения является теорема 3.3.1 о замкнутости введенных классов анизотропных псевдодифференциальных операторов, относительно взятия обратного оператора. Для упрощения дальнейших вычислений введем обозначение для функции $e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi \cdot x}$, рассматривая ее как функцию от $x \in \mathbb{R}^n$, зависящую от параметра $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Две вспомогательные леммы

Лемма 3.1.1. *Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $r \geq t$ справедливо*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \|e_\xi(\cdot) \langle \xi \rangle_{\mathcal{K}}^{-r}\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^t(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Доказательство. Используя для символа $a(x, \xi) = \langle \xi \rangle_{\mathcal{K}}^{-r} \in S_{1,0,\mathcal{K}}^{-r}$ известное равенство (см. напр. [23], стр. 32) $Op(a)e_\xi(x) = a(x, \xi)e_\xi(x)$ и теорему 2.7.1, получим

$$\|e_\xi \langle \xi \rangle_{\mathcal{K}}^{-r}\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^s(\mathbb{R}^n)} = \|\langle D \rangle_{\mathcal{K}}^{-r} e_\xi\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|e_\xi\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s-r}(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как $s - r < 0$, то

$$\|e_\xi\|_{\Lambda_{\mathcal{K}}^{s-r}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|2^{j(s-r)} Op(\lambda_j) e_\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|Op(\lambda_j) e_\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Используя (17) и (18) для ядра $\mathcal{K}_j$ псевдодифференциального оператора $Op(\lambda_j)$,

получим

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|Op(\lambda_j)e_\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|\mathcal{K}_j * e_\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|\mathcal{K}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

так как норма $\|\mathcal{K}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$ (см. формулу (18) и следующее за ней предложение). $\square$

Лемма 3.1.2. Пусть для функции $a(x, \xi)$ существуют такие числа $\nu \in (0, \varkappa_-)$ и $C > 0$, что для любого $|\xi|_\varkappa \geq 1$ выполняются неравенства

$$\|e_\xi a(\cdot, \xi)\|_{\Lambda_\varkappa^\nu(\mathbb{R}^n)} \leq C|\xi|_\varkappa^\nu, \quad (78)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} a(x, \xi)| \leq C|\xi|_\varkappa^{\varkappa_j}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (79)$$

Тогда

$$\sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} |a(x, \xi)| < \infty.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует последовательность пар (x_j, ξ_j) , такая что $a(x_j, \xi_j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Так как $\nu > 0$, верно неравенство $|a(x_j, \xi_j)| \leq C\|e_{\xi_j} a(\cdot, \xi_j)\|_{\Lambda_\varkappa^\nu(\mathbb{R}^n)}$. Тогда с учетом условия (78), имеем что $|\xi_j|_\varkappa \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Для каждого вектора $\xi_j = ((\xi_j)_1, \dots, (\xi_j)_n)$ пусть $(\xi_j)_{k_j}$ есть анизотропная наибольшая компонента согласно формуле (4).

Введем вектор $h_j = (0, \dots, (h_j)_{k_j}, \dots, 0)$ с компонентой $(h_j)_{k_j} = (2\pi(\xi_j)_{k_j})^{-1}$. Тогда $e_{\xi_j}(h_j) = e^i$. С учетом условия (78) и оценки (5) для некоторого $L > 0$

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{\|e_{\xi_j} a(\cdot, \xi_j)\|_{C_\varkappa^\nu(\mathbb{R}^n)}}{|\xi_j|_\varkappa^\nu} \geq \frac{|e_{\xi_j}(x_j + h_j)a(x_j + h_j, \xi_j) - e_{\xi_j}(x_j)a(x_j, \xi_j)|}{|h_j|_\varkappa^\nu |\xi_j|_\varkappa^\nu} \geq \\ &\geq \frac{|e_{\xi_j}(x_j)a(x_j, \xi_j)| \cdot |e_{\xi_j}(h_j)a_j - 1|}{n^{\nu/(2\varkappa_{k_j})} |(h_j)_{k_j}|^{\nu/\varkappa_{k_j}} |(\xi_j)_{k_j}|^{\nu/\varkappa_{k_j}}} \geq \left(\frac{2\pi}{\sqrt{n}}\right)^{\nu/\varkappa_{k_j}} |a(x_j, \xi_j)| \cdot |e^i a_j - 1|, \end{aligned}$$

где $a_j = a(x_j + h_j, \xi_j)/a(x_j, \xi_j)$. Используя теорему Лагранжа о конечном приращении, условие (79), получим

$$\begin{aligned} |a(x_j + h_j, \xi_j) - a(x_j, \xi_j)| &\leq |(h_j)_{k_j}| \cdot |\partial_{x_{k_j}} a(\theta_j, \xi_j)| \leq \\ &\leq C \frac{\sqrt{n}}{2\pi} |\xi_j|^{-\varkappa_{k_j}} |\xi_j|^{\varkappa_{k_j}} = C \frac{\sqrt{n}}{2\pi} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|a_j - 1| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, следовательно, существует $J > 0$ такое, что для все $j > J$ выполняется неравенство $|e^i a_j - 1| > 1/2$. Но тогда возникает противоречие

$$L \geq \left(\frac{2\pi}{\sqrt{n}}\right)^{\nu/\varkappa_{k_j}} |a(x_j, \xi_j)| \cdot |e^i a_j - 1| > \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{n}}\right)^{\nu/\varkappa_{k_j}} |a(x_j, \xi_j)| \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty,$$

которое и доказывает лемму 3.1.2. □

3.2 Теорема о характеристизации анизотропных псевдодифференциальных операторов

Основываясь на работе [26], для оператора $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим его коммутаторы с операторами умножения на координатные функции и с операторами дифференцирования

$$L_j B = [x_j, B] = x_j B - B x_j, \quad M_j B = [D_{x_j}, B] = D_{x_j} B - B D_{x_j}.$$

Тогда для мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ положим

$$B_{(\beta)}^{(\alpha)} = L_1^{\alpha_1} \cdots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \cdots M_n^{\beta_n} B, \quad \text{где } B_{(0)}^{(0)} = B.$$

Теорема 3.2.1. Пусть $\delta \in [0, 1)$ и $0 < s \leq (1 - \delta)\varkappa_-$. Линейное отображение $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ тогда и только тогда, когда для

любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ оператор $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ продолжается до ограниченного оператора из $\Lambda_{\varkappa}^{s+m-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для псевдодифференциального оператора $B \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ имеем $L_j B \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{m-\varkappa_j}$ и $M_j B \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{m+\delta \varkappa_j}$, откуда получаем, что $B_{(\beta)}^{(\alpha)} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{m-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Следовательно, по теореме 2.7.1 оператор $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ ограничен из $\Lambda_{\varkappa}^{s+m-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ линейный оператор $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ ограничен из пространства $\Lambda_{\varkappa}^{s+m-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ при некотором s , $0 < s \leq (1-\delta)\varkappa_-$. На $\mathbb{R}^n$ введем функцию $g_y(x) = g(y-x)$, зависящую от параметра $y \in \mathbb{R}^n$, где функция $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ является четной и такой, что $g(0) = 1$. Для любой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$u(x) = g_x(x)u(x) = \iint e_{\xi}(x-y)g_x(y)u(y) dy d\xi.$$

