

На правах рукописи



Тихонова Галина Александровна

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ С
ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2026

Работа выполнена на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научный руководитель: **Авсянкин Олег Геннадиевич**
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
г. Ростов-на-Дону

Официальные оппоненты: **Пасенчук Александр Эдуардович**
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (Новочеркасский политехнический институт) им. М. И. Платова», г. Новочеркасск, профессор кафедры «Прикладная математика»

Солдатов Александр Павлович
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”», г. Москва, профессор кафедры «Высшая математика»

Защита диссертации состоится 22 декабря 2026 года в 17:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.21 на базе Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21-ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1357257/>

Автореферат разослан “___” _____ 2026 года.

Отзыв (с указанием ФИО (полностью), ученой степени со специальностью, звания, организации, подразделения, должности, адреса, телефона, e-mail, даты) с заверенной подписью рецензента и печатью учреждения просим направлять в 2 экз. ученому секретарю диссертационного совета ЮФУ801.01.21 по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, а также в формате pdf – на e-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета



Говорухин В. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В данной диссертационной работе основными объектами исследования являются многомерные интегральные операторы с однородными ядрами.

Интегральные операторы и уравнения с однородными ядрами занимают весьма важное место в современной математике и её приложениях.

Первые результаты в этом направлении были получены Г. Харди и Дж. Литтлвудом, которые рассматривали интегральные операторы с однородными степени (-1) ядрами, действующие в пространстве $L_p(\mathbb{R}^1)$. Впоследствии этот класс операторов исследовался в трудах Л. Г. Михайлова, Н. К. Карапетянца и С. Г. Самко и некоторых других авторов. Важную роль здесь сыграла тесная связь одномерных интегральных операторов с однородными ядрами и операторов свёртки с суммируемыми ядрами, что позволило применять известные результаты для свёрточных операторов при анализе операторов с однородными ядрами.

Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами, действующие в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, стали предметом глубоких исследований в конце 1960-х — начале 1970-х годов. Интерес к ним был обусловлен, прежде всего, задачами, связанными с исследованием эллиптических уравнений вида

$$\Delta u + \sum_{k=1}^n \frac{a_k(x)}{|x|} u'_{x_k} + \frac{b(x)}{|x|^2} u = 0$$

в областях, содержащих точку $x = 0$. С другой стороны, И. Б. Симоненко в своей работе¹ рассмотрел класс абстрактных однородных операторов, т. е. операторов, коммутирующих со всеми операторами растяжения. К этому классу, в частности, относятся интегральные операторы с однородными ядрами.

В 1960-е — 1970-е годы в работах Л. Г. Михайлова были установлены достаточные условия ограниченности многомерных интегральных операторов в различных функциональных пространствах. Кроме того, им была предложена схема исследования нетеровости и вычисления индекса для данных операторов. Подчеркнем, что в работах Л. Г. Михайлова рассмат-

¹Симоненко, И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II / И. Б. Симоненко // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29. — №4. — С.757-782.

ривались ядра, инвариантные относительно группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$.

Идеи, заложенные Л. Г. Михайловым, получили дальнейшее развитие в исследованиях Н. К. Карапетянца. Им были установлены достаточные, а в случае неотрицательного ядра и необходимые условия ограниченности операторов с однородными ядрами в L_p -пространствах, в предположении, что ядро не является инвариантным относительно группы вращений. Кроме того, Н. К. Карапетянц рассмотрел интегральные операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами, выделив достаточно широкие классы коэффициентов, обеспечивающих компактность таких операторов. Основные результаты этих исследований позднее вошли в его докторскую диссертацию, а затем в монографию².

В последние 20—30 лет исследования интегральных операторов с однородными ядрами стали особенно интенсивными. В основном они затрагивали операторы с инвариантными относительно всех вращений ядрами. Эта тематика развивается в нескольких направлениях.

Первое направление связано с исследованием банаховых алгебр, порождаемых многомерными интегральными операторами с однородными ядрами. Данное направление получило развитие в работах О. Г. Авсянкина, Н. К. Карапетянца и В. М. Деундяка. Для таких алгебр построено символическое исчисление, позволившее установить необходимые и достаточные условия нетеровости и/или обратимости операторов, а также получить формулы для вычисления их индекса.

