

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»

На правах рукописи

Калинина Тамара Ипполитовна

**ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И
УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ
КОМБИНИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКАХ ВОЛН**

1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» на кафедре математического моделирования Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Научный руководитель **Наседкин Андрей Викторович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
заведующий кафедрой
математического моделирования

Официальные
оппоненты: **Глушкова Наталья Вилениновна**
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»,
главный научный сотрудник
Института математики, механики и информатики

Зеленцов Владимир Борисович
кандидат физико-математических наук, старший
научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Донской
государственный технический университет»,
ведущий научный сотрудник лаборатории
функционально-градиентных и композиционных
материалов научно-образовательного центра
«Материалы»

Защита диссертации состоится «16» декабря 2025 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.10 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю.А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21 Ж и на сайте www.sfedu.ru по ссылке <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1346770>

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Дударев Владимир Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию задач о распространении упругих волн от действия комбинированных источников волн в средах с усложненными физико-механическими свойствами. Под комбинированными источниками здесь понимаются осциллирующие и подвижные источники волн. Рассматриваются задачи электроупругости со связанностью между механическими и электрическими полями и задачи теории упругости с учетом поверхностных эффектов по модели Гуртина-Мурдоха, в которых на границах задаются поверхностные напряжения.

Несмотря на достаточно давнюю историю, задачи о колебаниях и волнах в ограниченных и полугограниченных телах остаются актуальными и в настоящее время, особенно для их неклассических вариантов, связанных с усложненными определяющими соотношениями и граничными или интерфейсными условиями.

Большой вклад в развитие теории о волновых движениях в полугограниченных упругих средах, включая волноводные структуры, внесли такие отечественные и зарубежные ученые как: Бабешко В.А., Бреховских Л.М., Ватульян А.О., Викторов И.А., Ворович И.И., Гетман И.П., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Гринченко В.Т., Завадский В.Ю., Калинин В.В., Мелешко В.В., Метрикин А.В., Устинов Ю.А., Cole J., Huth J., Lamb H., Love A.E.H., Radok J.R.M., Rayleigh L., Sneddon I.N., Sommerfeld A., Tolstoy I., Usdin E. и многие другие.

Актуальность исследования волновых процессов в электроупругих телах обусловлена многочисленными приложениями в различных областях, прежде всего, в пьезоэлектрическом приборостроении. Активное использование пьезоматериалов началось еще в середине 20 века. Можно выделить следующие области использования пьезокерамики: ультразвуковая диагностика в медицине, энергетика, авиа и железнодорожный транспорт, нефтегазовый комплекс, автопромышленность, производство бытовых электроприборов и др. Новыми и перспективными областями применения стали устройства накопления энергии, аддитивное производство пьезоэлектрических метаматериалов, точная настройка станков (нанопозиционирование), наносенсоры и др. Итак, благодаря замечательным свойствам, пьезокерамика широко используется в разных областях науки и техники. Тема настоящей работы является актуальной также в связи с возрастающей потребностью прецизионного моделирования новых активных материалов с улучшенными характеристиками и прогнозирования их свойств, особенно на наноуровне. Как отмечалось ранее, среди теорий наномеханики одной из особенно популярных является теория Гуртина-Мурдоха, которая была обобщена и на пьезоэлектрические (электроупругие) среды.

Как для электроупругих, так и для упругих полугограниченных сред с поверхностными напряжениями мало изученными остаются задачи с комбинированными нагрузками, актуальность которых обусловлена развитием современного высокоскоростного транспорта и испытаниями на ракетных треках. В данной работе такие задачи изучаются для электроупругих сред по методологии, развитой ранее в работах Белокопя А.В. и Наседкина А.В., но для упругих сред.

Задачи теории упругости и пьезоэлектричества с комбинированными, т.е. с подвижными осциллирующими возмущениями, и соответствующие задачи для наноразмерных плоских волноводов являются центральными в настоящей диссертации. Неполнота исследований таких задач придает дополнительную актуальность данной работе.

Цель и задачи диссертационной работы.

Целью работы является нахождение и анализ фундаментальных решений задач для упругих и пьезоэлектрических неограниченных и полуограниченных сред, а также исследование наноразмерных задач для упругих сред с учетом поверхностных эффектов при осциллирующих и подвижных источниках волн.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

- анализ проведенных исследований в данной области;
- нахождение фундаментальных решений антиплоской, плоской и пространственной задач электроупругости при движущемся осциллирующем источнике;
- построение асимптотик волновых полей в дальней зоне, кинематический и энергетический анализ решений для рассмотренных антиплоских, плоских и пространственных задач электроупругости;
- нахождение аналитических решений антиплоских задач с комбинированными нагрузками для упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений в симметричной и антисимметричной постановках;
- нахождение аналитических решений симметричной и антисимметричной плоских задач о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений;
- проведение соответствующих численных экспериментов и анализ дисперсионных кривых.

Методы исследования. При решении задач использовалась стандартная техника решения динамических упругих и электроупругих задач для неограниченных и полуограниченных областей. Для выделения единственного решения использовался принцип предельного поглощения. Фундаментальные решения находились с помощью преобразования Фурье по бесконечно протяженной координате, методов контурного интегрирования и теории вычетов для нахождения обратного преобразования Фурье. Для анализа кинематики и энергетики волновых полей в дальней зоне использовался метод стационарной фазы или метод перевала и энергетические соотношения, в том числе в подвижной системе координат для подвижных и неподвижных наблюдателей. Поверхностные эффекты изучались с учетом модели Гуртина-Мурдоха. При проведении численных исследований использовался математический пакет Maple.

Научная новизна. Все рассмотренные задачи являются новыми, что косвенно подтверждается публикацией результатов решения этих задач в рецензируемых изданиях.

Исследования фундаментальных решений в антиплоских, плоских и пространственных задачах при подвижных осциллирующих источниках ранее проводились только для упругих сред, а в настоящей работе эти исследования были распространены на электроупругие среды.

Антиплоские задачи для упругой изотропной полосы с поверхностными напряжениями, ранее изучаемые только при осциллирующих источниках волн, были рассмотрены при движущихся осциллирующих источниках. Наконец, плоские задачи для упругой изотропной полосы с поверхностными напряжениями, ранее исследованные при нулевых внешних воздействиях, в диссертации были изучены при вынужденных установившихся колебаниях, а анализ дисперсионных соотношений был проведен для симметричных и антисимметричных задач в виде зависимости частоты от волнового числа.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

- Фундаментальные решения двумерных и трехмерных задач электроупругости при движущихся осциллирующих источниках, явные представления для фундаментальных решений для всех режимов движения с выделением динамических и квазистатических составляющих.
- Кинематический и энергетический анализ волновых полей в дальней зоне для полученных фундаментальных решений.
- Выводы о влиянии движения источника волн на кинематические и энергетические картины волновых полей в дальней зоне в подвижной системе координат: появление дополнительной анизотропии и зон с различным числом распространяющихся волн; наличие быстрых и медленных волн при транс- и сверхсейсмических режимах движения источника; перенос отрицательной энергии, измеренной подвижным наблюдателем, при транс- и сверхсейсмических режимах движения источника.
- Решения антиплоских задач о действии комбинированной нагрузки на упругую изотропную полосу при наличии поверхностных напряжений, моделируемых в рамках теории Гуртина – Мурдоха, в симметричной и антисимметричной постановках.
- Решения симметричных и антисимметричных плоских задач о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений, моделируемых в рамках теории Гуртина – Мурдоха.
- Анализ первых дисперсионных кривых в задачах для наноразмерной упругой полосы. Выводы о влиянии поверхностных напряжений и поверхностных инерционных нагрузок на дисперсионные кривые: наличие дисперсии у всех дисперсионных кривых; появление асимптоты у первой дисперсионной кривой, соответствующей поверхностной волне; изменение частот запирания, волновых чисел и зон существования обратных волн у дисперсионных кривых при различных наноразмерных толщинах полосы. Анализ влияния движения источника волн в антиплоских задачах для наноразмерной полосы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая ценность проведенных исследований состоит в получении фундаментальных решений задач с комбинированными источниками для пьезоэлектрического пространства, получении асимптотик дальних полей и в анализе кинематики и энергетики цилиндрических и сферических распространяющихся волн в дальней зоне в подвижной системе координат, а

также в исследовании задач об установившихся колебаниях для упругих нанотонких волноводов с учетом поверхностных эффектов.