Тогда для оператора B получим

$$Bu(x) = \iint e_{\xi}(-y)B(g_y e_{\xi})(x)u(y) dy d\xi = \iint e_{\xi}(x-y)b_0(x,y,\xi)u(y) dy d\xi,$$

где функция $b_0(x,y,\xi) = e_{-\xi}(x)B(g_y e_{\xi})(x)$. Нам достаточно доказать (см. [26]), что функция b_0 принадлежит классу $DS_{1,\delta,\varkappa}^m$. Из равенства

$$b_0(x,y,\xi)\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s}e_{\xi}(x) = B(g_y e_{\xi}\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s})(x)$$

и ограниченности оператора B получаем неравенство

$$\|b_0(\cdot, y, \xi)e_{\xi}\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s}\|_{\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g_y e_{\xi}\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s}\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s+m}(\mathbb{R}^n)}.$$

Оператор умножения на функцию $g_y(x)$ (или на любую ее производную) явля-

ется псевдодифференциальным из класса $OPS_{1,\delta\kappa}^0$ с полунормами символа, не зависящими от y . Тогда, по теореме 2.7.1, имеем

$$\|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s} e_{\xi} b_0(\cdot, y, \xi)\|_{\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s} e_{\xi}\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m}(\mathbb{R}^n)} \leq C < \infty.$$

с независимой от y , ξ константой C , и где последнее нестрогое неравенство получаем по лемме 3.1.1. Далее, так как

$$D_{x_j} b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) (M_j B(g_y e_{\xi})(x) + B(e_{\xi} D_{x_j} g_y)(x)),$$

то, после умножения на $\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi}(x)$, аналогично получим неравенства

$$\begin{aligned} & \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi} D_{x_j} b_0(\cdot, y, \xi)\|_{\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} M_j B(g_y e_{\xi})\|_{\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)} + \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} B(e_{\xi} D_{x_j} g_y)\|_{\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi} g_y\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m+\delta\kappa_j}(\mathbb{R}^n)} + C \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi} D_{x_j} g_y\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi}\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m+\delta\kappa_j}(\mathbb{R}^n)} + C \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi}\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m}(\mathbb{R}^n)} \leq C < \infty, \quad (80) \end{aligned}$$

с константой C независимой от y, ξ .

Так как для производной функции b_0 по переменной ξ_j имеет место равенство

$$D_{\xi_j} b_0(x, y, \xi) = -e_{-\xi}(x) L_j B(g_y e_{\xi})(x),$$

то

$$\begin{aligned} & \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s+\kappa_j} e_{\xi} D_{\xi_j} b_0(\cdot, y, \xi)\|_{\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)} = \|L_j B(g_y \langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s+\kappa_j} e_{\xi})\|_{\Lambda_{\kappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C \|g_y \langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s+\kappa_j} e_{\xi}\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m-\kappa_j}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\langle \xi \rangle_{\kappa}^{-m-s+\kappa_j} e_{\xi}\|_{\Lambda_{\kappa}^{s+m-\kappa_j}(\mathbb{R}^n)} \leq C < \infty, \quad (81) \end{aligned}$$

где, как и прежде, константа C не зависит от y, ξ .

Для производной функции b_0 по переменной y_j верно равенство

$$D_{y_j} b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) B(e_{\xi} D_{y_j} g_y)(x),$$

которое, аналогично предыдущим выкладкам, приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \|\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi} D_{y_j} b_0(\cdot, y, \xi)\|_{\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)} &= \|B(\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi} D_{y_j} g_y)\|_{\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq C \|\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi} D_{y_j} g_y\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s+m}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{-m-s-\delta\kappa_j} e_{\xi}\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s+m}(\mathbb{R}^n)} \leq C < \infty, \end{aligned} \quad (82)$$

с независимой от y, ξ константой C .

Очевидно, что аналогично оценкам (80), (81), (82) получаются и оценки для старших производных амплитуды b_0 . Иными словами, для любых мультииндексов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ существуют константы $C_{\alpha, \beta, \gamma}$, не зависящие от x, y, ξ , такие что

$$\|\langle \xi \rangle_{\varkappa}^{\alpha \cdot \varkappa - \delta(\beta + \gamma) \cdot \varkappa - m} e_{\xi} D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} D_y^{\gamma} b_0(\cdot, y, \xi)\|_{\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^s.$$

Так как $s > 0$, то

$$|D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} D_y^{\gamma} b_0(x, y, \xi) \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{\alpha \cdot \varkappa - \delta\beta \cdot \varkappa - m}| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^s.$$

Это неравенство можно переписать так

$$|\partial_{x_j} D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} D_y^{\gamma} b_0(x, y, \xi) \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{\alpha \cdot \varkappa - \delta\beta \cdot \varkappa - m}| \leq C_{\alpha, \beta + e_j, \gamma} \langle \xi \rangle_{\varkappa}^{s + \delta\kappa_j}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Из условия теоремы следует, что $s \in (0, \varkappa_-)$ и $s + \delta\kappa_j < \varkappa_j$. Отсюда и из леммы 3.1.2, имеем

$$C_{\alpha, \beta, \gamma}(b_0) := \sup_{x, y, \xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_y^{\gamma} b_0(x, y, \xi) (1 + |\xi|_{\varkappa})^{\alpha \cdot \varkappa - \delta(\beta + \gamma) \cdot \varkappa - m}| < \infty.$$

Таким образом, $b_0 \in DS_{1,\delta,\kappa}^m$, что и требовалось доказать. $\square$

3.3 Теорема об обратном операторе

Пусть теперь даны: семейство банаховых пространств $\{\mathbb{X}^s \mid s \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{X}^s \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, таких что $\mathbb{X}^{s_1} \subset \mathbb{X}^{s_2}$ при любых $s_1 > s_2$; а также семейство линейных классов $\{\mathfrak{A}^m \mid m \in \mathbb{R}\}$, линейных операторов $A : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых справедливо вложение $\mathfrak{A}^{m_1} \subset \mathfrak{A}^{m_2}$ при $m_1 \leq m_2$. Потребуем выполнение следующих условий:

1. Если $A_j \in \mathfrak{A}^{m_j}$, $j = 1, 2$, то $A_1 A_2 \in \mathfrak{A}^{m_1+m_2}$.
2. Для любых $s, m \in \mathbb{R}$ любой оператор из класса $\mathfrak{A}^m$ ограничен из $\mathbb{X}^s$ в $\mathbb{X}^{s-m}$.
3. Для любых $s, m \in \mathbb{R}$ в классе $\mathfrak{A}^m$ существует обратимый оператор из $\mathbb{X}^s$ в $\mathbb{X}^{s-m}$.
4. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $A \in \mathfrak{A}^0$, $B \in \mathfrak{A}^m$, то коммутатор $[A, B] \in \mathfrak{A}^{m-\varepsilon}$.
5. Если $B = P^{-1}AP$ для $A \in \mathfrak{A}^0$ и обратимого $P \in \mathfrak{A}^m$, то $B = A + T$, где $T \in \mathfrak{A}^{-\varepsilon}$.

