

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Тихонова Галина Александровна

**Некоторые классы интегральных операторов и уравнений с
однородными ядрами**

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Авсянкин Олег Геннадиевич

Ростов-на-Дону — 2026

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Интегральные операторы с однородными ядрами в L_p -пространствах с радиальным весом	14
1.1 Ограниченность многомерных интегральных операторов с однородными ядрами	14
1.1.1 Пространство $L_p(\mathbb{R}^n, w)$	14
1.1.2 Достаточные условия ограниченности	15
1.1.3 Необходимые условия ограниченности	20
1.2 Компактность многомерных интегральных операторов с одно- родными ядрами	25
1.2.1 Основная теорема	25
1.2.2 Следствия из основной теоремы	35
1.2.3 Случай области, содержащей только одну особую точку	42
Глава 2. Интегральные операторы с однородными степени α ядрами	44
2.1 Ограниченность интегральных операторов с однородными сте- пени α ядрами	44
2.1.1 Необходимость условия $\alpha \geq -n$ (или $\alpha \leq -n$)	44
2.1.2 Достаточные условия ограниченности	46
2.1.3 Компактность операторов	53
2.1.4 Одномерные интегральные операторы	55
2.2 Операторы с однородными ядрами в пространствах непрерыв- ных функций	57
2.2.1 Теоремы об ограниченности	58
2.2.2 Действие на функции с заданной асимптотикой	59

Глава 3. Интегральные операторы вольтерровского типа с однородными ядрами	66
3.1 Предварительные сведения	66
3.2 Интегральные операторы вольтерровского типа с однородными ядрами и их свойства	67
3.2.1 Постановка задачи.	67
3.2.2 Композиции операторов.	72
3.3 Алгебра операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами	74
3.3.1 Алгебра $\mathfrak{A}$ и фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$	74
3.3.2 Критерий нетеровости в алгебре $\mathfrak{A}$	82
3.4 Интегральные операторы вольтерровского типа с переменным «нижним» пределом	84
3.5 Операторы вольтерровского типа с однородными ядрами в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$	87
Глава 4. Построение решений многомерных интегральных уравнений с однородными радиальными ядрами	94
4.1 Формула решения интегрального уравнения с однородным радиальным ядром	94
4.1.1 Постановка задачи и условия разрешимости	94
4.1.2 Построение решения уравнения	96
4.1.3 Решение интегрального уравнения с полурadiaльным ядром	101
4.2 Формула решения интегрального уравнения вольтерровского типа с однородным радиальным ядром	104
Заключение	109
Список обозначений	110
Литература	111

Введение

Актуальность темы. Интегральные операторы и уравнения с однородными ядрами занимают весьма важное место в современной математике и её приложениях.

Первые результаты в этом направлении были получены Г. Харди и Дж. Литтлвудом (см. [56]), которые рассматривали интегральные операторы с однородными степени (-1) ядрами, действующие в пространстве $L_p(\mathbb{R}^1)$. Впоследствии этот класс операторов исследовался в трудах Л. Г. Михайлова [44], [45], Н. К. Карапетянца и С. Г. Самко [40], [67] и некоторых других авторов. Важную роль здесь сыграла тесная связь одномерных интегральных операторов с однородными ядрами и операторов свёртки с суммируемыми ядрами, что позволило применять известные результаты для свёрточных операторов при анализе операторов с однородными ядрами.

Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами, действующие в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, стали предметом глубоких исследований в конце 1960-х — начале 1970-х годов. Интерес к ним был обусловлен, прежде всего, задачами, связанными с исследованием эллиптических уравнений вида

$$\Delta u + \sum_{k=1}^n \frac{a_k(x)}{|x|} u'_{x_k} + \frac{b(x)}{|x|^2} u = 0$$

в областях, содержащих точку $x = 0$ (см., например, [45], [48]). С другой стороны, И. Б. Симоненко в работе [50] рассмотрел класс абстрактных однородных операторов, т. е. операторов, коммутирующих со всеми операторами растяжения. К этому классу, в частности, относятся интегральные операторы с однородными ядрами. Статья [50] послужила еще одним стимулом для исследования многомерных интегральных операторов с однородными ядрами.

В 1960-е — 1970-е годы в работах Л. Г. Михайлова (см. например, об-

зорную статью [46]) были установлены достаточные условия ограниченности многомерных интегральных операторов в различных функциональных пространствах. Кроме того, им была предложена схема исследования нетеровости и вычисления индекса для данных операторов. Подчеркнем, что в работах Л. Г. Михайлова рассматривались ядра, инвариантные относительно группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$.

Идеи, заложенные Л. Г. Михайловым, получили дальнейшее развитие в исследованиях Н. К. Карапетянца [35]– [38]. Им были установлены достаточные, а в случае неотрицательного ядра и необходимые условия ограниченности операторов с однородными ядрами в L_p -пространствах, в предположении, что ядро не является инвариантным относительно группы вращений. Кроме того, Н. К. Карапетянц рассмотрел интегральные операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами, выделив достаточно широкие классы коэффициентов, обеспечивающих компактность таких операторов. Основные результаты этих исследований позднее вошли в его докторскую диссертацию [34], а затем в монографию [67].

В последние 20—30 лет исследования интегральных операторов с однородными ядрами стали особенно интенсивными. В основном они затрагивали операторы с инвариантными относительно всех вращений ядрами. Эта тематика развивается в нескольких направлениях.

Первое направление связано с исследованием банаховых алгебр, порождаемых многомерными интегральными операторами с однородными ядрами. Данное направление получило развитие в работах О. Г. Авсянкина, Н. К. Карапетянца и В. М. Деундяка ([1]– [5], [13], [14], [61], [62]). Для таких алгебр построено символьное исчисление, позволившее установить необходимые и достаточные условия нетеровости и/или обратимости операторов, а также получить формулы для вычисления их индекса.

Другое направление — это исследование применимости проекционных методов к многомерным интегральным операторам с однородными и неоднородными ядрами (см. [7], [10], [11], [16] и [28]). В рамках данного

направления также изучалось предельное поведение спектральных характеристик (спектров, псевдоспектров и сингулярных значений) «усечённых» операторов.

Еще одно направление исследований связано с изучением асимптотического поведения решений интегральных уравнений второго рода с однородными ядрами. Некоторые результаты этих исследований отражены в [57] и [58].

Отдельный интерес представляют исследования интегральных операторов с однородными ядрами в различных функциональных пространствах, отличных от пространств Лебега. В работах [21], [22] и [39] такие операторы рассматривались в пространствах BMO и VMO . В статьях [54] и [55] интегральные операторы с однородными ядрами рассматривались в гранд-пространствах Лебега, а в статьях [15], [60] и [68] — в пространствах типа Морри.

На рубеже 2010-х годов В. М. Деундяк и его ученики начали изучение многомерных интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа. Эти ядра не являются инвариантными относительно группы вращений. Для исследования нетеровости вышеупомянутых операторов применялся операторнозначный символ, который строился с использованием изоморфизма подобия между операторами с однородными ядрами компактного типа и операторами свёртки с компактными коэффициентами [25]–[27], [43].

Завершая краткий исторический обзор, отметим, что устойчивый интерес к интегральным операторам с однородными ядрами в значительной степени обусловлен междисциплинарными связями. Такие операторы возникают в некоторых вопросах механики [18], [29], при исследовании краевых задач теории аналитических функций [51], в дифференциальной геометрии [69] и в общей теории линейных однородных операторов [64]. Они также играют ключевую роль в исследовании мультипликативных дискретных свёрток [31]–[32].

Цель работы. *Целью* данной диссертационной работы является нахождение условий ограниченности, компактности и нетеровости некоторых классов многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в обычных и весовых пространствах Лебега, а также построение решений интегральных уравнений с радиальными однородными ядрами.

Методы исследования. Используются методы функционального анализа и гармонического анализа, а также методы теории банаховых алгебр. Кроме того, использованы специальные подходы исследования интегральных операторов с однородными ядрами.

Научная новизна исследования. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическое значение исследования состоит в том, что его результаты относятся к области фундаментальных исследований.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования многомерных интегральных уравнений с однородными ядрами, возникающих в некоторых задачах математической физики, теории потенциала и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Основные положения, выносимые на защиту.

1) Получены достаточные условия ограниченности многомерных интегральных операторов с однородными степени $(-n)$ ядрами в весовых пространствах Лебега с радиальным весом. В случае, когда ядро интегрального оператора неотрицательно, также получены необходимые условия ограниченности.

2) Получены достаточные условия компактности в весовых пространствах Лебега с радиальным весом операторов, являющихся произведением интегрального оператора с однородным степени $(-n)$ и инвариантным относительно группы вращений $SO(n)$ ядром и оператора умножения на существенно ограниченную функцию.

3) Найдены условия ограниченности и компактности в пространствах

Лебега многомерных интегральных операторов с однородными степени α ядрами, где $\alpha \neq -n$.

4) Получен критерий нетеровости и формула для вычисления индекса операторов из банаховой алгебры, порожденной всеми вольтерровскими интегральными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, и операторами умножения на непрерывные функции.

5) Найдены формулы точных решений для некоторых классов многомерных интегральных уравнений с однородными степени $(-n)$ радиальными ядрами.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, выступлениями на конференциях и семинарах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях.

Апробация результатов. Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1) XXVIII и XXXI международные научные конференции «Математика. Экономика. Образование» (Новороссийск, 2022, 2025);

2) XVIII и XX Владикавказская молодежная математическая школа (Владикавказ, 2023, 2025);

3) международная научная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – XV» (Ростов-на-Дону, 2025);

4) семинар кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (руководители семинара — О. Г. Авсянкин и А. Н. Карапетянц).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 8 публикациях: [4], [6], [17], [33], [52], [53], [59], [63]. Работы [6], [17] опубликованы в журнале, входящем в Перечень ВАК РФ. Статьи [4], [59] и [63] входят в базу данных между-

народных индексов научного цитирования Scopus. Статьи [33], [52] и [53] опубликованы в материалах научных конференций.

Статьи [4], [6], [17], [59] и [63] опубликованы в соавторстве с научным руководителем О. Г. Авсянкиным. В этих работах О. Г. Авсянкину принадлежат постановка задач, указание методов исследования и общее руководство. Автору диссертации принадлежат формулировки и доказательства всех результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы, содержащего 69 наименований. Объем работы составляет 119 страниц.

Первая глава диссертации посвящена исследованию в весовом пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, где w — радиальная функция, интегрального оператора вида

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (0.0.1)$$

где функция $k(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, измерима и однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y), \quad \forall \alpha > 0.$$

Основное внимание в этой главе уделено вопросам ограниченности и компактности таких операторов в пространствах Лебега с радиальным весом.

В параграфе 1.1 исследуется ограниченность оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Получены достаточные условия ограниченности этого оператора. В случае неотрицательного ядра $k(x, y)$ установлены и необходимые условия ограниченности оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Показано, что в случае степенных весов полученные результаты согласуются с известными классическими утверждениями.

В параграфе 1.2 исследуется компактность в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ операторов вида $M_a K$ и $K M_a$, где K — оператор вида (0.0.1), M_a — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом требуется, чтобы

ядро $k(x, y)$ было инвариантным относительно группы вращений $SO(n)$, т. е. удовлетворяло условию

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y), \quad \forall \omega \in SO(n).$$

Основным результатом этого параграфа является теорема 1.2.1, которая содержит условия на ядро $k(x, y)$ и коэффициент $a(x)$, достаточные для компактности оператора $M_a K$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Кроме того, получено несколько следствий теоремы 1.2.1. В этих следствиях на весовую функцию $w(|x|)$ накладываются дополнительные условия, позволяющие существенно упростить условия на ядро $k(x, y)$, сформулированные в теореме 1.2.1.

В заключительной части этого параграфа аналогичные результаты получены для операторов вида $K M_a$. Это достигается с использованием свойств сопряжённых операторов и позволяет получить симметричную теорию компактности для обоих типов композиций операторов.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию интегральных операторов с однородными степени α ($\alpha \neq -n$) ядрами в пространствах Лебега и пространствах непрерывных функций.

В параграфе 2.1 изучается ограниченность и компактность интегральных операторов с однородными степени α ядрами в пространствах $L_p(\mathbb{B}_n)$ и $L_p(\mathbb{C}\mathbb{B}_n)$, где $\mathbb{B}_n$ и $\mathbb{C}\mathbb{B}_n$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и его дополнение соответственно. Прежде всего установлены условия на показатель однородности α , необходимые для ограниченности таких операторов. Основываясь на них, получены достаточные условия ограниченности операторов. Отдельно рассмотрен случай ядер, инвариантных относительно группы вращений $SO(n)$, для которых условия ограниченности существенно упрощаются. Во второй части этого параграфа получены достаточные условия компактности интегральных операторов с однородными степени $\alpha \neq -n$ ядрами. В частности, показано, что оператор с ядром, инвариантным относительно группы вращений, всегда компактен. В заключение рассмотрены одномер-

ные интегральные операторы в пространствах $L_p(0, 1)$ и $L_p(1, \infty)$.

В параграфе 2.2 интегральные операторы с однородными степени α ядрами рассматриваются в пространствах непрерывных функций. Найдены достаточные условия ограниченности операторов в этих пространствах. Основная часть этого параграфа посвящена изучению действия одномерных интегральных операторов вольтерровского типа с однородными степени $\alpha \leq -1$ ($\alpha \geq -1$) ядрами на функции, имеющие заданное асимптотическое поведение на бесконечности (в окрестности нуля).

В третьей главе диссертации основным объектом исследования являются действующие в $L_p(\mathbb{B}_n)$ операторы вида

$$(A\varphi)(x) = \lambda\varphi + a(x) \int_{|y| < |x|} k(x, y)\varphi(y) dy + (T\varphi)(x), \quad x \in \mathbb{B}_n, \quad (0.0.2)$$

где $a(x)$ — непрерывная функция, ядро $k(x, y)$ однородно степени $(-n)$ и инвариантно относительно группы вращений, а T — компактный оператор. Также исследуется банахова алгебра, порожденная всеми операторами вида (0.0.2).

В параграфе 3.1 приведены необходимые предварительные сведения из теории нетеровых операторов.

В параграфе 3.2 изучаются интегральные операторы вида (0.0.2). Для таких операторов вводится понятие символа и в терминах невырожденности символа устанавливается критерий нетеровости оператора. В случае нетеровости оператора вида (0.0.2) установлена формула для вычисления его индекса. В частном случае, когда $a(x) \equiv 1$ и T — нулевой оператор, подсчитаны дефектные числа оператора, а также найдены условия его обратимости. В конце данного параграфа рассмотрены композиции операторов вида (0.0.2) и доказана компактность коммутатора таких операторов.

В параграфе 3.3 построена банахова алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная всеми операторами вида (0.0.2). Множество $\mathcal{T}$ всех компактных операторов является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$, что позволяет рассмотреть фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Показано, что алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ коммутативна,

а ее пространство максимальных идеалов гомеоморфно компакту $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ (здесь $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ — компактификация $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ бесконечно удаленной точкой). Опираясь на исследование фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$, для алгебры $\mathfrak{A}$ построено символьное исчисление, т. е. каждому оператору $B \in \mathfrak{A}$ поставлена в соответствие определенная функция $\sigma_B(m, \xi)$, непрерывная на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$. Основным результатом данного параграфа является теорема 3.3.2, согласно которой оператор $B \in \mathfrak{A}$ является нетеровым тогда и только тогда, когда для его символа выполнено условие

$$\sigma_B(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}.$$

Также получена формула для вычисления индекса этого оператора.

В параграфе 3.4 в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассмотрены интегральные операторы вида

$$(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi)(x) = \int_{|x| < |y| < 1} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{B}_n,$$

где функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$. По аналогии с результатами параграфа 3.2 для операторов вида

$$\mathcal{A} = \lambda I + M_a \widetilde{\mathcal{K}} + T,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in C(\mathbb{B}_n)$, T — компактный оператор, установлены критерий нетеровости и формула для вычисления индекса.

В параграфе 3.5 исследуются интегральные операторы вольтерровского типа в пространстве $L_p(\mathbb{C}\mathbb{B}_n)$. Получены критерии обратимости и нетеровости, а также формула вычисления индекса.

Четвёртая глава диссертации посвящена построению точных решений интегральных уравнений с однородными радиальными ядрами. Отметим, что хотя для многих классов интегральных операторов с однородными степени $(-n)$ ядрами условия обратимости известны, решения многомерных интегральных уравнений с однородными ядрами ранее практически

не строились. Исключением является лишь работа [8], где решение такого уравнения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ строилось в виде ряда по сферическим гармоникам.

В параграфе 4.1 в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассматривается интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$. В предположении, что данное уравнение однозначно разрешимо при любом свободном члене, получена формула решения этого уравнения. Во второй части параграфа исследуется интегральное уравнение с полурадiallyм ядром. В общем случае не удается получить формулу решения. Однако в случае радиального свободного члена получена формула решения, аналогичная результату первой части параграфа.

В параграфе 4.2 в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассматривается интегральное уравнение вольтерровского типа вида

$$\varphi(x) = \int_{|y| < |x|} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{B}_n.$$

В предположении, что символ уравнения является невырожденным, построено решение этого уравнения.

Благодарности. Диссертационная работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России № 075-02-2026-1316.

Глава 1.

Интегральные операторы с однородными ядрами в L_p -пространствах с радиальным весом

§1.1 Ограниченность многомерных интегральных операторов с однородными ядрами

п. 1.1.1 Пространство $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества целых, вещественных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и функция $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима. Обозначим через $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n, w)} = \|f\|_{p, w} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(|x|) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, w)} = \|f\|_{\infty, w} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| w(|x|).$$

В случае $w(|x|) \equiv 1$ пространство $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ совпадает с обычным пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$. Для любого $1 \leq p \leq \infty$ положим $p' = p/(p-1)$.

Следуя монографии [41, с. 75], назовем функцию

$$w_*(t) = \sup_{s>0} \frac{w(ts)}{w(s)}$$

растяжением функции $w(t)$. Из определения следует, что

$$w(ts) \leq w_*(t)w(s), \quad w(ts) \leq w_*(s)w(t) \quad (1.1.1)$$

для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$.

п. 1.1.2 Достаточные условия ограниченности

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1.2)$$

где функция $k(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее предполагается, что $n \geq 2$), измерима и однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y), \quad \forall \alpha > 0. \quad (1.1.3)$$

В работе [54] были получены достаточные условия ограниченности оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ при дополнительном предположении инвариантности ядра относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$. Для удобства сформулируем это утверждение.

Предложение 1.1.1. [54] Пусть функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y), \quad \forall \omega \in SO(n). \quad (1.1.4)$$

Тогда если

$$\begin{aligned} \kappa &= \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} (w_*(1/|y|))^{1/p} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, e_1)| |x|^{-n/p'} (w_*(|x|))^{1/p} dx < \infty, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

то оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, причем

$$\|K\varphi\|_{p,w} \leq \kappa \|\varphi\|_{p,w}.$$

Цель данного раздела — найти достаточные условия ограниченности оператора K в случае ядра, не удовлетворяющего условию (1.1.4).

Теорема 1.1.1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условию (1.1.3), а также условиям:

$$\kappa_1 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma, y)| |y|^{-n/p} (w_*(1/|y|))^{1/p} dy < \infty, \quad (1.1.6)$$

$$\kappa_2 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, \sigma)| |x|^{-n/p'} (w_*(|x|))^{1/p} dx < \infty. \quad (1.1.7)$$

Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, причем справедливо неравенство

$$\|K\varphi\|_{p,w} \leq \kappa_1^{1/p'} \kappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{p,w}. \quad (1.1.8)$$

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} |(K\varphi)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |\varphi(y)| dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ |k(x, y)|^{1/p'} |y|^{-n/pp'} \left(\frac{w(|x|)}{w(|y|)} \right)^{1/pp'} \right\} \times \\ &\times \left\{ |k(x, y)|^{1/p} |y|^{n/pp'} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/pp'} |\varphi(y)| \right\} dy. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|(K\varphi)(x)| \leq (\mathcal{J}(x))^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |y|^{n/p'} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/p'} |\varphi(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

где

$$\mathcal{J}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |y|^{-n/p} \left(\frac{w(|x|)}{w(|y|)} \right)^{1/p} dy.$$

После замены $y = |x|t$, с учетом однородности функции $k(x, y)$, получим

$$\mathcal{J}(x) = |x|^{-n/p} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x', t)| |t|^{-n/p} \left(\frac{w(|x|)}{w(|x||t|)} \right)^{1/p} dt.$$

Заметим, что в силу неравенства (1.1.1)

$$w(|x|) \leq w_*(1/|t|) w(|x||t|).$$

Тогда

$$\mathcal{J}(x) \leq |x|^{-n/p} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x', t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \leq \kappa_1 |x|^{-n/p}$$

Таким образом,

$$|(K\varphi)(x)| \leq \kappa_1^{1/p'} |x|^{-n/pp'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |y|^{n/p'} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/p'} |\varphi(y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|K\varphi\|_{p,w} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(K\varphi)(x)|^p w(|x|) dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \kappa_1^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n/p'} w(|x|) dx \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |y|^{n/p'} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/p'} |\varphi(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\|K\varphi\|_{p,w} \leq \kappa_1^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p w(|y|) |y|^{n/p'} dy \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |x|^{-n/p'} \left(\frac{w(|x|)}{w(|y|)} \right)^{1/p} dx \right)^{1/p}.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $x = |y|t$. Тогда, используя условие (1.1.3), получим

$$\begin{aligned} \|K\varphi\|_{p,w} &\leq \kappa_1^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p w(|y|) dy \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, y')| |t|^{-n/p'} \left(\frac{w(|y||t|)}{w(|y|)} \right)^{1/p} dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \kappa_1^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p w(|y|) dy \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, y')| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \kappa_1^{1/p'} \left(\operatorname{ess\,sup}_{y' \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, y')| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt \right)^{1/p} \|\varphi\|_{p,w} = \kappa_1^{1/p'} \kappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{p,w} \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Замечание 1.1.1. В случае $p = 1$ достаточно только одного условия (1.1.7). Тогда

$$\|K\varphi\|_{1,w} \leq \kappa_2 \|\varphi\|_{1,w}.$$

Замечание 1.1.2. Для функции $k(x, y)$, инвариантной относительно группы вращений $SO(n)$, теорема 1.1.1 совпадает с предложением 1.1.1. В самом деле, пусть кроме условий теоремы 1.1.1 функция $k(x, y)$ удовлетворяет условию (1.1.4). Тогда с помощью замены переменных $y = \omega_\sigma(t)$, где ω_σ — любой элемент группы $SO(n)$, удовлетворяющий условию $\omega_\sigma(e_1) = \sigma$, формула (1.1.6) приводится к виду

$$\kappa_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt < \infty.$$

Аналогично, формула (1.1.7) приводится к виду

$$\kappa_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, e_1)| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt < \infty.$$

Учитывая, что $\kappa_1 = \kappa_2$, получаем предложение 1.1.1.

Замечание 1.1.3. В случае степенного веса $w(|x|) = |x|^\alpha$ данная теорема совпадает с теоремой Н. К. Карапетянца, установленной в [35].

Напомним, что функция $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется полумультипликативной, если

$$w(t_1 t_2) \leq w(t_1) w(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Для полумультипликативной функции $w(t)$ справедливо неравенство

$$w_*(t) = \sup_{s>0} \frac{w(ts)}{w(s)} \leq \sup_{s>0} \frac{w(t)w(s)}{w(s)} = w(t). \quad (1.1.9)$$

Следствие 1.1.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, весовая функция w полумультипликативна и пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условию (1.1.3), а также условиям:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma, y)| |y|^{-n/p} (w(1/|y|))^{1/p} dy < \infty, \\ \varkappa_2 &= \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, \sigma)| |x|^{-n/p'} (w(|x|))^{1/p} dx < \infty. \end{aligned}$$

Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, причем

$$\|K\varphi\|_{p,w} \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{p,w}.$$

Доказательство. Из неравенства (1.1.9) следует, что $\kappa_1 \leq \varkappa_1$ и $\kappa_2 \leq \varkappa_2$.
И остается лишь применить теорему 1.1.1. ■

В заключение рассмотрим случай пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n, w)$.