Практическая значимость работы обусловлена возможными применениями полученных результатов при разработках современного высокоскоростного транспорта и новых эффективных устройств, использующих при своей работе волноводы с наноразмерными поперечными сечениями.

Достоверность. Точность и корректность полученных результатов основана на использовании классических апробированных методов динамической теории упругости и электроупругости, методов теории функции комплексных переменных и методов стационарной фазы для анализа волновых полей в дальней зоне. При моделировании задач для ультратонких волноводов использовалась одна из наиболее популярных в наномеханике теория поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха. Используемые в работе подходы являются теоретически обоснованными, неоднократно применялись для разнообразных аналогичных динамических упругих и электроупругих задач, а также подтверждались экспериментально. Кроме того, все предложенные в работе модели и полученные результаты сравнивались с известными, когда это было возможно.

Апробация работы. Полученные в диссертации результаты были представлены на следующих конференциях и школах: “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете”, с. Дивноморское, (2022, 2021, 2019); “Современные проблемы механики сплошной среды”, г. Ростов-на-Дону (2020, 2018, 2010); “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения”, г. Владикавказ (2021), “Достижения и перспективы молодых ученых в интересах развития Юга России”, г. Ростов-на-Дону (2018).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации изложены в 13 работах, 4 работы в журналах из перечня ВАК, 3 работы – в сборниках трудов конференций и 6 работ – в тезисах докладов.

В опубликованных работах совместно с научным руководителем осуществлены постановки задач и разработаны общие математические подходы, соавторы участвовали вместе в обсуждении общих выводов и в подготовке публикаций. Соискателем получены решения всех рассмотренных задач, разработан необходимый программный инструментарий, реализованы вычислительные эксперименты и проведен анализ полученных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 123 страницы, включая 34 рисунка. Список литературы содержит 135 источников.

Содержание работы

Во введении приведен общий обзор диссертации, обоснована актуальность исследований, отмечена значимость темы, ее научная новизна, определены цели, задачи и методы исследования, а также представлена структура работы.

В первой главе приводятся постановки задач электроупругости при движущихся осциллирующих источниках для плоскости и пространства, определяются фундаментальные решения и проводится кинематический и энергетический анализ решений в дальней зоне.

Обозначим неподвижную декартову систему координат в \mathbf{R}^3 , отнесенную к рассматриваемой электроупругой (пьезоэлектрической) среде, через $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Пусть в данной системе координат τ – время, $\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ – вектор-функция перемещений, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ – функция электрического потенциала. Примем, что рассматриваемая электроупругая среда характеризуется следующими материальными модулями: упругими коэффициентами жесткости $c_{\alpha\beta}^E$, составляющими матрицу \mathbf{c}^E размера 6×6 ; диэлектрическими проницаемостями ε_{ij}^S , составляющими 3×3 матрицу $\boldsymbol{\varepsilon}^S$; и пьезоэлектрическими коэффициентами (пьезомодулями) $e_{i\alpha}$, составляющими 3×6 матрицу \mathbf{e} ($i, j = 1, 2, 3, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$). Верхние буквы у $c_{\alpha\beta}^E$ и ε_{ij}^S означают, что эти величины вычислены при соответствующих постоянных, обычно, нулевых полях: E – при постоянной напряженности электрического поля, S – при постоянных деформациях (для зажатого материала). Неподвижная система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ часто аналогична кристаллографической для пьезоупругого материала, но это в общем случае необязательно.

Постановка задачи о действии источников волн – объемных массовых сил \mathbf{b} и объемных электрических зарядов σ – в безграничной пьезоэлектрической среде с плотностью ρ в пренебрежении диссипативными факторами описывается полевыми уравнениями (уравнением движения и уравнением квазиэлектростатики)

$$\nabla^\xi \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2, \quad \nabla^\xi \cdot \mathbf{D} = \sigma,$$

для которых определяющие соотношения электроупругости в векторно-матричной форме Фойхта, принятой в пьезотехнике, можно представить в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\nabla^\xi = \{\partial/\partial \xi_1, \partial/\partial \xi_2, \partial/\partial \xi_3\}$ – набла-оператор, \mathbf{T} , \mathbf{S} – одномерные массивы, состоящие из шести компонент $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно:

$\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$, $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$, \mathbf{D} , \mathbf{E} – векторы электрического смещения (электрической индукции) и электрического поля (напряженности электрического поля), соответственно; $E_i = -\partial\varphi/\partial\xi_i$.

Зависимости \mathbf{S} от \mathbf{u} и \mathbf{E} от φ можно представить также в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla^\xi \varphi, \quad (2)$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla^\xi) = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi_1 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial\xi_3 & \partial/\partial\xi_2 \\ 0 & \partial/\partial\xi_2 & 0 & \partial/\partial\xi_3 & 0 & \partial/\partial\xi_1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\xi_3 & \partial/\partial\xi_2 & \partial/\partial\xi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Используя (1) – (3), полевые уравнения электроупругости в приближении квазиэлектростатики запишем в форме:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2 - \mathbf{L}^*(\nabla^\xi) \cdot (\mathbf{c}^E \cdot \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e}^* \cdot \nabla^\xi \varphi) = \mathbf{b}, \quad \nabla^\xi \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u} - \mathfrak{e}^S \cdot \nabla^\xi \varphi) = \sigma. \quad (4)$$

Далее рассмотрим три вида задач в зависимости от внешних воздействий сил \mathbf{b} и объемного электрического заряда σ :

Задачи А – обычные задачи об установившихся колебаниях, когда $\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi) e^{i\omega\tau}$, $\sigma(\xi, \tau) = q(\xi) e^{i\omega\tau}$, где ω – круговая частота ($\omega = 2\pi f$, f – частота).

Задачи Б – стационарные задачи с подвижными воздействиями, когда $\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi - \mathbf{w}\tau)$, $\sigma(\xi, \tau) = q(\xi - \mathbf{w}\tau)$, где $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ – скорость движения источника возмущений.

Задачи В – наиболее общие задачи с комбинированными (подвижными и осциллирующими) нагрузками, когда $\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi - \mathbf{w}\tau) e^{i\omega\tau}$, $\sigma(\xi, \tau) = q(\xi - \mathbf{w}\tau) e^{i\omega\tau}$.

В задачах *В* для нахождения фундаментальных решений предполагается, что комбинированные источники колебаний перемещаются прямолинейно с постоянной скоростью \mathbf{w} , осциллируют с круговой частотой ω и являются сосредоточенными, т.е.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\xi, \tau) \\ \sigma(\xi, \tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \mathbf{I} \\ q_0 \end{Bmatrix} \delta(\xi - \mathbf{w}\tau) e^{i\omega\tau}, \quad (5)$$

где f_0 , q_0 – константы, определяющие амплитуды массовой силы \mathbf{b} и объемного электрического заряда σ , соответственно; \mathbf{I} – единичный направляющий вектор массовой силы \mathbf{b} , $\delta(\dots)$ – дельта-функция Дирака.

Для задач с движущимися нагрузками удобно ввести подвижную декартову систему координат $\tilde{O}x_1x_2x_3$, связанную с этими нагрузками. Будем считать, что эта система перемещается относительно неподвижной со скоростью движения источника \mathbf{W} . Подвижная система координат будет являться основной для построения решений и их анализа. Поэтому для нее используем стандартные символы, обозначая через $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор пространственных координат, а t – время. Подвижная и неподвижная системы координат ($\tilde{O}x_1x_2x_3$ и $O\xi_1\xi_2\xi_3$) связаны следующими очевидными соотношениями:

$$\mathbf{x} = \xi - \mathbf{w}\tau, \quad t = \tau, \quad \partial/\partial\xi_k = \partial/\partial x_k, \quad k=1, 2, 3, \quad \partial_\tau = \partial_t - \mathbf{w} \cdot \nabla, \quad (6)$$

$$\nabla = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\} \equiv \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}. \quad (7)$$

Предполагается, что при действии комбинированного источника (5) в подвижной системе координат (6) реализуется режим установившихся колебаний для вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и для скалярной функции электрического потенциала $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \varphi = \psi(\mathbf{x})e^{i\omega t}. \quad (8)$$

В подвижной системе координат для амплитудных функций $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\rho(i\omega - \mathbf{w} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} - \mathbf{A}(\nabla) \cdot \mathbf{v} - \gamma(\nabla)\psi = f_0 \mathbf{l} \delta(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\gamma^*(\nabla) \cdot \mathbf{v} - \varepsilon(\nabla)\psi = q_0 \delta(\mathbf{x}), \quad (10)$$

где $\mathbf{A}(\nabla) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{L}(\nabla)$, $\gamma(\nabla) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{e}^* \cdot \nabla$, $\varepsilon(\nabla) = \nabla^* \cdot \mathbf{\varepsilon}^S \cdot \nabla$.