Тогда имеет место следующая

Лемма 3.3.1. *Если оператор $A \in \mathfrak{A}^m$ обратим из $\mathbb{X}^s$ в $\mathbb{X}^{s-m}$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то он обратим из $\mathbb{X}^t$ в $\mathbb{X}^{t-m}$ при любом $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Оператор A обратим тогда и только тогда, когда оператор PA обратим в $\mathbb{X}^s$ для некоторого обратимого $P \in \mathfrak{A}^{-m}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $m = 0$. Оператор $A \in \mathfrak{A}^0$ ограничен в $\mathbb{X}^t$ при любом $t \in \mathbb{R}$, покажем, что он там биективен.

Пусть сначала $s \leq t \leq s + \varepsilon$. Инъективность A в $\mathbb{X}^t$ следует из инъективности в $\mathbb{X}^s$ и вложения $\mathbb{X}^t \subset \mathbb{X}^s$. Для доказательства сюръективности возьмём $v \in \mathbb{X}^t \subset \mathbb{X}^s$. Существует $u \in \mathbb{X}^s$ такой, что $Au = v$. Пусть $P \in \mathfrak{A}^{t-s}$ обратим из $\mathbb{X}^t$ в $\mathbb{X}^s$. Тогда:

$$Pu = PA^{-1}v = A^{-1}Pv + A^{-1}[A, P]A^{-1}v \in \mathbb{X}^s,$$

следовательно, $u \in \mathbb{X}^t$. Повторяя рассуждения, получаем обратимость при $t > s$.

Пусть теперь $s - \varepsilon \leq t \leq s$. Оператор $B = P^{-1}AP$ обратим в $\mathbb{X}^t$. По доказанному, B обратим в $\mathbb{X}^s$. Если A не инъективен в $\mathbb{X}^t$, то существует $u \in \mathbb{X}^t \setminus \{0\}$ с $Au = 0$. Тогда $u \in \mathbb{X}^t \setminus \mathbb{X}^s$. Поскольку $B = A + T$ с $T \in \mathfrak{A}^{-\varepsilon}$, то $Bu = Tu \in \mathbb{X}^{t+\varepsilon} \subset \mathbb{X}^s$, откуда $u = B^{-1}Tu \in \mathbb{X}^s$ — противоречие.

Для сюръективности рассмотрим $v \in \mathbb{X}^t$ и $u \in \mathbb{X}^t$ с $Bu = v$. Тогда $Au + Tu = v$ и $Tu \in \mathbb{X}^{t+\varepsilon} \subset \mathbb{X}^s$. Из обратимости A в $\mathbb{X}^s$ следует существование $w \in \mathbb{X}^s$ с $Aw = Tu$. Тогда $A(u + w) = v$ и $u + w \in \mathbb{X}^t$.

Повторение этих рассуждений завершает доказательство. $\square$

В частности, для банаховых пространств $\mathbb{X}^s = \Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ и классов анизотропных псевдодифференциальных операторов $\mathfrak{A}^m = OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ выполняются условия 1) – 5). Поэтому лемма 3.3.1 имеет следующее

Следствие 3.3.1. *Если анизотропный псевдодифференциальный оператор $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ обратим из $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то он обратим из $\Lambda_{\varkappa}^t(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{t-m}(\mathbb{R}^n)$ при любом $t \in \mathbb{R}$.*

Теорема 3.3.1. *Пусть анизотропный псевдодифференциальный оператор $A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$ обратим как оператор из $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$. Тогда обратный оператор $A^{-1} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$.*

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 3.2 работы [26], вно-

ся необходимые модификации. Рассмотрим оператор $A_1 = \langle D \rangle_{\varkappa}^{-m} A \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^0$. Он обратим в $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в силу обратимости $\langle D \rangle_{\varkappa}^{-m}$. По лемме 3.3.1 оператор A_1 обратим в $\Lambda_{\varkappa}^t(\mathbb{R}^n)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Для оператора $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, в качестве которого далее будет выступать или оператор дифференцирования ∂_{x_j} , или оператор умножения на координатную функцию x_j , имеем:

$$[P, A_1^{-1}] = -A_1^{-1}[P, A_1]A_1^{-1}.$$

Коммутаторы следующих порядков с оператором A_1^{-1} представляются в виде суммы произведений оператора A_1^{-1} и коммутаторов с A_1 . В том числе, оператор $(A_1^{-1})_{(\beta)}^{(\alpha)}$ есть линейная комбинация выражений вида:

$$A_1^{-1} \prod_{i,j} ((A_1)_{(\beta(i))}^{(\alpha(j))} A_1^{-1}), \quad \sum_j \alpha(j) = \alpha, \quad \sum_i \beta(i) = \beta.$$

Так как $(A_1)_{(\beta(i))}^{(\alpha(j))} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-\alpha(j) \cdot \varkappa + \delta \beta(i) \cdot \varkappa}$, то оператор $(A_1^{-1})_{(\beta)}^{(\alpha)}$ ограничен из $\Lambda_{\varkappa}^{t-\alpha \cdot \varkappa + \delta \beta \cdot \varkappa}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^t(\mathbb{R}^n)$ для любых мультииндексов α, β и любого $t \in \mathbb{R}$, в частности, при $0 < t < \varkappa_-$. Но тогда по теореме 3.2.1 получаем, что $A_1^{-1} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^0$. Следовательно, $A^{-1} = A_1^{-1} \langle D \rangle_{\varkappa}^{-m} \in OPS_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$. $\square$

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты, соответствующие поставленным целям исследования.