Другое направление — это исследование применимости проекционных методов к многомерным интегральным операторам с однородными и биоднородными ядрами (О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк). В рамках данного направления также изучалось предельное поведение спектральных характеристик (спектров, псевдоспектров и сингулярных значений) «усечённых» операторов.

Еще одно направление исследований связано с изучением асимптотического поведения решений интегральных уравнений второго рода с однородными ядрами. Некоторые результаты этих исследований отражены в работах О. Г. Авсянкина, М. В. Цалюк.

Отдельный интерес представляют исследования интегральных операторов

²**Karapetiants, N. K.** Equations with Involution Operators / N. Karapetiants, S. Samko. – Boston, MA: Birkhäuser, 2001. – P. xxii+427.

ров с однородными ядрами в различных функциональных пространствах, отличных от пространств Лебега. В работах А. В. Гиля, Б. И. Голубова и Н. К. Карапетянца такие операторы рассматривались в пространствах BMO и VMO . В статьях С. М. Умархаджиева интегральные операторы с однородными ядрами рассматривались в гранд-пространствах Лебега, а в статьях О. Г. Авсянкина, С. С. Ашихмина и Н. Г. Самко — в пространствах типа Морри.

На рубеже 2010-х годов В. М. Деундяк и его ученики начали изучение многомерных интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа. Эти ядра не являются инвариантными относительно группы вращений. Для исследования нетеровости вышеупомянутых операторов применялся операторнозначный символ, который строился с использованием изоморфизма подобия между операторами с однородными ядрами компактного типа и операторами свёртки с компактными коэффициентами.

Завершая краткий исторический обзор, отметим, что устойчивый интерес к интегральным операторам с однородными ядрами в значительной степени обусловлен междисциплинарными связями. Такие операторы возникают в некоторых вопросах механики, при исследовании краевых задач теории аналитических функций, в дифференциальной геометрии и в общей теории линейных однородных операторов. Они также играют ключевую роль в исследовании мультипликативных дискретных свёрток.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является нахождение условий ограниченности, компактности и нетеровости некоторых классов многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в обычных и весовых пространствах Лебега, а также построение решений интегральных уравнений с радиальными однородными ядрами.

Методы исследования. Используются методы функционального анализа и гармонического анализа, а также методы теории банаховых алгебр. Кроме того, использованы специальные подходы исследования интегральных операторов с однородными ядрами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Основные положения, выносимые на защиту

1) Получены достаточные условия ограниченности многомерных интегральных операторов с однородными степени $(-n)$ ядрами в весовых про-

пространствах Лебега с радиальным весом. В случае, когда ядро интегрального оператора неотрицательно, также получены необходимые условия ограниченности.

2) Получены достаточные условия компактности в весовых пространствах Лебега с радиальным весом операторов, являющихся произведением интегрального оператора с однородным степени $(-n)$ ядром и оператора умножения на существенно ограниченную функцию.

3) Найдены условия ограниченности и компактности в пространствах Лебега многомерных интегральных операторов с однородными степени α ядрами, где $\alpha \neq -n$.

4) Получен критерий нетеровости и формула для вычисления индекса операторов из банаховой алгебры, порожденной вольтерровскими интегральными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, и операторами умножения на непрерывные функции.

5) Найдены формулы точных решений для некоторых классов многомерных интегральных уравнений с однородными степени $(-n)$ радиальными ядрами.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Полученные результаты относятся к области фундаментальных исследований. Они могут быть использованы для исследования многомерных интегральных уравнений с однородными ядрами, возникающих в некоторых задачах математической физики, теории потенциала и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих конференциях и семинарах:

- XXVIII и XXXI международные научные конференции «Математика. Экономика. Образование» (Новороссийск, 2022, 2025);

- XVIII и XX Владикавказская молодежная математическая школа (Владикавказ, 2023, 2025);

- международная научная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – XV» (Ростов-на-Дону, 2025);

- семинар кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (руководители семинара — О. Г. Авсянкин и А. Н. Карапетянц).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 8 публикациях: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Работы [1], [2] опубликованы в журнале, входящем в Перечень ВАК РФ. Статьи [3], [4] и [5] входят в базу данных международных индексов научного цитирования Scopus. Статьи [6], [7] и [8] опубликованы в материалах конференций.