Теорема 1.1.2. Пусть ядро $k(x, y)$ оператора K однородно степени $(-n)$ и удовлетворяет условию

$$\kappa_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma, y)| w_*(1/|y|) dy < \infty. \quad (1.1.10)$$

Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n, w)$, причем

$$\|K\varphi\|_{\infty, w} \leq \kappa_\infty \|\varphi\|_{\infty, w}. \quad (1.1.11)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |(K\varphi)(x)| w(|x|) &\leq w(|x|) \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| |\varphi(y)| dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| \frac{w(|x|)}{w(|y|)} |\varphi(y)| w(|y|) dy \leq \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} (|\varphi(y)| w(|y|)) \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| \frac{w(|x|)}{w(|y|)} dy. \end{aligned}$$

Сделаем в интеграле замену $y = |x|t$. Тогда получим

$$\begin{aligned} |(K\varphi)(x)| w(|x|) &\leq \|\varphi\|_{\infty, w} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x', t)| \frac{w(|x|)}{w(|x||t|)} dt \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty, w} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x', t)| w_*(1/|t|) dt \leq \kappa_\infty \|\varphi\|_{\infty, w}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что неравенство (1.1.11). ■

Следствие 1.1.2. Пусть весовая функция w полумультимпликативна и ядро $k(x, y)$ оператора K однородно степени $(-n)$ и удовлетворяет условию

$$\varkappa_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma, y)| w(1/|y|) dy < \infty.$$

Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n, w)$, причем

$$\|K\varphi\|_{\infty, w} \leq \kappa_\infty \|\varphi\|_{\infty, w}.$$

Доказательство. Достаточно учесть, что в силу неравенства (1.1.9) выполняется $\kappa_\infty \leq \kappa_\infty$ и воспользоваться теоремой 1.1.2. ■

п. 1.1.3 Необходимые условия ограниченности

В данном разделе мы установим условия на ядро $k(x, y)$, необходимые для ограниченности оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Теорема 1.1.3. Пусть $1 < p < \infty$, функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и неотрицательна, и оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Тогда выполнены условия

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(\sigma, t) |t|^{-n/p} (w_*(|t|))^{-1/p} dt < \infty, \quad (1.1.12)$$

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(t, \sigma) |t|^{-n/p'} (w_*(1/|t|))^{-1/p} dt < \infty. \quad (1.1.13)$$

Доказательство проведем в два этапа.

1) Применяя неравенство Гельдера и учитывая ограниченность оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, получаем неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (K\varphi)(x) \psi(x) dx \right| \leq \|K\| \|\varphi\|_{p, w} \|\psi\|_{p', w^{-p'/p}}. \quad (1.1.14)$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ |x|^{-n/p-\varepsilon} (w(|x|))^{-1/p}, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ |x|^{-n/p'-\varepsilon p/p'} (w(|x|))^{1/p}, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$, и найдем нормы функций φ и ψ в соответствующих пространствах. Имеем

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{p,w} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p w(|x|) dx \right)^{1/p} = \left(\int_{|x|>1} |x|^{-n-\varepsilon p} dx \right)^{1/p} = \\ &= \left(|\mathbb{S}_{n-1}| \int_1^\infty r^{-1-\varepsilon p} dr \right)^{1/p} = \left(\frac{|\mathbb{S}_{n-1}|}{\varepsilon p} \right)^{1/p}; \\ \|\psi\|_{p',w^{-p'/p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^{p'} w(|x|)^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} = \\ &= \left(\int_{|x|>1} |x|^{-n-\varepsilon p} dx \right)^{1/p'} = \left(\frac{|\mathbb{S}_{n-1}|}{\varepsilon p} \right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\varphi\|_{p,w} \|\psi\|_{p',w^{-p'/p}} = \frac{|\mathbb{S}_{n-1}|}{\varepsilon p}. \quad (1.1.15)$$

Преобразуем левую часть неравенства (1.1.14). Имеем

$$\begin{aligned}J &= \int_{\mathbb{R}^n} (K\varphi)(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) \varphi(y) dy = \\ &= \int_{|x|>1} |x|^{-n/p'-\varepsilon p/p'} (w(|x|))^{1/p} dx \int_{|y|>1} k(x,y) |y|^{-n/p-\varepsilon} (w(|y|))^{-1/p} dy.\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $y = |x|t$. Тогда, пользуясь однородностью функции $k(x,y)$, получим

$$J = \int_{|x|>1} |x|^{-n-\varepsilon p} (w(|x|))^{1/p} dx \int_{|t|>1/|x|} k(x',t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w(|x||t|))^{-1/p} dt.$$

Переходя к сферическим координатам $x = r\sigma$, получим

$$\begin{aligned}J &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} r^{-\varepsilon p-1} (w(r))^{1/p} dr d\sigma \int_{|t|>1/r} k(\sigma,t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w(r|t|))^{-1/p} dt = \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} r^{-\varepsilon p-1} dr d\sigma \int_{|t|>1/r} k(\sigma,t) |t|^{-n/p-\varepsilon} \left(\frac{w(r|t|)}{w(r)} \right)^{-1/p} dt \geqslant\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_1^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} r^{-\varepsilon p-1} dr d\sigma \int_{|t|>1/r} k(\sigma, t) |t|^{-n/p-\varepsilon} \left(\sup_{r>0} \frac{w(r|t|)}{w(r)} \right)^{-1/p} dt = \\
&= \int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_1^\infty r^{-\varepsilon p-1} dr \int_{|t|>1/r} k(\sigma, t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w_*(|t|))^{-1/p} dt.
\end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
J &\geq \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \left(\int_{|t|<1} k(\sigma, t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w_*(|t|))^{-1/p} dt \int_{1/|t|}^\infty r^{-\varepsilon p-1} dr + \right. \\
&\quad \left. + \int_{|t|>1} k(\sigma, t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w_*(|t|))^{-1/p} dt \int_1^\infty r^{-\varepsilon p-1} dr \right) d\sigma = \\
&= \frac{1}{\varepsilon p} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(\sigma, t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w_*(|t|))^{-1/p} \max\{1, |t|^{-1}\}^{-\varepsilon p} dt.
\end{aligned}$$

Подставив в неравенство (1.1.14), с учетом (1.1.15), получаем

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(\sigma, t) |t|^{-n/p-\varepsilon} (w_*(|t|))^{-1/p} \max\{1, |t|^{-1}\}^{-\varepsilon p} dt \leq \|K\| |\mathbb{S}_{n-1}|.$$

Отсюда на основании теоремы Фату следует условие (1.1.12).

2) Так как оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, то сопряженный оператор K^* ограничен в пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$. Тогда используя неравенство Гельдера, запишем неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) (K^* \psi_1)(x) dx \right| \leq \|K^*\| \|\varphi_1\|_{p,w} \|\psi_1\|_{p',w^{-p'/p}}. \quad (1.1.16)$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ |x|^{-n/p-\varepsilon p'/p} (w(|x|))^{-1/p}, & |x| > 1, \end{cases} \\
\psi_1(x) &= \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ |x|^{-n/p'-\varepsilon} (w(|x|))^{1/p}, & |x| > 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\|\varphi_1\|_{p,w}\|\psi_1\|_{p',w^{-p'/p}} = \left(\int_{|x|>1} |x|^{-n-\varepsilon p'} dx \right)^{1/p} \left(\int_{|x|>1} |x|^{-n-\varepsilon p'} dx \right)^{1/p'} = \frac{|\mathbb{S}_{n-1}|}{\varepsilon p'}.$$

Преобразуем левую часть неравенства (1.1.16). Имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) (K^* \psi_1)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} k(y, x) \psi_1(y) dy = \\ &= \int_{|x|>1} |x|^{-n/p-\varepsilon p'/p} (w(|x|))^{-1/p} dx \int_{|y|>1} k(y, x) |y|^{-n/p'-\varepsilon} (w(|y|))^{1/p} dy. \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $y = |x|t$ и воспользуемся однородностью функции $k(x, y)$. Тогда получим

$$J_1 = \int_{|x|>1} |x|^{-n-\varepsilon p'} (w(|x|))^{-1/p} dx \int_{|t|>1/|x|} k(t, x') |t|^{-n/p'-\varepsilon} (w(|x||t|))^{1/p} dt.$$

Переходя к сферическим координатам $x = r\sigma$, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} r^{-\varepsilon p'-1} dr d\sigma \int_{|t|>1/r} k(t, \sigma) |t|^{-n/p'-\varepsilon} \left(\frac{w(r)}{w(r|t|)} \right)^{-1/p} dt \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_1^\infty r^{-\varepsilon p'-1} dr \int_{|t|>1/r} k(t, \sigma) |t|^{-n/p'-\varepsilon} (w_*(1/|t|))^{-1/p} dt. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, после преобразований, аналогичных проведенным в части 1), получим

$$J_1 \geq \frac{1}{\varepsilon p'} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(t, \sigma) |t|^{-n/p'-\varepsilon} (w_*(1/|t|))^{-1/p} \max\{1, |t|^{-1}\}^{-\varepsilon p'} dt.$$

Подставив в неравенство (1.1.14), получаем

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(t, \sigma) |t|^{-n/p'-\varepsilon} (w_*(1/|t|))^{-1/p} \max\{1, |t|^{-1}\}^{-\varepsilon p'} dt \leq \|K\| |\mathbb{S}_{n-1}|.$$

Применив теорему Фату получаем условие (1.1.13). ■

Следствие 1.1.3. Пусть функция $k(x, y)$ неотрицательна, однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$, и пусть оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Тогда необходимо выполнено условие

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, t) |t|^{-n/p} (w_*(|t|))^{-1/p} dt = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} k(t, e_1) |t|^{-n/p'} (w_*(1/|t|))^{-1/p} dt < \infty. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Доказательство. В силу леммы 5 статьи [54] интегралы в формуле (1.1.17) равны. Поэтому достаточно доказать сходимость интеграла из левой части этой формулы. Так как функция $k(x, y)$ инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$, то с помощью замены переменных $t = \omega_\sigma(\tau)$ получаем равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(\sigma, t) |t|^{-n/p} (w_*(|t|))^{-1/p} dt = \\ & = |\mathbb{S}_{n-1}| \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, \tau) |\tau|^{-n/p} (w_*(|\tau|))^{-1/p} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку оператор K ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, то выполнено условие (1.1.12). Тогда интеграл в левой части формулы (1.1.17) конечен. $\blacksquare$

Известно (см., например, [41, с. 76]), что любая функция растяжения обладает свойством полумультипликативности, т. е. в нашем случае

$$w_*(|x_1||x_2|) \leq w_*(|x_1|)w_*(|x_2|) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Тогда для любого $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$w_*(1) \leq w_*(|x|)w_*(1/|x|).$$

Таким образом, условие (1.1.5), вообще говоря, не совпадает с условием (1.1.17). Чтобы условия (1.1.5) и (1.1.17) совпадали, нужно чтобы функция $w_*(|x|)$ удовлетворяла условию мультипликативности, т. е.

$$w_*(|x_1||x_2|) = w_*(|x_1|)w_*(|x_2|) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Это выполнено для степенного веса $w(|x|) = |x|^\alpha$. Этот случай был рассмотрен в работе [35].

§1.2 Компактность многомерных интегральных операторов с однородными ядрами

п. 1.2.1 Основная теорема

Пусть $1 < p < \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ рассмотрим оператор K вида (1.1.2). При этом будем считать, что ядро $k(x, y)$ удовлетворяет условиям (1.1.3) и (1.1.4), а также условию суммируемости (1.1.5). Тогда согласно предложению (1.1.1) оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Нетрудно проверить, что оператор K коммутирует с операторами мультипликативного сдвига U_δ вида

$$(U_\delta \varphi)(x) = \varphi(x/\delta), \quad \delta > 0,$$

а потому, вообще говоря, не является компактным. Поставим вопрос о компактности произведения оператора K и оператора умножения на существенно ограниченную функцию. Обозначим через M_a оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е.

$$(M_a \varphi)(x) = a(x) \varphi(x).$$

Очевидно, что оператор M_a ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, причем

$$\|M_a \varphi\|_{p,w} \leq \|a\|_\infty \|\varphi\|_{p,w}$$

для любой $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Основной целью данного параграфа является исследование компактности оператора $M_a K$ и $K M_a$. Для этого нам потребуется критерий предкомпактности множества, лежащего в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 1.2.1. (М. Рисс) *Множество $\Psi = \{\psi\} \subset L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq p < \infty$, является предкомпактным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- i) $\sup_{\psi \in \Psi} \|\psi\|_p < +\infty$;
ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\psi \in \Psi} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_p = 0$;
iii) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \sup_{\psi \in \Psi} \|\psi \chi_\rho\|_p = 0$, где χ_ρ — характеристическая функция множества $\mathbb{B}_n(0, \rho)$.

Определим функцию $\mathcal{K}(w, s, h)$ равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(w, s, h) = \int_{\mathbb{R}^n} & \left| k(e_1, t + h) \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t + h|)} \right)^{1/p} - k(e_1, t) \right| \times \\ & \times |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

где $s > 0$ и $h \in \mathbb{R}^n$.

Пример 1.2.1. Пусть $w(|x|) = |x|^\alpha$. Тогда

$$\mathcal{K}(w, s, h) = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t + h)|t + h|^{-\alpha/p} - k(e_1, t)|t|^{-\alpha/p}||t|^{-n/p} dt. \quad (1.2.2)$$

Таким образом, в этом случае функция $\mathcal{K}(w, s, h)$ не зависит от s .

Лемма 1.2.1. Пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5) и для любого $s_0 > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{s \in (0, s_0)} \mathcal{K}(w, s, h) = 0. \quad (1.2.3)$$

Тогда, если функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ финитна и ее носитель не содержит точку $x = 0$, то оператор $T_a = M_a K$ компактен в $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку функция $a(x)$ финитна, причем ее носитель не содержит точку $x = 0$, то существуют такие числа α_1 и α_2 , что $a(x) \equiv 0$ при $|x| < \alpha_1$ и $|x| > \alpha_2$. Обозначим $\mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 \leq |x| \leq \alpha_2\}$.

Положим $T_a = M_a K$. Чтобы доказать компактность оператора T_a в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, рассмотрим в пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$ сопряженный оператор

$$(T_a^* \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{k}(y, x) \bar{a}(y) \psi(y) dy$$

(здесь черта означает комплексное сопряжение) и докажем компактность оператора T_a^* .

Пусть $\Psi = \{\psi\}$ — произвольное ограниченное множество в пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|\psi\|_{p', w^{-p'/p}} \leq C$ для любой функции $\psi \in \Psi$. Покажем, что множество $\{T_a^* \psi\}$, где $\psi \in \Psi$, предкомпактно в пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$. В силу изометрии

$$\|f\|_{p', w^{-p'/p}} = \|fw^{-1/p}\|_{p'}$$

множество $\{T_a^* \psi\}$ предкомпактно в $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$ тогда и только тогда, когда множество $\{w^{-1/p} T_a^* \psi\}$ предкомпактно в $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Чтобы установить предкомпактность множества $\{w^{-1/p} T_a^* \psi\}$ в $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, воспользуемся критерием М. Рисса. Проверим условия *i)–iii)* из предложения 1.2.1.

i) Так как выполнены условия (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5), то оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, следовательно, оператор $T_a = M_a K$ также ограничен. Тогда оператор T_a^* ограничен в пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$. Тогда

$$\|w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} = \|T_a^* \psi\|_{p', w^{-p'/p}} \leq \|T_a^*\| \|\psi\|_{p', w^{-p'/p}} \leq C \|T_a^*\|$$

для всех $\psi \in \Psi$. Таким образом, условие *i)* выполнено.

ii) Проверим условие ii). Имеем

$$\begin{aligned} & |(T_a^* \psi)(x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(x)(w(|x|))^{-1/p}| \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| |a(y)| |\psi(y)| dy. \end{aligned}$$

Представим подынтегральное выражение в виде

$$\begin{aligned} & |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| |a(y)| |\psi(y)| = \\ & = \left\{ |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}|^{1/p} \times \right. \\ & \times |y|^{-n/pp'} |a(y)|^{1/p} (w(|y|))^{1/p^2} \Big\} \times \\ & \times \left\{ |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}|^{1/p'} \times \right. \\ & \times |y|^{n/pp'} |a(y)|^{1/p'} (w(|y|))^{-1/p^2} |\psi(y)| \Big\}. \end{aligned}$$

Тогда, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$|(T_a^* \psi)(x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(x)(w(|x|))^{-1/p}| \leq (\mathcal{J}_1(x))^{1/p} (\mathcal{J}_2(x))^{1/p'},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| \\ &\quad \times |y|^{-n/p'} |a(y)| (w(|y|))^{1/p} dy, \\ \mathcal{J}_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| \\ &\quad \times |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) &\leq \|a\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x+h)(w(|x+h|))^{-1/p}| |y|^{-n/p'} (w(|y|))^{1/p} dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| |y|^{-n/p'} (w(|y|))^{1/p} dy \right) = \\ &= \|a\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x+h)| |y|^{-n/p'} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x+h|)} \right)^{1/p} dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |y|^{-n/p'} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/p} dy \right). \end{aligned}$$

В первом интеграле сделаем замену $y = |x+h|t$, а во втором — замену $y = |x|t$. Тогда, используя условие однородности (1.1.3), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) &\leq \|a\|_\infty \left(|x+h|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, (x+h)')| |t|^{-n/p'} \left(\frac{w(|x+h||t|)}{w(|x+h|)} \right)^{1/p} dt + \right. \\ &\quad \left. + |x|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, x')| |t|^{-n/p'} \left(\frac{w(|x||t|)}{w(|x|)} \right)^{1/p} dt \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство (1.1.1), получим

$$\mathcal{J}_1(x) \leq \|a\|_\infty \left(|x+h|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, (x+h)')| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt + \right.$$

$$+|x|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, x')| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt \Big).$$

В первом интеграле сделаем замену $t = \omega_{x+h}(\tau)$, а во втором — замену $t = \omega_x(\tau)$. Тогда, используя условие (1.1.4), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) &\leq \|a\|_\infty \left(|x+h|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\tau, e_1)| |\tau|^{-n/p'} (w_*(|\tau|))^{1/p} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + |x|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\tau, e_1)| |\tau|^{-n/p'} (w_*(|\tau|))^{1/p} d\tau \right) = \\ &= \kappa \|a\|_\infty (|x+h|^{-n/p'} + |x|^{-n/p'}), \end{aligned}$$

где κ определяется формулой (1.1.5).

Нетрудно видеть, что для любых положительных чисел b_1 , b_2 и s справедливо неравенство

$$(b_1 + b_2)^s \leq 2^s (b_1^s + b_2^s). \quad (1.2.4)$$

Применяя это неравенство, получим

$$(\mathcal{J}_1(x))^{1/p} \leq (2\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} (|x+h|^{-n/pp'} + |x|^{-n/pp'}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &|(T_a^* \psi)(x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(x)(w(|x|))^{-1/p}| \leq \\ &\leq (2\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} (|x+h|^{-n/pp'} + |x|^{-n/pp'}) (\mathcal{J}_2(x))^{1/p'} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|(T_a^* \psi)(\cdot + h)(w(|\cdot + h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(\cdot)(w(|\cdot|))^{-1/p}\|_{p'} = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(T_a^* \psi)(x+h)(w(|x+h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(x)(w(|x|))^{-1/p}|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \\ &\leq (2\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|x+h|^{-n/pp'} + |x|^{-n/pp'})^{p'} \mathcal{J}_2(x) dx \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Снова применяя неравенство (1.2.4), получим

$$\begin{aligned}
& \| (T_a^* \psi)(\cdot + h)(w(|\cdot + h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(\cdot)(w(|\cdot|))^{-1/p} \|_{p'} \leq \\
& \leq 2(2\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|x|^{-n/p} + |x + h|^{-n/p}) \mathcal{J}_2(x) dx \right)^{1/p'} = \\
& = 2(2\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} (\mathcal{A}_1(\psi, h) + \mathcal{A}_2(\psi, h))^{1/p'}, \tag{1.2.5}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n/p} \mathcal{J}_2(x) dx, \\
\mathcal{A}_2(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x + h|^{-n/p} \mathcal{J}_2(x) dx.
\end{aligned}$$

Покажем, что функции $\mathcal{A}_1(\psi, h)$ и $\mathcal{A}_2(\psi, h)$ стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$ равномерно относительно $\psi \in \Psi$.

Преобразуем функцию $\mathcal{A}_1(\psi, h)$. Запишем эту функцию в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n/p} dx \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x + h)(w(|x + h|))^{-1/p} - \\
&- k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy.
\end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} |y|^{n/p} (w(|y|))^{-p'/p^2} dy \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x + h)(w(|x + h|))^{-1/p} - k(y, x)(w(|x|))^{-1/p}| |x|^{-n/p} dx.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $-p'/p^2 = 1/p - p'/p$, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} |y|^{n/p} (w(|y|))^{-p'/p} dy \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}^n} \left| k(y, x + h) \left(\frac{w(|x|)}{w(|x + h|)} \right)^{1/p} - k(y, x) \right| \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/p} |x|^{-n/p} dx.
\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле вначале сделаем замену $x = |y|z$ и воспользуемся свойством (1.1.3), а затем произведем замену $z = \omega_y(t)$ и воспользуемся свойством (1.1.4). В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} dy \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \left| k(e_1, t + h/|y|) \left(\frac{w(|y||t|)}{w(|y||t + h/|y||)} \right)^{1/p} - k(e_1, t) \right| \left(\frac{w(|y|)}{w(|y||t|)} \right)^{1/p} |t|^{-n/p} dt \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} \mathcal{K}(w, |y|, h/|y|) dy, \end{aligned}$$

где $\mathcal{K}(w, |y|, h/|y|)$ задается формулой (1.2.1). Так как $a(x) \equiv 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\psi, h) &\leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} \mathcal{K}(w, |y|, h/|y|) dy \leq \\ &\leq \|a\|_\infty \sup_{y \in \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} \mathcal{K}(w, |y|, h/|y|) \int_{\mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} dy \leq \\ &\leq \|a\|_\infty \|\psi\|_{p', w^{-p'/p}}^{p'} \sup_{y \in \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} \mathcal{K}(w, |y|, h/|y|) \leq \\ &\leq C^{p'} \|a\|_\infty \sup_{y \in \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} \mathcal{K}(w, |y|, h/|y|). \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \frac{h}{|y|} \right| = \frac{|h|}{|y|} \leq \frac{|h|}{\alpha_1}, \quad \forall y \in \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2},$$

то $h/|y| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}$. Тогда из условия (1.2.3) вытекает равенство

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\psi \in \Psi} \mathcal{A}_1(\psi, h) = 0. \quad (1.2.6)$$

Теперь займемся функцией $\mathcal{A}_2(\psi, h)$. Запишем эту функцию в виде

$$\mathcal{A}_2(\psi, h) = \int_{\mathbb{R}^n} |x + h|^{-n/p} dx \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x + h)(w(|x + h|))^{-1/p} -$$

$$-k(y, x)(w(|x|))^{-1/p} |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy.$$

В результате замены $x + h = t$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\psi, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} |t|^{-n/p} dt \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, t)(w(|t|))^{-1/p} - k(y, t-h)(w(|t-h|))^{-1/p}| \times \\ &\quad \times |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy = \mathcal{A}_1(\psi, -h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\psi \in \Psi} \mathcal{A}_2(\psi, h) = 0. \quad (1.2.7)$$

Из неравенства (1.2.5), с учетом формул (1.2.6) и (1.2.7) следует, что

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\psi \in \Psi} \|(T_a^* \psi)(\cdot + h)(w(|\cdot + h|))^{-1/p} - (T_a^* \psi)(\cdot)(w(|\cdot|))^{-1/p}\|_{p'} = 0.$$

iii). Как и при проверке условия ii), применив неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} |(T_a^* \psi)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |a(y)| |\psi(y)| dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ |k(y, x)|^{1/p} |y|^{-n/pp'} |a(y)|^{1/p} (w(|y|))^{1/p^2} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ |k(y, x)|^{1/p'} |y|^{n/pp'} |a(y)|^{1/p'} (w(|y|))^{-1/p^2} |\psi(y)| \right\} dy \leq \\ &\leq (\mathcal{I}(x))^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |y|^{-n/p'} |a(y)| (w(|y|))^{1/p} dy \leq \\ &\leq \|a\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |y|^{-n/p'} (w(|y|))^{1/p} dy. \end{aligned}$$

Выполним следующие преобразования: вначале сделаем замену $y = |x|z$ и воспользуемся свойством (1.1.3), а затем произведем замену $z = \omega_x(t)$ и воспользуемся свойством (1.1.4). В результате получим

$$\mathcal{I}(x) \leq \|a\|_{\infty} |x|^{-n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, e_1)| |t|^{-n/p'} (w(|x||t|))^{1/p} dt.$$