1. Введены и систематически исследованы анизотропные пространства Гёльдера–Зигмунда переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$. Для пространств $C_{\mathcal{H}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\Lambda_{\mathcal{H}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ построены эквивалентные нормы, в том числе с использованием модифицированного разбиения Литлвуда–Пэли. Доказана эквивалентность всех введённых норм при положительном показателе $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x) > 0$, что позволило установить совпадение пространств $C_{\mathcal{H}}^{s(\cdot)}$ и $\Lambda_{\mathcal{H}}^{s(\cdot)}$ в этом случае. Кроме того, получена теорема о компактном вложении пространств $\Lambda_{\mathcal{H}}^{s_1(\cdot)}(K)$ в $\Lambda_{\mathcal{H}}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$.
2. Построено символьное исчисление для классов анизотропных псевдодифференциальных операторов $S_{\rho, \delta, \mathcal{H}}^m$ (введенных в работе [60]). Получены: асимптотическое разложение для символа произведения операторов; асимптотическое разложение для символа псевдодифференциального оператора, заданного с помощью амплитуды; асимптотическое разложение для символов сопряжённого и транспонированного операторов. Рассмотрена связь исследуемых в работе классов анизотропных символов с классами изотропных символов Хёрмандера $S_{\rho, \delta}^m$.
3. Доказана ограниченность анизотропных псевдодифференциальных операторов с символами из классов $S_{1, \delta, \mathcal{H}}^m$ из функционального пространства Гёльдера–Зигмунда $\Lambda_{\mathcal{H}}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\Lambda_{\mathcal{H}}^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$. На основе этой теоремы получены достаточные условия компактности и фредгольмовости для псевдодифференциальных операторов с медленно меняющимися на беско-

нечности символами соответственно из классов $\mathring{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ и $\tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$.

4. Исследовано полулинейное уравнение вида

$$Au(x) = \varepsilon T^+ u(x) + h(x),$$

где A — обратимый псевдодифференциальный оператор из класса $OPS_{1,\delta,\varkappa}^m$, а T^+ — нелинейный оператор специального вида. Для достаточно малых ε доказана теорема существования и единственности решения $u \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)+m}(\mathbb{R}^n)$ при условии $h \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и оценка нормы u .

5. Для случая постоянного показателя гладкости s получена характеристика (по Билзу [26]) псевдодифференциальных операторов с символами из классов $S_{1,\delta,\varkappa}^m$ в соответствующей паре пространств $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$, с использованием коммутаторов с операторами умножения на координатные функции и дифференцирования. На основе этой характеристики установлено, что если оператор $A \in S_{1,\delta,\varkappa}^m$ обратим при некотором $s \in \mathbb{R}$ из $\Lambda_{\varkappa}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_{\varkappa}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, то обратный оператор $A^{-1} \in S_{1,\delta,\varkappa}^{-m}$.

Все перечисленные результаты являются новыми и опубликованы в работах [85–87].

Приложение

Приложение 1

Пример 1. Доказать, что дельта функция Дирака $\delta(x) \in \Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, при $s(0) \leq -n$.

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{K}_j(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_j(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi,$$

$j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Очевидно, что для $\mathcal{K}_j$ справедливо (67). Нам понадобится такой вариант этого неравенства ($m = 0$):

$$|\mathcal{K}_j(z)| \leq A_N |z|_{\varkappa}^{-N} 2^{j(n-N)}. \quad (83)$$

Пусть сначала $|x|_{\varkappa} \geq 2^{-j/2}$. Тогда с учетом (83)

$$\begin{aligned} |2^{js(x)} \lambda_j(D) \delta(x)| &= |2^{js(x)} \mathcal{K}_j(x)| \leq |2^{js(x)} A_N |x|_{\varkappa}^{-N} 2^{j(n-N)}| \leq \\ &\leq A_N |2^{j(s(x)+n-N/2)}| \leq C \end{aligned} \quad (84)$$

при неотрицательном $N > 2(s_+ + n)$ с постоянной C , не зависящей от x и j .

Пусть $|x|_{\varkappa} \leq 2^{-j/2}$. Тогда ввиду неравенства (7) при $j \neq 0$

$$js(x) \leq js(0) + \frac{L_s j}{|\log_2 |x|_{\varkappa}|} \leq -jn + \frac{L_s j}{|-j/2|} = -jn + 2L_s.$$

Поэтому при таких x и $N = 0$ в неравенстве (83) получим, что

$$|2^{js(x)} \lambda_j(D) \delta(x)| = |2^{js(x)} \mathcal{K}_j(x)| \leq A_0 |2^{2L_s}| = C. \quad (85)$$

Неравенства (84) и (85) приводят к тому, что $\|\delta\|_{\Lambda_{\#}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \|\delta\| < \infty$, это и требовалось доказать. $\square$

Пример 2. Показать, что функция $f(x) = x \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ принадлежит пространству $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R})$ с показателем гладкости $s \in C_{\log}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $s(0) \leq 1/2$.

Доказательство. Достаточно доказать при $s_- > 0$. Необходимость. Пусть $s(0) > 1/2$. Выберем числа x_n, h_n следующим образом

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}, \quad x_n + h_n = \frac{1}{2\pi n + 3\pi/2}.$$

значит $x_n, x_n + h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что верны равенства $\sin(1/x_n) = 1$ и $\sin(1/(x_n + h_n)) = -1$. Тогда $f(x_n) = x_n$, $f(x_n + h_n) = -(x_n + h_n)$, и следовательно, $|f(x_n + h_n) - f(x_n)| > x_n$. Так как $h_n = x_n + h_n - x_n = -\pi x_n(x_n + h_n)$ и $x_n + h_n < x_n$, то верно неравенство $|h_n| < \pi x_n^2$. С учетом этих оценок, получим

$$\frac{|f(x_n + h_n) - f(x_n)|}{|h_n|^{s(x_n)}} > \frac{x_n}{(\pi x_n^2)^{s(x_n)}} > \pi^{-s_+} x_n^{1-2s(x_n)}.$$

Из условий $s(0) > 1/2$ и непрерывности следует, что существуют числа $\varepsilon, N > 0$, такие что для любых $n > N$ справедливы неравенства $s(x_n) > 1 + \varepsilon/2$. Значит $1 - 2s(x_n) < -\varepsilon$, а тогда

$$\frac{|f(x_n + h_n) - f(x_n)|}{|h_n|^{s(x_n)}} > \pi^{-s_+} x_n^{-\varepsilon} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $s \in C_{\log}(\mathbb{R})$ и $s(0) \leq 1/2$. Нужно доказать, что для

рассматриваемой функции $f(x)$ выполнялось неравенство

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \sup_{0 < |h| < 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|^{s(x)}} < \infty,$$

где $N > s_+$. При $x \neq 0$ используя замену $y = 1/x$, имеем $|f(x)| = |(\sin y)/y| < 1$. Таким образом, $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$. Достаточно доказать ограниченность второго слагаемого. При $x = 0$ доказательство очевидно, поскольку $|f(x)| \leq |x|$.