Статьи [1], [2], [3], [4] и [5] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. В этих работах О. Г. Авсянкину принадлежат постановка задач, указание методов исследования и общее руководство. Автору диссертации принадлежат формулировки и доказательства всех результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы, содержащего 69 наименований. Объем работы составляет 119 страниц.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Олега Геннадиевича Авсянкина за чуткое наставничество, создание исключительно дружелюбной атмосферы общения и теплую поддержку.

Диссертационная работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России № 075-02-2026-1316.

Содержание работы

Первая глава диссертации посвящена исследованию ограниченности и компактности в весовом пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ оператора K вида

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где функция $k(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $n \geq 2$), измерима и однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y), \quad \forall \alpha > 0. \quad (2)$$

Пространство $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, $1 \leq p \leq \infty$, — это пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n, w)} = \|f\|_{p, w} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(|x|) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, w)} = \|f\|_{\infty, w} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| w(|x|),$$

где $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — измеримая функция. Положим $p' = p/(p-1)$.

В параграфе 1.1 исследуется ограниченность оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Рассмотрим функцию

$$w_*(t) = \sup_{s>0} \frac{w(ts)}{w(s)},$$

которая называется растяжением функции $w(t)$. Имеет место

Теорема 1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условию (2), а также условиям:

$$\kappa_1 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma, y)| |y|^{-n/p} (w_*(1/|y|))^{1/p} dy < \infty,$$

$$\kappa_2 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, \sigma)| |x|^{-n/p'} (w_*(|x|))^{1/p} dx < \infty,$$

где $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}$.

Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, причем

$$\|K\varphi\|_{p, w} \leq \kappa_1^{1/p'} \kappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{p, w}.$$

Данная теорема обобщает результат работы С. М. Умархаджиева³, где дополнительно требовалось, чтобы ядро было инвариантным относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$.

Кроме того показано, что если ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условию

$$\kappa_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma, y)| w_*(1/|y|) dy < \infty,$$

то оператор K ограничен в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n, w)$.

Для случая неотрицательного ядра получены необходимые условия ограниченности оператора K в $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, а именно:

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и неотрицательна, и оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

³Умархаджиев, С. М. Интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега / С. М. Умархаджиев // Матем. заметки. — 2017. — 102:5. — С. 775–788.

Тогда выполнены условия

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(\sigma, t) |t|^{-n/p} (w_*(|t|))^{-1/p} dt < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} k(t, \sigma) |t|^{-n/p'} (w_*(1/|t|))^{-1/p} dt < \infty.$$

Если ядро $k(x, y)$ инвариантно относительно группы вращений $SO(n)$, т. е. удовлетворяет условию

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y), \quad \forall \omega \in SO(n), \quad (3)$$

то необходимые условия ограниченности упрощаются и принимают вид

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, t) |t|^{-n/p} (w_*(|t|))^{-1/p} dt = \int_{\mathbb{R}^n} k(t, e_1) |t|^{-n/p'} (w_*(1/|t|))^{-1/p} dt < \infty,$$

где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Показано, что в случае степенных весов полученные результаты согласуются с известными классическими утверждениями.

В параграфе 1.2 исследуется компактность в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ операторов вида $M_a K$ и $K M_a$, где K — оператор вида (1), M_a — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом требуется, чтобы ядро $k(x, y)$ было инвариантным относительно группы вращений $SO(n)$, т. е., выполнялось условие (3), а также удовлетворяло условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} (w_*(1/|y|))^{1/p} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, e_1)| |x|^{-n/p'} (w_*(|x|))^{1/p} dx < \infty. \quad (4)$$

Определим функцию $\mathcal{K}(w, s, h)$ равенством

$$\mathcal{K}(w, s, h) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| k(e_1, t+h) \left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)} \right)^{1/p} - k(e_1, t) |t|^{-n/p} (w_*(1/|t|))^{1/p} \right| dt,$$

где $s > 0$ и $h \in \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| > N} |a(x)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |a(x)| = 0.$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (2), (3), (4), и для любого $s_0 > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{s \in (0, s_0)} \mathcal{K}(w, s, h) = 0. \quad (5)$$

Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $M_a K$ компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Следует отметить, что условие (5) весьма сложно проверяется на практике. Поэтому важно выделить случаи, когда оно может быть легко проверено, либо выполнено автоматически. В частности, условие (5) автоматически выполнено для степенного веса $w(|x|) = |x|^\alpha$.