Применив неравенство (1.1.1), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x) &\leq \|a\|_\infty |x|^{-n/p'} (w(|x|))^{1/p} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t, e_1)| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt \leq \\ &\leq \kappa \|a\|_\infty |x|^{-n/p'} (w(|x|))^{1/p}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}|(T_a^* \psi)(x)| &\leq (\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} |x|^{-n/pp'} (w(|x|))^{1/p^2} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy \right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|\chi_\rho w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} &= \left(\int_{|x|>\rho} |(T_a^* \psi)(x)|^{p'} (w(|x|))^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \leq \\ &\leq (\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{|x|>\rho} |x|^{-n/p} (w(|x|))^{p'/p^2 - p'/p} dx \times \right. \\ &\times \left. \int_{\mathbb{R}^n} |k(y, x)| |y|^{n/p} |a(y)| (w(|y|))^{-p'/p^2} |\psi(y)|^{p'} dy \right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}\|\chi_\rho w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} &\leq (\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} |y|^{n/p} (w(|y|))^{-p'/p^2} dy \times \right. \\ &\times \left. \int_{|x|>\rho} |k(y, x)| |x|^{-n/p} (w(|x|))^{-1/p} dx \right)^{1/p'} =\end{aligned}$$

Учитывая, что $-p'/p^2 = 1/p - p'/p$, получаем неравенство

$$\begin{aligned}\|\chi_\rho w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} &\leq (\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} |y|^{n/p} (w(|y|))^{-p'/p} dy \times \right. \\ &\times \left. \int_{|x|>\rho} |k(y, x)| |x|^{-n/p} \left(\frac{w(|y|)}{w(|x|)} \right)^{1/p} dx \right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $x = |y|z$ и воспользуемся свойством (1.1.3), а затем сделаем замену $z = \omega_x(t)$ и воспользуемся свойством (1.1.4). В результате получим

$$\begin{aligned}
\|\chi_\rho w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} &\leq (\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} dy \times \right. \\
&\quad \times \int_{|t| > \rho/|y|} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} \left(\frac{w(|y|)}{w(|y||t|)} \right)^{1/p} dt \Big)^{1/p'} \leq \\
&\leq (\kappa \|a\|_\infty)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |a(y)| |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} dy \times \right. \\
&\quad \times \int_{|t| > \rho/|y|} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \Big)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Так как $a(x) \equiv 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}$, то

$$\begin{aligned}
\|\chi_\rho w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} &\leq \kappa^{1/p} \|a\|_\infty \left(\int_{\mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} dy \times \right. \\
&\quad \times \int_{|t| > \rho/|y|} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \Big)^{1/p'} \leq \\
&\leq \kappa^{1/p} \|a\|_\infty \left(\operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} \int_{|t| > \rho/|y|} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \right)^{1/p'} \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{D}_{\alpha_1, \alpha_2}} |\psi(y)|^{p'} (w(|y|))^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \leq \\
&\leq C \kappa^{1/p} \|a\|_\infty \left(\int_{|t| > \rho/\alpha_2} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.1.5), получаем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \sup_{\psi \in \Psi} \|\chi_\rho w^{-1/p} T_a^* \psi\|_{p'} = 0.$$

Лемма полностью доказана. ■

Определение 1.2.1. Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| > N} |a(x)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |a(x)| = 0. \quad (1.2.8)$$

Теорема 1.2.1. Пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5), а также условию (1.2.3). Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $M_a K$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство. Для любого $N \in \mathbb{N}$ положим

$$a_N(x) = \begin{cases} a(x), & \text{если } 1/N \leq |x| \leq N, \\ 0, & \text{если } |x| < 1/N \text{ или } |x| > N. \end{cases}$$

По лемме 1.2.1 оператор $M_{a_N} K$ является компактным. Так как

$$\|M_a K - M_{a_N} K\| = \|M_{a-a_N} K\| \leq \operatorname{ess\,sup}_{\{|x| < 1/N\} \cup \{|x| > N\}} |a(x)| \|K\|,$$

и $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то $\|M_a K - M_{a_N} K\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, оператор $M_a K$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. ■

п. 1.2.2 Следствия из основной теоремы

Условие (1.2.3) весьма сложно проверяется на практике. Поэтому важно выделить случаи, когда это условие может быть легко проверено, либо выполнено автоматически.

Прежде всего напомним определение класса Маккенхаупта $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что измеримая функция $v: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ принадлежит классу Маккенхаупта $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$ (см. [30]), если существует такая постоянная $C > 0$, что для любого шара $\mathbb{B}_n(x, r)$ выполняется условие

$$\frac{1}{|\mathbb{B}_n(x, r)|} \int_{\mathbb{B}_n(x, r)} |v(y)| dy \leq C \operatorname{ess\,inf}_{y \in \mathbb{B}_n(x, r)} |v(y)|,$$

где $|\mathbb{B}_n(x, r)|$ — мера шара $\mathbb{B}_n(x, r)$.

В частности, функция $|x|^\alpha$ принадлежит классу $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $-n < \alpha < 0$. Известно, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n, v)$, где $v \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| |v(x)| dx = 0.$$

Следствие 1.2.1. Пусть $w(|x|) = |x|^\alpha$ и ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5). Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $M_a K$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство. Если $w(|x|) = |x|^\alpha$, то и $w_*(|x|) = |x|^\alpha$. Следовательно, условие (1.1.5) принимает вид

$$\kappa = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p-\alpha/p} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, e_1)| |x|^{-n/p'+\alpha/p} dx < \infty,$$

т. е. $k(e_1, t)|t|^{-\alpha/p} \in L_1(\mathbb{R}^n, |t|^{-n/p})$. Далее, условие (1.2.3), с учетом формулы (1.2.2), записывается в виде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t+h)| |t+h|^{-\alpha/p} - k(e_1, t)|t|^{-\alpha/p} ||t|^{-n/p} dt = 0.$$

Но это условие выполняется автоматически, поскольку $|t|^{-n/p} \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$. Применив теорему 1.2.1, убеждаемся в компактности оператора $M_a K$. ■

Рассмотрим частные случаи, когда проверка условия (1.2.3) существенно упрощается. Прежде всего сформулируем дополнительное условие на весовую функцию $w(|x|)$. Предположим, что

$$\frac{w(|x|)}{w(|x+h|)} \rightarrow 1$$

при $h \rightarrow 0$ равномерно для всех $x \in \mathbb{R}^n$, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{w(|x|)}{w(|x+h|)} - 1 \right| = 0. \quad (1.2.9)$$

Условие (1.2.9) заведомо выполнено, если функция $w(|x|)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, $w(|x|) \geq c$ для некоторого $c > 0$ и

$$w(|x+h|) \sim w(|x|), \quad x \rightarrow \infty$$

для всех h из некоторой окрестности точки нуль.

Пример 1.2.2. Непосредственно проверяется, что функция

$$w(|x|) = (1 + |x|^2)^{\nu/2}$$

где $\nu > 0$, удовлетворяет условию (1.2.9).

Следствие 1.2.2. Пусть весовая функция $w(|x|)$ удовлетворяет условию (1.2.9), а ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5) и кроме того

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y + h) - k(e_1, y)| |y|^{-n/p} (w_*(1/|y|))^{1/p} dy = 0. \quad (1.2.10)$$

Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $M_a K$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство. Так как функция $f(s) = s^{1/p}$ удовлетворяет условию Липшица на любом отрезке $[1 - a, 1 + a]$, где $a \in (0, 1)$, то из условия (1.2.9) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{w(|x|)}{w(|x + h|)} \right)^{1/p} - 1 \right| = 0. \quad (1.2.11)$$

Используя это условие, найдем оценку сверху для функции $\mathcal{K}(w, s, h)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(w, s, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| k(e_1, t + h) \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t + h|)} \right)^{1/p} - k(e_1, t) |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t + h) - k(e_1, t)| \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t + h|)} \right)^{1/p} |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t + h|)} \right)^{1/p} - 1 \right| |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt \leq \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t + h|)} \right)^{1/p} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t + h) - k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt + \end{aligned}$$

$$+ \kappa \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)} \right)^{1/p} - 1 \right|.$$

Тогда для любого $s_0 > 0$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in (0, s_0)} \mathcal{K}(w, s, h) \leq \\ & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^n, s \in (0, s_0)} \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)} \right)^{1/p} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t+h) - k(e_1, t)| |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} dt + \\ & + \kappa \sup_{t \in \mathbb{R}^n, s \in (0, s_0)} \left| \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)} \right)^{1/p} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Из условия (1.2.11) следует, что второе слагаемое стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Тогда функция

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^n, s \in (0, s_0)} \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)} \right)^{1/p}$$

ограничена в достаточно малой окрестности точки $h = 0$ и из (1.2.10) следует, что первое слагаемое также стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Таким образом, для функции $\mathcal{K}(w, s, h)$ выполнено условие (1.2.3). Применение теоремы 1.2.1 завершает доказательство. $\blacksquare$

Следствие 1.2.3. Пусть весовая функция $w(|x|)$ удовлетворяет условию (1.2.9) и

$$v(|x|) = |x|^{-n/p} (w_*(1/|x|))^{1/p} \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n), \quad (1.2.12)$$

а ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5). Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $M_a K$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство. Условие (1.1.5) означает, что $k(e_1, t) \in L_1(\mathbb{R}^n, v(|t|))$, где $v(|t|)$ — функция вида (1.2.12). Но тогда условие (1.2.10) выполнено автоматически. $\blacksquare$

Пример 1.2.3. Рассмотрим функцию $w(|x|) = (1 + |x|^2)^{\nu/2}$, где $\nu > 0$. Тогда

$$w_*(|x|) = \sup_{s>0} \frac{w(|x|s)}{w(s)} = \sup_{s>0} \frac{(1 + |x|^2 s^2)^{\nu/2}}{(1 + s^2)^{\nu/2}} = \left(\sup_{s>0} \frac{1 + |x|^2 s^2}{1 + s^2} \right)^{\nu/2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \frac{1 + |x|^2 s^2}{1 + s^2},$$

производная которой равна

$$f'(s) = \frac{2s(|x|^2 - 1)}{(1 + s^2)^2}.$$

Если $|x| > 1$, то $f'(s) > 0$ для всех $s > 0$, и значит $f(s)$ монотонно возрастает. Тогда

$$\sup_{s>0} f(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1 + |x|^2 s^2}{1 + s^2} = |x|^2.$$

Если $|x| \leq 1$, то $f'(s) < 0$ для всех $s > 0$, и значит, $f(s)$ монотонно убывает. Тогда

$$\sup_{s>0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + |x|^2 s^2}{1 + s^2} = 1.$$

Таким образом

$$w_*(|x|) = \begin{cases} |x|^\nu, & \text{если } |x| > 1, \\ 1, & \text{если } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$v(|x|) = |x|^{-n/p} (w_*(1/|x|))^{1/p} = \begin{cases} |x|^{-n/p-\nu/p}, & \text{если } |x| < 1, \\ |x|^{-n/p}, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Будем считать, что

$$n/p' - \nu/p > 0 \iff -n/p - \nu/p > -n.$$

Тогда функция $v(|x|)$ локально суммируема на $\mathbb{R}^n$. Нетрудно видеть, что функция $v(r)$ является монотонно убывающей и для всех $r \in \mathbb{R}_+$

$$C_1 v(r) \leq v(2r) \leq C_2 v(r), \quad (1.2.13)$$

где $C_1 = 2^{-n/p-\nu/p}$ и $C_2 = 2^{-n/p}$. Покажем, что для всех $R \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^R v(r) r^{n-1} dr \leq C R^n v(R), \quad (1.2.14)$$

где

$$C = \frac{1}{n/p' - \nu/p}.$$

Рассмотрим два случая. 1) Если $R \leq 1$, то

$$\int_0^R v(r) r^{n-1} dr = \int_0^R r^{-n/p - \nu/p + n-1} dr = \int_0^R r^{n/p' - \nu/p - 1} dr = \frac{R^{n/p' - \nu/p}}{n/p' - \nu/p},$$

т. е. условие (1.2.14) выполнено.

2) Если $R > 1$, то

$$\begin{aligned} \int_0^R v(r) r^{n-1} dr &= \int_0^1 r^{n/p' - \nu/p - 1} dr + \int_1^R r^{-n/p + n-1} dr = \\ &= \frac{1}{n/p' - \nu/p} + \frac{R^{n/p'}}{n/p'} - \frac{1}{n/p'} = \frac{\nu/p}{(n/p' - \nu/p) n/p'} + \frac{R^{n/p'}}{n/p'}. \end{aligned}$$

Так как $R > 1$, то $R^{n/p'} \geq 1$, и следовательно,

$$\frac{\nu/p}{(n/p' - \nu/p) n/p'} + \frac{R^{n/p'}}{n/p'} \leq \frac{R^{n/p'}}{n/p' - \nu/p} = CR^n v(R).$$

Таким образом, условие (1.2.14) выполнено для всех $R \in \mathbb{R}_+$.

Выполнение условий (1.2.13) и (1.2.14) гарантирует, что $v \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$ (см. [30, Раздел 1.2]). Таким образом, в случае $w(|x|) = (1 + |x|^2)^{\nu/2}$, где ν удовлетворяет неравенству $n/p' - \nu/p > 0$, условие (1.2.12) заведомо выполнено.

Перейдем к исследованию компактности операторов вида $K M_a$. Определим функцию $\tilde{\mathcal{K}}(w, s, h)$ равенством

$$\tilde{\mathcal{K}}(w, s, h) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| k(t + h, e_1) \left(\frac{w(s|t + h|)}{w(s|t|)} \right)^{1/p} - k(t, e_1) \right| |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} dt.$$

Теорема 1.2.2. Пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5) и для любого $s_0 > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{s \in (0, s_0)} \tilde{\mathcal{K}}(w, s, h) = 0. \quad (1.2.15)$$

Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор KM_a компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство. В пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$ рассмотрим сопряженный оператор $(KM_a)^* = M_{\bar{a}}K^*$, где

$$(K^*\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k^*(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$k^*(x, y) = \bar{k}(y, x).$$

Покажем, что оператор $M_{\bar{a}}K^*$ компактен в пространстве $L_{p'}(\mathbb{R}^n, w^{-p'/p})$. Для этого согласно теореме 1.2.1 достаточно убедиться, что функция $k^*(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{s \in (0, s_0)} \mathcal{K}(v, s, h) = 0, \quad (1.2.16)$$

где $v(|x|) = (w(|x|))^{-p'/p}$, и

$$\mathcal{K}(v, s, h) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| k^*(e_1, t+h) \left(\frac{v(s|t|)}{v(s|t+h|)} \right)^{1/p'} - k^*(e_1, t) |t|^{-n/p'} (v_*(1/|t|))^{1/p'} \right| dt.$$

Заметим, что

$$v_*(1/|t|) = \sup_{r>0} \frac{v(r)}{v(r|t|)} = \sup_{r>0} \frac{(w(r))^{-p'/p}}{(w(r|t|))^{-p'/p}} = \left(\sup_{r>0} \frac{w(r|t|)}{w(r)} \right)^{p'/p} = (w_*(|t|))^{p'/p}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(v, s, h) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \bar{k}(t+h, e_1) \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)} \right)^{-1/p} - \bar{k}(t, e_1) |t|^{-n/p'} (w_*(|t|))^{1/p} \right| dt = \\ &= \tilde{\mathcal{K}}(w, s, h). \end{aligned}$$

Тогда из условия (1.2.15) вытекает условие (1.2.16). ■

Следствие 1.2.4. Пусть $w(|x|) = |x|^\alpha$ и ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5). Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор KM_a компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.2.1. ■

Подобным образом можно сформулировать и доказать соответствующие аналоги следствий 1.2.2 и 1.2.3.

п. 1.2.3 Случай области, содержащей только одну особую точку

В этом разделе мы будем рассматривать интегральные операторы с однородными ядрами в весовых L_p -пространствах в областях, содержащих только одну особую точку: либо $x = 0$, либо $x = \infty$.

Пусть D_1 — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая точку $x = 0$. В пространстве $L_p(D_1, w)$ рассмотрим оператор

$$(\mathbf{K}_1\varphi)(x) = \int_{D_1} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in D_1.$$

Следствие 1.2.5. Пусть функция $k(x, y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.1, и функция $a \in L_\infty(D_1)$ такова, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |a(x)| = 0.$$

Тогда оператор $M_a \mathbf{K}_1$ компактен в пространстве $L_p(D_1, w)$.

Доказательство. Обозначим через P_{D_1} оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_{D_1}(x)$ области D_1 . Ясно, что

$$\mathbf{K}_1 = P_{D_1} K P_{D_1}.$$

Тогда

$$M_a \mathbf{K}_1 = M_a P_{D_1} K P_{D_1} = M_b K P_{D_1},$$

где $b(x) = a(x)\chi_{D_1}(x)$. Так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |b(x)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |a(x)| = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| > N} |b(x)| = 0,$$

то согласно теореме 1.2.1 оператор $M_b K$ является компактным. Следовательно, оператор $M_a \mathbf{K}_1$ компактен как произведение ограниченного и компактного операторов. ■

Нетрудно видеть, что аналоги следствий 1.2.1—1.2.4 также сохраняют справедливость. Например, аналог следствия 1.2.1 формулируется следующим образом.

Следствие 1.2.6. Пусть $w(|x|) = |x|^\alpha$ и ядро $k(x, y)$ удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5). Тогда, если функция $a \in L_\infty(D_1)$ такова, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |a(x)| = 0,$$

то оператор $M_a \mathbf{K}_1$ компактен в пространстве $L_p(D_1, w)$.

Пусть D_2 — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ такая, что область $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D_2}$ является ограниченной и содержит внутри начало координат. Рассмотрим оператор

$$(\mathbf{K}_2 \varphi)(x) = \int_{D_2} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in D_2.$$

Следствие 1.2.7. Пусть функция $k(x, y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.1, и функция $a \in L_\infty(D_2)$ такова, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| > N} |a(x)| = 0.$$

Тогда оператор $M_a \mathbf{K}_2$ компактен в пространстве $L_p(D_2, w)$.

В заключение отметим, что и для оператора $\mathbf{K}_2$ имеют место аналогии следствий 1.2.1 — 1.2.4.

Глава 2.

Интегральные операторы с однородными степени α ядрами

§2.1 Ограниченность интегральных операторов с однородными степени α ядрами

п. 2.1.1 Необходимость условия $\alpha \geq -n$ (или $\alpha \leq -n$)

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, где $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$, рассмотрим интегральный оператор

$$(H\varphi)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} h(x, y) \varphi(y) dy, \quad (2.1.1)$$

где функция $h(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, измерима и однородна степени α ($\alpha \in \mathbb{R}$), т. е.

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha h(x, y), \quad \lambda > 0. \quad (2.1.2)$$

Цель этого раздела — найти условие на показатель однородности α , которое является необходимым для ограниченности оператора H в $L_p(\mathbb{B}_n)$. Для этого определим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор U_δ , где $\delta > 0$, следующим образом:

$$(U_\delta \varphi)(x) = \begin{cases} \delta^{-n/p} \varphi(x/\delta), & |x| < \delta, \\ 0, & |x| \geq \delta, \end{cases}$$

если $0 < \delta < 1$, и

$$(U_\delta \varphi)(x) = \delta^{-n/p} \varphi(x/\delta),$$

если $\delta > 1$. Заметим, что при $0 < \delta < 1$ оператор U_δ обратим слева, причем левый обратный оператор U_δ^{-1} задается равенством $U_\delta^{-1} = U_{\delta^{-1}}$. Известно (см., например, [11]) и легко проверяется, что $\|U_\delta\| = 1$.

Лемма 2.1.1. *Если функция $h(x, y)$ однородна степени α и оператор H ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, то $\alpha \geq -n$.*

Доказательство. Для любого $0 < \delta < 1$ имеем

$$(U_\delta^{-1} H U_\delta \varphi)(x) = \int_{|y| < \delta} h(\delta x, y) \varphi(y/\delta) dy.$$

После замены $y = \delta t$, с учетом однородности функции $h(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} (U_\delta^{-1} H U_\delta \varphi)(x) &= \delta^n \int_{|t| < 1} h(\delta x, \delta t) \varphi(t) dt = \\ &= \delta^{n+\alpha} \int_{|t| < 1} h(x, t) \varphi(t) dt = \delta^{n+\alpha} (H\varphi)(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$H\varphi = \delta^{-(n+\alpha)} U_\delta^{-1} H U_\delta \varphi.$$

Следовательно, учитывая, что $\|U_\delta\| = 1$, получим

$$\|H\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} \leq \delta^{-(n+\alpha)} \|H\| \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)}.$$

Устремляя δ к нулю в случае $n + \alpha < 0$, получаем, что $\|H\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} = 0$ для любой функции $\varphi \in L_p(\mathbb{B}_n)$. Следовательно, оператор H нулевой, что противоречит условию. Значит, необходимо $\alpha \geq -n$. ■

В пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$, где $\mathbb{CB}_n = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n$, рассмотрим оператор

$$(\mathcal{H}\psi)(x) = \int_{\mathbb{CB}_n} h(x, y) \psi(y) dy, \quad (2.1.3)$$

где функция $h(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, измерима и удовлетворяет условию (2.1.2).

Определим в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ оператор $\mathcal{U}_\delta$, где $\delta > 0$, следующим образом:

$$(\mathcal{U}_\delta \psi)(x) = \begin{cases} \delta^{-n/p} \psi(x/\delta), & |x| > \delta, \\ 0, & |x| \leq \delta, \end{cases}$$

если $\delta > 1$ и

$$(\mathcal{U}_\delta \psi)(x) = \delta^{-n/p} \psi(x/\delta),$$

если $0 < \delta < 1$. Заметим, что при $\delta > 1$ оператор $\mathcal{U}_\delta$ обратим слева, причем левый обратный оператор $\mathcal{U}_\delta^{-1}$ задается равенством $\mathcal{U}_\delta^{-1} = \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$.

Лемма 2.1.2. *Если функция $h(x, y)$ однородна степени α и оператор $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$, то $\alpha \leq -n$.*

Доказательство. Принимая во внимание однородность функции $h(x, y)$, для любого $\delta > 1$ имеем

$$(\mathcal{U}_\delta^{-1} \mathcal{H} \mathcal{U}_\delta \psi)(x) = \int_{|y| > \delta} h(\delta x, y) \psi(y/\delta) dy = \delta^{n+\alpha} \int_{|t| > 1} h(x, t) \psi(t) dt.$$

Тогда

$$\mathcal{H}\psi = \delta^{-(n+\alpha)} \mathcal{U}_\delta^{-1} \mathcal{H} \mathcal{U}_\delta \psi.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{H}\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)} \leq \delta^{-(n+\alpha)} \|\mathcal{H}\| \|\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)}.$$

Устремляя δ к бесконечности в случае $n + \alpha > 0$, получаем, что $\|\mathcal{H}\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)} = 0$ для любой функции $\psi \in L_p(\mathbb{CB}_n)$. Полученное противоречие означает необходимость условия $\alpha \leq -n$. ■

Замечание 2.1.1. *Из лемм 2.1.1 и 2.1.2 следует, что если интегральный оператор*

$$(\mathbf{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) \varphi(y) dy,$$

ядро $h(x, y)$ которого удовлетворяет условию (2.1.2), ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, то необходимо выполняется условие $\alpha = -n$.

п. 2.1.2 Достаточные условия ограниченности

В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим интегральный оператор H , заданный формулой (2.1.1). Цель этого раздела — найти достаточные условия ограниченности оператора H в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

Теорема 2.1.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \geq -n$, и удовлетворяет следующим условиям:

$$\varkappa_1 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt < \infty, \quad (2.1.4)$$

$$\varkappa_2 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, \sigma)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt < \infty. \quad (2.1.5)$$

Тогда оператор H вида (2.1.1) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, причем

$$\|H\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)}. \quad (2.1.6)$$

Доказательство. Представим оператор H в виде

$$(H\varphi)(x) = |x|^{n+\alpha} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{h(x, y)}{|x|^{n+\alpha}} \varphi(y) dy.$$

Таким образом,

$$H = M_{|x|^{n+\alpha}} K_1, \quad (2.1.7)$$

где оператор K_1 задаётся формулой

$$(K_1\varphi)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} k_1(x, y) \varphi(y) dy,$$

а его ядро $k_1(x, y)$ имеет вид

$$k_1(x, y) = \frac{h(x, y)}{|x|^{n+\alpha}}. \quad (2.1.8)$$

Нетрудно видеть, что функция $k_1(x, y)$ однородна степени $(-n)$.