Случай $|x| > C_s = 2^{-3L_s}$. Пусть $|h| > C_s/(2N)$. В виду того, что $|\delta_h^N f(x)| < 2^N$ и $|h|^{s(x)} > (C_s/(2N))^{s_+}$, то

$$\frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|^{s(x)}} < 2^N (2N/C_s)^{s_+}.$$

Пусть теперь $|h| \leq C_s/(2N)$. Поскольку вне нуля функция f бесконечно дифференцируема, то применим формулу (11) к функции f

$$|\delta_h^N f(x)| \leq |h|^N \int_0^1 \cdots \int_0^1 |f^{(N)}(x + (t_1 + \dots + t_N)h)| dt_1 \cdots dt_N,$$

где $f^{(N)}$ — производная порядка N . Также отметим, что в силу условий, наложенных на x и h , имеет место неравенство $|x + (t_1 + \dots + t_N)h| > C_s/2$, откуда получаем, что $|\delta_h^N f(x)| \leq C(N, C_s)|h|^N$ с некоторой константой $C(N, C_s)$, зависящей лишь от N и C_s . Применяя эти оценки и учитывая, что $N > s_+$, имеем

$$\frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|^{s(x)}} < |h|^{N-s_+} C(N, C_s) < C(N, C_s)$$

Случай $|x| \leq C_s$. Перепишем неравенство (7) так

$$s(x) \leq s(0) + \frac{L_s}{|\log_2 |x||} \leq 1/2 + \frac{L_s}{|\log_2 |x||}. \quad (86)$$

Поскольку $|x| \leq 2^{-3L_s}$, то $|\log_2 |x|| \geq 3L_s$, поэтому из неравенства (86) имеем $s(x) \leq 5/6 < 1$. Следовательно, в этой области можно использовать конечную разность первого порядка δ_h . Из оценки (86) получим $(s(x) - 1/2)|\log_2 |x|| \leq L_s$. Учитывая, что $|x| < 1$ и домножая на 2, верно $(1 - 2s(x))\log_2 |x| \leq 2L_s$, то есть $\log_2 |x|^{1-2s(x)} \leq 2L_s$. Таким образом, имеет место неравенство

$$|x|^{1-2s(x)} \leq 2^{2L_s}. \quad (87)$$

Пусть $|h| < |x|^2/2$. Для производной имеем оценку

$$|f'(x)| = \left| \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| < 1 + 1/|x| < 2/|x|.$$

С учетом неравенства $|x + h| > |x|(1 - |x|/2) > |x|/2$ по теореме Лагранжа находим, что $|\delta_h f(x)| = |f'(\theta)h| < (2/|\theta|)|h| < (4/|x|)|h|$. С учетом (87), получаем

$$\frac{|\delta_h f(x)|}{|h|^{s(x)}} < \frac{4}{|x|}|h|^{1-s(x)} < \frac{4}{|x|}(1/2)^{1-s(x)}|x|^{2-2s(x)} < 4|x|^{1-2s(x)} \leq 4 \cdot 2^{2L_s}.$$

Пусть теперь $|h| \geq |x|^2/2$. Так как $s(x), |h| < 1$, то

$$\frac{|\delta_h f(x)|}{|h|^{s(x)}} \leq (2|x| + |h|)|h|^{-s(x)} < 2|x| \cdot |h|^{-s(x)} + 1$$

Тогда с учетом (87) получим неравенства

$$\frac{|\delta_h f(x)|}{|h|^{s(x)}} < 2(1/2)^{-s(x)}|x|^{1-2s(x)} + 1 \leq 2^{1+s_++2L_s} + 1.$$

Достаточность доказана. □

Приложение 2

Остановимся поподробнее на замене переменных и переходе в анизотропный аналог сферической системы координат $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ (см. [15], стр. 15)

$$\begin{cases} x_1 = r^{\varkappa_1} \cos \varphi_1, \\ x_2 = r^{\varkappa_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \dots \\ x_n = r^{\varkappa_n} \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}. \end{cases} \quad (88)$$

Тогда якобиан $J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ преобразования к сферическим координатам равен

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 r^{\varkappa_1-1} \cos \varphi_1 & -r^{\varkappa_1} \sin \varphi_1 & \dots & 0 \\ \varkappa_2 r^{\varkappa_2-1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r^{\varkappa_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_n r^{\varkappa_n-1} \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin \varphi_{n-1} & r^{\varkappa_n} \cos \varphi_1 \cdot \dots \cdot \sin \varphi_{n-1} & \dots & r^{\varkappa_n} \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой в формулу (1) проверяется, что $|x|_{\varkappa} = r$.

Рассмотрим интеграл $\int_{|x|_{\varkappa} \leq R} dx$. Согласно (1), этот интеграл равен объему эллипсоида с полуосями $R^{\varkappa_1}, \dots, R^{\varkappa_n}$. Как известно, объем эллипсоида определяется по формуле $(\pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1))R^{\varkappa_1} \cdot \dots \cdot R^{\varkappa_n} = (\pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1))R^n$, где Γ — гамма функция. С другой стороны, в ранее рассмотренном интеграле можно

осуществить замену переменных

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2 + 1)} &= \int_{|x|_{\varkappa} \leq R} dx = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} dr = \int_0^R G(r) dr. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученные равенства по R видим, что $G(r) = Gr^{n-1}$, где обозначено $G = (n\pi^{n/2})/\Gamma(n/2 + 1)$. Пусть теперь дана функция $f(x)$, зависящая только от анизотропного модуля. Иными словами, $f(x) = g(|x|_{\varkappa})$, при некоторой функции g , зависящей от одной переменной. Тогда, при $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1 \leq |x|_{\varkappa} \leq R_2} f(x) dx &= \int_{R_1 \leq |x|_{\varkappa} \leq R_2} g(|x|_{\varkappa}) dx = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(r) J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} dr = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} g(r) G(r) dr = G \int_{R_1}^{R_2} g(r) r^{n-1} dr. \quad (89) \end{aligned}$$

Список обозначений

$\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — соответственно множество натуральных и неотрицательных целых чисел, стр. 17

$\mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{Q}_{\geq 0}$ — соответственно множество положительных и неотрицательных рациональных чисел, стр. 17

$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, стр. 17

$\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ — соответственно множество положительных и неотрицательных вещественных чисел, стр. 17

$B(X, Y)$ банахово пространство всех ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , стр. 17

$\varkappa$ — вектор анизотропности, стр. 17

$\varkappa_-, \varkappa_+$ — соответственно наименьшее и наибольшее компоненты вектора анизотропности стр. 17

$|x|_{\varkappa}$ — анизотропная длина вектора x , стр. 17

$C_{\varkappa} = 2^{1/\varkappa_- - 1}$ — наименьшая константа, для всех x, y удовлетворяющая неравенству $|x + y|_{\varkappa} \leq C(|x|_{\varkappa} + |y|_{\varkappa})$, стр. 18

$C^N(\mathbb{R}^n)$ — пространство $0 \leq N \leq \infty$ раз непрерывно дифференцируемых функций, стр. 20

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Л. Шварца, стр. 20

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство умеренных распределений, стр. 20

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, стр. 20

$\widehat{f}, f^\vee$ — соответственно прямое и обратное преобразования Фурье, стр. 20

$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, 1 \leq p \leq \infty$ — норма в пространстве Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$, стр. 21

$s(x)$ — показатель гладкости функции (или распределения), стр. 21

L_s — константа из условия логарифмической непрерывности, стр. 21

$s_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$, $s_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$, $s_\Delta = s_+ - s_-$, стр. 21

$s_j(x)$ — показатель гладкости по переменной x_j функции (или распределения), стр. 21