Антиплоская задача электроупругости решена в § 1.1 (вектор перемещений считаем одномерным). Условиями существования антиплоской задачи являются ограничения, которые накладываются на модули упругости и пьезомодули. Найдены интегральные представления для амплитуд фундаментальных решений. Для нахождения фундаментальных решений используется техника, применяемая для аналогичных задач теории упругости. Предполагается, что в подвижной системе координат, связанной с подвижным источником, существует режим установившихся колебаний. Для выделения единственного решения используется принцип предельного поглощения. Также для нахождения обратного преобразования Фурье используются методы контурного интегрирования. Найденные формулы фундаментальных решений пригодны для различных режимов движения источника. В полученных выражениях для амплитуд перемещения и электрического потенциала содержатся динамические составляющие, статические и несвязанный квазиэлектростатический потенциал.

В качестве иллюстрации изложенного материала рассматриваются кривые медленности (кривые рефракции) и кривые фазовых скоростей для пьезокерамики PZT-4 для различных режимов движения источника. Изучаются основные свойства построенных кривых.

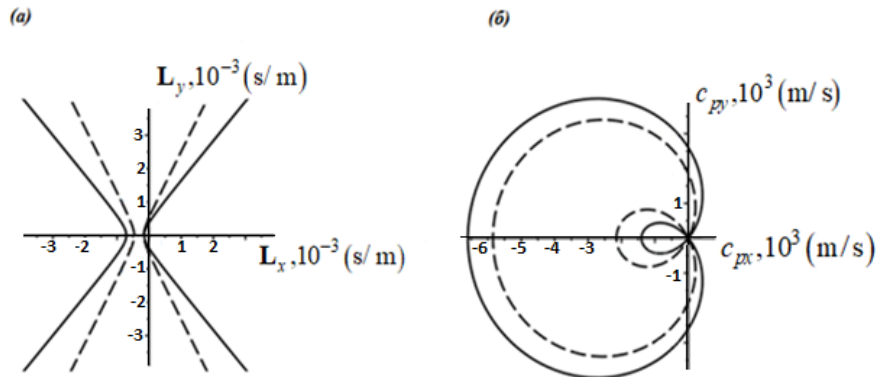


Рисунок 1. Кривые медленности (рефракции) (а) и кривые фазовых скоростей (б) для антиплоской задачи B , при сверхзвуковом режиме движения источника $\mathbf{w} = 4$ км/с. Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.

Далее изучаются фундаментальные решения для плоских задач электроупругости (пьезоэлектричества) (§ 1.2) при подвижных осциллирующих источниках.

Как известно, для ряда пьезоэлектрических материалов возможна постановка задач $A-B$ о плоской деформации.

Векторы внешних нагрузок в таких задачах не могут зависеть от перпендикулярной к рассматриваемой плоскости координаты, а также компонента в направлении этой координаты будет нулевой.

Так, при рассмотрении задачи о плоской деформации в плоскости $O\xi_1\xi_2$ принимается, что при воздействии объемной плотности массовой силы \mathbf{b} и/или объемной плотности электрического заряда σ вида

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, 0\}; \quad b_i = b_i(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad i = 1, 2; \quad \sigma = \sigma(\xi_1, \xi_2, \tau) \quad (11)$$

генерируются поля перемещений и электрического потенциала, зависящие от переменных ξ_1 , ξ_2 и τ :

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0\}; \quad u_i = u_i(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad i = 1, 2; \quad \varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \tau). \quad (12)$$

Чтобы постановка задачи о плоской деформации (11), (12) была возможной, должны удовлетворяться следующие ограничения на модули жесткости и пьезомодули:

$$c_{14}^E = c_{15}^E = c_{24}^E = c_{25}^E = c_{46}^E = c_{56}^E = 0, \quad e_{14} = e_{15} = e_{24} = e_{25} = 0. \quad (13)$$

Далее рассматриваем \mathcal{E} – задачу:

$$\rho(i\omega_\varepsilon - \mathbf{w} \cdot \nabla_2^x)^2 \mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{A}(\nabla_2^x) \cdot \mathbf{v}_\varepsilon - \gamma(\nabla_2^x) \psi_\varepsilon = f_0 \mathbf{l} \delta(x_1, x_2), \quad (14)$$

$$\gamma^*(\nabla_2^x) \cdot \mathbf{v}_\varepsilon - \varepsilon(\nabla_2^x) \psi_\varepsilon = q_0 \delta(x_1, x_2), \quad (15)$$

где $\nabla_2^x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$, $\mathbf{L}(\nabla_2^x) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{16}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{26}^E \\ c_{16}^E & c_{26}^E & c_{66}^E \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}^* = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \\ e_{16} & e_{26} \end{bmatrix}$, $\varepsilon^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S \\ \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{22}^S \end{bmatrix}$.

Под решением $\{\mathbf{v}, \psi\}$ как и для антиплоской задачи, будем понимать предел решения $\{\mathbf{v}_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$ системы уравнений (14), (15) при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Для амплитуд $\{\mathbf{v}, \psi\}$ фундаментального решения плоской задачи электроупругости получили следующие выражения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_0, \quad \psi = \psi_d + \psi_0 + \psi_{ns}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} = \frac{i}{4\pi\rho} \sum_{j=1}^2 \left(\sum_k' \right) (-1)^{k+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ I_{jk}^\psi \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ I_{jk}^\psi \end{Bmatrix} = \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} R_{jk} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} e^{-i\omega r \mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{y}} d\theta, \quad R_{jk} = \frac{H \left[(-1)^k c_{pj}^A(\theta) - w_n \right]}{c_{pj}^A(\theta) c_{pj}^{B(k)}(\theta)}, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_j^v = \mathbf{P}_j(\mathbf{n}) \cdot \left(f_0 \mathbf{l} + q \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{n})}{\vartheta(\mathbf{n})} \right), \quad F_j^\psi = \frac{\boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}_j^v}{\vartheta(\mathbf{n})}, \quad (18)$$

$$\mathbf{L}_j^{B(k)} = \frac{\mathbf{n}}{c_{pj}^{B(k)}(\theta)}, \quad \mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{y} = \frac{\cos(\theta - \tilde{\theta})}{c_{pj}^{B(k)}(\theta)}, \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{v}_0 \\ \psi_0 \end{matrix} \right\} = \frac{i}{4\pi^2 \rho \omega} \sum_{j=1}^2 \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{1}{c_{pj}^A(\theta)} I_j^0 \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{matrix} \right\} d\theta, \quad (20)$$

$$I_j^0 = \int_0^{+\infty} \left(\alpha_j^+ \frac{\alpha_j^+ - i\eta}{(\alpha_j^+)^2 + \eta^2} - \alpha_j^- \frac{\alpha_j^- - i\eta}{(\alpha_j^-)^2 + \eta^2} \right) e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \eta} d\eta \quad (21)$$

$$\alpha_j^\pm = \left(\pm c_{pj}^A - w_n \right), \quad \psi_{ns} = -\frac{q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\vartheta(\mathbf{n})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \alpha} d\alpha. \quad (22)$$

Знак \sum_k^{\prime} означает наличие или отсутствие суммирования по k , в зависимости от режима движения источника. В полученных выражениях для амплитуд $\{\mathbf{v}, \psi\}$, как и в задаче A и в антиплоских задачах, содержатся динамические составляющие $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$, статические – $\{\mathbf{v}_0, \psi_0\}$, и несвязанный квазиэлектростатический потенциал ψ_{ns} .

Хорошо известно, что в задаче A для любого направления \mathbf{n} существуют две плоских волны с фазовыми скоростями $v_j(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n})$, $c_{pj}^A(\mathbf{n}) > 0$, $j=1, 2$ и с векторами поляризации (собственными векторами) \mathbf{p}_j , которые можно выбрать ортонормированными.

