

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»

На правах рукописи

Калинина Тамара Ипполитовна

**ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И УПРУГОЙ
ПОЛОСЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ
КОМБИНИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКАХ ВОЛН**

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
А.В. Наседкин

Ростов-на-Дону – 2025

Оглавление

Введение	3
Глава 1: Задачи электроупругости при движущихся осциллирующих источниках	18
1.1. Фундаментальные решения для антиплоской задачи электроупругости	22
1.2. Фундаментальные решения для плоской задачи электроупругости	36
1.3. Кинематика и энергетика дальнего поля для антиплоской и плоской задач электроупругости	46
1.4. Фундаментальные решения, кинематика и энергетика дальнего поля для пространственной задачи электроупругости	54
1.5. Выводы по главе 1	68
Глава 2: Антиплоская задача о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений	70
2.1. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях упругого изотропного слоя при наличии поверхностных напряжений	70
2.2. Симметричная антиплоская задача для полосы с поверхностными напряжениями при движущемся осциллирующем источнике	77
2.3. Антисимметричная антиплоская задача для полосы с поверхностными напряжениями при движущемся осциллирующем источнике	83
2.4. Выводы по главе 2	91
Глава 3: Плоская задача о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений	92
3.1. Антисимметричная плоская задача для полосы при наличии поверхностных напряжений	94
3.2. Симметричная плоская задача для полосы при наличии поверхностных напряжений	99
3.3. Выводы по главе 3	108
Заключение	109
Литература	111

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию распространения упругих волн от действия комбинированных источников волн в средах с усложненными физико-механическими свойствами. Под комбинированными источниками здесь понимаются осциллирующие и подвижные источники волн. Рассматриваются задачи электроупругости (пьезоэлектричества) со связанностью между механическими и электрическими полями и задачи с учетом поверхностных эффектов по модели Гуртина-Мурдоха, в которых на границах появляются поверхностные напряжения.

Несмотря на достаточно давнюю историю, задачи о колебаниях и волнах в ограниченных и полугораниченных телах остаются актуальными и в настоящее время, особенно для их неклассических вариантов, связанных с усложненными определяющими соотношениями и граничными или интерфейсными условиями.

Большой вклад в развитие теории о волновых движениях в полугораниченных упругих средах, включая волноводные структуры, внесли такие отечественные и зарубежные ученые как: Бабешко В.А., Белоконов А.В., Бреховских Л.М., Ватульян А.О., Викторов И.А., Ворович И.И., Гетман И.П., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Гринченко В.Т., Завадский В.Ю., Калинин В.В., Мелешко В.В., Наседкин А.В., Устинов Ю.А., Cole J., Huth J., Lamb H., Love A.E.H., Radok J.R.M., Rayleigh L., Sneddon I.N., Sommerfeld A., Tolstoy I., Usdin E. и многие другие.

Во многих ситуациях внешние воздействия на различные конструкции носят динамический характер. Увеличение скорости источников возмущений обусловило повышение интереса к рассмотрению задач с подвижными нагрузками, как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях.

Следуя [1], всюду в работе при описании исследований задач с движущимися осциллирующими источниками будем использовать терминологию, введенную А.В. Белоконом. Задачи, в которых комбинированный осциллирующий по величине с круговой частотой ω источник волн еще и перемещается с постоянной скоростью \mathbf{w} вдоль направления, определяемого этим вектором, будем называть задачами B . В частном случае, когда поступательное перемещение источника не рассматривается, т.е. $\mathbf{w} = 0$, но источник осциллирует ($\omega \neq 0$), получаются обычные задачи о гармонических или об

установившихся колебаниях, которые будем называть задачами *A*. Наконец, задачи с только перемещающимся, но не осциллирующем источником ($w \neq 0$, $\omega = 0$) будем именовать задачами *B*. Таким образом, задачи *B* являются наиболее общими и включают, как частные случаи задачи *A* и *B*.