Покажем, что оператор K_1 ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$. Действительно, если выполнены условия (2.1.4) и (2.1.5), то

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k_1(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = \\ & = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = \varkappa_1 < \infty, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k_1(t, \sigma)| |t|^{-n/p'} dt = \\
& = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(t, \sigma)|}{|t|^{n+\alpha}} |t|^{-n/p'} dt = \varkappa_2 < \infty.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Тогда из теоремы 1.1.1 следует, что оператор K_1 ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, причём

$$\|K_1 \varphi\|_p \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\varphi\|_p.$$

Далее, так как $n + \alpha \geq 0$, то $|x|^{n+\alpha} \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{B}_n$. Следовательно, оператор $M_{|x|^{n+\alpha}}$ ограничен в $L_p(\mathbb{B}_n)$, причём $\|M_{|x|^{n+\alpha}}\| \leq 1$. Тогда из равенства (2.1.7) следует, что

$$\|H\varphi\|_p = \|M_{|x|^{n+\alpha}} K_1 \varphi\|_p \leq \|K_1 \varphi\|_p \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\varphi\|_p.$$

Теорема доказана. ■

Замечание 2.1.2. Если $p = 1$, то достаточно одного условия (2.1.5). Точнее говоря, если выполнено только условие (2.1.5), где $p' = \infty$, то оператор H ограничен в пространстве $L_1(\mathbb{B}_n)$ и выполняется неравенство

$$\|H\varphi\|_{L_1(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa_2 \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{B}_n)}.$$

Аналогично, если выполнено только условие (2.1.4), где $p = \infty$, то оператор H ограничен в пространстве $L_\infty(\mathbb{B}_n)$ и выполняется неравенство

$$\|H\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa_1 \|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{B}_n)}.$$

Замечание 2.1.3. При $\alpha = -n$ условия (2.1.4) и (2.1.5) совпадают с известными условиями Н. К. Карапетянца (см., например, [35]).

Для интегральных операторов, ядра которых инвариантны относительно всех вращений, условия (2.1.4)–(2.1.5) можно упростить. Напомним, что функция $h(x, y)$ называется инвариантной относительно группы вращений $SO(n)$, если

$$h(\omega(x), \omega(y)) = h(x, y), \quad \forall \omega \in SO(n). \tag{2.1.11}$$

Следствие 2.1.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \geq -n$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\varkappa = \int_{\mathbb{R}^n} |h(e_1, t)| |t|^{-n/p} dt = \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, e_1)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt < \infty. \quad (2.1.12)$$

Тогда оператор H вида (2.1.1) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ и выполняется неравенство

$$\|H\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)}. \quad (2.1.13)$$

Доказательство. Это следствие также может быть получено из соответствующих результатов для интегральных операторов с ядрами однородными степени $(-n)$. Однако, мы дадим другое доказательство, опирающееся непосредственно на теорему (2.1.1).

Так как для функции $h(x, y)$ выполнено условие (2.1.11), то с помощью замены переменных $t = \omega_\sigma(x)$ формулы (2.1.4) и (2.1.5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = \int_{\mathbb{R}^n} |h(e_1, t)| |t|^{-n/p} dt < \infty, \\ \varkappa_2 &= \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, \sigma)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt = \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, e_1)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt < \infty. \end{aligned}$$

Покажем, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$. В самом деле, переходя к сферическим координатам $t = \rho\theta$, получим

$$\varkappa_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |h(e_1, t)| |t|^{-n/p} dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} |h(e_1, \rho\theta)| \rho^{-n/p+n-1} d\rho d\theta.$$

Сделаем замену $\rho = 1/r$, а затем воспользуемся однородностью функции $h(x, y)$. Тогда получим

$$\varkappa_1 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} |h(e_1, r^{-1}\theta)| r^{-n/p'-1} dr d\theta = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} |h(re_1, \theta)| r^{-n/p'-\alpha-1} dr d\theta.$$

Так как $h(x, y)$ удовлетворяет условию (2.1.11), то существует функция $h_0(r, \rho, t)$ такая, что $h(x, y) = h_0(|x|, |y|, x' \cdot y')$ (см. [49, с. 36]). Тогда

$$h(re_1, \theta) = h_0(r, 1, e_1 \cdot \theta) = h_0(r, 1, \theta \cdot e_1) = h(r\theta, e_1).$$

Следовательно,

$$\varkappa_1 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} |h(r\theta, e_1)| r^{-n/p' - \alpha - 1} dr d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, e_1)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt = \varkappa_2.$$

Применение теоремы 2.1.1 завершает доказательство. ■

Если $h(x, y) \geq 0$ и $\alpha = -n$, условие (2.1.12) необходимо для ограниченности оператора H (см., [67, р. 70]). Однако, если $\alpha \neq -n$, то условие (2.1.12) не является необходимым для ограниченности оператора H с неотрицательным ядром. Действительно, в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим оператор

$$(H\varphi)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^{n/2}} dy.$$

Известно (см., например, [19, § 17, п. 4]), что данный оператор ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{B}_n)$. Однако условие (2.1.12) не выполняется, так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt}{|e_1 - t|^{n/2} |t|^{n/2}} = \infty.$$

Пример 2.1.1. Приведем пример функции $h(x, y)$, удовлетворяющей условиям следствия 2.1.1. Рассмотрим функцию

$$h(x, y) = \frac{\exp(i(x' \cdot y'))}{(|x|^\gamma + |y|^\gamma)|x - y|^\beta}, \quad (2.1.14)$$

где i — мнимая единица, $\beta, \gamma > 0$ и $\beta + \gamma < n$. Очевидно, что эта функция однородна степени $\alpha = -(\beta + \gamma)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$. Кроме того,

$$\varkappa = \int_{\mathbb{R}^n} |h(e_1, t)| |t|^{-n/p} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^\gamma)|e_1 - t|^\beta |t|^{n/p}} dt < \infty,$$

если $1 < p < n/(n - \beta - \gamma)$. Таким образом, оператор H с ядром вида (2.1.14) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ при указанных значениях p .

Если $\beta + \gamma = n$, причем $\gamma > 0$, то оператор H ограничен в $L_p(\mathbb{B}_n)$ при $1 < p < \infty$.

Рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор вольтерровского типа

$$(\tilde{H}\varphi)(x) = \int_{|y| < |x|} h(x, y)\varphi(y) dy. \quad (2.1.15)$$

Следствие 2.1.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \geq -n$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет условию:

$$\tilde{\varkappa} = \int_{|t| < 1} |h(e_1, t)| |t|^{-n/p} dt = \int_{|t| > 1} |h(t, e_1)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt < \infty. \quad (2.1.16)$$

Тогда оператор $\tilde{H}$ вида (2.1.15) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ и выполняется неравенство

$$\|\tilde{H}\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} \leq \tilde{\varkappa} \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)}. \quad (2.1.17)$$

Доказательство. Представим оператор $\tilde{H}$ в виде

$$(\tilde{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} \tilde{h}(x, y)\varphi(y) dy,$$

где

$$\tilde{h}(x, y) = \begin{cases} h(x, y), & \text{если } |y| < |x|, \\ 0, & \text{если } |y| > |x|. \end{cases}$$

Из формулы (2.1.16) следует, что $\tilde{h}(x, y)$ удовлетворяет (2.1.12), а следовательно, оператор $\tilde{H}$ ограничен в $L_p(\mathbb{B}_n)$. ■

Пример 2.1.2. Рассмотрим оператор $\tilde{H}$, ядром которого является функция $h(x, y)$ вида (2.1.14), в предположении, что $\beta, \gamma > 0$ и $\beta + \gamma < n$. Так как

$$\tilde{\varkappa} = \int_{|t| < 1} \frac{1}{(1 + |t|^\gamma)|e_1 - t|^\beta |t|^{n/p}} dt < \infty,$$

при $1 < p \leq \infty$, то оператор $\tilde{H}$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ при указанных значениях p .

Далее, рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ оператор $\mathcal{H}$ вида (2.1.3).

Теорема 2.1.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \leq -n$, и удовлетворяет условиям (2.1.4)–(2.1.5). Тогда оператор $\mathcal{H}$ вида (2.1.3) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$, причем

$$\|\mathcal{H}\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)} \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)}. \quad (2.1.18)$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.1.1 представим оператор $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} = M_{|x|^{n+\alpha}} \mathcal{K}_1, \quad (2.1.19)$$

где

$$(\mathcal{K}_1\psi)(x) = \int_{\mathbb{CB}_n} k_1(x, y) \psi(y) dy,$$

а его ядро $k_1(x, y)$ задается формулой (2.1.8).

Так как выполнены условия (2.1.4) и (2.1.5), то для ядра $k_1(x, y)$ выполняются условия (2.1.9) и (2.1.10). Тогда оператор $\mathcal{K}_1$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$, причём

$$\|\mathcal{K}_1\psi\|_p \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\psi\|_p.$$

Поскольку $n + \alpha \leq 0$, то $|x|^{n+\alpha} \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{CB}_n$. Следовательно, $\|M_{|x|^{n+\alpha}}\| \leq 1$. Тогда из равенства (2.1.19) следует, что

$$\|\mathcal{H}\psi\|_p = \|M_{|x|^{n+\alpha}} \mathcal{K}_1\psi\|_p \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\psi\|_p.$$

Теорема доказана. ■

Следствие 2.1.3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \leq -n$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет условиям (2.1.12). Тогда оператор $\mathcal{H}$ вида (2.1.3) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ и выполняется неравенство

$$\|\mathcal{H}\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)} \leq \varkappa \|\psi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)}. \quad (2.1.20)$$

Доказательство следует из равенства $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, которое было получено при доказательстве следствия 2.1.1. ■

Пример 2.1.3. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}$, ядром которого является функция $h(x, y)$ вида (2.1.14), где $\gamma > 0, 0 < \beta < n$ и $\beta + \gamma > n$. Тогда

$$\varkappa = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^\gamma)|e_1 - t|^\beta |t|^{n/p}} dt < \infty,$$

если $1 < p \leq \infty$. Из этого следует, что оператор $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ при указанных значениях p .

п. 2.1.3 Компактность операторов

В этом разделе мы исследуем компактность оператора H (оператора $\mathcal{H}$) в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ (в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$).

Теорема 2.1.3. Пусть $1 < p \leq \infty$, функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha > -n$, и удовлетворяет условиям (2.1.4) и (2.1.5), а также условиям

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\sigma, t + \tau) - h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = 0, \quad (2.1.21)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1} \\ |t| > N}} \int |h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = 0. \quad (2.1.22)$$

Тогда оператор H вида (2.1.1) компактен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.1.7), где ядро $k_1(x, y)$ оператора K_1 задается формулой (2.1.8). Тогда из (2.1.21) и (2.1.22) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k_1(\sigma, t + \tau) - k_1(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1} \\ |t| > N}} \int |k_1(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = 0.$$

Кроме того, так как $\alpha > -n$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\alpha+n} = 0.$$

Тогда оператор $M_{|x|^{\alpha+n}} K_1$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ (см. [67, р. 380]). Следовательно, оператор H компактен в $L_p(\mathbb{B}_n)$. $\blacksquare$

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 2.1.4. Пусть $1 \leq p < \infty$, функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha > -n$, и удовлетворяет условиям (2.1.4) и (2.1.5), а также условиям

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(t + \tau, \sigma) - h(t, \sigma)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt = 0, \quad (2.1.23)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{|t| > N} |h(t, \sigma)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt = 0. \quad (2.1.24)$$

Тогда оператор H вида (2.1.1) компактен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

В случае, когда ядро $h(x, y)$ инвариантно относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$, «дополнительные» условия вида (2.1.21)–(2.1.24) не требуются. Точнее говоря, справедливо

Следствие 2.1.4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha > -n$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию (2.1.12). Тогда оператор H компактен в $L_p(\mathbb{B}_n)$.

Подчеркнем, что при $\alpha = -n$ вышеуказанные результаты о компактности не имеют места, так как в этом случае в точке $x = 0$ имеется сингулярная особенность.

Аналогичные результаты справедливы и для оператора $\mathcal{H}$ вида (2.1.3), действующего в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$. Не останавливаясь на формулировании теоремы (2.1.4), сформулируем лишь результаты компактности оператора $\mathcal{H}$ в случае ядра инвариантного относительно всех вращений.

Теорема 2.1.5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha < -n$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию (2.1.12). Тогда оператор $\mathcal{H}$ компактен в $L_p(\mathbb{CB}_n)$.

Замечание 2.1.4. Результаты этого и предыдущих разделов сохраняют справедливость, если вместо шара $\mathbb{B}_n$ рассматривать произвольную ограниченную область $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, содержащую начало координат, а вместо $\mathbb{CB}_n$ рассматривать произвольную неограниченную область $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ такую, что область $\mathbb{R}^n \setminus D_2$ является ограниченной и содержит внутри начало координат.

п. 2.1.4 Одномерные интегральные операторы

Сделаем некоторые уточнения, относящиеся к одномерным интегральным операторам с однородными степени α ядрами.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. В пространстве $L_p(0, 1)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(Qf)(x) = \int_0^1 q(x, y)f(y) dy, \quad (2.1.25)$$

где функция $q(x, y)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, измерима и однородна степени α ($\alpha \in \mathbb{R}$), т. е.

$$q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha q(x, y), \quad \lambda > 0. \quad (2.1.26)$$

Лемма 2.1.3. Если функция $q(x, y)$ однородна степени α и оператор Q ограничен в пространстве $L_p(0, 1)$, то $\alpha \geq -1$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1.1. ■

Поскольку интегральные операторы с однородными степени (-1) ядрами хорошо изучены (см., например, [44], [40], [67]), ниже мы исключаем из рассмотрения случай $\alpha = -1$.

Теорема 2.1.6. Пусть функция $q(x, y)$ однородна степени $\alpha > -1$ и удовлетворяет условию

$$\eta = \int_0^\infty |q(1, t)| t^{-1/p} dt = \int_0^\infty |q(t, 1)| t^{-1/p' - \alpha - 1} dt < \infty. \quad (2.1.27)$$

Тогда оператор Q вида (2.1.25) компактен в пространстве $L_p(0, 1)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что равенство интегралов в формуле (2.1.27) проверяется непосредственно.

Имеет место равенство $Q = M_{x^{1+\alpha}} Q_1$, где

$$(Q_1 f)(x) = \int_0^1 q_1(x, y) f(y) dy,$$

а функция $q_1(x, y)$ задается формулой

$$q_1(x, y) = \frac{q(x, y)}{x^{1+\alpha}}$$

Так как функция $q_1(x, y)$ однородна степени (-1) и, в силу (2.1.27)

$$\int_0^1 |q_1(1, t)| t^{-1/p} dt = \eta < \infty,$$

то по теореме Харди–Литтлвуда оператор Q_1 ограничен в пространстве $L_p(0, 1)$. Поскольку $x^{\alpha+1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то оператор $M_{x^{\alpha+1}} Q_1$ компактен в $L_p(0, 1)$ (см. [67, р. 60]), что равносильно компактности оператора Q . ■

Замечание 2.1.5. Из равенства $Q = M_{x^{1+\alpha}} Q_1$ следует, что

$$\|Q\| \leq \|Q_1\| \leq \eta.$$

Пример 2.1.4. В пространстве $L_p(0, 1)$ рассмотрим оператор

$$(Qf)(x) = \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f(y) dy,$$

где $0 < \beta < 1$. Нетрудно видеть, что для этого оператора выполнены условия теоремы 2.1.6.

В пространстве $L_p(1, \infty)$ рассмотрим оператор

$$(\mathcal{Q}f)(x) = \int_1^{\infty} q(x, y) f(y) dy, \quad (2.1.28)$$

где функция $q(x, y)$ по-прежнему удовлетворяет условию (2.1.26).

По аналогии с леммой 2.1.2 доказывается, что если оператор $\mathcal{Q}$ ограничен в пространстве $L_p(1, \infty)$, то $\alpha \leq -1$. Аналогом теоремы 2.1.6 является следующее утверждение.

Теорема 2.1.7. *Пусть функция $q(x, y)$ однородна степени $\alpha < -1$ и удовлетворяет условию (2.1.27). Тогда оператор $\mathcal{Q}$ компактен в пространстве $L_p(1, \infty)$.*

§2.2 Операторы с однородными ядрами в пространствах непрерывных функций

Пусть $\mathcal{X}$ — локально компактное топологическое пространство. Обозначим через $C_b(\mathcal{X})$ пространство всех ограниченных непрерывных функций на $\mathcal{X}$ с нормой

$$\|f\|_{C_b(\mathcal{X})} = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|.$$

В случае, когда $\mathcal{X}$ — компакт, и, следовательно, все непрерывные на $\mathcal{X}$ функции автоматически ограничены, будем использовать обозначение $C(\mathcal{X})$ вместо $C_b(\mathcal{X})$.

В этом параграфе мы будем рассматривать интегральные операторы с однородными степени α ядрами в пространствах непрерывных функций. Подчеркнем, что в этом случае условие инвариантности ядра относительно группы вращений является естественным, так как без него функция $(H\varphi)(x)$ может оказаться разрывной в особых точках $x = 0$ и $x = \infty$ (см. [34, с. 44]).

п. 2.2.1 Теоремы об ограниченности

Теорема 2.2.1. Пусть функция $h(x, y)$ однородна степени α , инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет условию

$$\varkappa = \int_{\mathbb{R}^n} |h(e_1, t)| dt = \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, e_1)| |t|^{-2n-\alpha} dt < \infty. \quad (2.2.1)$$

Тогда 1) если $\alpha \geq -n$, то оператор H вида (2.1.1) ограничен в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$, причем

$$\|H\varphi\|_{C(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa \|\varphi\|_{C(\mathbb{B}_n)}; \quad (2.2.2)$$

2) если $\alpha \leq -n$, то оператор $\mathcal{H}$ вида (2.1.3) ограничен в пространстве $C_b(\mathbb{CB}_n)$, причем

$$\|\mathcal{H}\varphi\|_{C_b(\mathbb{CB}_n)} \leq \varkappa \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{CB}_n)}.$$

Доказательство. 1) Воспользуемся представлением (2.1.7), где ядро оператора K_1 задается формулой (2.1.8). Из условия (2.2.1) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(e_1, t)| dt = \int_{\mathbb{R}^n} |k_1(t, e_1)| |t|^{-n} dt = \varkappa < \infty.$$

Тогда в силу результатов статьи [46] оператор K_1 ограничен в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$, причем

$$\|K_1\varphi\|_{C(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa \|\varphi\|_{C(\mathbb{B}_n)}.$$

Так как $\alpha + n \geq 0$, то оператор $M_{|x|^{n+\alpha}}$ ограничен в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$ и $\|M_{|x|^{n+\alpha}}\| \leq 1$. Тогда из (2.1.7) следует ограниченность оператора H в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$ и неравенство (2.2.2).

2) Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы. ■

По аналогии с теоремой 2.2.1 устанавливается ограниченность одномерных операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}$ в соответствующих пространствах непрерывных функций. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 2.2.2. Пусть однородная степени α функция $q(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\beta = \int_0^\infty |q(1, t)| dt = \int_0^\infty |q(t, 1)| t^{-2-\alpha} dt < \infty. \quad (2.2.3)$$

Тогда 1) если $\alpha \geq -1$, то оператор Q вида (2.1.25) ограничен в пространстве $C([0, 1])$, причем

$$\|Qf\|_{C([0,1])} \leq \beta \|f\|_{C([0,1])}; \quad (2.2.4)$$

2) если $\alpha \leq -1$, то оператор Q вида (2.1.28) ограничен в пространстве $C_b([1, \infty))$, причем

$$\|Qf\|_{C_b([1,\infty))} \leq \beta \|f\|_{C_b([1,\infty))}. \quad (2.2.5)$$

п. 2.2.2 Действие на функции с заданной асимптотикой

Среди одномерных интегральных операторов с однородными ядрами важную роль играют операторы вольтерровского типа, поскольку они чаще встречаются в приложениях (см., например, [45], [47]). Пространство непрерывных функций является наиболее естественным для рассмотрения таких операторов. Основная цель данного раздела — изучить действия интегральных операторов вольтерровского типа с однородными степени α ядрами на функции с заданным асимптотическим поведением на бесконечности или в окрестности нуля.

В пространстве $C_b([1, \infty))$ рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathcal{B}\varphi)(x) = \int_1^x q(x, y)\varphi(y) dy, \quad (2.2.6)$$

где функция $q(x, y)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, измерима и однородна степени α (условие (2.1.26)), где $\alpha \leq -1$. Относительно ядра $q(x, y)$ сделаем следующее предположение: пусть существует такое $n > 0$, что

$$\int_0^1 |q(1, t)| t^{-n} dt = \int_1^\infty |q(t, 1)| t^{n-2-\alpha} dt < \infty. \quad (2.2.7)$$

Нетрудно видеть, что если условие (2.2.7) выполнено, то оно также справедливо для всех чисел, меньших n . В частности, при $n = 0$ имеем

$$\int_0^1 |q(1, t)| dt = \int_1^\infty |q(t, 1)| t^{-2-\alpha} dt < \infty.$$

Тогда в силу теоремы 2.2.2 оператор $\mathcal{B}$ ограничен в пространстве $C_b([1, \infty))$.

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ — произвольная строго возрастающая последовательность. До конца параграфа считаем ее фиксированной. Введем обозначения: $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = \{x \in \mathbb{R}_+ : x > \varepsilon\}$, $\mathcal{O}_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}_+ : x < \varepsilon\}$.

Теорема 2.2.3. Пусть ядро $q(x, y)$ однородно степени α , где $\alpha \leq -1$, и выполнено условие (2.2.7), и пусть функция $\varphi \in C_b([1, \infty))$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_\eta(\infty)$ бесконечно удаленной точки имеет представление

$$\varphi(x) = c_0 + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{x^{\mu_k}} + \frac{v(x)}{x^{\mu_m}}, \quad (2.2.8)$$

где $c_k \in \mathbb{R}$ и $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда, если $\mu_m < n$, то функция $\mathcal{B}\varphi$ в указанной окрестности $\mathcal{O}_\eta(\infty)$ имеет представление

$$(\mathcal{B}\varphi)(x) = \frac{b_0}{x^{-\alpha-1}} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{x^{\mu_k-\alpha-1}} + \frac{w(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}}, \quad (2.2.9)$$

где $b_k \in \mathbb{R}$ и $w(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Доказательство. Учитывая однородность функции $q(x, y)$, представим оператор $\mathcal{B}$ в виде

$$(\mathcal{B}\varphi)(x) = \int_1^x y^\alpha q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \varphi(y) dy.$$

Воспользуемся равенством

$$(\mathcal{B}\varphi)(x) = (\mathcal{B}_1\varphi)(x) + (\mathcal{B}_2\varphi)(x), \quad (2.2.10)$$

где

$$(\mathcal{B}_1\varphi)(x) = \int_1^\eta y^\alpha q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \varphi(y) dy, \quad (2.2.11)$$

$$(\mathcal{B}_2\varphi)(x) = \int_{\eta}^x y^{\alpha} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \varphi(y) dy. \quad (2.2.12)$$

Найдем представление функций $\mathcal{B}_1\varphi$ и $\mathcal{B}_2\varphi$ в окрестности $\mathcal{O}_{\eta}(\infty)$.