В задаче B ситуация более сложная. Именно для прямых $c_{pj}^B(\mathbf{n}) > 0$ плоских волн задачи B при фиксированных \mathbf{n} и $j=1, 2$ имеем:

$$\left(c_{pj}^A(\mathbf{n}) > w_n \right) \wedge \left(c_{pj}^A(\mathbf{n}) \geq -w_n \right) \Rightarrow c_{pj}^B(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad (23)$$

$$c_{pj}^A(\mathbf{n}) < -w_n \Rightarrow c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^k c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad k=0, 1, \quad (24)$$

$$c_{pj}^A(\mathbf{n}) \leq w_n \Rightarrow \text{нет прямых плоских волн.} \quad (25)$$

Полученные формулы (16)–(25) определяют фундаментальное решение плоской динамической задачи электроупругости при подвижных осциллирующих источниках. Эти формулы пригодны для различных режимов движения.

Для плоской задачи приведены также численные результаты: построены кривые медленности и фазовых скоростей для различных режимов движения.

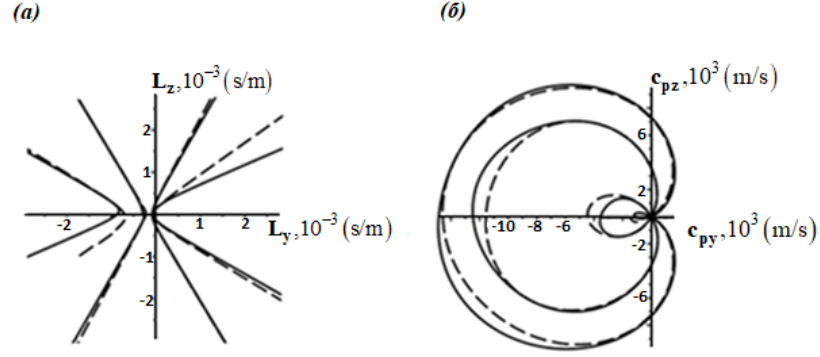


Рисунок 2. Кривые медленности (рефракции) (а) и кривые фазовых скоростей (б) для плоской задачи B , при сверхзвуковом режиме движения источника $w = 8$ км/с. Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.

В § 1.3 рассматривается кинематика и энергетика дальнего поля для антиплоской и плоской задач электроупругости.

Отметим, что полученные выражения для динамических составляющих фундаментального решения $\{v_d, \psi_d\}$ по структуре формул совпадают с соответствующими динамическими членами фундаментальных решений аналогичных задач B теории упругости. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что установленные асимптотики фундаментальных решений теории упругости в дальней зоне будут справедливыми и для рассматриваемых здесь антиплоских и плоских задач B для электроупругих сред.

По классическому методу перевала вклад от седловой точки θ_s в интеграл $\int \Phi(\theta) e^{iq(\theta)\omega r} d\theta$ при $\omega r \gg 1$ дается выражением $\sqrt{\frac{2\pi}{\omega r |q''(\theta_s)|}} \Phi(\theta_s) e^{i[q(\theta_s)\omega r + \frac{\pi}{4} \text{sign } q''(\theta_s)]}$, где θ_s – седловая точка, являющаяся корнем уравнения $q'(\theta) = 0$.

Для интегралов (17) при фиксированном k получим:

$$\Phi(\theta) = \frac{H \left[(-1)^k c_{pj}^A(\theta) - w_n \right]}{c_{pj}^A(\theta) c_{pj}^{B(k)}(\theta)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{array} \right\}, \quad q(\theta) = -\mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{y}. \quad (26)$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что для заданного направления \mathbf{y} в физической плоскости $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ седловая (стационарная) точка θ_s определяется как корень уравнения $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\theta) | \mathbf{y} \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)} | = y$ при условии $\mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{y} > 0$, т.е. когда справедливо неравенство $\cos(\theta - \tilde{\theta}) > 0$.

Здесь $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\theta)$ – вектор групповой скорости в задаче B , который находится стандартным образом $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = \frac{\partial \omega_j^{B(k)}}{\partial \mathbf{a}}$ из дисперсионного уравнения задачи B :

$$D(\boldsymbol{\alpha}, \Omega(\boldsymbol{\alpha})) = \det[\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}) - \rho \Omega^2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{E}] = 0, \quad \Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \omega + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad (27)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размера 2×2 для плоских задач и 1×1 – для антиплоских.

Как видно, вектор групповой скорости определяется в зависимости от волнового вектора $\boldsymbol{\alpha}$. Если же вычислить групповую скорость как функцию волновой нормали $\mathbf{n}(\theta)$, то для $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ удобнее использовать выражение $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = (-1)^{(k-1)} \mathbf{c}_{gj}^A - \mathbf{w}$, где $k=1$ или $k=1,2$, $\mathbf{c}_{gj}^A = \mathbf{c}_{gj}^A(\mathbf{n}(\theta))$ – вектор групповой скорости для задачи A .

После ряда преобразований получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_d \\ \psi_d \end{array} \right\} \approx \sum_j \sum_k \sum_{m=1}^{N_j^{(k)}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \psi_{jm}^{(k)} \end{array} \right\}, \quad \omega r \gg 1, \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \psi_{jm}^{(k)} \end{array} \right\} = (-1)^{k+1} \frac{i G_{jm}^{B(k)}}{\sqrt{2\pi r \rho}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{jm}^{v(k)} \\ F_{jm}^{\psi(k)} \end{array} \right\} e^{-i \left(\frac{\omega r}{|\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}|} + \frac{\pi}{4} \sigma_{jm}^{(k)} \right)}, \quad G_{jm}^{B(k)} = \frac{c_{pjm}^{B(k)}}{2 |\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}| c_{jm}^A \sqrt{|k_{pjm}^{B(k)}|}}. \quad (29)$$

Здесь $|\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}| = |\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})|$ – модуль вектора групповой скорости; $c_{pjm}^{B(k)} = c_{ps}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$, $c_{pjm}^A = c_{pjm}^A(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$, $\mathbf{F}_{jm}^{v(k)} = \mathbf{F}_{jm}^{v(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$, $F_{jm}^{\psi(k)} = F_{jm}^{\psi(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$, $k_{pjm}^{B(k)} = k_{pjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$ – кривизна кривой обратных скоростей, $\sigma_{jm}^{(k)} = \text{sign } k_{pjm}^{B(k)}$, $N_j^{(k)}$ – число стационарных точек $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$.

В дальней зоне асимптотиками волновых полей являются не связанные между собой пары цилиндрических волн $\left\{ \mathbf{v}_{jm}^{(k)}, \psi_{jm}^{(k)} \right\}$. Число этих пар цилиндрических волн равно числу стационарных значений вектора волновой нормали (седловых точек) $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$. Поскольку для стационарных значений $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$ вектор групповой скорости $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$ совпадает по направлению с вектором \mathbf{x} , связанным с физической координатной плоскостью, то, как и в задачах B теории упругости, число волн, распространяющихся в направлении \mathbf{x} находим как количество точек пересечения луча $O\mathbf{x}$ с кривыми $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$. Скорость перемещения комбинированного источника значительно влияет на количество волн, которые распространяются в различных направлениях, аналогично соответствующим задачам теории упругости. Например, количество волн меняется от нуля до двух для антиплоских задач пьезоэлектричества, и от нуля до четырех для плоских задач пьезоэлектричества. Кроме того, как и в других задачах с движением комбинированного источника в среде, при транс- и сверхзвуковых скоростях распространяющиеся волны локализуются внутри конусов Маха, причем эти волны подразделяются на быстрые и медленные.

Если представить вектор групповой скорости в полярной системе координат $(r, \tilde{\theta})$, то в стационарной точке радиальная компонента будет равна его модулю, а угловая компонента будет равна нулю: $c_{gjm}^B = |\mathbf{c}_{gjm}^B|$, $c_{gjm\tilde{\theta}}^B = 0$. Эти условия являются общими для однородных

цилиндрических волн в дальней зоне. Поэтому, как можно показать, для цилиндрических волн групповая скорость \mathbf{c}_{gjm}^B является скоростью переноса энергий (лучевой скоростью) для неподвижного и для подвижного наблюдателей, а также имеют место энергетические соотношения общего характера.