Впервые задача типа *B* с подвижными нагрузками была рассмотрена в работах [2-6], в которых рассматривались плоские задачи. Задача о движении нагрузки по границе полупространства впервые была рассмотрена в [7], а позднее в работах [3,4, 8-13]. Причем в [8, 13] также исследовалась асимптотика волновых полей в дальней зоне. В перечисленных работах рассматривались только дозвуковые режимы движения. В работах [14-16] изучались сверхзвуковые режимы движения в антиплоских задачах *B* для однослойного и двухслойного полупространств и слоя. В работах [17, 18] рассматривались задачи типа *A* и *B* для балок и плит, лежащих на упругом основании. В [12] изучалась аналогичная задача типа *B*. Необходимо также отметить вклад в исследование задач с подвижными возмущениями ученых из нижегородской школы механиков. В своих работах [19-24] они рассматривали различные эффекты, вызванные движущимися источниками, особенно применительно к задачам, моделирующим распространение волн от поездов и другого движущегося транспорта. Для таких задач оказались важными исследования проблем распространения волн при подвижных нагрузках в протяженных стержнях, балках и пластинах.

Белоконь А.В., по-видимому, впервые стал рассматривать задачи *A*, *B*, *B* комплексно и во взаимосвязи. Можно отметить, что до работ [1, 25] Белоконоя А.В. задачи *A*, *B*, *B* теории упругости изучались разобщенно. Рассматривая плоскую задачу для упругой полосы, им был сформулирован общий принцип соответствия, описана единая методика анализа дисперсионных кривых, проиллюстрировано использование принципа предельного поглощения для отбора единственного решения и др. Подобные комплексные исследования продолжены в совместных работах Белоконоя А.В. и Наседкина А.В. [26-28].

Первая часть диссертационной работы посвящена исследованиям задач *B* теории электроупругости (пьезоэлектричества).

Французские ученые-физики Кюри в 1880 году в процессе проведения экспериментов выявили новые свойства некоторых материалов (анизотропных диэлектриков): после механического воздействия на поверхности обнаруживались

электрические заряды противоположных знаков. Обнаруженное явление назвали прямым пьезоэффектом (в соответствие с греческим словом *piezo* - нажимать). При обратном пьезоэффекте, установленном также Г. Липманом в 1881 году, при действии напряженности электрического поля образец деформируется. На практике первое использование пьезоэлектрических материалов отмечено в 1917-1920 гг. Французский ученый Поль Ланжевен сконструировал прообраз современного ультразвукового излучателя (эхолокатора), который использовался в воде. Затем пьезоэлектрические материалы стали использовать в приборостроении. Пьезоэлектричество также стали использовать в дефектоскопии для обнаружения неоднородностей в различных образцах (в СССР в 1938 году был разработан первый ультразвуковой дефектоскоп). В 1932 году независимо друг от друга французские и американские ученые открыли явление дифракции света на ультразвуке. В послевоенные годы во многих странах активно развивалась практика и теория разработки пьезоэлектрических приборов. Широкое применение пьезоматериалов и приборов на их основе объясняется рядом преимуществ: надежность, малые массогабаритные показатели, высокая радиационная стойкость, стойкость к действию агрессивных сред, а также высокая термостойкость, дешевизна, распространенность и простота обработки пьезоэлектрических материалов.

Данная диссертационная работа в части изучения фундаментальных решений (ФР) или функций Грина для динамических задач B пьезоэлектричества продолжает исследования [29-31], где в [29, 30] изучались антиплоские и плоские упругие задачи B при комбинированных воздействиях, а в [31] – установившиеся задачи A пьезоэлектричества.