1) Считая $x > \eta$ запишем равенство

$$(\mathcal{B}_1\varphi)(x) = \frac{b(x)}{x^{\mu_m - \alpha - 1}}, \quad (2.2.13)$$

где

$$b(x) = x^{\mu_m - \alpha - 1} \int_1^{\eta} y^{\alpha} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \varphi(y) dy.$$

Нетрудно видеть, что функция $b(x)$ непрерывна. Кроме того,

$$\begin{aligned} |b(x)| &\leq \|\varphi\|_{\infty} x^{\mu_m - \alpha - 1} \int_1^{\eta} y^{\alpha} \left| q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \right| dy \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty} x^{\mu_m - \alpha - 1} \int_1^{\eta} y^{\alpha} \left(\frac{\eta}{y}\right)^{\mu_m} \left| q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \right| dy = \\ &= \eta^{\mu_m} \|\varphi\|_{\infty} \frac{1}{x} \int_1^{\eta} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu_m - \alpha} \left| q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \right| dy. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $x/y = t$. В результате получим

$$\begin{aligned} |b(x)| &\leq \eta^{\mu_m} \|\varphi\|_{\infty} \int_{x/\eta}^x t^{\mu_m - \alpha - 2} |q(t, 1)| dt \leq \\ &\leq \eta^{\mu_m} \|\varphi\|_{\infty} \int_{x/\eta}^x t^{n - \alpha - 2} |q(t, 1)| dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $b(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Подставив функцию $\varphi(y)$ вида (2.2.8) в формулу (2.2.12), получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_2\varphi)(x) &= c_0 \int_{\eta}^x y^{\alpha} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) dy + \sum_{k=1}^m c_k \int_{\eta}^x \frac{y^{\alpha}}{y^{\mu_k}} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) dy + \\ &+ \int_{\eta}^x \frac{y^{\alpha}}{y^{\mu_m}} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) v(y) dy. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое. Введем обозначение

$$I_k(x) = \int_{\eta}^x y^{\alpha-\mu_k} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) dy,$$

где $k = 1, 2, \dots, m$. С помощью замены переменных $x/y = t$ получим

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \frac{1}{x^{\mu_k-\alpha-1}} \int_1^{x/\eta} t^{\mu_k-\alpha-2} q(t, 1) dt = \\ &= \frac{1}{x^{\mu_k-\alpha-1}} \int_1^{\infty} t^{\mu_k-\alpha-2} q(t, 1) dt - \frac{1}{x^{\mu_k-\alpha-1}} \int_{x/\eta}^{\infty} t^{\mu_k-\alpha-2} q(t, 1) dt. \end{aligned}$$

Положив

$$\begin{aligned} M_k &= \int_1^{\infty} t^{\mu_k-\alpha-2} q(t, 1) dt, \\ u_k(x) &= -x^{\mu_m-\mu_k} \int_{x/\eta}^{\infty} t^{\mu_k-\alpha-2} q(t, 1) dt, \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$I_k(x) = \frac{M_k}{x^{\mu_k-\alpha-1}} + \frac{u_k(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}}. \quad (2.2.15)$$

Покажем, что $u_k(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\mu_k < \mu_m$ для всех $k = 1, 2, \dots, m-1$, имеем

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &\leq x^{\mu_m-\mu_k} \int_{x/\eta}^{\infty} t^{\mu_k-\alpha-2} |q(t, 1)| dt = x^{\mu_m-\mu_k} \int_{x/\eta}^{\infty} \frac{t^{\mu_m-\alpha-2}}{t^{\mu_m-\mu_k}} |q(t, 1)| dt \leq \\ &\leq x^{\mu_m-\mu_k} \int_{x/\eta}^{\infty} \frac{t^{\mu_m-\alpha-2}}{(x/\eta)^{\mu_m-\mu_k}} |q(t, 1)| dt \leq \eta^{\mu_m-\mu_k} \int_{x/\eta}^{\infty} t^{\mu_m-\alpha-2} |q(t, 1)| dt \leq \\ &\leq \eta^{\mu_m-\mu_k} \int_{x/\eta}^{\infty} t^{n-\alpha-2} |q(t, 1)| dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Полагая в рассуждениях после формулы (2.2.14) $\mu_k = 0$, получим

$$\int_{\eta}^x y^{\alpha} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) dy = \frac{M_0}{x^{-\alpha-1}} + \frac{u_0(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}}. \quad (2.2.16)$$

Рассмотрим последнее слагаемое из равенства (2.2.14). С помощью замены переменных $t = x/y$, получим

$$\int_{\eta}^x y^{\alpha-\mu_m} q\left(\frac{x}{y}, 1\right) v(y) dy = \frac{u(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}}, \quad (2.2.17)$$

где

$$u(x) = \int_1^{x/\eta} t^{\mu_m-\alpha-2} q(t, 1) v\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Покажем, что функция $u(x)$ исчезает на бесконечности. Продолжив функцию $v(x)$ нулем на промежутке $[1, \eta]$, имеем

$$|u(x)| \leq \int_1^{\infty} t^{\mu_m-\alpha-2} |q(t, 1)| \left| v\left(\frac{x}{t}\right) \right| dt \leq \int_1^{\infty} t^{n-\alpha-2} |q(t, 1)| \left| v\left(\frac{x}{t}\right) \right| dt.$$

Так как $v(x/t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ для любого $t \in (1, \infty)$ и

$$t^{n-\alpha-2} |q(t, 1)| \left| v\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq V t^{n-\alpha-2} |q(t, 1)| \in L_1(1, \infty),$$

где $V = \sup_{y>\eta} |v(y)|$, то в силу мажорантной теоремы Лебега

$$\int_1^{\infty} t^{n-\alpha-2} |q(t, 1)| \left| v\left(\frac{x}{t}\right) \right| dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Подставляя (2.2.15), (2.2.16) и (2.2.17) в формулу (2.2.14), получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_2\varphi)(x) &= c_0 \left(\frac{M_0}{x^{-\alpha-1}} + \frac{u_0(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^m c_k \left(\frac{M_k}{x^{\mu_k-\alpha-1}} + \frac{u_k(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}} \right) + \frac{u(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{b_0}{x^{-\alpha-1}} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{x^{\mu_k-\alpha-1}} + \frac{U(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}}, \quad (2.2.18)$$

где $b_k = c_k M_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, и

$$U(x) = c_0 u_0(x) + \sum_{k=1}^m c_k u_k(x) + u(x).$$

Очевидно, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Теперь подставив (2.2.13) и (2.2.18) в формулу (2.2.10), приходим к равенству (2.2.9), где $w(x) = b(x) + U(x)$, причем $w(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Теорема доказана. $\blacksquare$

В пространстве $C([0, 1])$ рассмотрим интегральный оператор

$$(\tilde{\mathcal{B}}\varphi)(x) = \int_x^1 q(x, y) \varphi(y) dy, \quad (2.2.19)$$

где функция $q(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \geq -1$, и существует такое $n > 0$, что

$$\int_1^\infty |q(1, t)| t^n dt = \int_0^1 |q(t, 1)| t^{-n-\alpha-2} dt < \infty. \quad (2.2.20)$$

Нетрудно видеть, что если условие (2.2.20) выполнено, то оно также справедливо для всех чисел, меньших n . В частности, при $n = 0$ имеем

$$\int_1^\infty |q(1, t)| dt = \int_0^1 |q(t, 1)| t^{-\alpha-2} dt < \infty.$$

Тогда в силу теоремы 2.2.2 оператор $\tilde{\mathcal{B}}$ ограничен в пространстве $C([0, 1])$.

Используя сначала однородность функции $q(x, y)$, а затем замену $x/y = t$, представим оператор $\tilde{\mathcal{B}}$ в виде

$$(\tilde{\mathcal{B}}\varphi)(x) = \int_x^1 y^\alpha q\left(\frac{x}{y}, 1\right) \varphi(y) dy = x^{\alpha+1} \int_x^1 t^{-\alpha-2} q(t, 1) \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dt. \quad (2.2.21)$$

Опираясь на (2.2.21) и повторяя с минимальными изменениями доказательство теоремы 2.2.3, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2.4. Пусть ядро $q(x, y)$ однородно степени α , где $\alpha \geq -1$, и выполнено условие (2.2.20), и пусть функция $\varphi \in C([0, 1])$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_\delta(0)$ имеет представление

$$\varphi(x) = c_0 + \sum_{k=1}^m c_k x^{\mu_k} + v(x) x^{\mu_m}, \quad (2.2.22)$$

где $c_k \in \mathbb{R}$ и $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Тогда, если $\mu_m < n$, то функция $\tilde{\mathcal{B}}\varphi$ в указанной окрестности $\mathcal{O}_\delta(0)$ имеет представление

$$(\tilde{\mathcal{B}}\varphi)(x) = b_0 x^{\alpha+1} + \sum_{k=1}^m b_k x^{\mu_k+\alpha+1} + w(x) x^{\mu_m+\alpha+1}, \quad (2.2.23)$$

где $b_k \in \mathbb{R}$ и $w(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Глава 3.

Интегральные операторы вольтерровского типа с однородными ядрами

§3.1 Предварительные сведения

В этой главе мы будем существенно использовать теорию банаховых алгебр. Подробное изложение этой теории можно найти, например, в монографиях [20], [42], [65], [66].

Напомним определение и некоторые свойства нетеровых операторов (подробное изложение этих свойств можно найти, например, в монографиях [23], [40]).

Если X — банахово пространство, то через $\mathcal{L}(X)$ будем обозначать алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в X , а через $\mathcal{T}(X)$ — идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(X)$. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$ и $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ — сопряженный к A оператор. Числа

$$\alpha(A) := \dim \ker A \quad \text{и} \quad \beta(A) := \dim \ker A^*$$

называются дефектными числами оператора A .

Определение 3.1.1. *Оператор A называется нетеровым в пространстве X , если его образ замкнут и числа $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечны. Целое число*

$$\text{ind } A = \alpha(A) - \beta(A)$$

называют индексом оператора A .

Отметим некоторые свойства нетеровых операторов.

Свойство 3.1.1. *Пусть A — нетеров оператор в пространстве X . Тогда для любого оператора $T \in \mathcal{T}(X)$ оператор $A + T$ также нетеров в X , причем*

$$\text{ind}(A + T) = \text{ind } A.$$

Свойство 3.1.2. Если оператор A нетеров в пространстве X , то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов $B \in \mathcal{L}(X)$ таких, что $\|B\| < \varepsilon$, оператор $A + B$ нетеров в X , причем

$$\text{ind}(A + B) = \text{ind } A.$$

Свойство 3.1.3. Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ нетеров тогда и только тогда, когда фактор-класс $A + \mathcal{T}(X)$ обратим в фактор-алгебре $\mathcal{L}(X)/\mathcal{T}(X)$.

Напомним понятие индекса непрерывной функции. Обозначим через $\dot{\mathbb{R}}$ компактификацию $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой.

Определение 3.1.2. Пусть функция $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$ и $f(x) \neq 0$ при всех $x \in \dot{\mathbb{R}}$. Индексом функции $f(x)$ называется число

$$\text{ind } f(x) = \frac{1}{2\pi} \Delta[\arg f(x)] \Big|_{-\infty}^{\infty},$$

где $\Delta[\arg f(x)]$ означает приращение аргумента функции $f(x)$.

Через $\text{ind } f(m, \cdot)$ обозначим индекс функции $f(m, x)$ по переменной x при фиксированном значении m (предполагается, что $f(m, \cdot) \in C(\dot{\mathbb{R}})$).

§3.2 Интегральные операторы вольтерровского типа с однородными ядрами и их свойства

п. 3.2.1 Постановка задачи.

В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, где $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_{|y| < |x|} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \quad (3.2.1)$$

предполагая, что функция $k(x, y)$, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, однородна степени $(-n)$ (т. е. выполнено условие (1.1.3)), инвариантна относительно группы вращений (т. е. выполнено условие (1.1.4)), а также удовлетворяет условию суммируемости

$$\kappa := \int_{\mathbb{B}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0). \quad (3.2.2)$$

Из теоремы 6.4 книги [67] следует, что оператор $\mathcal{K}$ ограничен в $L_2(\mathbb{B}_n)$, причем $\|\mathcal{K}\| \leq \kappa$.

Следуя [14], обозначим через $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ компактификацию локально компактного топологического пространства $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой. Назовем символом оператора $\lambda I + \mathcal{K}$ функцию $\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \xi)$, заданную на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ формулами

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \xi) = \lambda + \int_{\mathbb{B}_n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}, \quad (3.2.3)$$

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(\infty) = \lambda,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра (см., например, [49, с. 41]).

Предложение 3.2.1. [14] *Для того чтобы оператор $\lambda I + \mathcal{K}$ был нетеровым в $L_p(\mathbb{B}_n)$, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию*

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.2.4)$$

В этом случае индекс оператора $\lambda I + \mathcal{K}$ вычисляется по формуле

$$\text{ind}(\lambda I + \mathcal{K}) = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind} \sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \cdot), \quad (3.2.5)$$

где $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m :

$$d_n(m) = (n + 2m - 2) \frac{(n + m - 3)!}{m!(n - 2)!}.$$

Замечание 3.2.1. Известно, что для всех значений m , начиная с некоторого номера m^* выполняется равенство $\text{ind} \sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \cdot) = 0$. Поэтому правая часть формулы (3.2.5) фактически является конечной суммой.

Далее, рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор

$$A = \lambda I + M_a \mathcal{K} + T, \quad (3.2.6)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in C(\mathbb{B}_n)$, M_a — оператор умножения на функцию a , $\mathcal{K}$ — оператор вида (3.2.1), T — компактный в $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор. Назовем символом этого оператора функцию $\sigma_A(m, \xi)$, которая задается на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ формулой

$$\sigma_A(m, \xi) = \lambda + a(0)\sigma_{\mathcal{K}}(m, \xi). \quad (3.2.7)$$

Теорема 3.2.1. *Оператор A вида (3.2.6) нетеров в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sigma_A(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.2.8)$$

При выполнении условия (3.2.8) индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_A(m, \cdot). \quad (3.2.9)$$

Доказательство. Заметим, что

$$(M_a \mathcal{K} \varphi)(x) = a(x)(\mathcal{K} \varphi)(x) = a(0)(\mathcal{K} \varphi)(x) + (a(x) - a(0))(\mathcal{K} \varphi)(x).$$

Следовательно, оператор A представим в виде

$$A = \lambda I + a(0)\mathcal{K} + M_{a-a(0)}\mathcal{K} + T.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a(x) - a(0)) = 0,$$

то оператор $M_{a-a(0)}\mathcal{K}$ является компактным ([67, р. 380]). Тогда получаем равенство

$$A = \lambda I + a(0)\mathcal{K} + T_1, \quad (3.2.10)$$

где T_1 — компактный оператор. Из равенства (3.2.10) и свойства 3.1.1 следует, что оператор A нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор $\lambda I + a(0)\mathcal{K}$, причем

$$\text{ind } A = \text{ind}(\lambda I + a(0)\mathcal{K}). \quad (3.2.11)$$

Заметим, что символом оператора $\lambda I + a(0)\mathcal{K}$ является функция $\sigma_A(m, \xi)$ вида (3.2.7). Тогда в силу предложения 3.2.1 условие (3.2.8) является необходимым и достаточным для нетеровости оператора $\lambda I + a(0)\mathcal{K}$, а значит и для нетеровости оператора A .

Если условие (3.2.8) выполнено, то для индекса оператора A справедлива формула (3.2.9), которая непосредственно вытекает из формул (3.2.11) и (3.2.5). ■

Отметим одно важное свойство символа $\sigma_A(m, \xi)$ оператора A . Покажем, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_A(m, \xi)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im} z < 0$. Действительно, так как $|P_m| \leq 1$ для всех $t \in [-1, 1]$, то для любого $z = \xi + i\eta$, где $\eta < 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_n} |k(e_1, y)| |P_m(e_1 \cdot y')| |y|^{-n/p+iz} dy &\leq \int_{\mathbb{B}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} |y|^{i\xi-\eta} dy = \\ &= \int_{\mathbb{B}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} |y|^{-\eta} dy \leq \int_{\mathbb{B}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty, \end{aligned}$$

в силу условия (3.2.2). Таким образом, функция $\sigma_A(m, z)$ определена для любого $z \in \mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z \leq 0\}$.

Рассмотрим функцию

$$f(y, z) = k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+iz}.$$

Эта функция является аналитической в полуплоскости $\text{Im} z < 0$ и, в силу оценки

$$|f(y, z)| \leq |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{B}_n),$$

для функции $f(y, z)$ имеется суммируемая мажоранта, не зависящая от переменной z . Тогда по теореме об аналитичности интеграла по параметру функция $\sigma_{\mathcal{K}}(m, z)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im} z < 0$. Значит функция $\sigma_A(m, z)$ также является аналитической в этой полуплоскости.

Далее, пусть при фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_A(m, \xi)$ удовлетворяет условию

$$\sigma_A(m, \xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}.$$

Обозначим через $\mathcal{N}_m$ число нулей функции $\sigma_A(m, z)$ в полуплоскости $\text{Im} z < 0$. Так как эта функция является аналитической в данной полуплоскости, по свойству индекса, вытекающему из принципа аргумента

$$\text{ind } \sigma_A(m, \cdot) = -\mathcal{N}_m.$$

Подставляя в формулу (3.2.9), получим

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \mathcal{N}_m.$$

Таким образом, индекс оператора A всегда неотрицателен.

В частном случае, а именно для оператора $\lambda I + \mathcal{K}$, можно подсчитать дефектные числа.

Следствие 3.2.1. *Пусть оператор $\lambda I + \mathcal{K}$ нетеров, т. е. выполнено условие (3.2.4). Тогда его дефектные числа вычисляются по формулам*

$$\alpha(\lambda I + \mathcal{K}) = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \mathcal{N}_m, \quad \beta(\lambda I + \mathcal{K}) = 0, \quad (3.2.12)$$

где $\mathcal{N}_m$ — число нулей функции $\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, z)$ в полуплоскости $\text{Im} z < 0$.

Доказательство. Известно (см. [67, р. 78]), что

$$\alpha(\lambda I + \mathcal{K}) = \sum_{\varkappa_m > 0} d_n(m) \varkappa_m,$$

$$\beta(\lambda I + \mathcal{K}) = - \sum_{\varkappa_m < 0} d_n(m) \varkappa_m,$$

где $\varkappa_m = -\text{ind } \sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \cdot)$. Учитывая, что $\varkappa_m = \mathcal{N}_m$, получаем формулы (3.2.12). ■

Следствие 3.2.2. Оператор $\lambda I + \mathcal{K}$ обратим тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условию

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, z) \neq 0, \quad \forall (m, z) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{C}_-. \quad (3.2.13)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $\lambda I + \mathcal{K}$ обратим. Тогда он нетеров, причем $\alpha(\lambda I + \mathcal{K}) = \beta(\lambda I + \mathcal{K}) = 0$. Так как оператор нетеров, то по теореме 3.2.1

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.2.14)$$

Кроме того, для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, \xi)$ аналитически продолжается в $\text{Im} z < 0$. Так как $\alpha(\lambda I + \mathcal{K}) = 0$, то в силу формулы (3.2.12) получаем, что $\mathcal{N}_m = 0$. Следовательно, $\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}}(m, z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}_-$, а значит выполнено и условие (3.2.13).

Достаточность. Пусть выполнено условие (3.2.13). Тогда выполнено условие (3.2.14), а следовательно, оператор $\lambda I + \mathcal{K}$ нетеров. Так как выполнено условие (3.2.13), то $\mathcal{N}_m = 0$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, а значит

$$\alpha(\lambda I + \mathcal{K}) = \beta(\lambda I + \mathcal{K}) = 0.$$

Таким образом, оператор $\lambda I + \mathcal{K}$ обратим. ■

В заключение отметим, что ранее это утверждение было получено в [12] другим способом.

п. 3.2.2 Композиции операторов.

Перейдем к изучению композиций операторов вида (3.2.6). Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2.1. *Если A_1 и A_2 — операторы вида (3.2.6), то оператор $A = A_1 A_2$ также является оператором вида (3.2.6).*

Доказательство. Рассмотрим операторы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ вида (3.2.1), ядрами которых являются функции $k_1(x, y)$ и $k_2(x, y)$ соответственно. Найдем оператор $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2$. Запишем композицию этих операторов и поменяем порядок интегрирования, в результате получим

$$(\mathcal{K} \varphi)(x) = \int_{|t| < |x|} k_1(x, t) dt \int_{|y| < |t|} k_2(t, y) \varphi(y) dy =$$

$$= \int_{|y| < |x|} \varphi(y) dy \int_{|y| < |t| \leq |x|} k_1(x, t) k_2(t, y) dt = \int_{|y| < |x|} k(x, y) \varphi(y) dy,$$

где

$$k(x, y) = \int_{|y| < |t| < |x|} k_1(x, t) k_2(t, y) dt. \quad (3.2.15)$$

Легко проверить, что полученная функция $k(x, y)$ удовлетворяет условиям (1.1.3), (1.1.4), (3.2.2). Значит $\mathcal{K}$ — оператор вида (3.2.1).

Далее, согласно формуле (3.2.10) оператор A_j ($j = 1, 2$) вида (3.2.6) представим в виде $A_j = \lambda_j I + a_j(0)\mathcal{K}_j + T_j$. Тогда

$$A_1 A_2 = \lambda I + \mathcal{K} + T,$$

где $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$, и операторы $\mathcal{K}$ и T задаются формулами

$$T = \lambda_1 T_2 + \lambda_2 T_1 + a_2(0)T_1 \mathcal{K}_2 + a_1(0)\mathcal{K}_1 T_2 + T_1 T_2,$$

$$\mathcal{K} = a_1(0)a_2(0)\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 + a_2(0)\lambda_1 \mathcal{K}_2 + a_1(0)\lambda_2 \mathcal{K}_1. \quad (3.2.16)$$

Нетрудно видеть, что оператор T компактен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, а оператор $\mathcal{K}$ есть оператор вида (3.2.1). Таким образом, оператор $A_1 A_2$ есть оператор вида (3.2.6). ■

Лемма 3.2.2. Пусть A_1 и A_2 — операторы вида (3.2.6). Тогда коммутатор $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$ является компактным оператором.

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_2 A_1 &= a_1(0)a_2(0)\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 - a_1(0)a_2(0)\mathcal{K}_2 \mathcal{K}_1 + \\ &+ a_1(0)\mathcal{K}_1 T_2 - a_1(0)T_2 \mathcal{K}_1 + a_2(0)T_1 \mathcal{K}_2 - a_2(0)\mathcal{K}_2 T_1. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 \mathcal{K}_1$ (см. [12, с. 96]), то

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = a_1(0)\mathcal{K}_1 T_2 - a_1(0)T_2 \mathcal{K}_1 + a_2(0)T_1 \mathcal{K}_2 - a_2(0)\mathcal{K}_2 T_1.$$

Оператор в правой части этого равенства является компактным, следовательно, оператор $A_1 A_2 - A_2 A_1$ также является компактным. ■

§3.3 Алгебра операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами

п. 3.3.1 Алгебра $\mathfrak{A}$ и фактор–алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{B}_n))$, содержащую все операторы A вида (3.2.6). Алгебра $\mathfrak{A}$ является замыканием по операторной норме множества

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{ \sum_i \prod_j A_{ij} \right\},$$

где A_{ij} — оператор вида (3.2.6), а суммы и произведения конечны. Согласно лемме 3.2.1 любой оператор вида

$$\sum_i \prod_j A_{ij}$$

является оператором вида (3.2.6). Значит, множество $\mathfrak{A}_0$ совпадает с множеством всех операторов A вида (3.2.6).

Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(L_p(\mathbb{B}_n))$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{T}$ является замкнутым двусторонним собственным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Следовательно, корректно определена фактор–алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Рассмотрим подмножество

$$(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0 = \{A + \mathcal{T}\},$$

где A — оператор вида (3.2.6). Очевидно, что $(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$ является всюду плотным в фактор–алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$.

Лемма 3.3.1. *Фактор–алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ коммутативна.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2.2 любые два элемента из множества $(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$ коммутируют. Возьмем произвольные элементы $A + \mathcal{T}$ и $B + \mathcal{T}$ из фактор–алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Тогда найдутся такие две последовательности $\{A_s + \mathcal{T}\} \subset (\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$ и $\{B_s + \mathcal{T}\} \subset (\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$, что

$$\|A - A_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|B - B_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Заметим, что

$$(A_s + \mathcal{T})(B_s + \mathcal{T}) = (B_s + \mathcal{T})(A_s + \mathcal{T}),$$

т. е. $A_s B_s + \mathcal{T} = B_s A_s + \mathcal{T}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(A + \mathcal{T})(B + \mathcal{T}) - (B + \mathcal{T})(A + \mathcal{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} &= \|AB - BA + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \leq \\ &\leq \|AB - A_s B_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} + \|BA - B_s A_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \leq \\ &\leq \|A + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \|B - B_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} + \|B + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \|A - A_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $s \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\|(A + \mathcal{T})(B + \mathcal{T}) - (B + \mathcal{T})(A + \mathcal{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} = 0,$$

т. е. $(A + \mathcal{T})(B + \mathcal{T}) = (B + \mathcal{T})(A + \mathcal{T})$. ■

Для банаховой коммутативной алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ построим символьное исчисление. Сначала определим символ для элементов из $(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$. Символом фактор-класса $A + \mathcal{T}$, где оператор A определяется формулой (3.2.6), назовем функцию $\sigma_{[A]}(m, \xi)$, такую что

$$\sigma_{[A]}(m, \xi) = \sigma_A(m, \xi),$$

где функция $\sigma_A(m, \xi)$ задается формулой (3.2.7). Убедимся, что сумме и произведению любых двух элементов из множества $(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$ соответствуют сумма и произведение их символов.