Именно, выполняются формулы для осредненных за период колебаний энергий цилиндрических волн $\langle E^{\xi x} \rangle$ и $\langle E^x \rangle$, вычисляемых в подвижной системе координат неподвижным (ξx) и подвижным (x) наблюдателем, соответственно, а также имеют место формулы связывающие компоненты осредненных векторов переноса энергии (векторов групповой скорости, векторов Умова-Пойтинга) $\langle \mathbf{J}^{\xi x} \rangle$, $\langle \mathbf{J}^x \rangle$ с осредненными энергиями:

$$\begin{aligned} \langle E^{\xi x} \rangle &= \frac{1}{2} \Omega^2(\mathbf{a}) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*, \quad \langle E^x \rangle = \frac{1}{2} \omega \Omega(\mathbf{a}) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*, \\ \langle \mathbf{J}_r^{\xi x} \rangle &= c_{gr}^B \langle E^{\xi x} \rangle, \quad \langle \mathbf{J}_\theta^{\xi x} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{J}_r^x \rangle = c_{gr}^B \langle E^x \rangle, \quad \langle \mathbf{J}_\theta^x \rangle = 0, \end{aligned}$$

где угловые скобки означают осредненные за период колебаний величины: $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\bullet) dt$,

$$T = (2\pi) / \omega.$$

Приходим к достаточно простым формулам для полярных радиальных компонент векторов Умова-Пойтинга цилиндрических волн в дальней зоне:

$$\langle \mathbf{J}_{rjm}^{\xi x(k)} \rangle = \frac{\omega^2 |\mathbf{F}_{jm}^{v(k)}|^2}{16\pi\rho r c_{grjm}^{B(k)} |k_{pjm}^{B(k)}|}, \quad \langle \mathbf{J}_{rjm}^{x(k)} \rangle = \frac{\omega}{\Omega(\mathbf{a}_{jm}^{(k)})} \langle \mathbf{J}_{rjm}^{\xi x(k)} \rangle. \quad (30)$$

Из полученных формул следует важный вывод, который также является общим для задач с движущимися источниками. При транс- или сверхзвуковой скорости перемещения источника, когда существуют быстрые и медленные волны, для медленной волны с волновым вектором $\mathbf{a}_{jm}^{(2)}$ кажущаяся частота колебаний $\Omega(\mathbf{a}_{jm}^{(2)}) < 0$ и, следовательно, будут иметь место энергетические неравенства $\langle E_{jm}^{x(2)} \rangle < 0$, $\langle \mathbf{J}_{jm}^{x(2)} \rangle < 0$. Эти неравенства означают, что при транс- и сверхзвуковых скоростях перемещения источника медленные волны переносят отрицательную энергию, измеряемую подвижным наблюдателем в подвижной системе координат. Данное свойство является общим для медленных волн в задачах B при трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях комбинированного источника и не противоречит основным энергетическим постулатам, поскольку для неподвижного наблюдателя соответствующие величины будут положительными: $\langle E_{jm}^{\xi x(2)} \rangle > 0$, $\langle \mathbf{J}_{jm}^{\xi x(2)} \rangle > 0$.

В качестве численного примера приводятся кривые групповых скоростей для пьезокерамики PZT-4.

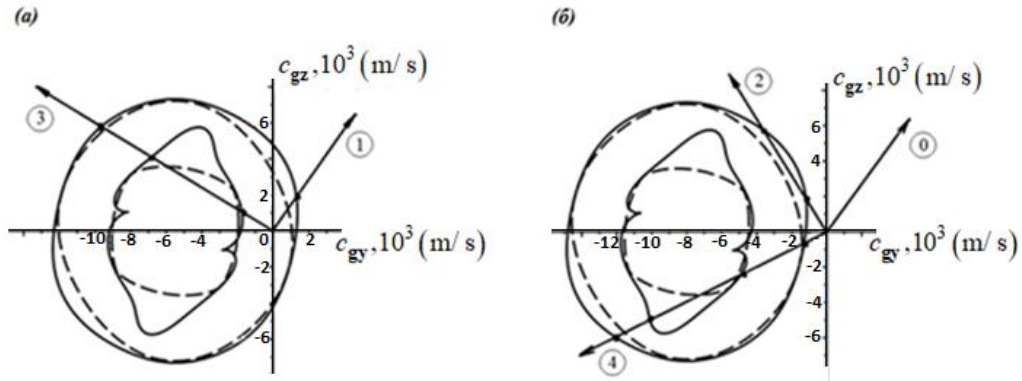


Рисунок 3. Кривые групповых скоростей задачи электроупругости для плоской деформации для задачи B при скорости движения источника $w=5,5$ км/с – трансзвуковой режим (а), при сверхзвуковом режиме движения источника $w=8$ км/с задачи B (б). Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.

Фундаментальные решения, кинематика и энергетика дальнего поля для пространственной задачи электроупругости рассматриваются в § 1.4. Кривые групповых скоростей построены для парателлуриита и для α -кварца. В результате проведенных исследований установлено, что число волн может существенно меняться в зависимости от режима движения. Так, для антиплоских задач электроупругости в зависимости от режима движения число распространяющихся волн может изменяться от 0 до 2, а для пространственной задачи – от 0 до 12.

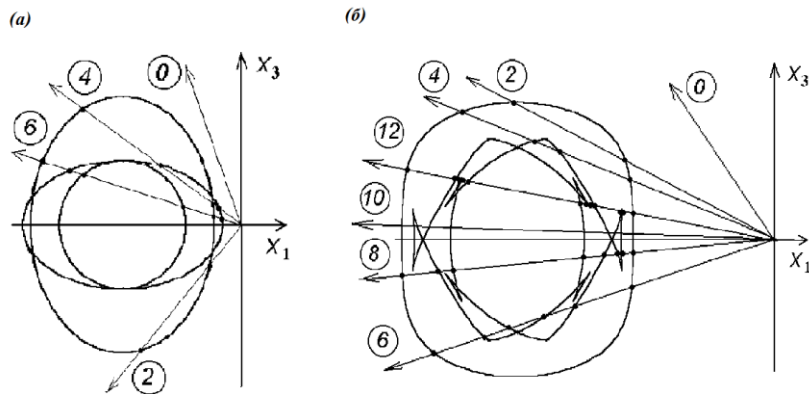


Рисунок 4. Сечения поверхностей групповых скоростей задачи B , сверхсейсмический режим для парателлуриита (а), для α -кварца (б).

Во второй главе сформулированы постановки антиплоских задач при наличии поверхностных напряжений. Вначале рассматривается антиплоская задача A о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений (§2.1).

Согласно теории поверхностных напряжений Гуртина-Мурдоха, принимаются следующие граничные условия:

$$\pm\sigma_{23} = \sigma_{21,1}^s + \omega^2 \rho^s v + f^\pm, \quad x_3 = \pm h/2. \quad (31)$$

Поверхностные напряжения σ_{21}^s связаны с компонентой перемещений v согласно поверхностному закону Гука $\sigma_{21}^s = \mu^s v_{,1}$, где μ^s – поверхностный сдвиговый модуль. В случае, когда $\mu^s = 0$, $\rho^s = 0$, рассматриваем обычную задачу об антиплоских колебаниях полосы, решение которой хорошо известно. Кроме того, для анализа действия нагрузок $f^+(x_1)$ и $f^-(x_1)$ общего вида в силу линейности задачи достаточно рассмотреть два случая: симметричную нагрузку $f^+(x_1) = f^-(x_1) = f(x_1)$ и антисимметричную $f^+(x_1) = -f^-(x_1) = f(x_1)$. Описанные случаи будем рассматривать отдельно.

Краевая задача для симметричного воздействия при учете соотношений “объемного” и “поверхностного” законов Гука относительно функции v примет вид:

$$\Delta v + \Lambda^2 v = 0, \quad \mu^s \partial^2 v / \partial x_1^2 = \pm \mu \partial v / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 v - f, \quad x_3 = \pm h/2, \quad (32)$$

где $\Lambda = \omega/c$, $c = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость упругих сдвиговых волн.