Следует отметить, что задачи A исследованы для различных сред гораздо более подробно, чем задачи B . Так, ранее для задач A теории пьезоэлектричества функции Грина были найдены в [33 - 36] для R^2 , в [37-39] для R^3 , и в [40-43] для R^2 и R^3 . В [40] содержится достаточно подробный обзор по исследованиям ФР статических и динамических задач пьезоэлектричества. Функции Грина в R^3 в [45, 46] были выведены с помощью метода волнового преобразования (wave transform method). Цикл исследований ФР для трансверсально-изотропных пьезоэлектрических материалов был представлен в работах [47 - 50], причем в [49, 50] для нахождения решения использовалось

преобразование Фурье. Функции Грина для задач термоупругости в R^3 были получены в [51]. Задача *B* о движении жесткого штампа по границе электроупругой полуплоскости изучалась в [44].

Одним из методов численно-аналитического анализа трехмерных динамических задач теории упругости, пороупругости, вязкоупругости, термоупругости и электроупругости является метод граничных элементов (МГЭ). Возможности использования метода граничных элементов для задач электроупругости исследовались в работах отечественных авторов [33, 52, 53], а позднее зарубежными учеными [54, 55, 56]. В [57, 58] МГЭ использовался для задач термоэлектроупругости. Метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) для пьезоэлектрических задач об установившихся колебаниях использовался в [33, 52, 53], а также в [59, 60].

Таким образом, приведенный краткий обзор свидетельствует, что задачи *B* для электроупругих сред ранее не рассматривались.

Во второй части данной работы исследуются антиплоские и плоские задачи о действии осциллирующей и движущейся нагрузки по границе упругой изотропной нанотонкой полосы, в которых наномасштаб толщины учитывается по теории поверхностных напряжений Гуртина-Мурдоха.

Здесь следует отметить, что задачи наномеханики в настоящее время представляют большой интерес в связи с широким применением наноразмерных материалов и устройств в современных высокотехнологических приложениях. Наноразмерные устройства не только удобны для различных применений, требующих миниатюрности изделий, но и интересны тем, что их свойства отличаются от соответствующих свойств аналогичных макрообъектов. Все это привело к появлению принципиально новых нанотехнологий для создания наноструктурированных материалов и наноустройств.

В настоящее время нанобъекты, такие как нанопроволоки, нанотрубки, нановолокна, используются в качестве рабочих элементов различных наноэлектромеханических систем (NEMS) [61-65]. Так, например, интенсивно разрабатываются ультратонкие пленочные структуры, которые применяются для наноэлектронных и наноэлектромеханических систем.

Для описания наноразмерных эффектов и для предсказания поведения наноразмерных тел были разработаны различные теоретические и инженерные модели.

Многие такие модели учитывают фактор размерности, который среди прочего может быть связан с возрастанием при переходе на нануровень отношения площади поверхности S к объему объекта $V \sim Sl$, где l – характерный масштабный размер. Действительно, отношение $S/V \sim l^{-1}$ возрастает, когда l уменьшается, причем, если l очень мало, то это отношение становится очень большим.

Как отмечалось в обзорах [70-73] и во многих других работах, наномасштабный эффект можно учесть в рамках различных моделей. Среди них наиболее общепринятыми являются следующие: модели молекулярной динамики; нелокальные и градиентные модели теории упругости; различные модели поверхностной упругости и их обобщения; а также инженерные эмпирические формулы, связывающие материальные коэффициенты с характерными масштабами. Методы *ab initio* и другие атомистические симуляции нашли отражение в следующих работах [74-78]. В [94] были исследованы также свойства тел с неидеальными поверхностями или с градиентными покрытиями. Авторами было отмечено, что эти свойства существенно зависят от микро- и/или наноструктуры поверхностей или покрытий.

В настоящей диссертационной работе для исследования задач наномеханики используются модели поверхностной упругости. Здесь можно отметить, что еще в 1938 году в своей работе [66] Адам Н. описал, что поверхности тел и границы раздела между телами проявляют свойства, отличные от соответствующих свойств их внутренней части. Начатые более шестидесяти лет назад исследования поверхностных напряжений в твердых деформируемых телах [67-69] получили свое новое продолжение в последние годы в связи с их приложениями к задачам наномеханики. Было отмечено, что возникновение поверхностных напряжений может влиять на общие упругие свойства и на механическое поведение наноматериалов и наноструктур.