Лемма 3.3.2. *Для любых элементов $A_1 + \mathcal{T}$ и $A_2 + \mathcal{T}$, где A_1, A_2 — операторы вида (3.2.6), выполняются равенства*

$$\sigma_{[A_1 + A_2]}(m, \xi) = \sigma_{[A_1]}(m, \xi) + \sigma_{[A_2]}(m, \xi),$$

$$\sigma_{[A_1 A_2]}(m, \xi) = \sigma_{[A_1]}(m, \xi) \sigma_{[A_2]}(m, \xi).$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$A_1 = \lambda_1 I + M_{a_1} \mathcal{K}_1 + T_1 = \lambda_1 I + a_1(0) \mathcal{K}_1 + T'_1,$$

$$A_2 = \lambda_2 I + M_{a_2} \mathcal{K}_2 + T_2 = \lambda_2 I + a_2(0) \mathcal{K}_2 + T_2'.$$

Тогда

$$\sigma_{[A_1]}(m, \xi) = \lambda_1 + a_1(0) \sigma_{\mathcal{K}_1}(m, \xi),$$

$$\sigma_{[A_2]}(m, \xi) = \lambda_2 + a_2(0) \sigma_{\mathcal{K}_2}(m, \xi).$$

Символом элемента $A_1 + A_2 + \mathcal{T}$ является функция $\sigma_{[A_1+A_2]}(m, \xi)$ вида

$$\begin{aligned} \sigma_{[A_1+A_2]}(m, \xi) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \\ &+ \int_{\mathbb{B}_n} [a_1(0)k_1(e_1, y) + a_2(0)k_2(e_1, y)] P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy = \\ &= \sigma_{[A_1]}(m, \xi) + \sigma_{[A_2]}(m, \xi). \end{aligned}$$

Найдем символ фактор-класса $A_1 A_2 + \mathcal{T}$. Заметим, что

$$A_1 A_2 + \mathcal{T} = \lambda I + \mathcal{K} + T,$$

где $\mathcal{K}$ определяется формулой (3.2.16). Из результатов [12], следует, что

$$\sigma_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2}(m, \xi) = \sigma_{\mathcal{K}_1}(m, \xi) \sigma_{\mathcal{K}_2}(m, \xi).$$

Учитывая сказанное и принимая во внимание формулу (3.2.16), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{[A_1 A_2]}(m, \xi) &= \lambda + a_1(0) a_2(0) \sigma_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2}(m, \xi) + \\ &+ a_2(0) \lambda_1 \sigma_{\mathcal{K}_2}(m, \xi) + a_1(0) \lambda_2 \sigma_{\mathcal{K}_1}(m, \xi) = \\ &= \sigma_{[A_1]}(m, \xi) \sigma_{[A_2]}(m, \xi). \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Лемма 3.3.3. Пусть $\sigma_{[A]}(m, \xi)$ — символ фактор-класса $A + \mathcal{T}$, где A — оператор вида (3.2.6). Тогда справедливо неравенство

$$\|\sigma_{[A]}(m, \xi)\|_{C(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R})} \leq \|A + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}}. \quad (3.3.1)$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \|\sigma_A(m, \xi)\|_{C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})}$ и ε — произвольное положительное число. Тогда найдется такая точка $(m_0, \xi_0) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$, что будет выполнено неравенство $|\sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)| > \alpha - \varepsilon$. Рассмотрим элемент

$$(A + \mathcal{T}) - (\sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)I + \mathcal{T}) = A - \sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)I + \mathcal{T}.$$

Ясно, что его символом является функция $\sigma_{[A]}(m, \xi) - \sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)$, равная нулю в точке (m_0, ξ_0) . Тогда по теореме 3.2.1 оператор $A - \sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)I$ не нетеров. Тогда фактор-класс $A - \sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)I + \mathcal{T}$ не обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ (из обратимости фактор-класса в алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ вытекает его обратимость в алгебре $\mathcal{L}(\mathbb{B}_n)/\mathcal{T}$, что, по свойству 3.1.3, равносильно нетеровости всех операторов из этого класса). Следовательно, число $\sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)$ принадлежит спектру элемента $A + \mathcal{T}$. Тогда

$$|\sigma_{[A]}(m_0, \xi_0)| \leq \text{Spr}(A + \mathcal{T}),$$

где $\text{Spr}(A + \mathcal{T})$ — спектральный радиус элемента $A + \mathcal{T}$, следовательно $\alpha - \varepsilon < \text{Spr}(A + \mathcal{T})$. В силу произвольности числа ε делаем вывод, что $\alpha \leq \text{Spr}(A + \mathcal{T})$. Учитывая, что

$$\text{Spr}(A + \mathcal{T}) \leq \|A + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}}$$

получаем неравенство (3.3.1). ■

Используя лемму 3.3.3, построим символьное исчисление для фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Для множества $(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$ это уже сделано. Пусть теперь

$$B + \mathcal{T} \in (\mathfrak{A}/\mathcal{T}) \setminus (\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0.$$

Тогда существует последовательность $\{A_s + \mathcal{T}\} \subset (\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$, такая что

$$\|(B + \mathcal{T}) - (A_s + \mathcal{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{A_s + \mathcal{T}\}$ является фундаментальной. Из неравенства (3.3.1) вытекает, что последовательность $\{\sigma_{[A_s]}(m, \xi)\}$ является фундаментальной в пространстве $C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$. В силу полноты пространства $C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$ последовательность символов $\{\sigma_{[A_s]}(m, \xi)\}$ сходится по

супремум-норме к некоторой функции $\sigma_{[B]}(m, \xi)$. Функцию $\sigma_{[B]}(m, \xi)$ назовем символом фактор-класса $B + \mathcal{T}$. Подчеркнем, что функция $\sigma_{[B]}(m, \xi)$ не зависит от выбора последовательности $\{A_s + \mathcal{T}\}$ сходящейся к элементу $B + \mathcal{T}$.

Покажем, что для любого фактор-класса $B + \mathcal{T}$ из $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ выполняется неравенство

$$\|\sigma_{[B]}(m, \xi)\|_{C(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R})} \leq \|B + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}}. \quad (3.3.2)$$

Действительно, пусть $\{A_s + \mathcal{T}\}$ — последовательность, сходящаяся к элементу $B + \mathcal{T}$. В силу леммы 3.3.3

$$\|\sigma_{[A_s]}(m, \xi)\|_{C(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R})} \leq \|A_s + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}}.$$

Переходя к пределу при $s \rightarrow \infty$, получим неравенство (3.3.2).

Дадим описание пространства максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Напомним (см. [20, § 5], [65, Раздел 1.5]), что пространством максимальных идеалов произвольной коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{B}$ называется совокупность всех максимальных идеалов этой алгебры, снабженная топологией Гельфанда. Его обозначают $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$. Известно, что $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ является компактным хаусдорфовым топологическим пространством. Каждому элементу $b \in \mathfrak{B}$ ставится в соответствие функция $\widehat{b}$, которая определяется на $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ равенством

$$\widehat{b}(M) = f_M(b),$$

где f_M — характер, который соответствует максимальному идеалу M . Функция $\widehat{b}$ называется преобразованием Гельфанда элемента $b \in \mathfrak{B}$ ([42, с. 28]).

Обозначим через $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ алгебру Винера, то есть совокупность функций вида $c + \widehat{f}(\xi)$, где $c \in \mathbb{C}$, а $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$. Относительно поточечных алгебраических операций и нормы

$$\|c + \widehat{f}\|_{\mathcal{W}(\mathbb{R})} = |c| + \|f\|_1$$

множество $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ образует коммутативную банахову алгебру. Известно (см.,

например, [9, с. 47]), что пространство максимальных идеалов $\mathcal{M}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$ алгебры $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ гомеоморфно компакту $\dot{\mathbb{R}}$.

Теорема 3.3.1. 1) Пространство максимальных идеалов $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ банаховой алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ гомеоморфно компакту $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$.

2) При отождествлении пространств $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ и $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ преобразование Гельфанда элемента $B + \mathcal{T} \in \mathfrak{A}/\mathcal{T}$ совпадает с его символом $\sigma_{[B]}(m, \xi)$.

Доказательство. 1) Пусть (m_0, ξ_0) — произвольная точка компакта $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$. Положим

$$\mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)} = \{B + \mathcal{T} \in \mathfrak{A}/\mathcal{T} : \sigma_{[B]}(m_0, \xi_0) = 0\}. \quad (3.3.3)$$

Докажем, что $\mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$ является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Для этого покажем, что функционал $f_{(m_0, \xi_0)}$ вида

$$f_{(m_0, \xi_0)}(B + \mathcal{T}) = \sigma_{[B]}(m_0, \xi_0)$$

является характером алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Действительно, пусть $B_1 + \mathcal{T}$ и $B_2 + \mathcal{T}$ — произвольные элементы из $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Тогда, используя лемму 3.3.2, запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_{(m_0, \xi_0)}((B_1 + \mathcal{T}) + (B_2 + \mathcal{T})) &= f_{(m_0, \xi_0)}(B_1 + B_2 + \mathcal{T}) = \\ &= \sigma_{[B_1 + B_2]}(m_0, \xi_0) = \sigma_{[B_1]}(m_0, \xi_0) + \sigma_{[B_2]}(m_0, \xi_0) = \\ &= f_{(m_0, \xi_0)}(B_1 + \mathcal{T}) + f_{(m_0, \xi_0)}(B_2 + \mathcal{T}); \\ f_{(m_0, \xi_0)}((B_1 + \mathcal{T})(B_2 + \mathcal{T})) &= f_{(m_0, \xi_0)}(B_1 B_2 + \mathcal{T}) = \\ &= \sigma_{[B_1 B_2]}(m_0, \xi_0) = \sigma_{[B_1]}(m_0, \xi_0) \sigma_{[B_2]}(m_0, \xi_0) = \\ &= f_{(m_0, \xi_0)}(B_1 + \mathcal{T}) f_{(m_0, \xi_0)}(B_2 + \mathcal{T}); \\ f_{(m_0, \xi_0)}(\lambda(B + \mathcal{T})) &= \lambda(f_{(m_0, \xi_0)}(B + \mathcal{T})), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{Ker } f_{(m_0, \xi_0)} = \mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}.$$

Так как ядро любого характера является максимальным идеалом алгебры, то $\mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$ — максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$.

Обратно, покажем, что любой максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ имеет вид (3.3.3).

Обозначим через $\mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ совокупность всех функций из $C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$, которые являются символами операторов из алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Снабдим множество $\mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ поточечными алгебраическими операциями и нормой

$$\|\sigma_{[B]}\|_{\mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})} = \|B + \mathcal{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}},$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ становится коммутативной банаховой алгеброй, причем отображение

$$\text{simb} : \mathfrak{A}/\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T}), \quad B + \mathcal{T} \rightarrow \sigma_{[B]}(m, \xi)$$

является изометрическим изоморфизмом. Пусть $\mathcal{S}^0(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ — множество функций $\sigma(m, \xi) \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ таких, что $\sigma(m, \xi) \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ при любом фиксированном $m \in \mathbb{Z}_+$. Из результатов разделов 6.3 и 6.4 книги [67] следует, что символ фактор-класса $\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}$ принадлежит множеству $\mathcal{S}^0(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$. Верно и обратное. Таким образом, функции из $\mathcal{S}^0(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$, и только они, являются символами элементов вида $\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ и $f_{\mathcal{M}}$ — соответствующий ему характер. Тогда $\text{simb}(\mathcal{M})$ является максимальным идеалом алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$. Учитывая описание пространства $\mathcal{M}(\mathcal{W}(\mathbb{R}))$, получаем, что все функции из множества $\text{simb}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{S}^0(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ обращаются в нуль в некоторой фиксированной точке (m_0, ξ_0) компакта $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$. Таким образом для любого элемента $\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T} \in \mathcal{M}$, справедливо равенство

$$0 = f_{\mathcal{M}}(\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}) = \sigma_{[\lambda I + \mathcal{K}]}(m_0, \xi_0).$$

Покажем теперь, что для произвольного элемента $\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T} \in \mathfrak{A}/\mathcal{T}$ имеет место равенство

$$f_{\mathcal{M}}(\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}) = \sigma_{[\lambda I + \mathcal{K}]}(m_0, \xi_0), \quad (3.3.4)$$

где (m_0, ξ_0) — точка, определенная выше. Действительно, положим

$$f_{\mathcal{M}}(\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}) = z_0, \quad \text{где } z_0 \in \mathbb{C},$$

и рассмотрим элемент

$$D + \mathcal{T} = \lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T} - (z_0 I + \mathcal{T}).$$

Поскольку

$$f_{\mathcal{M}}(D + \mathcal{T}) = f_{\mathcal{M}}(\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}) - f_{\mathcal{M}}(z_0 I + \mathcal{T}) = z_0 - z_0 = 0,$$

то $D + \mathcal{T} \in \mathcal{M}$. Тогда по доказанному выше $\sigma_{[\lambda I + \mathcal{K}]}(m_0, \xi_0) - z_0 = 0$, т. е. имеет место равенство (3.3.4).

Таким образом, доказано, что существует точка $(m_0, \xi_0) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ такая, что для любого элемента $\lambda I + \mathcal{K} + \mathcal{T}$ выполнено равенство (3.3.4).

Пусть $B + \mathcal{T}$ — произвольный элемент из алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Так как множество $(\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$ всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$, то найдется такая последовательность $\lambda_s I + \mathcal{K}_s + \mathcal{T} \subset (\mathfrak{A}/\mathcal{T})_0$, что

$$\|B + \mathcal{T} - (\lambda_s I + \mathcal{K}_s + \mathcal{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{T}} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Тогда по лемме 3.3.3

$$\|\sigma_{[B]}(m, \xi) - \sigma_{[\lambda_s I + \mathcal{K}_s]}(m, \xi)\|_{C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

В силу формулы (3.3.4) справедливо равенство

$$f_{\mathcal{M}}(\lambda_s I + \mathcal{K}_s + \mathcal{T}) = \sigma_{[\lambda_s I + \mathcal{K}_s]}(m_0, \xi_0).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $s \rightarrow \infty$ и учитывая непрерывность характера $f_{\mathcal{M}}$, получим

$$f_{\mathcal{M}}(B + \mathcal{T}) = \sigma_{[B]}(m_0, \xi_0). \quad (3.3.5)$$

Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$.

2) Рассмотрим биективное отображение

$$\vartheta : \mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}, \quad \mathcal{M}_{(m, \xi)} \rightarrow (m, \xi).$$

Снабдим множество $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ топологией Гельфанда ([20, с. 36]). Используя (3.3.5), легко проверить, что отображение ϑ является непрерывным. Учитывая биективность, получаем, что отображение ϑ — гомеоморфизм.

Далее, преобразование Гельфанда $\widehat{B + \mathcal{T}}$ элемента $B + \mathcal{T}$ задается на пространстве $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ равенством

$$\widehat{B + \mathcal{T}}(\mathcal{M}_{(m, \xi)}) = f_{\mathcal{M}_{(m, \xi)}}(B + \mathcal{T}),$$

где $f_{\mathcal{M}_{(m, \xi)}}$ — характер, соответствующий максимальному идеалу $\mathcal{M}_{(m, \xi)}$. Отождествив пространства $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ и $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$, и учитывая (3.3.5), получаем равенство

$$\widehat{B + \mathcal{T}}(m, \xi) \equiv \sigma_{[B]}(m, \xi).$$

Теорема доказана. ■

Замечание 3.3.1. Подчеркнем принципиальное отличие этой теоремы от результатов работы [12]. В [12] была рассмотрена коммутативная банахова алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная всеми операторами вида $\lambda I + \mathcal{K}$, пространство максимальных идеалов которой гомеоморфно $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{C}_-$.

Следствие 3.3.1. Для того чтобы элемент $B + \mathcal{T} \in \mathfrak{A}/\mathcal{T}$ был обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию

$$\sigma_{[B]}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.3.6)$$

Доказательство. Элемент $B + \mathcal{T}$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда его преобразование Гельфанда $\widehat{B + \mathcal{T}}$ нигде не обращается в нуль ([42, с. 28]), что в силу теоремы 3.2.1 равносильно условию (3.3.6). ■

п. 3.3.2 Критерий нетеровости в алгебре $\mathfrak{A}$.

Назовем символом оператора $B \in \mathfrak{A}$ функцию $\sigma_B(m, \xi)$, являющуюся символом фактор-класса $B + \mathcal{T}$, т. е.

$$\sigma_B(m, \xi) = \sigma_{[B]}(m, \xi). \quad (3.3.7)$$

Теорема 3.3.2. Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Для того, чтобы оператор B являлся нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию

$$\sigma_B(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.3.8)$$

В этом случае индекс оператора B вычисляется по формуле

$$\text{ind } B = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_B(m, \cdot). \quad (3.3.9)$$

Доказательство. Необходимость. Для операторов из множества $\mathfrak{A}_0$ необходимость условия (3.3.8) установлена в теореме 3.2.1.

Пусть теперь $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0$. Предположим, что $\sigma_B(m_0, \xi_0) = 0$, где (m_0, ξ_0) — некоторая точка компакта $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$. Так как оператор B нетеров, то найдется такое $\delta > 0$, что все операторы из δ -окрестности оператора B являются нетеровыми (свойство 3.1.2). Подберем оператор $B_0 \in \mathfrak{A}_0$ такой, что

$$\|B - B_0\| < \delta/2.$$

Тогда применяя неравенство (3.3.2), получим

$$|\sigma_{B_0}(m_0, \xi_0)| = |\sigma_B(m_0, \xi_0) - \sigma_{B_0}(m_0, \xi_0)| \leq \|B - B_0\| < \delta/2.$$

Рассмотрим оператор $D_0 = B_0 - \sigma_{B_0}(m_0, \xi_0)I \in \mathfrak{A}_0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|B - D_0\| &= \|B - B_0 + \sigma_{B_0}(m_0, \xi_0)I\| \leq \\ &\leq \|B - B_0\| + |\sigma_{B_0}(m_0, \xi_0)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta, \end{aligned}$$

то оператор D_0 является нетеровым. Очевидно, что функция $\sigma_{B_0}(m, \xi) - \sigma_{B_0}(m_0, \xi_0)$ является символом оператора D_0 . Так как эта функция равна нулю в точке (m_0, ξ_0) , то в согласно теореме 3.2.1 оператор D_0 не является нетеровым. Получили противоречие. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (3.3.8). Тогда в силу равенства (3.3.7) выполняется условие (3.3.6). Тогда по следствию 3.3.1 эле-

мент $B + \mathcal{T}$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ и тем более обратим в фактор-алгебре $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{B}_n))/\mathcal{T}$. Тогда оператор B нетеров в силу свойства 3.1.3.

Теперь докажем, что если выполнено условие (3.3.8), то индекс оператора B вычисляется по формуле (3.3.9). Для операторов из множества $\mathfrak{A}_0$, т. е. для операторов вида (3.2.6), формула (3.3.9) совпадает с формулой (3.2.9). Пусть $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0$. Тогда существует последовательность $\{A_s\} \subset \mathfrak{A}_0$ такая, что

$$\|B - A_s\| \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Тогда $\text{ind } B = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind } A_s$, причем числовая последовательность $\{\text{ind } A_s\}_{s=1}^{\infty}$ стабилизируется, начиная с некоторого значения s_1 . Из неравенства (3.3.1) следует, что для любого фиксированного $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|\sigma_B - \sigma_{A_s}\|_{C(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Но тогда

$$\text{ind } \sigma_B(m, \cdot) = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind } \sigma_{A_s}(m, \cdot),$$

причем существует такое число s_2 , что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ числовая последовательность $\{\text{ind } \sigma_{A_s}(m, \cdot)\}_{s=1}^{\infty}$ стабилизируется, начиная с s_2 . Пусть $s' = \max\{s_1, s_2\}$. Тогда, используя формулу (3.2.9), имеем

$$\text{ind } B = \text{ind } A_{s'} = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_{A_{s'}}(m, \cdot) = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_B(m, \cdot).$$

Теорема доказана. ■

§3.4 Интегральные операторы вольтерровского типа с переменным «нижним» пределом

В этом разделе мы рассмотрим интегральные операторы вольтерровского типа с переменным «нижним» пределом.

В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим оператор

$$(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi)(x) = \int_{|x| < |y| < 1} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \quad (3.4.1)$$

где функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$, инвариантна относительно группы $SO(n)$ (условия (1.1.3) и (1.1.4)), а также удовлетворяет условию суммируемости

$$\int_{\mathbb{CB}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty. \quad (3.4.2)$$

Условие (3.4.2) обеспечивает ограниченность оператора $\mathcal{K}$ в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$. Это вытекает из теоремы 6.4 книги [67].

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим оператор

$$\mathcal{A} = \lambda I + M_a \widetilde{\mathcal{K}} + T, \quad (3.4.3)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in C(\mathbb{B}_n)$, T — компактный в $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор. Исследование оператора $\mathcal{A}$ совершенно аналогично исследованию оператора A вида (3.2.6). Определим на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ символ оператора $\mathcal{A}$ формулами

$$\sigma_{\mathcal{A}}(m, \xi) = \lambda + a(0) \int_{\mathbb{CB}_n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R},$$

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\infty) = \lambda.$$

Теорема 3.4.1. *Оператор $\mathcal{A}$ вида (3.4.3) нетеров в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.4.4)$$

Если условие (3.4.4) выполнено, то индекс оператора $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\text{ind } \mathcal{A} = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_{\mathcal{A}}(m, \cdot). \quad (3.4.5)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.1.

Покажем, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_{\mathcal{A}}(m, \xi)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im} z > 0$. Действительно, для любого $z = \xi + i\eta$, где $\eta > 0$, имеем

$$\int_{\mathbb{CB}_n} |k(e_1, y)| |P_m(e_1 \cdot y')| |y|^{-n/p+iz} dy \leq \int_{\mathbb{CB}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} |y|^{i\xi-\eta} dy \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{CB}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty,$$

в силу условия (3.4.2). Таким образом, функция $\sigma_{\mathcal{A}}(m, z)$ определена для любого $z \in \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Рассмотрим функцию

$$f(y, z) = k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+iz},$$

являющуюся аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. В силу оценки

$$|f(y, z)| \leq |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{CB}_n),$$

для нее имеется суммируемая мажоранта, не зависящая от переменной z . Тогда по теореме об аналитичности интеграла по параметру функция $\sigma_{\widetilde{\mathcal{K}}}(m, z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Значит функция $\sigma_{\mathcal{A}}(m, z)$ также является аналитической в этой полуплоскости.

Далее, пусть при фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_{\mathcal{A}}(m, \xi)$ удовлетворяет условию

$$\sigma_{\mathcal{A}}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}.$$

Пусть $\mathcal{N}_m$ — число нулей функции $\sigma_{\mathcal{A}}(m, z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Так как эта функция является аналитической в данной полуплоскости, по свойству индекса

$$\operatorname{ind} \sigma_{\mathcal{A}}(m, \cdot) = \mathcal{N}_m.$$

Подставляя в формулу (3.4.5), получим

$$\operatorname{ind} \mathcal{A} = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \mathcal{N}_m.$$

Таким образом, индекс оператора $\mathcal{A}$ всегда неположителен. По аналогии со следствиями 3.2.1 и 3.2.2 устанавливаются следующие утверждения.

Следствие 3.4.1. *Пусть оператор $\lambda I + \widetilde{\mathcal{K}}$ нетеров, т. е. выполнено условие (3.4.4). Тогда его дефектные числа вычисляются по формулам*

$$\alpha(\lambda I + \widetilde{\mathcal{K}}) = 0, \quad \beta(\lambda I + \widetilde{\mathcal{K}}) = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \mathcal{N}_m, \quad (3.4.6)$$

где $\mathcal{N}_m$ — число нулей функции $\sigma_{\lambda I + \widetilde{\mathcal{K}}}(m, z)$ в полуплоскости $\text{Im} z > 0$.

Следствие 3.4.2. Оператор $\lambda I + \widetilde{\mathcal{K}}$ обратим тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условию

$$\sigma_{\lambda I + \widetilde{\mathcal{K}}}(m, z) \neq 0, \quad \forall (m, z) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{C}_+. \quad (3.4.7)$$

Пусть $\mathfrak{A}_1$ — наименьшая замкнутая подалгебра банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{B}_n))$, содержащая все операторы $\mathcal{A}$ вида (3.4.3). Структура этой алгебры подобна структуре алгебры $\mathfrak{A}$, рассмотренной выше. Поэтому, рассуждая аналогично, для алгебры $\mathfrak{A}_1$ можно построить символьное исчисление, т. е. каждому оператору $B \in \mathfrak{A}_1$ поставить в соответствие его символ — функцию $\sigma_B(m, \xi) \in C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$. Невырожденность символа является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора B .

§3.5 Операторы вольтерровского типа с однородными ядрами в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$

В пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим оператор

$$(\mathcal{Q}\varphi)(x) = \int_{|x| < |y|} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{CB}_n, \quad (3.5.1)$$

предполагая, что функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$, т. е. выполнены условия (1.1.3) и (1.1.4), а также удовлетворяет условию суммируемости (3.4.2). В силу теоремы 6.4 книги [67] оператор $\mathcal{Q}$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$.