Для нахождения решения используем стандартную технику: принцип предельного поглощения для выделения единственного решения, преобразование Фурье, методы контурного интегрирования и теорию вычетов при вычислении обратного преобразования Фурье. В результате, для $x_1 > a$ будем иметь:

$$v(x_1, x_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon = i \sum_{k=0}^m G(\alpha_k) + i \sum_{k=m+1}^{\infty} H(\alpha_k^i), \quad (33)$$

$$G(\alpha_k) = \frac{F(\alpha_k) \operatorname{ch}(\gamma_k x_3) e^{-i\alpha_k x_1}}{\frac{\alpha_k}{\gamma_k} \operatorname{sh}\left(\gamma_k \frac{h}{2}\right) \left(\mu - (\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha_k^2) \frac{h}{2}\right) + \alpha_k \operatorname{ch}\left(\gamma_k \frac{h}{2}\right) \left(2\mu^s + \mu \frac{h}{2}\right)},$$

$$H(\alpha_k^i) = \frac{F(\alpha_k^i) \operatorname{ch}(\gamma_k^i x_3) e^{-i\alpha_k^i x_1}}{\frac{\alpha_k^i}{\gamma_k^i} \operatorname{sh}\left(\gamma_k^i \frac{h}{2}\right) \left(\mu - (\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha_k^{i2}) \frac{h}{2}\right) + \alpha_k^i \operatorname{ch}\left(\gamma_k^i \frac{h}{2}\right) \left(2\mu^s + \mu \frac{h}{2}\right)},$$

где α_k , α_k^i – вещественные и комплексные нули α дисперсионного уравнения, соответственно, $\operatorname{Im} \alpha_k^i < 0$, $\gamma_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \Lambda^2}$, $\gamma_k^i = \sqrt{\alpha_k^{i2} - \Lambda^2}$, $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1$.

Аналогичные выкладки проведены для антисимметричного воздействия.

В § 2.2 в подвижной системе координат с применением принципов соответствия между задачами $A-B$ рассматривается симметричная антиплоская задача B о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии

поверхностных напряжений, а в § 2.3 рассматривается соответствующая антисимметричная задача. Так как подынтегральные функции при нахождении обратного преобразования Фурье не имеют точек ветвления, то решения аналогично соответствующим задачам A можно найти в результате применения методов функции комплексного переменного в виде суммы вычетов в нулях дисперсионных уравнений. Важно отметить появление новых асимптот в задачах с поверхностными напряжениями, связанных со сдвигowymi волнами в модели Гуртина – Мурдоха.

Численный анализ антиплоских задач был проведен для различных толщин полосы и при дозвуковой скорости движения источника при следующих входных данных: $\mu = 6,98 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho = 7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu^s = 2,5$ Н/м, $\rho^s = 7 \cdot 10^{-6}$ кг/м², $f(x_1) = f_0 \delta(x_1)$, $f_0 = \mu$. Результаты решения задачи рассматривались в безразмерных переменных $\hat{\omega} = \omega h / c$, $\hat{\Omega} = \Omega h / c$, $\hat{\alpha} = \alpha h$, $\hat{w} = w / c$, $\hat{x}_3 = x_3 / h$, где, как и ранее, $\Omega = \omega + \alpha w$, и $\hat{\Omega} = \hat{\omega} + \hat{\alpha} \hat{w}$.

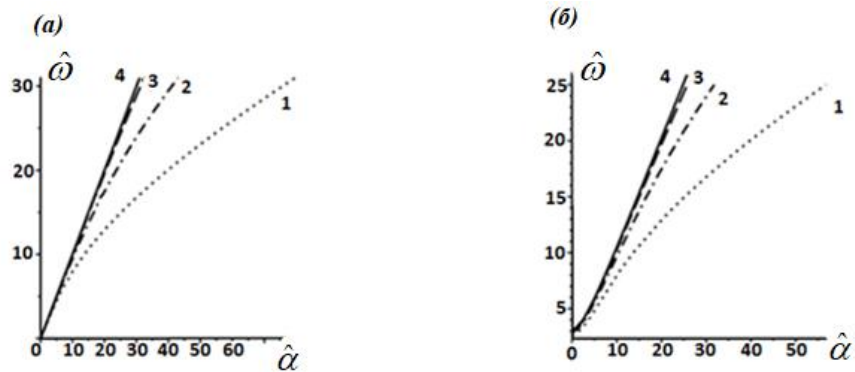


Рисунок 5. Для симметричной (а) и антисимметричной (б) задач A ($\hat{\omega} = \hat{\Omega}$) приведены первые дисперсионные кривые при различной толщине h : кривая 1 построена для случая, когда $h = 10$ нм, кривая 2 – для $h = 30$ нм, кривая 3 – $h = 100$ нм, а кривая 4 описывает классический случай без поверхностных напряжений. (Здесь используются размерные значения толщины h , влияющие на безразмерные поверхностные модули).

Как и ожидалось, с увеличением толщины слоя кривые задач с поверхностными эффектами приближаются к соответствующим дисперсионным кривым классической задачи. Когда же значения толщин полосы малы (кривые 1 и 2) поверхностные эффекты существенно влияют на дисперсионные кривые, что можно заметить при увеличении значений $\hat{\omega}$ или $\hat{\alpha}$.

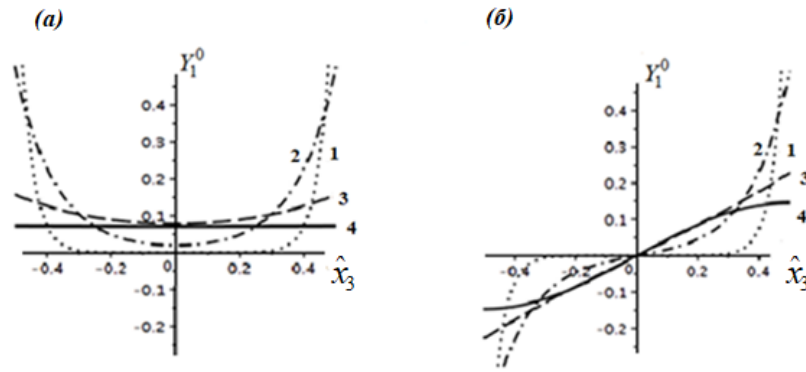


Рисунок 6. Графики амплитуды безразмерных смещений $Y_1^0 = Y_1^0(\hat{x}_3)$ впереди источника для первой моды колебаний в зависимости от изменения частоты $\hat{\omega} = 14$ для симметричной (а) и для антисимметричной (б) задач В при $\hat{w} = 0,1$.

Отметим, что значения амплитуд $Y_1^0(\hat{x}_3)$ являются безразмерными, причем отнесенными к толщине полосы h . Поэтому для получения размерных амплитуд надо умножать соответствующие безразмерные амплитуды на толщину пластины, которая для кривых с номерами 1–4 разная. В связи с этим здесь имеет смысл анализировать относительные значения, например отношения $\tilde{Y}_1^0(\hat{x}_3) = Y_1^0(\hat{x}_3)/Y_1^0(0)$. Как можно заметить из рисунка, значения $\tilde{Y}_1^0(\hat{x}_3)$ при наличии поверхностных напряжений оказываются локализованными у торцов полосы $\hat{x}_3 = \pm 1/2$, причем эта локализация возрастает при уменьшении толщины полосы, что обусловлено ростом влияния поверхностных напряжений.

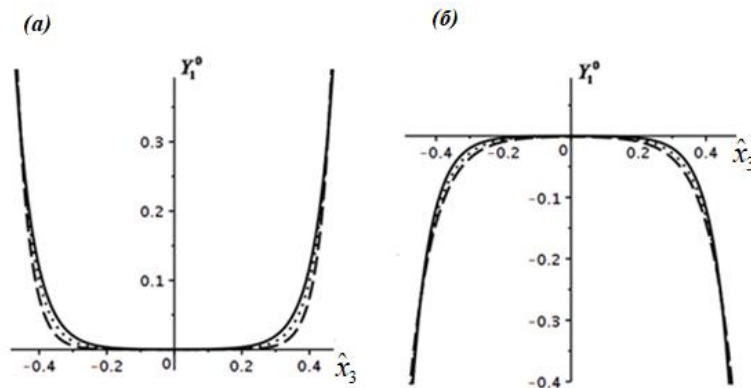


Рисунок 7. Графики безразмерных амплитуд смещений $Y_1^0 = Y_1^0(\hat{x}_3)$ для первой моды колебаний в зависимости от изменения скорости движения источника при фиксированных значениях безразмерной частоты $\hat{\omega} = 14$ и толщины $h = 10$ нм для симметричной задачи. При этом на рисунке 3 (а) показаны смещения впереди источника, а на рисунке 3 (б) – позади источника. Сплошные кривые здесь построены при $\hat{w} = 0$, пунктирные кривые – при $\hat{w} = 0,05$, а штриховые – при $\hat{w} = 0,1$.