Модель поверхностной упругости, где поверхностная энергия была введена путем оценивания избытка объемной энергии вблизи поверхности, была представлена в [79]. В результате работ Миндлина [80] и Тупина [81] появилась градиентная теория упругости Тупина-Миндлина, которая нашла применение в работах [82-88] и во многих других исследованиях.

В главах 2 и 3 диссертационной работы рассматриваются задачи о наличии поверхностных напряжений с помощью теории Гуртина-Мурдоха (Gurtin-Murdoch) [89-

91]. Теорию Гуртина-Мурдоха применительно к задачам A - B правильнее именовать теорией поверхностных эффектов, связанных с поверхностными напряжениями. В последнее время модель Гуртина-Мурдоха нашла множество применений в микро- и наномеханике. В задачах A - B теории упругости для полуограниченных тел, и в частности, для волноводов такие эффекты могут проявляться на свободных от нагрузок внешних границах и на интерфейсных поверхностях раздела сред с различными свойствами.

Задачи A для упругих полуограниченных сред с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками в рамках теории Гуртина-Мурдоха изучались в [90, 92-107] и др.

Отражение и преломление упругих волн различных типов через границу с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками было изучено основоположниками теории в [90, 102].

Наиболее простыми и исследованными являются антиплоские задачи A для полуограниченных сред. Антиплоские задачи A для случая упругого полупространства по теории Гуртина-Мурдоха изучены в [94, 96, 101]. Случай двух полупространств с различными свойствами и с границей раздела с поверхностными напряжениями рассмотрен в [95]. В работах [99, 102, 103] рассмотрен пример слоистого полупространства, а в [100, 106, 107] изучен упругий нанотонкий слой. В работе [97] рассмотрен составной слой. В работах [94, 96] теория Гуртина-Мурдоха сравнивалась с другими теориями поверхностной упругости, а также с методами молекулярной динамики. Задачи с неидеальным контактом между слоями и при шероховатости поверхности изучались в [95, 101, 105]. Плоские двумерные задачи рассматривались в [91–93, 98, 102, 103] для полупространства и слоя, причем в [93] изучался упругий материал кубической сингонии. В [104] изучались фононная дисперсия и резонансные частоты для конкретных мод колебаний в задаче A для цилиндрической нанотрубки.

Волны Лява в полупространстве и слое, лежащем на полупространстве, рассматривались в [92, 94, 95, 99, 101, 108], а поперечные S -волны в отдельном слое и в составном слое – в [33, 36]. В [91, 109] рассматривалось отражение плоских волн на границах с поверхностными напряжениями и инерционными эффектами, в [103] по теории Гуртина-Мурдоха изучались волны Релея и Стоунли в полупространстве, а в [93] – волны Лэмба в полосе.

Модели поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха в дальнейшем были распространены на пьезоэлектрические тела. Так, в [110–117] изучались задачи A об установившихся колебаниях полуограниченных электроупругих сред с дополнительной поверхностной связанностью электромеханических полей, а в [118–120] были рассмотрены соответствующие задачи для магнитоэлектроупругих сред. В [121, 122] обсуждались как полные модели поверхностной теории пьезоэлектричества, так и частные модели с только упругими поверхностными эффектами.

Таким образом, изучение влияния поверхностных напряжений для упругих задач A и их обобщений проводилось ранее в работах многих исследователей, как авторов теории Gurtin M.E., Murdoch A.I., так и других ученых, как, например: Н.Ф. Морозова, Р.В. Гольдштейна, В.А. Еремеева, А.В. Наседкина, D. Acharya, W. Chen, C. Enzevae, H. Fan, X.-Q. Feng, F. Jia, B. Gu, L.M. Hu, K.Y. Lee, Y.D. Li, H. Liu, G.I. Mikhasev, S. Naili, P.K. Pal, G. Rosi, P.R. Sengupta, X. Wang, J.L. Yang, C. Zhang, H. Zhang, Z. Zhang и других. Однако динамические задачи наномеханики остаются по-прежнему мало изученными, а для подвижных осциллирующих источников волн они вообще ранее не рассматривались.