δ_h — оператор конечной разности первого порядка, стр. 22

δ_h^k — оператор конечной разности порядка k , $k > 0$, стр. 22

$C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ — анизотропное пространство Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости при $s_- > 0$, стр. 22

$\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ — норма в анизотропном пространстве Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости при $s_- > 0$, стр. 22

$\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^\circ$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(N)}$, $\|\cdot\|_{C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{(\vec{N})}$ — эквивалентные нормы в пространстве $C_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, соответственно на стр. 22, стр. 23, стр. 24

$\lambda_j(\xi)$ — анизотропное разбиение единицы Литлвуда-Пэли, стр. 26

$\lambda(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|\xi|_{\varkappa} \leq 1$ и равная нулю при $|\xi|_{\varkappa} \geq 2$, стр. 26

$\mathcal{K}_j(z), \mathcal{K}(z)$ — соответственно ядра интегральных операторов $\lambda_j(D), \lambda(D)$, стр. 27

$\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ — анизотропное пространство Гёльдера-Зигмунда произвольной переменной гладкости, стр. 27

$\|\cdot\|_{\Lambda_{\varkappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ — норма в анизотропном пространстве Гёльдера-Зигмунда произвольной переменной гладкости, стр. 27

$\delta(x)$ — дельта функция П. Дирака, стр. 28

$S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ — класс анизотропных символов, стр. 42

$OPS_{\rho, \delta, \varkappa}^m$ — класс анизотропных псевдодифференциальных операторов с символами из класса $S_{\rho, \delta, \varkappa}^m$, стр. 42

$|a|_{q,p}^m$ — полунормы символа $a \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, стр. 42

$D_x^\alpha = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha$, стр. 43

M — наименьшее положительное рациональное число, такое что для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ числа $M/\varkappa_i$ были четными, стр. 44

$\langle \xi \rangle_\varkappa = (1 + \xi_1^{M/\varkappa_1} + \dots + \xi_n^{M/\varkappa_n})^{1/M}$, стр. 44

$\langle D \rangle_\varkappa^N$, $N \in \mathbb{R}$ — анизотропный псевдодифференциальный оператор, соответствующий символу $\langle \xi \rangle_\varkappa^N$, стр. 44

$S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m,m'}$ — класс анизотропных двойных символов, стр. 45

$|p|_{q,l}^{m,m'}$ — полунормы двойного символа $p \in S_{\rho,\delta,\varkappa}^{m,m'}$, стр. 45

$p_{(\beta,\beta')}^{(\alpha,\alpha')}(x, \xi, x', \xi') = \partial_\xi^\alpha \partial_{\xi'}^{\alpha'} D_x^\beta D_{x'}^{\beta'} p(x, \xi, x', \xi')$, стр. 45

$\langle \xi, \xi' \rangle = (1 + |\xi|_\varkappa + |\xi'|_\varkappa)$, стр. 45

$DS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ — класс анизотропных амплитуд, стр. 55

$|p|_{q,l,v}^m$ — полунормы амплитуды $p \in DS_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, стр. 55

$k_j(x, z)$ — ядро псевдодифференциального оператора $Op(a)\lambda_j(D)$, стр. 60

$\tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m, \dot{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ — подклассы класса $S_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ с медленно меняющимися на бесконечности символами, стр. 72

$OP\tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ — класс анизотропных псевдодифференциальных операторов с символами из класса $\tilde{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, стр. 72

$OP\dot{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$ — класс анизотропных псевдодифференциальных операторов с символами из класса $\dot{S}_{\rho,\delta,\varkappa}^m$, стр. 73

$e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi \cdot x}$, стр. 80

$M_j B = [D_{x_j}, B] = D_{x_j} B - B D_{x_j}$ — коммутатор с оператором дифференцирования, стр. 82

$L_j B = x_j B - B x_j$ — коммутатор с координатной функцией, стр. 82

$B_{(\beta)}^{(\alpha)} = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \dots M_n^{\beta_n} B$, стр. 82

Список литературы

- [1] Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи математических наук. — 1965. — Т. 20, № 5(125). — С. 3–120.
- [2] Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
- [3] Бесов, О. В. Интерполяция, вложение и продолжение пространств функций переменной гладкости / О. В. Бесов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2005. — Т. 248. — С. 52–63.
- [4] Бесов, О. В. О пространствах функций переменной гладкости, определяемых псевдодифференциальными операторами / О. В. Бесов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 1999. — Т. 227. — С. 56–74.
- [5] Бесов, О. В. Эквивалентные нормировки пространств функций переменной гладкости / О. В. Бесов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2003. — Т. 243. — С. 87–95.
- [6] Волевич, Л. Р. Локальные свойства неоднородных псевдодифференциальных операторов / Л. Р. Волевич // Труды Московского математического общества. — 1967. — Т. 16. — С. 51–98.
- [7] Головкин, К. К. О нормированных кольцах и теоремах вложения / К. К. Головкин // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 1962. — Т. 66. — С. 364–383.

- [8] Грушин, В. В. Псевдодифференциальные операторы / В. В. Грушин. — М.: Московский институт электронного машиностроения, 1975. — 107 с.
- [9] Грушин, В. В. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$ с ограниченными символами / В. В. Грушин // Функциональный анализ и его приложения. — 1970. — Т. 4, № 3. — С. 37–50.
- [10] Егоров, Ю. В. О гипоеллиптических псевдодифференциальных операторах / Ю. В. Егоров // Доклады Академии наук СССР. — 1966. — Т. 168, № 6. — С. 1242–1244.
- [11] Егоров, Ю. В. О псевдодифференциальных операторах главного типа / Ю. В. Егоров // Доклады Академии наук СССР. — 1966. — Т. 171, № 4. — С. 778–780.
- [12] Кряквин, В. Д. Критерии компактности и нётеровости псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гёльдера-Зигмунда / В. Д. Кряквин // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 102–112.
- [13] Кряквин, В. Д. Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда переменного порядка / В. Д. Кряквин // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 6. — С. 1315–1327.
- [14] Кряквин, В. Д. Характеризация псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда / В. Д. Кряквин // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 318–324.
- [15] Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. — М.: Высшая школа, 1977. — 431 с.

- [16] Михлин, С. Г. Сингулярные интегральные уравнения / С. Г. Михлин // Успехи математических наук. — 1948. — Т. 3, № 25. — С. 29–112.
- [17] Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
- [18] Пламеневский, Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов / Б. А. Пламеневский. — М.: Наука, 1986. — 255 с.
- [19] Рабинович, В. С. Псевдодифференциальные операторы в классах $S_{\rho,\delta}^m$ ($0 \leq \delta = \rho < 1$) / В. С. Рабинович // Доклады Академии наук СССР. — 1980. — Т. 27. — С. 226–321.
- [20] Рабинович, В. С. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях с конической структурой на бесконечности / В. С. Рабинович // Математический сборник. — 1969. — Т. 80, № 4. — С. 77–97.
- [21] Трев, Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1: Псевдодифференциальные операторы / Ф. Трев. — М.: Мир, 1984. — 359 с.
- [22] Трев, Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 2: Интегральные операторы Фурье / Ф. Трев. — М.: Мир, 1984. — 398 с.
- [23] Шубин, М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. — М.: Добросвет, 2005. — 310 с.
- [24] Almeida, A. Besov spaces with variable smoothness and integrability / A. Almeida, P. Hästö // Journal of Functional Analysis. — 2010. — Vol. 258, No. 5. — P. 1628–1655.