Для исходных данных задачи безразмерная скорость поверхностных сдвиговых волн равна $k_2 = (\sqrt{\mu^s / \rho^s}) / c = 0,189$. Таким образом, все рассматриваемые режимы движения на рисунке 7 с $\hat{w} \in [0; 0,1]$ являются дозвуковыми. (Режим движения источника здесь называется дозвуковым, если при соответствующих значениях \hat{w} не образуются медленные волны позади источника с $\hat{\Omega}(\hat{\alpha}_k^0) < 0$. В рассматриваемой задаче это имеет место при $\hat{w} < k_2$.) Как можно заметить из рисунка 7, для симметричной задачи увеличение скорости приводит к уменьшению амплитуд смещений первой формы колебаний Y_1^0 в большей части полосы впереди источника. Наоборот, позади источника при увеличении скорости модули амплитуд смещений первой формы колебаний $|Y_1^0|$ возрастают.

В третьей главе рассматриваются антисимметричная (§ 3.1) и симметричная (§ 3.2) плоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений. Наноразмерность полосы учитывается введением поверхностных напряжений по теории Гуртина-Мурдоха. Для решения использовалась стандартная техника. Решения поставленных задач получены в виде рядов по собственным волнам, в которых волновые числа определяются как корни соответствующих дисперсионных уравнений. В качестве численного примера при $\lambda = \mu = 22,5 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 3000$ кг/м³, $\lambda^s = 7 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\mu^s = 8 \cdot 10^{-3}$ Н/м и $\rho^s = 7 \cdot 10^{-4}$ кг/м², $f(x_1) = \mu \delta(x_1)$. построены графики первых дисперсионных кривых, проанализировано поведение частот записания, изменение волновых чисел и зон существования обратных волн при различных наноразмерных толщинах полосы. При учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок обнаружен ряд особенностей в полученных решениях.

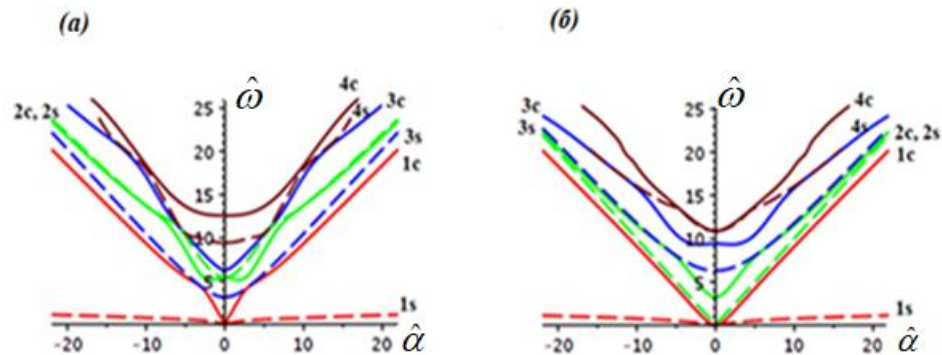


Рисунок 8. Для симметричной (а) и антисимметричной (б) задач показаны дисперсионные кривые для безразмерных частот и волновых чисел. Сплошными линиями изображены дисперсионные кривые для классической задачи без поверхностных напряжений и поверхностных инерционных нагрузок (кривые с индексом “с”), а штриховыми линиями – дисперсионные кривые для толщины полосы $h = 10$ нм с поверхностными эффектами (кривые с индексом “s”). Цифрой обозначен номер дисперсионной кривой.

Дальнейший анализ для удобства проведен для безразмерных величин: $\hat{\omega} = \omega h / c_2$, $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$, $\hat{\alpha} = \alpha h$, $\hat{\lambda} = \lambda / \mu$, $\hat{\mu} = \mu / \mu = 1$, $\hat{\rho} = \rho / \rho = 1$, $\hat{\lambda}^s = \lambda^s / (\mu h)$, $\hat{\mu}^s = \mu^s / (\mu h)$, $\hat{\rho}^s = \rho^s c_2^2 / (\mu h)$, $\hat{x}_j = x_j / h$.

Так было проанализировано влияние поверхностных напряжений и поверхностных инерционных нагрузок на дисперсионные кривые для частот запираия (частот отсечки), т.е. для частот дисперсионных кривых $\hat{\omega}$ при $\hat{\alpha} = 0$. Для случая с поверхностными эффектами частоты отсечки обозначим $\hat{\omega}_n^s$, а для классического случая – $\hat{\omega}_n$.

Сначала рассмотрим частоты запираия для симметричного случая при $\hat{\omega}_n \geq 0$, занумерованные по возрастанию. Частоты могут размещаться в двух подмножествах: $\hat{\omega}_l = 2\pi l$, $l = 1, 2, \dots$ и $\hat{\omega}_k = \pi(2k-1)\sqrt{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}$, $k = 1, 2, \dots$, где упругие модули даны в безразмерной форме. Частоты запираия из рисунка 8 (а) принимают значения: $\hat{\omega}_1 = 0$, $\hat{\omega}_2 = \sqrt{3}\pi$, $\hat{\omega}_3 = 2\pi$, $\hat{\omega}_4 = 4\pi$, из которых частоты $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_3$, $\hat{\omega}_4$ принадлежат первому подмножеству, а частота $\hat{\omega}_2$ принадлежит второму подмножеству.

Для симметричного случая аналитически найдены частоты отсечки при поверхностных эффектах $\hat{\omega}_l^s = \hat{\omega}_l + \hat{\varepsilon}_l$, $l = 1, 2, \dots$. Если $\hat{\rho}^s > 0$, то частоты отсечки $\hat{\omega}_l^s$ становятся меньше, чем соответствующие значения частот без поверхностных эффектов. Смещение $\hat{\varepsilon}_l$ находим в численном виде из соотношения $\text{tg} \frac{\hat{\varepsilon}_l}{2} = -\hat{\rho}^s (\hat{\omega}_l + \hat{\varepsilon}_l)$. На рисунке 8 (а) видно, что частоты $\hat{\omega}_1$ и $\hat{\omega}_2$ остаются неизменными для классического случая и при учете поверхностных эффектов, а частоты $\hat{\omega}_3$ и $\hat{\omega}_4$ в случае с поверхностными эффектами уменьшаются.

Для антисимметричного случая классической задачи подмножества частот запираия $\hat{\omega}_n \geq 0$ имеют вид: $\hat{\omega}_l = \pi(2l-1)$, $l = 1, 2, \dots$; $\hat{\omega}_k = 2\pi k\sqrt{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}$, $k = 1, 2, \dots$. Из рисунка 8 (б) видно, что частоты запираия $\hat{\omega}_1 = 0$ и $\hat{\omega}_4 = 2\sqrt{3}\pi$ не изменяются для задач с поверхностными эффектами, а остаются такими же, как и для классической задачи. Частоты запираия $\hat{\omega}_l^s = \hat{\omega}_l + \hat{\varepsilon}_l$ (в рассматриваемом случае $\hat{\omega}_2 = \pi$ и $\hat{\omega}_3 = 3\pi$) при поверхностных эффектах уменьшаются на $|\hat{\varepsilon}_l|$.

Также можно также заметить, что дисперсионные кривые при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок меняются различным образом. Так, значения частот первых дисперсионных кривых на рисунке 8 (а) и (б) для фиксированных волновых чисел $\hat{\alpha} \neq 0$ при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок уменьшаются наиболее сильно по сравнению с другими дисперсионными кривыми. Для симметричной задачи

(рисунок 8 (а)) дисперсионные кривые 1, 3 и 4 классической задачи лежат выше соответствующих кривых задачи с поверхностными эффектами, а для кривых 2 наблюдается противоположная тенденция. Между тем для антисимметричной задачи все кривые 1–4 классической задачи расположены выше соответствующих кривых задачи с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками.