Далее рассмотрим весовую функцию $w(|x|)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{w(|x|)}{w(|x+h|)} - 1 \right| = 0. \quad (6)$$

Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть весовая функция $w(|x|)$ удовлетворяет условию (6), а ядро $k(x, y)$ оператора K удовлетворяет условиям (2), (3), (4) и кроме того

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y+h) - k(e_1, y)| |y|^{-n/p} (w_*(1/|y|))^{1/p} dy = 0. \quad (7)$$

Тогда, если $a \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $M_a K$ компактен в $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

В заключительной части параграфа аналогичные результаты получены для операторов вида $K M_a$. Это достигается с использованием свойств сопряжённых операторов и позволяет получить симметричную теорию компактности для обоих типов композиций операторов.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию интегральных операторов с однородными степени α ($\alpha \neq -n$) ядрами в пространствах Лебега и в пространствах непрерывных функций.

В параграфе 2.1 изучается ограниченность и компактность интегральных операторов с однородными степени α ядрами в пространствах $L_p(\mathbb{B}_n)$ и $L_p(\mathbb{C}\mathbb{B}_n)$, где $\mathbb{B}_n$ и $\mathbb{C}\mathbb{B}_n$ — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и его дополнение соответственно.

В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассматривается интегральный оператор

$$(H\varphi)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} h(x, y) \varphi(y) dy, \quad (8)$$

где функция $h(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, измерима и однородна степени α ($\alpha \in \mathbb{R}$), т. е.

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha h(x, y), \quad \lambda > 0. \quad (9)$$

Прежде всего устанавливаются условия на показатель однородности α , необходимые для ограниченности этого оператора. А именно показано, что если оператор H ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, то $\alpha \geq -n$.

Аналогично показано, что условие $\alpha \leq -n$ является необходимым для ограниченности оператора

$$(\mathcal{H}\psi)(x) = \int_{\mathbb{CB}_n} h(x, y)\psi(y) dy, \quad (10)$$

в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$.

Опираясь на полученные необходимые условия, устанавливаются достаточные условия ограниченности рассматриваемых операторов.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha \geq -n$, и удовлетворяет следующим условиям:

$$\varkappa_1 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt < \infty, \quad (11)$$

$$\varkappa_2 = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, \sigma)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt < \infty. \quad (12)$$

Тогда оператор H вида (8) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, причем

$$\|H\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)} \leq \varkappa_1^{1/p'} \varkappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}_n)}.$$

Если функция $h(x, y)$ инвариантна относительно группы вращений, то интегралы в формулах (11) и (12) не зависят от σ . Соответственно условия (11) и (12) упрощаются и принимают вид

$$\varkappa = \int_{\mathbb{R}^n} |h(e_1, t)| |t|^{-n/p} dt = \int_{\mathbb{R}^n} |h(t, e_1)| |t|^{-n/p' - \alpha - n} dt < \infty. \quad (13)$$

Во второй части параграфа рассматриваются вопросы компактности интегральных операторов с однородными степени $\alpha \neq -n$ ядрами.

Теорема 5. Пусть $1 < p \leq \infty$, функция $h(x, y)$ однородна степени α , где $\alpha > -n$, и удовлетворяет условиям (11) и (12), а также условиям

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h(\sigma, t + \tau) - h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \int_{|t| > N} |h(\sigma, t)| |t|^{-n/p} dt = 0.$$

Тогда оператор H вида (8) компактен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

В частности показано, что если функция $h(x, y)$ кроме того инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет условию (13), то оператор H компактен в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.