- [25] Beals, R. A general calculus of pseudodifferential operators / R. Beals // Duke Mathematical Journal. — 1975. — Vol. 42, No. 1. — P. 1–42.
- [26] Beals, R. Characterization of pseudodifferential operator and application / R. Beals // Duke Mathematical Journal. — 1977. — Vol. 44, No. 1. — P. 45–57.
- [27] Beals, R. L^p and Hölder estimates for pseudodifferential operators: Necessary conditions / R. Beals // Harmonic analysis in Euclidean spaces, Part 2, Williamstown/Massachusetts 1978, Proc. Symp. Pure Math., — 1979. — Vol. 35. — P. 153–157.
- [28] Beals, R. L^p and Hölder estimates for pseudodifferential operators: Sufficient conditions / R. Beals // Annales de l’Institut Fourier. — 1979. — Vol. 29, No. 3. — P. 239–260.
- [29] Beals, R. Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators. I / R. Beals, Ch. Fefferman // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1974. — Vol. 27, No. 1. — P. 1–24.
- [30] Beals, R. Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators. II / R. Beals // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1974. — Vol. 27. — P. 161–205.
- [31] Beauzamy, B. Espaces de Sobolev et de Besov d’ordre variable définis sur L_p / B. Beauzamy // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris. — 1972. — Vol. 274. — P. 1935–1938.
- [32] Bownik, M. Atomic and molecular decompositions of anisotropic Besov spaces / M. Bownik // Mathematische Zeitschrift. — 2005. — Vol. 250, No. 1. — P. 539–571.

- [33] Calderón, A. P. A class of bounded pseudodifferential operators / A. P. Calderón, R. Vaillancourt // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1972. — Vol. 69, No. 5. — P. 1185–1187.
- [34] Calderón, A. P. Singular integral operators and differential equations / A. P. Calderón, A. Zygmund // American Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 79, No. 4. — P. 289–309.
- [35] Dachkovski, S. Anisotropic function spaces and related semi-linear hypoelliptic equations / S. Dachkovski // Mathematische Nachrichten. — 2003. — Vol. 248–249. — P. 40–61.
- [36] Diening, L. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents / L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruzicka. — Berlin: Springer, 2011. — 509 p.
- [37] Drihem, D. Boundedness of non regular pseudodifferential operators on variable Besov spaces / D. Drihem, W. Hebbache // Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications. — 2017. — Vol. 8, No. 2. — P. 167–189.
- [38] Drihem, D. Continuity of non-regular pseudodifferential operators on variable Triebel-Lizorkin spaces / D. Drihem, W. Hebbache // Annales Polonici Mathematici. — 2019. — Vol. 122, No. 3. — P. 233–248.
- [39] Farkas, W. Atomic and subatomic decompositions in anisotropic function spaces / W. Farkas // Mathematische Nachrichten. — 2000. — Vol. 209, No. 1. — P. 83–113.
- [40] Gilbarg, D. Intermediate Schauder estimates / D. Gilbarg, L. Hörmander // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1980. — Vol. 74, No. 4. — P. 297–318.

- [41] Grafakos, L. Modern Fourier Analysis / L. Grafakos. — New York: Springer, 2014. — 624 p.
- [42] Hörmander, L. Pseudo-differential operators / L. Hörmander // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1965. — Vol. 18, No. 3. — P. 501–517.
- [43] Hörmander, L. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations / L. Hörmander // Singular Integrals / Ed. A. P. Calderon. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1966. — Vol. 10. — P. 138–183.
- [44] Hörmander, L. Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems / L. Hörmander // Annals of Mathematics. Second Series. — 1966. — Vol. 83, No. 1. — P. 129–209.
- [45] Hörmander, L. The analysis of linear partial differential operators. I: Distribution theory and Fourier analysis / L. Hörmander. — Springer, Cham, 1983. — 440 p.
- [46] Hörmander, L. The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients / L. Hörmander. — Springer, Cham, 1983. — 395 p.
- [47] Hörmander, L. The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators / L. Hörmander. — Springer, Cham, 1985. — 525 p.
- [48] Hörmander, L. The analysis of linear partial differential operators. IV: Fourier integral operators / L. Hörmander. — Springer, Cham, 1985. — 352 p.

- [49] Hörmander, L. The Weyl calculus of pseudo-differential operators / L. Hörmander // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1979. — Vol. 32, No. 3. — P. 359–443.
- [50] Karapetians, N. K. Fractional integrals and singular integrals in the Hölder classes of variable order / N. K. Karapetians, A. I. Ginzburg // Integral Transforms and Special Functions. — 1994. — Vol. 2, No. 2. — P. 91–106.
- [51] Kohn, J. J. An algebra of pseudo-differential operators / J. J. Kohn, L. Nirenberg // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1965. — Vol. 18, No. 1-2. — P. 269–305.
- [52] Kohn, J. J. Non-coercive boundary value problems / J. J. Kohn, L. Nirenberg // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1965. — Vol. 18, No. 3. — P. 443–492.
- [53] Krein, S. G. Scales of Banach spaces / S. G. Krein, Yu. I. Petunin // Russian Mathematical Surveys. — 1966. — Vol. 21, No. 2. — P. 85–159.
- [54] Kryakvin, V. D. Pseudodifferential operators in weighted Hölder-Zygmund spaces of variable smoothness / V. D. Kryakvin, V. S. Rabinovich // Large truncated Toeplitz matrices, Toeplitz operators, and related topics. The Albrecht Böttcher anniversary volume. — Basel: Birkhäuser, 2017. — P. 511–531.
- [55] Kryakvin, V. D. Pseudodifferential operators on Besov spaces of variable smoothness / V. D. Kryakvin, V. S. Rabinovich // Mathematical Notes. — 2018. — Vol. 104, No. 4. — P. 545–558.