Чтобы исследовать оператор $\mathcal{Q}$, нам необходимо установить связь этого оператора с интегральными операторами, рассмотренными в предыдущем параграфе. Для этого нам потребуется преобразование инверсии

$$y = \frac{x}{|x|^2}, \quad x = \frac{y}{|y|^2} \quad (3.5.2)$$

отображающее $\mathbb{CB}_n$ на внутренность единичного шара $\mathbb{B}_n$. Как известно, это преобразование имеет якобиан

$$\frac{\partial(y)}{\partial(x)} = \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Определим на пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ оператор J равенством

$$(J\varphi)(x) = \left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{n/p} \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{CB}_n. \quad (3.5.3)$$

Оператор J изометрично отображает пространство $L_p(\mathbb{CB}_n)$ на $L_p(\mathbb{B}_n)$. Действительно, с помощью замены $y = x/|x|^2$ получаем

$$\begin{aligned} \|J\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} &= \left(\int_{\mathbb{B}_n} \frac{1}{|x|^{2n}} \left| \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \left(\int_{\mathbb{CB}_n} |y|^{2n} |\varphi(y)|^p \frac{dy}{|y|^{2n}} \right)^{1/p} = \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{CB}_n)}. \end{aligned}$$

Обратный оператор $J^{-1}: L_p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_p(\mathbb{CB}_n)$ задается такой же формулой, а именно

$$(J^{-1}\varphi)(x) = \left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{n/p} \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{B}_n. \quad (3.5.4)$$

Лемма 3.5.1. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{K}_1 = J\mathcal{Q}J^{-1}, \quad (3.5.5)$$

где оператор $\mathcal{K}_1$ задается в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ формулой

$$(\mathcal{K}_1\varphi)(x) = \int_{|y| < |x|} k(y, x) \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{n/p-n/p'} \varphi(y) dy. \quad (3.5.6)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_1\varphi)(x) &= (J\mathcal{Q}J^{-1}\varphi)(x) = \\ &= \left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{n/p} \int_{|y| > 1/|x|} k\left(\frac{x}{|x|^2}, y\right) \left(\frac{1}{|y|^2}\right)^{n/p} \varphi\left(\frac{y}{|y|^2}\right) dy. \end{aligned}$$

В результате замены переменных $t = y/|y|^2$ получим

$$(\mathcal{K}_1\varphi)(x) = \left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{n/p} \int_{1/|t| > 1/|x|} k\left(\frac{x}{|x|^2}, \frac{t}{|t|^2}\right) |t|^{2n/p} \varphi(t) \frac{dt}{|t|^{2n}} =$$

$$= \int_{|t| < |x|} k\left(\frac{x'}{|x|}, \frac{t'}{|t|}\right) \left(\frac{|t|}{|x|}\right)^{2n/p} \varphi(t) \frac{dt}{|t|^{2n}}.$$

Используя однородность функции $k(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_1\varphi)(x) &= \int_{|t| < |x|} k(x'|t|, t'|x|) (|x||t|)^n \left(\frac{|t|}{|x|}\right)^{2n/p} \varphi(t) \frac{dt}{|t|^{2n}} = \\ &= \int_{|t| < |x|} k(x'|t|, t'|x|) \left(\frac{|t|}{|x|}\right)^{2n/p-n} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Так как функция $k(t, x)$ инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$, то существует такая функция $k_0(r, \rho, \tau)$, что $k(t, x) = k_0(|t|, |x|, t' \cdot x')$. Тогда

$$k(x'|t|, t'|x|) = k_0(|t|, |x|, x' \cdot t') = k_0(|t|, |x|, t' \cdot x') = k(t, x).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{K}_1\varphi)(x) = \int_{|t| < |x|} k(t, x) \left(\frac{|t|}{|x|}\right)^{n/p-n/p'} \varphi(t) dt.$$

Лемма доказана. ■

Очевидно, что ядро

$$k_1(x, y) = k(y, x) \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{n/p-n/p'} \quad (3.5.7)$$

оператора $\mathcal{K}_1$ является однородным степени $(-n)$ и инвариантным относительно группы вращений. Покажем, что

$$\int_{\mathbb{B}_n} k_1(e_1, y) |y|^{-n/p} dy < \infty.$$

В самом деле, с помощью замены переменных $y = t/|t|^2$, с учетом однородности функции $k(x, y)$, получим

$$\int_{\mathbb{B}_n} k_1(e_1, y) |y|^{-n/p} dy = \int_{\mathbb{B}_n} k(y, e_1) |y|^{-n/p'} dy =$$

$$= \int_{\mathbb{CB}_n} k\left(\frac{t}{|t|^2}, e_1\right) |t|^{n/p'} \frac{dt}{|t|^{2n}} = \int_{\mathbb{CB}_n} k(t', e_1|t|) |t|^{-n/p} dt.$$

Заметим, что

$$k(t', e_1|t|) = k(e_1, t'|t|) = k(e_1, t).$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{B}_n} k_1(e_1, y) |y|^{-n/p} dy = \int_{\mathbb{CB}_n} k(e_1, t) |t|^{-n/p} dt < \infty.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{K}_1$ относится к операторам типа (3.2.1), которые были изучены в параграфе 3.2.

Из формулы (3.5.5) вытекает равенство

$$\lambda I_1 + \mathcal{K}_1 = J(\lambda I + \mathcal{Q})J^{-1}, \quad (3.5.8)$$

где I и I_1 — тождественные операторы, действующие в пространствах $L_p(\mathbb{B}_n)$ и $L_p(\mathbb{CB}_n)$ соответственно. Из равенства (3.5.8) следует, что оператор $\lambda I + \mathcal{Q}$ обратим (нетеров) в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\lambda I_1 + \mathcal{K}_1$ обратим (нетеров) в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

Определим символ оператора $\lambda I + \mathcal{Q}$ на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ формулами

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{Q}}(m, \xi) = \lambda + \int_{\mathbb{CB}_n} k(e_1, y) |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R},$$

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{Q}}(\infty) = \lambda.$$

Нетрудно видеть, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $\sigma_{\lambda I + \mathcal{Q}}(m, \xi)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } z > 0$.

Докажем, что

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{Q}}(m, \xi) = \sigma_{\lambda I_1 + \mathcal{K}_1}(m, -\xi). \quad (3.5.9)$$

Действительно,

$$\sigma_{\lambda I_1 + \mathcal{K}_1}(m, -\xi) = \lambda + \int_{\mathbb{B}_n} k_1(e_1, y) |y|^{-n/p+i\xi} dy = \lambda + \int_{\mathbb{B}_n} k(y, e_1) |y|^{-n/p'+i\xi} dy.$$

После замены $y = t/|t|^2$ и повторения соответствующих рассуждений, получим равенство (3.5.9).

Формулы (3.5.8) и (3.5.9) легко получать результаты для оператора $\lambda I + \mathcal{Q}$, используя известные результаты для оператора $\lambda I_1 + \mathcal{K}_1$.

Теорема 3.5.1. *Оператор $\lambda I + \mathcal{Q}$ обратим тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условию*

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{Q}}(m, z) \neq 0, \quad \forall (m, z) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{C}_+. \quad (3.5.10)$$

Доказательство. В силу (3.5.8) оператор $\lambda I + \mathcal{Q}$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\lambda I_1 + \mathcal{K}_1$ обратим в $L_p(\mathbb{B}_n)$. Согласно следствию 3.2.2 необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\lambda I_1 + \mathcal{K}_1$ является условие

$$\sigma_{\lambda I + \mathcal{K}_1}(m, z) \neq 0, \quad \forall (m, z) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{C}_-. \quad (3.5.11)$$

Но в силу равенства (3.5.9) следует, что условие (3.5.11) эквивалентно условию (3.5.10). ■

Далее, рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ оператор

$$\mathcal{B} = \lambda I + M_a \mathcal{Q} + T, \quad (3.5.12)$$

где функция $a \in C_b(\mathbb{CB}_n)$ такая, что существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = a(\infty),$$

M_a — оператор умножения на функцию a , T — компактный оператор. Символ $\sigma_{\mathcal{B}}(m, \xi)$ этого оператора определим на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ формулой

$$\sigma_{\mathcal{B}}(m, \xi) = \lambda + a(\infty) \sigma_{\mathcal{Q}}(m, \xi). \quad (3.5.13)$$

Теорема 3.5.2. *Оператор $\mathcal{B}$ вида (3.5.12) нетеров в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (3.5.14)$$

В этом случае индекс оператора $\mathcal{B}$ вычисляется по формуле

$$\text{ind } \mathcal{B} = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_{\mathcal{B}}(m, \cdot). \quad (3.5.15)$$

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{B}$ в виде

$$\mathcal{B} = \lambda I + a(\infty)\mathcal{Q} + T_1,$$

где $T_1 = M_{a-a(\infty)}\mathcal{Q} + T$. Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (a(x) - a(\infty)) = 0$, то оператор $M_{a-a(\infty)}\mathcal{Q}$ является компактным ([67, р. 380]). Следовательно, оператор T_1 компактен в $L_p(\mathbb{CB}_n)$.

Рассмотрим оператор $A = J\mathcal{B}J^{-1}$. В силу леммы (3.5.1) оператор A задается в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ формулой

$$A = \lambda I_1 + a(\infty)\mathcal{K}_1 + T_2.$$

Оператор $\mathcal{B}$ нетеров в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ тогда и только тогда, когда оператор A нетеров в $L_p(\mathbb{B}_n)$, что согласно теореме 3.2.1 равносильно условию (3.5.14). Кроме того,

$$\text{ind } \mathcal{B} = \text{ind } A = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_A(m, \cdot).$$

Из равенства (3.5.9) следует, что $\sigma_{\mathcal{B}}(m, \xi) = \sigma_A(m, -\xi)$. Тогда, учитывая, что $\text{ind } f(-\xi) = \text{ind } f(\xi)$ для любой функции $f \in C(\mathbb{R})$, получаем формулу (3.5.15). ■

В заключение рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ оператор

$$(\tilde{\mathcal{Q}}\varphi)(x) = \int_{1 < |y| < |x|} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{CB}_n, \quad (3.5.16)$$

где функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$, и удовлетворяет условию суммируемости (3.2.2).

По аналогии с леммой 3.5.1 доказывается, что

$$\widetilde{\mathcal{K}}_1 = J\tilde{\mathcal{Q}}J^{-1},$$

где $\widetilde{\mathcal{K}}_1$ — оператор вида (3.4.1), ядром которого является функция $k_1(x, y)$ вида (3.5.7).

Таким образом, теоремы об обратимости и нетеровости оператора $\lambda I + \widetilde{\mathcal{Q}}$ непосредственно получаются из результатов параграфа 3.4.

Глава 4.

Построение решений многомерных интегральных уравнений с однородными радиальными ядрами

Данная глава посвящена построению точных решений многомерных интегральных уравнений второго рода с однородными степени $(-n)$ ядрами. Точнее говоря, ставится задача нахождения формулы, дающей решение соответствующего уравнения. В случае произвольного ядра, однородного степени $(-n)$ и инвариантного относительно группы вращений, эта задача не может быть решена. Поэтому ниже рассматривается существенно более узкий класс радиальных ядер.

§4.1 Формула решения интегрального уравнения с однородным радиальным ядром

п. 4.1.1 Постановка задачи и условия разрешимости

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1.1)$$

где функция $k(r, \rho)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, измерима и однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha r, \alpha \rho) = \alpha^{-n} k(r, \rho), \quad \forall \alpha > 0, \quad (4.1.2)$$

и выполнено условие

$$\int_0^\infty |k(1, \rho)| \rho^{n/p'-1} d\rho < \infty. \quad (4.1.3)$$

Будем считать, что свободный член $f(x)$ этого уравнения принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(1, |y|)| |y|^{-n/p} dy = |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^\infty |k(1, \rho)| \rho^{n/p'-1} d\rho < \infty,$$

то по теореме 6.4 книги [67] интегральный оператор в правой части уравнения (4.1.1) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Пример 4.1.1. Рассмотрим функцию

$$k(r, \rho) = \frac{1}{r^n + \rho^n}.$$

Очевидно, что она удовлетворяет условию (4.1.2), а также условию (4.1.3) при $1 < p < \infty$.

Следуя [67, р.78], определим для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ функцию $\mathfrak{S}_m(\xi)$ формулой

$$\mathfrak{S}_m(\xi) = 1 - \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.1.4)$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра. Совокупность этих функций задает символ уравнения (4.1.1) (и соответствующего оператора).

Используя радиальность ядра $k(|x|, |y|)$, преобразуем функцию $\mathfrak{S}_m(\xi)$. Переходя к сферическим координатам $y = \rho\theta$, получим

$$\mathfrak{S}_m(\xi) = 1 - \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'+i\xi-1} d\rho \int_{\mathbb{S}_{n-1}} P_m(e_1 \cdot \sigma) d\sigma.$$

Для вычисления интеграла по сфере воспользуемся формулой Каталана (см., например, [9, с. 20]):

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(x' \cdot \sigma) d\sigma = |\mathbb{S}_{n-2}| \int_{-1}^1 f(s) (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad x' \in \mathbb{S}_{n-1}.$$

Применив эту формулу, получим

$$\mathfrak{S}_m(\xi) = 1 - |\mathbb{S}_{n-2}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'+i\xi-1} d\rho \int_{-1}^1 P_m(s) (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds.$$

Теперь воспользуемся свойством ортогональности многочленов Лежандра (см., например, [49, с. 41]):

$$\int_{-1}^1 P_m(s)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds = \begin{cases} 0, & m > 0, \\ \frac{|\mathbb{S}_{n-1}|}{|\mathbb{S}_{n-2}|}, & m = 0. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\mathfrak{S}_m(\xi) = \begin{cases} 1 - |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p' + i\xi - 1} d\rho, & m = 0, \\ 1, & m > 0. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Лемма 4.1.1. *Уравнение (4.1.1) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{S}_0(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.1.6)$$

Доказательство. Из теоремы 6.12 книги [67] следует, что уравнение (4.1.1) однозначно разрешимо в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ при любом свободном члене $f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие

$$\mathfrak{S}_m(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Учитывая формулу (4.1.5), получаем условие (4.1.6). ■

п. 4.1.2 Построение решения уравнения

Пусть выполнено условие (4.1.6). Построим решение уравнения (4.1.1). Для произвольной функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ положим

$$g^{rad}(|x|) = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} g(|x|\theta) d\theta, \quad (4.1.7)$$

здесь $\theta = x/|x|$. Определим оператор P формулой

$$(Pg)(x) = g^{rad}(|x|). \quad (4.1.8)$$

Покажем, что оператор P является проектором, т. е. $P^2 = P$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(P^2g)(x) &= \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} (Pg)(|x|\theta) d\theta = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} g^{rad}(|x|) d\theta = \\ &= g^{rad}(|x|) \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\theta = g^{rad}(|x|) = (Pg)(x).\end{aligned}$$

Положим

$$g_0(x) = g(x) - g^{rad}(|x|).$$

Теорема 4.1.1. Пусть выполнено условие (4.1.6). Тогда решение уравнения (4.1.1) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{\frac{n}{p}} h \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(y) dy, \quad (4.1.9)$$

где $h(t)$ — функция из пространства $L_1(\mathbb{R})$, определяемая равенством

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_0(\xi)} = 1 + \widehat{h}(\xi), \quad (4.1.10)$$

а $\widehat{h}(\xi)$ — преобразование Фурье функции h .

Доказательство. Так как оператор P является проектором в $L_p(\mathbb{R}^n)$, то

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P.$$

Тогда уравнение (4.1.1) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \varphi^{rad}(|x|) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi^{rad}(|y|) dy + f^{rad}(|x|) \\ \varphi_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi_0(y) dy + f_0(x). \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Преобразуем второе уравнение системы. Переходя к сферическим координатам $|x| = r, y = \rho\theta$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi_0(y) dy = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} k(r, \rho) \varphi_0(\rho\theta) \rho^{n-1} d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^\infty k(r, \rho) \rho^{n-1} d\rho \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \varphi_0(\rho\theta) d\theta.$$

Поскольку $\varphi_0 = (I - P)\varphi$, то $P\varphi_0 = (P - P^2)\varphi = 0$, т.е.

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} \varphi_0(\rho\theta) d\theta = 0.$$

Таким образом, второе уравнение системы (4.1.11) принимает вид

$$\varphi_0(x) = f_0(x). \quad (4.1.12)$$

Обратимся к первому уравнению системы (4.1.11). Снова переходя к сферическим координатам, получим

$$\begin{aligned} \varphi^{rad}(r) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} k(r, \rho) \varphi^{rad}(\rho) \rho^{n-1} d\rho d\theta + f^{rad}(r) = \\ &= |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^\infty k(r, \rho) \varphi^{rad}(\rho) \rho^{n-1} d\rho + f^{rad}(r). \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\Phi(r) = \int_0^\infty k_1(r, \rho) \Phi(\rho) d\rho + F(r), \quad (4.1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \varphi^{rad}(r) r^{\frac{n-1}{p}}, \quad F(r) = f^{rad}(r) r^{\frac{n-1}{p}}, \\ k_1(r, \rho) &= |\mathbb{S}_{n-1}| k(r, \rho) r^{\frac{n-1}{p}} \rho^{\frac{n-1}{p'}}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Нетрудно видеть, что $\Phi \in L_p(\mathbb{R}_+)$. Действительно,

$$\int_0^\infty |\Phi(r)|^p dr = \int_0^\infty |\varphi^{rad}(r)|^p r^{n-1} dr = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi^{rad}(|x|)|^p dx < \infty.$$

Аналогично проверяется, что $F \in L_p(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, мы рассматриваем уравнение (4.1.13) в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$. Заметим, что ядро $k_1(r, \rho)$

этого уравнения — однородная степени (-1) функция. Кроме того, из условия (4.1.3) следует, что

$$\int_0^{\infty} |k_1(1, \rho)| \rho^{-1/p} d\rho < \infty.$$

Теория интегральных уравнений типа (4.1.13) хорошо известна (см., например, [67, р. 51-54]). Согласно этой теории символом уравнения (4.1.13) является функция

$$\begin{aligned} s(\xi) &= 1 - \int_0^{\infty} k_1(1, \rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho = \\ &= 1 - |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^{\infty} k(1, \rho) \rho^{n/p'+i\xi-1} d\rho = \mathfrak{S}_0(\xi). \end{aligned}$$

Так как выполнено условие (4.1.6), то уравнение (4.1.13) однозначно разрешимо в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ при любом свободном члене $F(r)$. Найдём это решение.

Известно (см. [67, р. 77-78]), что функция $\mathfrak{S}_0(\xi)$ принадлежит алгебре Винера $\mathcal{W}(\mathbb{R})$. Так как выполнено условие (4.1.6), то по теореме Винера (см., например, [24, с. 17]) существует такая функция $h \in L_1(\mathbb{R})$, которая удовлетворяет равенству (4.1.10). Оператор, символом которого является функция $1/\mathfrak{S}_0(\xi)$, будет обратным к оператору, порождающему уравнение (4.1.1). Покажем, что символ оператора

$$(Q\psi)(r) = \psi(r) + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/p} h\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) \psi(\rho) d\rho$$

равен $1/\mathfrak{S}_0(\xi)$. В самом деле, учитывая (4.1.10), получаем

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^{\infty} \rho^{1/p-1} h(\ln \rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho &= 1 + \int_0^{\infty} \rho^{i\xi-1} h(\ln \rho) d\rho = \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\xi t} dt = 1 + \widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\mathfrak{S}_0(\xi)}. \end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (4.1.13) дается формулой

$$\Phi(r) = F(r) + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/p} h\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) F(\rho) d\rho, \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Умножая обе части этого равенства на $r^{-\frac{n-1}{p}}$ и учитывая (4.1.7), получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{rad}(r) &= f^{rad}(r) + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n}{p}} h\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) f^{rad}(\rho) d\rho = \\ &= f^{rad}(r) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n}{p}} h\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) f(\rho\theta) d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Возвращаясь к декартовым координатам, имеем

$$\varphi^{rad}(|x|) = f^{rad}(|x|) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}} h\left(\ln \frac{|y|}{|x|}\right) f(y) dy. \quad (4.1.15)$$

Далее, принимая во внимание формулу (4.1.12), запишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi^{rad}(|x|) + \varphi_0(x) = \varphi^{rad}(|x|) + f_0(x) = \\ &= \varphi^{rad}(|x|) + f(x) - f^{rad}(|x|). \end{aligned}$$

Учитывая равенство (4.1.15), приходим к формуле (4.1.9). ■

Применим теорему 4.1.1 для нахождения решения конкретного интегрального уравнения.

Пример 4.1.2. Рассмотрим уравнение (4.1.1), предполагая, что ядро $k(r, \rho)$ определяется следующим образом:

$$k(r, \rho) = \frac{1}{4|\mathbb{S}_{n-1}|} \begin{cases} \frac{1}{r\rho^{n-1}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n}{p}}, & \rho < r, \\ \frac{r}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n}{p}}, & \rho > r. \end{cases} \quad (4.1.16)$$

Легко проверить, что функция $k(r, \rho)$ вида (4.1.16) удовлетворяет условиям (4.1.2) и (4.1.3). В соответствии с формулой (4.1.5) найдем $\mathfrak{S}_0(\xi)$:

$$\mathfrak{S}_0(\xi) = 1 - |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p' + i\xi - 1} d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\rho^{n-1}} \rho^{n/p} \rho^{n/p' + i\xi - 1} d\rho - \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{1}{\rho^{n+1}} \rho^{n/p} \rho^{n/p' + i\xi - 1} d\rho = \\
&= 1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \rho^{i\xi} d\rho - \frac{1}{4} \int_1^\infty \rho^{-2+i\xi} d\rho = \frac{2\xi^2 + 1}{2\xi^2 + 2}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_0(\xi)} - 1 = \frac{1}{2\xi^2 + 1}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)$$

и найдем ее преобразование Фурье. Имеем

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right) e^{i\xi t} dt = \frac{1}{1 + 2\xi^2}.$$

Следовательно, по теореме 4.1.1 решение уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}} \exp\left(-\frac{|\ln \frac{|y|}{|x|}|}{\sqrt{2}}\right) f(y) dy.$$

Эта формула позволяет найти решение уравнения (4.1.1) с ядром (4.1.16) при любом свободном члене $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

п. 4.1.3 Решение интегрального уравнения с полурadiaльным ядром

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1.17)$$

где функция $k(|x|, y)$ однородна степени $(-n)$ и удовлетворяет условию суммируемости

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty. \quad (4.1.18)$$

Тогда интегральный оператор из правой части этого уравнения ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 6.13 книги [67] следует, что уравнение (4.1.17) однозначно разрешимо в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ при любом свободном члене $f(x)$ тогда и только тогда, когда оно однозначно разрешимо в подпространстве $L_p^{rad}(\mathbb{R}^n)$, состоящем из всех радиальных функций. Однако в общем случае не удастся найти эффективную формулу решения уравнения (4.1.17). Поэтому ниже мы считаем, что свободный член $f(x)$ этого уравнения является *радиальной* функцией, т. е. $f(x) = f(|x|)$. Очевидно, что в этом случае решение $\varphi(x)$ также является радиальной функцией. Учитывая это, перепишем уравнение (4.1.17) в виде

$$\varphi(|x|) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, y) \varphi(|y|) dy + f(|x|). \quad (4.1.19)$$

Следуя [67, р. 83], назовем символом этого уравнения функцию

$$\mathfrak{S}(\xi) = 1 - \int_{\mathbb{R}^n} k(1, y) |y|^{-n/p+i\xi} dy.$$

Известно, что уравнение (4.1.17) (и тем более уравнение (4.1.19)) однозначно разрешимо в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ при любом свободном члене тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{S}(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.1.20)$$

Теорема 4.1.2. Пусть выполнено условие (4.1.20). Тогда решение уравнения (4.1.19) задается формулой

$$\varphi(|x|) = f(|x|) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{\frac{n}{p}} \mathfrak{h} \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(|y|) dy \quad (4.1.21)$$

где функция $\mathfrak{h} \in L_1(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(\xi)} = 1 + \widehat{\mathfrak{h}}(\xi). \quad (4.1.22)$$

Доказательство. Преобразуем уравнение (4.1.19). Переходя к сферическим координатам $|x| = r, y = \rho\theta$, получим

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} k(r, \rho\theta) \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\theta d\rho + f(r).$$

Положим

$$\mathfrak{K}(r, \rho) = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} k(r, \rho\theta) d\theta.$$

Тогда

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \mathfrak{K}(r, \rho) \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho + f(r).$$

Умножая обе части этого уравнения на $r^{\frac{n-1}{p}}$, получаем

$$\Phi(r) = \int_0^\infty \mathfrak{K}_1(r, \rho) \Phi(\rho) d\rho + F(r), \quad (4.1.23)$$

где

$$\Phi(r) = \varphi(r) r^{\frac{n-1}{p}}, \quad F(r) = f(r) r^{\frac{n-1}{p}},$$

$$\mathfrak{K}_1(r, \rho) = \mathfrak{K}(r, \rho) r^{\frac{n-1}{p}} \rho^{\frac{n-1}{p'}}.$$

Очевидно, что функция $\mathfrak{K}_1(r, \rho)$ однородна степени (-1) и в силу (4.1.18) удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |\mathfrak{K}_1(1, \rho)| \rho^{-1/p} d\rho < \infty.$$

Символом уравнения (4.1.23) является функция

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\xi) &= 1 - \int_0^\infty \mathfrak{K}_1(1, \rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho = \\ &= 1 - \int_0^\infty \mathfrak{K}(1, \rho) \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho = 1 - \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} k(r, \rho\theta) \rho^{n/p'+i\xi-1} d\theta d\rho = \end{aligned}$$

$$= 1 - \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_{n-1}} k(r, \rho\theta) \rho^{-n/p-i\xi} \rho^{n-1} d\theta d\rho = \mathfrak{S}(\xi).$$

Так как выполнено условие (4.1.20), то уравнение (4.1.23) однозначно разрешимо в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при любом свободном члене $F(r)$. Найдем формулу решения этого уравнения.