Следует отметить, что при $\alpha = -n$ вышеуказанные результаты о компактности не имеют места, так как в этом случае в точке $x = 0$ имеется сингулярная особенность.

Аналогичные утверждения доказаны и для оператора $\mathcal{H}$ вида (10), действующего в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$.

В заключительной части параграфа исследуются одномерные интегральные операторы в пространствах $L_p(0, 1)$ и $L_p(1, \infty)$.

В параграфе 2.2 рассматриваются интегральные операторы с однородными степени α ядрами в пространствах непрерывных функций. При этом предполагается, что функция $h(x, y)$ однородна степени α и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$. В этих предположениях получены достаточные условия ограниченности оператора H вида (8) в пространстве $C(\mathbb{B}_n)$, при $\alpha \geq -n$, и оператора $\mathcal{H}$ вида (10) в пространстве $C_b(\mathbb{CB}_n)$ (здесь $C_b(\mathcal{X})$ — пространство ограниченных непрерывных функций на локально компактном топологическом пространстве $\mathcal{X}$).

Основная часть параграфа посвящена изучению действия одномерных интегральных операторов вольтерровского типа с однородными степени α ядрами на функции, имеющие заданное асимптотическое поведение на бесконечности (в окрестности нуля).

Точнее говоря, в пространстве $C_b([1, \infty))$ рассматривается оператор

$$(\mathcal{B}\varphi)(x) = \int_1^x q(x, y) \varphi(y) dy,$$

где функция $q(x, y)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и однородна степени α , причем $\alpha \leq -1$, и существует такое $n > 0$, что $q(t, 1)t^{n-2-\alpha} \in L_1(1, \infty)$.

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ — произвольная строго возрастающая последовательность, и пусть функция $\varphi \in C_b([1, \infty))$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_\eta(\infty) = \{x \in \mathbb{R}_+ : x > \eta\}$ бесконечно удаленной точки имеет представление

$$\varphi(x) = c_0 + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{x^{\mu_k}} + \frac{v(x)}{x^{\mu_m}},$$

где $c_k \in \mathbb{R}$ и $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Показано, что если $\mu_m < n$, то функция $\mathcal{B}\varphi$ в указанной окрестности $\mathcal{O}_\eta(\infty)$ имеет представление

$$(\mathcal{B}\varphi)(x) = \frac{b_0}{x^{-\alpha-1}} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{x^{\mu_k-\alpha-1}} + \frac{w(x)}{x^{\mu_m-\alpha-1}},$$

где $b_k \in \mathbb{R}$ и $w(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

В **третьей главе** диссертации исследуются интегральные операторы вольтерровского типа, действующие в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, а также банаховы алгебры, порожденные такими операторами. Основное внимание уделяется вопросам обратимости, нетеровости и построению соответствующего символьного исчисления.

В параграфе 3.1 приведены необходимые предварительные сведения.

В параграфе 3.2 в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, где $1 \leq p \leq \infty$, рассматриваются интегральные операторы вида

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_{|y| < |x|} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \quad (14)$$

где функция $k(x, y)$, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, однородна степени $(-n)$ (т. е. выполнено условие (2)), инвариантна относительно группы вращений (т. е. выполнено условие (3)), а также удовлетворяет условию суммируемости

$$\kappa := \int_{\mathbb{B}_n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty.$$

В этом же пространстве рассматривается оператор вида

$$A = \lambda I + M_a \mathcal{K} + T, \quad (15)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in C(\mathbb{B}_n)$, M_a — оператор умножения на функцию a , $\mathcal{K}$ — оператор вида (14), T — компактный в $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор.

Обозначим $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ — компактификацию $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой. Символом оператора A является функция $\sigma_A(m, \xi)$, заданная на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ формулами

$$\sigma_A(m, \xi) = \lambda + a(0) \int_{\mathbb{B}_n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}, \quad (16)$$

$$\sigma_A(\infty) = \lambda,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра. Доказано, что оператор A нетеров в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sigma_A(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (17)$$

В этом случае индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_A(m, \cdot),$$

где $\text{ind } \sigma_A(m, \cdot)$ — индекс функции $\sigma_A(m, \xi)$ по переменной ξ при фиксированном значении m .