- [56] Krylov, N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces / N. V. Krylov. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1996. — 164 p.
- [57] Kumano-go, H. Algebras of pseudo-differential operators / H. Kumano-go // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section IA, Mathematics. — 1970. — Vol. 17. — P. 31–50.
- [58] Kumano-go, H. On the uniqueness for the solution of the Cauchy problem / H. Kumano-go // Osaka Mathematical Journal. — 1963. — Vol. 15. — P. 151–172.
- [59] Kumano-go, H. Pseudo-differential operators / H. Kumano-go. — Cambridge, Massachusetts - London: The MIT Press, 1982. — 473 p.
- [60] Leopold, H.-G. Boundedness of anisotropic pseudo-differential operators in function spaces of Besov-Hardy-Sobolev type / H.-G. Leopold // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1986. — Vol. 5, No. 5. — P. 409–417.
- [61] Leopold, H.-G. Embedding of function spaces of variable order of differentiation in function spaces of variable order of integration / H.-G. Leopold // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1999. — Vol. 49, No. 3. — P. 633–644.
- [62] Leopold, H.-G. On Besov spaces of variable order of differentiation / H.-G. Leopold // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1989. — Vol. 8, No. 1. — P. 69–82.
- [63] Palais, R. S. (ed.) Seminar on the Atiyah-Singer index theorem / R. S. Palais (ed.). — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1965. — 366 p.
- [64] Peetre, J. New Thoughts on Besov Spaces / J. Peetre. — Durham: Duke University, 1976. — 305 p.

- [65] Rabinovich, V. S. An Introductory Course on Pseudodifferential Operators / V. S. Rabinovich. — Lisboa: Instituto Superior Técnico, 1998. — 108 p.
- [66] Rabinovich, V. S. Boundedness and Fredholmness of pseudodifferential operators in variable exponent spaces / V. S. Rabinovich, S. G. Samko // Integral Equations and Operator Theory. — 2008. — Vol. 60, No. 4. — P. 507–537.
- [67] Rabinovich, V. S. Fredholm property and essential spectrum of 3-D Dirac operators with regular and singular potentials / V. S. Rabinovich // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2022. — Vol. 67, No. 4. — P. 938–961.
- [68] Rabinovich, V. S. Fredholm property of pseudodifferential operators on $\mathbb{R}^n$ in the scale of the spaces $L_{2,p}$ / V. S. Rabinovich // Siberian Mathematical Journal. — 1988. — Vol. 29, No. 4. — P. 635–646.
- [69] Rabinovich, V. S. Fredholm property of pseudodifferential operators on weighted Hölder-Zygmund spaces / V. S. Rabinovich // Pseudo-differential operators and related topics. — Basel: Birkhäuser, 2006. — P. 95–114.
- [70] Rabinovich, V. S. On the Fredholmness of pseudodifferential operators on $\mathbb{R}^n$ in the scale of the spaces $L_{2,p}$ / V. S. Rabinovich // Siberian Mathematical Journal. — 1988. — Vol. 29, No. 4(170). — P. 149–161.
- [71] Rabinovich, V. S. The Fredholm property and essential spectra of pseudodifferential operators on non-compact manifolds and limit operators / V. S. Rabinovich // Complex analysis and dynamical systems VI. Part 1: PDE, differential geometry, Radon transform. — Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Ramat Gan: Bar-Ilan University, 2015. — P. 277–290.

- [72] Samko, S. G. Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic / S. G. Samko, B. Vakulov // *Mathematische Nachrichten*. — 2011. — Vol. 284, No. 2-3. — P. 355–369.
- [73] Seeley, R. T. Integro-differential operators on vector bundles / R. T. Seeley // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1965. — Vol. 117. — P. 167–204.
- [74] Seeley, R. T. Refinement of the functional calculus of Calderon and Zygmund / R. T. Seeley // *Indagationes Mathematicae*. — 1965. — Vol. 27. — P. 521–531.
- [75] Stein, E. M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals / E. M. Stein. — Princeton: Princeton University Press, 1993. — 695 p.
- [76] Taylor, M. E. Beals–Cordes-type characterizations of pseudodifferential operators / M. E. Taylor // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1997. — Vol. 125. — P. 1711–1716.
- [77] Taylor, M. E. Pseudodifferential operators / M. E. Taylor. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1981. — 451 p.
- [78] Taylor, M. E. Tools for PDE. Pseudodifferential operators, paradifferential operators, and layer potentials / M. E. Taylor. — Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2000. — 257 p.
- [79] Triebel, H. Theory of function spaces. III / H. Triebel. — Basel: Birkhäuser, 2006. — 426 p.

- [80] Unterberger, A. Les opérateurs de Calderon-Zygmund précisés / A. Unterberger, J. Bokobza // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris. — 1964. — Vol. 259. — P. 1612–1614.
- [81] Unterberger, A. Sur les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre variable / A. Unterberger, J. Bokobza // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris. — 1965. — Vol. 261. — P. 2271–2273.
- [82] Unterberger, A. Sur une généralisation des opérateurs de Calderon-Zygmund et des espaces H^s / A. Unterberger, J. Bokobza // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris. — 1965. — Vol. 260. — P. 3265–3267.
- [83] Yamazaki, M. A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I. Boundedness on spaces of Besov type / M. Yamazaki // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section IA, Mathematics. — 1986. — Vol. 33. — P. 131–174.
- [84] Yan, L. Pseudo-Differential Operators on Sobolev and Lipschitz Spaces / L. Yan, L. Shan Zhen // Acta Mathematica Sinica (English Series). — 2010. — Vol. 26, No. 1. — P. 131–142.
- [85] Бабаев, А. Б. Анизотропные псевдодифференциальные операторы и уравнения в пространствах Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости / А. Б. Бабаев, В. Д. Кряквин // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2026 — № 8. — С. 21–32. DOI: [10.26907/0021-3446-2026-8-21-32](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2026-8-21-32)
- [86] Бабаев, А. Б. Об эквивалентных нормах анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости / А. Б. Бабаев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2024. — № 4-1(224-1). — С. 5–12. DOI: [10.18522/1026-2237-2024-4-1-5-12](https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-4-1-5-12)

- [87] Babaev, A. Characterization of anisotropic pseudodifferential operators in anisotropic Hölder–Zygmund spaces / A. Babaev, V. Kryakvin // Journal of Mathematical sciences. — 2026. DOI: [10.1007/s10958-026-08307-4](https://doi.org/10.1007/s10958-026-08307-4)
- [88] Бабаев, А. Б. О принадлежности пространству Зигмунда решений краевой задачи для уравнения Пуассона / А. Б. Бабаев // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня — 5 июля 2023 г.) — Т. 15. — С. 168–169.
- [89] Бабаев, А. Б. Шкала анизотропных пространств Гёльдера-Зигмунда переменной гладкости / А. Б. Бабаев // XXX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Широкая Балка, 27 мая – 3 июня 2024 г.) — С. 21.
- [90] Бабаев, А. Б. Анизотропные псевдодифференциальные операторы в пространствах Гёльдера - Зигмунда переменной гладкости и некоторые приложения / А. Б. Бабаев, В. Д. Кряквин // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня–5 июля 2025 г.) — Т. 17. — С. 61–63.
- [91] Бабаев, А. Б. О характеристике анизотропных псевдодифференциальных операторов / А. Б. Бабаев // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2026 : Материалы международной Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 24–27 января 2026 г.) — С. 33–35.