Поскольку функция $\mathfrak{S}(\xi)$ принадлежит алгебре Винера $\mathcal{W}(\mathbb{R})$, то по теореме Винера существует функция $\mathfrak{h} \in L_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству (4.1.22). Тогда, повторив рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 4.1.1, получаем, что решение уравнения (4.1.21) имеет вид

$$\Phi(r) = F(r) + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/p} \mathfrak{h}\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) F(\rho) d\rho.$$

Умножив обе части равенства на $r^{-\frac{n-1}{p}}$, получаем

$$\varphi(r) = f(r) + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n}{p}} \mathfrak{h}\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) f(\rho) d\rho.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получаем (4.1.21). ■

§4.2 Формула решения интегрального уравнения вольтерровского типа с однородным радиальным ядром

В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{|y| < |x|} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{B}_n, \quad (4.2.1)$$

где функция $k(r, \rho)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, измерима и удовлетворяет условию (4.1.2), а также условию

$$\int_0^1 |k(1, \rho)| \rho^{n/p'-1} d\rho < \infty. \quad (4.2.2)$$

Уравнение (4.2.1) порождается оператором $I - \mathcal{K}$, где оператор $\mathcal{K}$ задается равенством (3.2.1). Поэтому символом уравнения (4.2.1) будем называть символ оператора $I - \mathcal{K}$, который определяется формулой (3.2.3). Учитывая, что $\sigma_{I-\mathcal{K}}(\infty) = 1$ представим его совокупностью $\{\sigma_m(\xi)\}_{m=0}^{\infty}$ функций вида

$$\sigma_m(\xi) = 1 - \int_{\mathbb{B}_n} k(1, |y|) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Повторив рассуждения из пункта 4.1.1 (переход к сферическим координатам, а затем применение формулы Каталана), получим

$$\sigma_m(\xi) = \begin{cases} 1 - |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^1 k(1, \rho) \rho^{n/p'+i\xi-1} d\rho, & m = 0, \\ 1, & m > 0. \end{cases}$$

В пункте 3.2.1 было показано, что функция $\sigma_0(\xi)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im} z < 0$.

Лемма 4.2.1. *Уравнение (4.2.1) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in L_p(\mathbb{B}_n)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_0(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}_-. \quad (4.2.3)$$

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 3.2.2. ■

Найдем формулу решения уравнения (4.2.1) в предположении, что условие (4.2.3) выполнено.

Пусть $L_1^-(\mathbb{R}) = \{f \in L_1(\mathbb{R}) : f(t) = 0, \forall t > 0\}$. Обозначим через $\mathcal{W}_-(\mathbb{R})$ совокупность функций вида $c + \hat{f}(\xi)$, где $c \in \mathbb{C}$, $f \in L_1^-(\mathbb{R})$. Как известно, $\mathcal{W}_-(\mathbb{R})$ является замкнутой подалгеброй алгебры Винера $\mathcal{W}(\mathbb{R})$, а функции из $\mathcal{W}_-(\mathbb{R})$ аналитически продолжаются в полуплоскость $\text{Im} z < 0$. Для алгебры $\mathcal{W}_-(\mathbb{R})$ справедлив аналог теоремы Винера, а именно:

Предложение 4.2.1. [24, с. 18] *Пусть $a \in \mathcal{W}_-(\mathbb{R})$ и $a(z) \neq 0$ для всех $z \in \dot{\mathbb{C}}_-$, где $\dot{\mathbb{C}}_- = \mathbb{C}_- \cup \{\infty\}$. Тогда $1/a \in \mathcal{W}_-(\mathbb{R})$.*

Аналогом теоремы 4.1.1 является следующая теорема.

Теорема 4.2.1. Пусть выполнено условие (4.2.3). Тогда решение уравнения (4.2.1) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{|y| < |x|} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{\frac{n}{p}} h_1 \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(y) dy, \quad (4.2.4)$$

где функция $h_1 \in L_1^-(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\frac{1}{\sigma_0(\xi)} = 1 + \widehat{h}_1(\xi), \quad (4.2.5)$$

а $\widehat{h}_1(\xi)$ — преобразование Фурье функции h_1 .

Доказательство. Определим в $L_p(\mathbb{B}_n)$ проектор P формулой

$$(Pg)(|x|) = g^{rad}(|x|) = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} g(|x|\theta) d\theta \quad (4.2.6)$$

и положим $g_0(x) = g(x) - g^{rad}(|x|)$. Так как $L_p(\mathbb{B}_n) = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$, то уравнение (4.2.1) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \varphi^{rad}(|x|) = \int_{|y| < |x|} k(|x|, |y|) \varphi^{rad}(|y|) dy + f^{rad}(|x|) \\ \varphi_0(x) = \int_{|y| < |x|} k(|x|, |y|) \varphi_0(y) dy + f_0(x). \end{cases} \quad (4.2.7)$$

По аналогии с доказательством теоремы 4.1.1 устанавливается, что

$$\int_{|y| < |x|} k(|x|, |y|) \varphi_0(y) dy = 0,$$

а следовательно, второе уравнение системы (4.2.7) принимает вид

$$\varphi_0(x) = f_0(x). \quad (4.2.8)$$

Преобразуем первое уравнение системы (4.2.7). Переходя к сферическим координатам $|x| = r$, $y = \rho\theta$, получим

$$\varphi^{rad}(r) = |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^r k(r, \rho) \varphi^{rad}(\rho) \rho^{n-1} d\rho + f^{rad}(r). \quad (4.2.9)$$

Запишем это уравнение в виде

$$\Phi(r) = \int_0^r k_1(r, \rho) \Phi(\rho) d\rho + F(r), \quad (4.2.10)$$

где

$$\Phi(r) = \varphi^{rad}(r) r^{\frac{n-1}{p}}, \quad F(r) = f^{rad}(r) r^{\frac{n-1}{p}},$$

а функция $k_1(r, \rho)$ задается формулой (4.1.14). Эта функция однородна степени (-1) , и в силу условия (4.2.2)

$$\int_0^1 |k_1(1, \rho)| \rho^{-1/p} d\rho < \infty.$$

Согласно [40, с. 29-31] символом уравнения (4.2.10) является функция

$$s_1(\xi) = 1 - \int_0^1 k_1(1, \rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho = \sigma_0(\xi).$$

Так как выполнено условие (4.2.3), то уравнение (4.2.10) однозначно разрешимо в $L_p(0, 1)$ при любом свободном члене $F(r)$. Найдем это решение.

Функция $\sigma_0(\xi)$ принадлежит алгебре $\mathcal{W}_-(\mathbb{R})$. Тогда из условия (4.2.3), с учетом предложения 4.2.1, следует, что $1/\sigma_0 \in \mathcal{W}_-(\mathbb{R})$, т.е. существует такая функция $h_1 \in L_1^-(\mathbb{R})$, которая удовлетворяет равенству (4.2.5). Рассмотрим в пространстве $L_p(0, 1)$ оператор

$$(B\psi)(r) = \psi(r) + \int_0^r \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/p} h_1\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) \psi(\rho) d\rho.$$

Символом этого оператора является функция

$$1 + \int_0^1 \rho^{1/p-1} h_1(\ln \rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho = 1 + \int_{-\infty}^0 h_1(t) e^{i\xi t} dt = 1 + \widehat{h_1}(\xi) = \frac{1}{\sigma_0(\xi)}.$$

Следовательно, оператор B является обратным к оператору, порождающему уравнение (4.2.10). Тогда решение $\Phi(r)$ уравнения (4.2.10) задается

формулой

$$\Phi(r) = F(r) + \int_0^r \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{1/p} h_1 \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) F(\rho) d\rho.$$

Умножая обе части уравнения на $r^{-\frac{n-1}{p}}$, получим

$$\begin{aligned} \varphi^{rad}(r) &= f^{rad}(r) + \int_0^r \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{\frac{n}{p}} h_1 \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) f^{rad}(\rho) d\rho = \\ &= f^{rad}(r) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_0^r \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{\frac{n}{p}} h_1 \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) f(\rho\theta) d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi^{rad}(|x|) = f^{rad}(|x|) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{|y| < |x|} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{\frac{n}{p}} h_1 \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(y) dy. \quad (4.2.11)$$

Используя равенство (4.2.8), получаем

$$\varphi(x) = \varphi^{rad}(|x|) + \varphi_0(x) = \varphi^{rad}(|x|) + f(x) - f^{rad}(|x|).$$

Учитывая равенство (4.2.11), приходим к формуле (4.2.4). ■

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1) Исследована ограниченность многомерных интегральных операторов с однородными степени $(-n)$ ядрами в весовых пространствах Лебега с радиальным весом. Получены достаточные, а в случае неотрицательных ядер и необходимые, условия ограниченности таких операторов.

2) Исследована компактность весовых пространствах Лебега с радиальным весом операторов, являющихся композицией интегрального оператора с однородным степени $(-n)$ и инвариантным относительно $SO(n)$ ядром и оператора умножения на существенно ограниченную функцию. Получены достаточные условия компактности таких операторов при различных предположениях относительно весовой функции.

3) Найдены условия ограниченности и компактности в пространствах Лебега многомерных интегральных операторов с однородными степени α ядрами, где $\alpha \neq -n$.

4) Построено символьное исчисление для банаховой алгебры, порожденной вольтерровскими интегральными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$, и операторами умножения на непрерывные функции. На его основе получены критерий нетеровости и формула для вычисления индекса операторов из этой алгебры.

5) Найдены формулы, дающие точные решения для некоторых классов многомерных интегральных уравнений второго рода с однородными степени $(-n)$ радиальными ядрами.

Список обозначений

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества целых, вещественных и комплексных чисел соответственно;

$\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

$\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$;

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$;

$x' = x/|x|$;

$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$;

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$;

$\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$;

$|\mathbb{S}_{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь сферы $\mathbb{S}_{n-1}$;

$\mathbb{B}_n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$;

$|\mathbb{B}_n(x, r)|$ — мера шара $\mathbb{B}_n(x, r)$;

$\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_n(x, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$;

$\mathbb{C}\mathbb{B}_n = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n$;

$SO(n)$ — специальная ортогональная группа;

ω_x — произвольный элемент группы $SO(n)$ такой, что $\omega_x(e_1) = x'$;

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathcal{L}(X)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X ;

M_a — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$;

$d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m ;

$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi t} dt$ — преобразование Фурье функции f ;

$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$;

$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$;

$\dot{\mathbb{R}}$ — компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой.

Литература

- [1] **Авсянкин, О. Г.** О C^* -алгебре интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами / О. Г. Авсянкин // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99. – вып. 3. – С. 323–332.
- [2] **Авсянкин, О. Г.** О C^* -алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига / О. Г. Авсянкин // Докл. РАН. – 2008. – Т. 419. – № 6. – С. 727–728.
- [3] **Авсянкин, О. Г.** Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами / О. Г. Авсянкин // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – вып. 4. – С. 483–493.
- [4] **Авсянкин, О. Г.** Об алгебре, порожденной вольтерровскими интегральными операторами с однородными ядрами и непрерывными коэффициентами / О. Г. Авсянкин, Г. А. Каменских // Владикавказский математический журнал. – 2022. – Т. 24, № 4. – С. 19–29. [*Переводная версия: Avsyankin, O. G.* On the algebra generated by Volterra integral operators with homogeneous kernels and continuous coefficients / O. G. Avsyankin, G. A. Kamenskikh // Siberian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 64. – № 4. – P. 955–962.]
- [5] **Авсянкин, О. Г.** Об интегральных операторах типа Вольтерра с однородными ядрами в весовых L_p -пространствах / О. Г. Авсянкин // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 11. – С. 3–12.
- [6] **Авсянкин, О. Г.** Ограниченность интегральных операторов с однородными ядрами в L_p -пространствах с радиальным весом / О. Г. Авсянкин, Г. А. Тихонова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2025. – № 3(227). – С. 9–16.

- [7] **Авсянкин, О. Г.** О спектрах и сингулярных значениях многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами / О. Г. Авсянкин // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 3. – С. 389–394.
- [8] **Авсянкин, О. Г.** О точном решении многомерного интегрального уравнения с однородным ядром / О. Г. Авсянкин // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 4–8.
- [9] **Авсянкин, О. Г.** Преобразование Фурье в пространствах суммируемых функций / О. Г. Авсянкин. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2017. – 90 с.
- [10] **Авсянкин, О. Г.** Проекционный метод для матричных многомерных парных интегральных операторов с однородными ядрами / О. Г. Авсянкин // Владикавк. матем. журн. – 2006. – Т. 8. – № 1. – С. 3–10.
- [11] **Авсянкин, О. Г.** Проекционный метод для интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных односторонними мультипликативными сдвигами / О. Г. Авсянкин // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 2. – С. 10–17.
- [12] **Авсянкин, О. Г.** Развитие теории многомерных интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами: дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Авсянкин Олег Геннадиевич. – Ростов-на-Дону, 2009. – 277 с.
- [13] **Авсянкин, О. Г.** Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами / О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82. – вып. 2. – С. 163–176.
- [14] **Авсянкин, О. Г.** Многомерные интегральные операторы с однородными степени $-n$ ядрами / О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц // Докл. РАН. 1999. – Т. 368. – № 6. – С. 727–729.

- [15] **Авсянкин, О. Г.** О компактности интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри / О. Г. Авсянкин, С. С. Ашихмин // Матем. заметки. – 2024. – Т. 116. – вып. 3. – С. 327–338.
- [16] **Авсянкин, О. Г.** Проекционный метод в теории интегральных операторов с однородными ядрами / О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц // Матем. заметки. – 2004. – Т. 75. – № 2. – С. 149–157.
- [17] **Авсянкин, О. Г.** Формула решения многомерного интегрального уравнения с однородным радиальным ядром / О. Г. Авсянкин, Г. А. Каменских // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2019. – № 4(204). – С. 4–7.
- [18] **Беркович, В. Н.** Нестационарная смешанная задача динамики неоднородно упругой клиновидной среды / В. Н. Беркович // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2005. – № 3. – С. 17–21.
- [19] **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
- [20] **Гельфанд, И. М.** Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилев. – М.: Физматгиз, 1960. – 315 с.
- [21] **Гиль, А. В.** Интегральный оператор с однородным ядром в пространстве функций с ограниченной средней осцилляцией / А. В. Гиль, Н. К. Карапетянц // Докл. РАН. – 2004. – Т. 397. – № 1. – С. 1–4.
- [22] **Голубов, Б. И.** Об ограниченности операторов Харди и Харди-Литтлвуда в пространствах ReH^1 и BMO / Б. И. Голубов // Мат. сборник. – 1997. – Т. 188. – № 7. – С. 93–106.
- [23] **Гохберг, И. Ц.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

- [24] **Гохберг, И. Ц.** Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // УМН. – 1958. – Т.13. – вып. 2. – С. 3–72.
- [25] **Денисенко, В. В.** Фредгольмовость интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа в L_2 -пространстве на группе Гейзенберга/ В. В. Денисенко, В. М. Деундяк // Труды МИАН. – 2020. – Т. 308. – С. 167–180.
- [26] **Деундяк, В. М.** Топологические методы в теории разрешимости многомерных парных интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа / В. М. Деундяк // Тр. МИАН. – 2012. – Т. 278. – С. 59–67.
- [27] **Деундяк, В. М.** Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами / В. М. Деундяк // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87. – вып. 5 – С. 704–720.
- [28] **Деундяк, В. М.** Проекционный метод решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа / В. М. Деундяк, А. В. Лукин // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29. – вып. 2 – С. 153–165.
- [29] **Дудучава, Р. В.** Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р. В. Дудучава. – Тбилиси: Мецниераба, 1979. – 135 с.
- [30] **Дынькин, Е. М.** Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения/ Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. – 1983. – Т. 21. – С. 42-129.
- [31] **Ерусалимский, Я. М.** Необходимые и достаточные условия нетеровости операторов мультипликативной дискретной свертки / Я. М. Еру-

салимский // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. – 1973. – № 4. – С. 105–107.

- [32] **Ерусалимский, Я. М.** Операторы мультипликативной дискретной свертки. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. / Я. М. Ерусалимский. – Ростов н/Д, 1976. – 102 с.
- [33] **Каменских, Г. А.** Многомерные интегральные операторы вольтерровского типа с однородными ядрами и переменными коэффициентами / Г. А. Каменских // XXVIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование»; XI Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», 27 мая – 3 июня 2022 г. : материалы. Ростов–на–Дону, 2022. – С. 39.
- [34] **Карапетянц, Н. К.** Интегральные операторы свертки и с однородными ядрами с переменными коэффициентами. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук / Н. К. Карапетянц. – Тбилиси, 1989. – 296 с.
- [35] **Карапетянц, Н. К.** О необходимых условиях ограниченности оператора с неотрицательным квазиоднородным ядром / Н. К. Карапетянц // Мат. заметки. – 1981. – Т. 30. – № 5. – С. 787–794.
- [36] **Карапетянц, Н. К.** О полной непрерывности операторов свертки и с однородными ядрами в гильбертовских классах / Н. К. Карапетянц // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. – 1987. – № 2. – С. 34–39.
- [37] **Карапетянц, Н. К.** О связи между нетеровостью и спектром оператора, действующего в банаховом пространстве и его подпространстве / Н. К. Карапетянц // Сообщения АН ГССР. – 1986. – Т. 126. – № 3. – С. 477–480.
- [38] **Карапетянц, Н. К.** Полная непрерывность некоторых классов операторов типа свертки и с однородными ядрами / Н. К. Карапетянц // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 11. – С. 71–74.

- [39] **Карапетянц, Н. К.** Интегральный оператор с однородным ядром в пространстве функций BMO^k / Н. К. Карапетянц, А. В. Гиль // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. – 2005. – Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. – С. 83–90.
- [40] **Карапетянц, Н. К.** Уравнения с инволютивными операторами и их приложения / Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1988. – 192 с.
- [41] **Крейн, С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [42] **Мёрфи, Дж.** C^* -алгебры и теория операторов / Дж. Мёрфи. – М.: Факториал, 1997. – 336 с.
- [43] **Мирошникова, Е. И.** Ограниченность и обратимость интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа в некоторых весовых L_p -пространствах / Е. И. Мирошникова // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. – 2012. – № 2. – С. 22–26.
- [44] **Михайлов, Л. Г.** Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 / Л. Г. Михайлов. – Душанбе: Дониш, 1966. – 50 с.
- [45] **Михайлов, Л. Г.** Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Л. Г. Михайлов // Труды АН Таджикской ССР. – 1963. – Т. 1. – 180 с.
- [46] **Михайлов, Л. Г.** Новый класс особых интегральных уравнений / Л. Г. Михайлов // Math. Nachr. – 1977. – Т. 76. – С. 91–107.
- [47] **Михайлов, Л. Г.** Об одном свойстве сингулярных дифференциальных уравнений / Л. Г. Михайлов // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 321. – № 4. – С. 681–686.

- [48] **Михайлов, Л. Г.** Эллиптические уравнения с сингулярными коэффициентами / Л. Г. Михайлов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – №2. – С. 293–312.
- [49] **Самко, С. Г.** Гиперсингулярные интегралы и их приложения / С. Г. Самко. – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984. – 208 с.
- [50] **Симоненко, И. Б.** Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II / И. Б. Симоненко // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29. – №4. – С. 757–782.
- [51] **Солдатов, А. П.** Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / А. П. Солдатов. – М.: Высшая школа, 1991. – 207 с.
- [52] **Тихонова, Г. А.** Интегральные операторы с однородными степени α ядрами в пространствах Лебега / Г. А. Тихонова // XXXI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование»; XV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», 27 мая – 3 июня 2025 г. : материалы. Ростов–на–Дону, 2025. – С. 26.
- [53] **Тихонова, Г. А.** Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами в L_p -пространствах с радиальным весом / Г. А. Тихонова // Сборник материалов XX Владикавказской молодежной математической школы (24-25 июля 2025 г.: онлайн) / Владикавказский научный центр РАН, Южный математический институт, Южный федеральный университет, Региональный научно-образовательный математический центр : главный редактор: д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраев. – Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН, 2025. – С. 80.
- [54] **Умархаджиев, С. М.** Интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега / С. М. Умархаджиев // Матем. заметки. – 2017. – 102:5 . – С. 775–788.

- [55] **Умархаджиев, С. М.** Односторонние интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега / С. М. Умархаджиев // Владикавк. матем. журн. – 2017 – 19:3. – С. 70–82.
- [56] **Харди, Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.
- [57] **Цалюк, М. В.** Асимптотика решений уравнений Вольтерра с однородными ядрами. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / М. В. Цалюк. – Ростов н/Д, 2005. – 103 с.
- [58] **Avsyankin, O.** Asymptotic Behavior of Solutions of Integral Equations with Homogeneous Kernels / O. Avsyankin // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – Issue 2, 180.
- [59] **Avsyankin, O. G.** Integral operators with homogeneous kernels of degree α in lebesgue spaces / O. G. Avsyankin, G. A. Kamenskikh // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 289. – № 4. – P. 465–474.
- [60] **Avsyankin, O. G.** On integral operators with homogeneous kernels in Morrey spaces / O. G. Avsyankin // Eurasian Math. J. – 2021. – Vol. 12. – № 1. – P. 92 – 96.
- [61] **Avsyankin, O. G.** On the algebra generated by canonical integral operators with homogeneous kernels / O. G. Avsyankin // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – V. 280. – P. 831–839.
- [62] **Avsyankin, O. G.** C^* -algebra generated by integral operators with homogeneous kernels and oscillating coefficients of various types / O. G. Avsyankin, S. S. Ashikhmin // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – V. 266. – № 1. – P. 66–76.
- [63] **Avsyankin, O. G.** Compactness of multidimensional integral operators with homogeneous kernels and variable coefficients in L_p spaces with radial

weights / O.G. Avsyankin, G.A. Tikhonova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2026. – V. 47. – № 3. – P. 978–990.

- [64] **Avetisyan, Z.** Homogeneous operators and homogeneous integral operators / Z. Avetisyan, A. Karapetyants // Math. Methods in the Applied Sciences. – 2023. – Vol. 46. – No. 1. – P. 811–829.
- [65] **Böttcher, A.** Analysis of Toeplitz operators. / A. Böttcher, B. Silbermann. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1990. – 512 p.
- [66] **Hagen, R.** C^* -algebras and numerical analysis / R. Hagen, S. Roch, B. Silbermann. – Marcel Dekker. New York, Basel, 2001. – 376 p.
- [67] **Karapetiants, N. K.** Equations with Involutive Operators / N. Karapetiants, S. Samko. – Boston, MA: Birkhäuser, 2001. – P. xxii+427.
- [68] **Samko, N.** Integral operators commuting with dilations and rotations in generalized Morrey-type spaces / N. Samko // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – V. 43. – No. 16 – P. 1–19.
- [69] **Usmanov, Z. D.** Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point / Z. D. Usmanov. – Harlow: Addison Wesley Longman Limited, 1997. – 222 p.