В частном случае, когда $a(x) \equiv 1$ и T — нулевой оператор, подсчитаны дефектные числа оператора, а также найдены условия его обратимости.

В заключительной части параграфа рассмотрены композиции операторов вида (15). Доказано, что если A_1 и A_2 — операторы вида (15), то оператор $A = A_1 A_2$ также является оператором вида (15), и их коммутатор $A_1 A_2 - A_2 A_1$ является компактным оператором.

В параграфе 3.3 построена банахова алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная всеми операторами вида (15). Поскольку множество $\mathcal{T}$ всех компактных операторов образует замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{A}$, можно рассмотреть фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$. Показано, что алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ коммутативна.

Теорема 6. 1) Пространство максимальных идеалов $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ банаховой алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$ гомеоморфно компакту $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$.

2) При отождествлении пространств $\mathcal{M}(\mathfrak{A}/\mathcal{T})$ и $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ преобразование Гельфанда элемента $B + \mathcal{T} \in \mathfrak{A}/\mathcal{T}$ совпадает с его символом $\sigma_{[B]}(m, \xi)$.

Из этой теоремы непосредственно следует, что условие

$$\sigma_{[B]}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$$

является необходимым и достаточным для обратимости элемента $B + \mathcal{T}$ в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$.

Опираясь на исследование фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{T}$, для алгебры $\mathfrak{A}$ построено символьное исчисление, т. е. каждому оператору $B \in \mathfrak{A}$ поставлена в соответствие определенная функция $\sigma_B(m, \xi)$, непрерывная на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$. Основным результатом параграфа является следующий критерий.

Теорема 7. Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Для того, чтобы оператор B являлся нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию

$$\sigma_B(m, \xi) \neq 0, \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}.$$

В этом случае индекс оператора B вычисляется по формуле

$$\text{ind } B = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } \sigma_B(m, \cdot).$$

В параграфе 3.4 в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ исследуются операторы вида

$$(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi)(x) = \int_{|x| < |y| < 1} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{B}_n,$$

где функция $k(x, y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$. Для операторов вида

$$\mathcal{A} = \lambda I + M_a \widetilde{\mathcal{K}} + T,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in C(\mathbb{B}_n)$, T — компактный оператор, по аналогии с результатами параграфа 3.2 установлены критерий нетеровости и формула индекса.

В параграфе 3.5 в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$ рассматриваются операторы вида

$$(\mathcal{Q}\varphi)(x) = \int_{|x| < |y|} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{CB}_n,$$

где функция $k(x, y)$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Рассматривается оператор $J: L_p(\mathbb{CB}_n) \rightarrow L_p(\mathbb{B}_n)$ вида

$$(J\varphi)(x) = \left(\frac{1}{|x|^2} \right)^{n/p} \varphi \left(\frac{x}{|x|^2} \right).$$

Показано, что

$$\mathcal{K}_1 = J \mathcal{Q} J^{-1}, \tag{18}$$

где оператор $\mathcal{K}_1$ задается в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ формулой

$$(\mathcal{K}_1\varphi)(x) = \int_{|y| < |x|} k(y, x) \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{n/p-n/p'} \varphi(y) dy.$$

Опираясь на (18) и результаты предыдущих параграфов, получены критерии обратимости и нетеровости для операторов, действующих в пространстве $L_p(\mathbb{CB}_n)$.

Четвертая глава диссертации посвящена построению точных решений интегральных уравнений с однородными радиальными ядрами. Отметим, что хотя для многих классов интегральных операторов с однородными степени $(-n)$ ядрами условия обратимости известны, решения многомерных интегральных уравнений с однородными ядрами ранее практически не строились.

В параграфе 4.1 в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассматривается интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (19)$$

где функция $k(r, \rho)$ однородна степени $(-n)$. Символом уравнения (19) является функция

$$\mathfrak{S}_0(\xi) = 1 - |\mathbb{S}_{n-1}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'+i\xi-1} d\rho,$$

где $|\mathbb{S}_{n-1}|$ — площадь сферы $\mathbb{S}_{n-1}$. Показано, что уравнение (19) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{S}_0(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Основным результатом первой части параграфа является построение явной формулы решения уравнения.