Пусть $\hat{\omega} < \hat{\alpha}$, $\hat{\alpha} > 0$, тогда, как известно, для симметричного и антисимметричного случаев классической задачи существует асимптота дисперсионных кривых: $\hat{\omega} = \hat{c}_R \hat{\alpha}$, где $\hat{c}_R < 1$ – скорость волны Рэлея (безразмерная), которую находим из уравнения $(2 - \hat{c}_R^2)^2 - 4\sqrt{(1 - \hat{c}_R^2 / (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}))}(1 - \hat{c}_R^2) = 0$. С учетом поверхностных эффектов получим новую асимптоту $\hat{\omega} = \hat{c}_1^s \hat{\alpha}$, где $\hat{c}_1^s = \sqrt{(\hat{\lambda}^s + 2\hat{\mu}^s) / \hat{\rho}^s}$, и $(\hat{\lambda}^s + 2\hat{\mu}^s) / \hat{\rho}^s < \hat{\mu} / \hat{\rho}$, $\hat{c}_1^s \approx 0,002$.

В заключении изложены основные результаты и выводы диссертационной работы, которые состоят в следующем.

- 1) Изучены антиплоские, плоские и пространственные задачи о движении с постоянной скоростью осциллирующего источника в безграничной электроупругой среде. Установлены свойства плоских волн и поверхностей фазовых скоростей, медленностей и групповых скоростей. С использованием интегрального преобразования Фурье получены фундаментальные решения (функции Грина) в интегральных формах, пригодные для различных режимов движения, выделены динамические и квазистатические составляющие решений. Построены асимптотики дальних полей по методу стационарной фазы, проведен кинематический и энергетический анализ решений. Представлены компактные формулы для вектора потока энергии для подвижного и неподвижного наблюдателей. Отмечено, что в дальней зоне волновые поля разделяются на отдельные волны по кинематике и энергетике.
- 2) Из анализа фундаментальных решений задач электроупругости при подвижных осциллирующих возмущениях сделаны выводы о влиянии движения источника на свойства волновых полей в дальней зоне: изменения зон распространения волн и их числа, появление быстрых и медленных волн, а также перенос медленными волнами отрицательной энергии, измеренной подвижным наблюдателем, при транс и сверхсейсмических движениях.
- 3) Получены решения симметричных и антисимметричных антиплоских задач для упругой полосы с поверхностными напряжениями при движущихся осциллирующих источниках в виде рядов по собственным волнам, изучены дисперсионные соотношения и построены графики распределения амплитуд перемещений по толщине. Проведен анализ характеристик решений в зависимости от толщины полосы и скорости движения источника.

- 4) Получены решения симметричных и антисимметричных плоских задач для упругой изотропной нанотонкой полосы при действии на ее границе осциллирующей нагрузки в виде рядов по собственным волнам. На конкретном примере были исследованы первые дисперсионные кривые, дан анализ поведения частот запирающих волн, изменения волновых чисел и зон существования обратных волн при варьировании наноразмерных толщин упругой полосы.
- 5) Проведенные исследования для упругой полосы подтвердили известное заключение, что поверхностные напряжения и инерционные нагрузки оказывают существенное влияние лишь при очень малых толщинах полосы.

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК

1. Калинина, Т. И. Плоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 1. – С. 46-55. – DOI 10.15593/perm.mech/2023.1.05. – EDN AUUTDP. (K1)

2. Калинина, Т. И. Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2022. – № 1(213). – С. 12-22. – DOI 10.18522/1026-2237-2022-1-12-22. – EDN VERCFY. (K2)

3. Калинина, Т. И. Плоские волны и функции Грина в пьезоэлектрическом пространстве при движущихся осциллирующих источниках / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 47-55. – EDN TWTYNH. (K2)

4. Калинина, Т. И. Фундаментальные решения в двумерных задачах электроупругости при движущихся осциллирующих источниках / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2014. – № 6(184). – С. 16-23. – EDN TGFХОН. (K2)

Публикации в сборниках трудов конференций

5. Калинина, Т. И. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений / Т. И. Калинина // Современные проблемы механики сплошной среды : труды XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2018 г.) : в двух томах. Т. 2. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2018. – С. 123-127. – Режим доступа: http://mcc-conf.ru/d/2018_vol2.pdf (дата обращения 17.09.2025)

6. Калинина, Т. И. Фундаментальные решения в плоских и антиплоских задачах для электроупругих сред при подвижных осциллирующих источниках / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Современные проблемы механики сплошной среды : труды XIV Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, Азов, 19-24 июня 2010 г. : в двух томах. Т. 2. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2010. – С. 142-146. – Режим доступа: http://mcc-conf.ru/d/2010_vol2.pdf (дата обращения 17.09.2025)

7. Калинина, Т. И. Фундаментальные решения антиплоской задачи электроупругости при движущемся осциллирующем источнике / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Исследования по

дифференциальным уравнениям и математическому моделированию : [сборник докладов VI Международной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (Владикавказ, 29 июня - 4 июля 2008 года)] / Российская академия наук, Владикавказский научный центр, Институт прикладной математики и информатики, Министерство образования и науки Российской Федерации, Южный федеральный университет [и др.] ; ответственные редакторы: А. О. Ватульян, Е. С. Каменецкий, Ш. С. Хубежты. – Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. – С. 103-113.

8. Калинина, Т. И. О влиянии поверхностных напряжений на дисперсионные кривые плоских и антиплоских задач об установившихся колебаниях упругой нанотонкой полосы / Т. И. Калинина // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете : тезисы докладов XVI Всероссийской школы (пос. Дивноморское, 26 мая -31 мая 2022 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Южный федеральный университет", Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Донской государственный технический университет". – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. – С. 41. – Режим доступа: http://www.biomechanics.ru/archive/biomech_2022.pdf (дата обращения 17.09.2025).

9. Калинина, Т. И. Плоские задачи о действии осциллирующих нагрузок на упругую полосу при наличии поверхностных напряжений / Т. И. Калинина // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете : тезисы докладов XV Всероссийской школы (с. Дивноморское, 26 мая – 31 мая 2021 г.). – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2021. – С. 69. – Режим доступа: http://www.biomechanics.ru/archive/biomech_2021.pdf (дата обращения 17.09.2025).

10. Калинина, Т. И. Плоские задачи об установившихся колебаниях упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений / Т. И. Калинина, А. В. Наседкин // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения : тезисы докладов XVI Международной научной конференции (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20-24 сентября 2021 г.). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2021. – С. 99.

11. Калинина, Т. И. Антиплоская задача о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений / Т. И. Калинина // Современные проблемы механики сплошной среды : тезисы докладов XX Международной конференции, Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2020. – С. 80. – Режим доступа: http://mcc-conf.ru/d/2020_tesis.pdf (дата обращения 17.09.2025).

12. Калинина, Т. И. О влиянии поверхностных напряжений на резонансные и кинематические характеристики антиплоских колебаний упругого изотропного слоя / Т. И. Калинина // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете : тезисы докладов XIV Всероссийской школы (с. Дивноморское, 27-31 мая 2019 г.). – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. – С. 73. – Режим доступа: http://www.biomechanics.ru/archive/biomech_2019.pdf (дата обращения 17.09.2025).

13. Калинина, Т. И. Кинематика и энергетика фундаментальных решений в дальней зоне для двумерных задач теории пьезоэлектричества при движущихся осциллирующих источниках / Т. И. Калинина // Достижения и перспективы молодых ученых в интересах развития Юга России : XIV ежегодная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, г. Ростов-на-Дону, 12–26 апреля 2018 г. : тезисы докладов / Федеральный исследовательский центр, Южный научный центр Российской академии наук ;

редколлегия: академик Г .Г. Матишов (отв. редактор) [и др.]. – Ростов-на-Дону: ЮНЦ РАН, 2018. – С. 86. – Режим доступа: https://www.ssc-ras.ru/ckfinder/userfiles/files/Konf_BK_2018_Sbornik_2004.pdf (дата обращения 17.09.2025).

Калинина Тамара Ипполитовна

Задачи для пьезоэлектрического пространства и упругой полосы с поверхностными напряжениями при комбинированных источниках волн

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 08.10.2025 г.

Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Тираж 110 экз.

Усл. печ. лист. 1,0. Уч. изд. л. 1,0. Заказ №10146.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции

Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.

3440090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863) 243-41-66.