Теорема 8. Пусть выполнено условие (20). Тогда решение уравнения (19) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{\frac{n}{p}} h \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(y) dy, \quad (21)$$

где $h(t)$ — функция из пространства $L_1(\mathbb{R})$, определяемая равенством

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_0(\xi)} = 1 + \widehat{h}(\xi),$$

а $\widehat{h}(\xi)$ — преобразование Фурье функции h .

Во второй части параграфа исследуется интегральное уравнение с полурадiallyм ядром. Показано, что при радиальном свободном члене решение допускает представление, аналогичное формуле (21).

В параграфе 4.2 в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассматривается интегральное уравнение вольтерровского типа вида

$$\varphi(x) = \int_{|y| < |x|} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{B}_n. \quad (22)$$

Для данного уравнения получен критерий однозначной разрешимости, сформулированный в терминах невырожденности его символа, а также построена формула решения, аналогичная формуле (21).

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК

1. Авсянкин, О. Г. Формула решения многомерного интегрального уравнения с однородным радиальным ядром / О. Г. Авсянкин, Г. А. Каменских // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. — 2019. — № 4(204). — С. 4–7. — DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-4-7.
2. Авсянкин, О. Г. Ограниченность интегральных операторов с однородными ядрами в L_p -пространствах с радиальным весом / О. Г. Авсянкин, Г. А. Тихонова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. — 2025. — № 3(227). — С. 9–16. — DOI 10.18522/1026-2237-2025-3-9-16.

Статьи в научных изданиях, входящих в Scopus

3. Авсянкин, О. Г. Об алгебре, порожденной вольтерровскими интегральными операторами с однородными ядрами и непрерывными коэффициентами / О. Г. Авсянкин, Г. А. Каменских // Владикавказский математический журнал. — 2022. — Т. 24, № 4. — С. 19–29. — DOI 10.46698/p3569-9057-4562-о. [Переводная версия: Avsyankin, O. G.

- On the algebra generated by Volterra integral operators with homogeneous kernels and continuous coefficients / O. G. Avsyankin, G. A. Kamenskikh // Siberian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 64, № 4. – P. 955–962. – DOI 10.1134/s003744662304016x.]
4. Avsyankin, O. G. Integral operators with homogeneous kernels of degree α in lebesgue spaces / O. G. Avsyankin, G. A. Kamenskikh // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 289, № 4. – P. 465–474. – DOI 10.1007/s10958-024-07178-x.
 5. Avsyankin, O. G. Compactness of multidimensional integral operators with homogeneous kernels and variable coefficients in L_p spaces with radial weights / O. G. Avsyankin, G. A. Tikhonova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2026. – Vol. 47, № 3. – P. 978–990. – DOI: 10.1134/S199508022561608X

Публикации в сборниках трудов конференций

6. Каменских, Г. А. Многомерные интегральные операторы вольтерровского типа с однородными ядрами и переменными коэффициентами / Г. А. Каменских // XXVIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование»; XI Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», 27 мая – 3 июня 2022 г. : материалы. Ростов–на–Дону, 2022. – С. 39-40.
7. Тихонова, Г. А. Интегральные операторы с однородными степени α ядрами в пространствах Лебега / Г. А. Тихонова // XXXI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование»; XV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», 27 мая – 3 июня 2025 г. : материалы. Ростов–на–Дону, 2025. – С. 26.
8. Тихонова, Г. А. Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами в L_p -пространствах с радиальным весом / Г. А. Тихонова // Сборник материалов XX Владикавказской молодежной математической школы (24-25 июля 2025 г.: онлайн) / Владикавказский научный центр РАН, Южный математический институт, Южный федеральный университет, Региональный научно-образовательный математический центр : главный редактор: д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраев. – Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН, 2025. – С. 80. – Режим доступа: <https://smath.ru/upload/iblock/4f3/Sbornik%20VMMSh-2025.pdf> (дата обращения: 21.09.2026).