Задачи теории упругости и электроупругости с подвижными осциллирующими возмущениями и динамические задачи для наноразмерных волноводов являются центральными в настоящей диссертации. Отмеченные выше неполнота теоретических исследований таких задач и практические приложения определяют актуальность данной работы.

Актуальность темы

Актуальность исследования волновых процессов в электроупругих телах обусловлена многочисленными приложениями в различных областях, прежде всего, в пьезоэлектрическом приборостроении. Активное использование пьезоматериалов началось еще в середине 20 века. Можно выделить следующие области использования пьезокерамики: ультразвуковая диагностика в медицине, энергетика, авиа и железнодорожный транспорт, нефтегазовый комплекс, автопромышленность, производство бытовых электроприборов и др. Новыми и перспективными областями применения стали устройства накопления энергии, аддитивное производство пьезоэлектрических метаматериалов, точная настройка станков (нанопозиционирование),

наносенсоры и др. Итак, благодаря замечательным свойствам, пьезокерамика широко используется в разных областях науки и техники. Тема настоящей работы является актуальной также в связи с возрастающей потребностью прецизионного моделирования новых активных материалов с улучшенными характеристиками и прогнозирования их свойств, особенно на наноуровне. Как отмечалось ранее, среди теорий наномеханики одной из особенно популярных является теория Гуртина-Мурдоха, которая была обобщена и на пьезоэлектрические (электроупругие) среды.

Как для электроупругих, так и для упругих полуограниченных сред с поверхностными напряжениями мало изученными остаются задачи с комбинированными нагрузками, актуальность которых обусловлена развитием современного высокоскоростного транспорта и испытаниями на ракетных треках.

Задачи теории упругости и пьезоэлектричества с комбинированными, т.е. с подвижными осциллирующими возмущениями, и соответствующие задачи для наноразмерных плоских волноводов являются центральными в настоящей диссертации. Неполнота исследований таких задач придает дополнительную актуальность данной работе.

Цель работы состоит в нахождении и анализе фундаментальных решений (ФР) задач для упругих и пьезоэлектрических неограниченных и полуограниченных сред, а также в исследованиях наноразмерных задач для упругих сред с учетом поверхностных эффектов при осциллирующих и подвижных источниках волн.

Для достижения поставленной цели были поставлены **следующие задачи:**

- анализ проведенных исследований в данной области;
- нахождение ФР антиплоской, плоской и пространственной задач электроупругости при движущемся осциллирующем источнике;
- построение асимптотик волновых полей в дальней зоне, кинематический и энергетический анализ решений для рассмотренных антиплоских, плоских и пространственных задач электроупругости;
- нахождение аналитических решений антиплоских задач с комбинированными нагрузками для упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений в симметричной и антисимметричной постановках;

- нахождение аналитических решений симметричной и антисимметричной плоских задач о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений;
- проведение соответствующих численных экспериментов и анализ дисперсионных кривых.

Новизна темы

Все рассмотренные задачи являются новыми, что косвенно подтверждается публикацией результатов решения этих задач в рецензируемых изданиях.

Исследования ФР в антиплоских, плоских и пространственных задачах при подвижных осциллирующих источниках ранее проводились только для упругих сред, а в настоящей работе эти исследования были распространены на электроупругие среды.

В данной диссертационной работе были изучены антиплоские задачи B с поверхностными эффектами для упругой изотропной полосы, тогда как ранее рассмотрены были только задачи A . Аналогичные плоские задачи с поверхностными эффектами рассматривались при отсутствии внешних воздействий, а в данной работе рассмотрены задачи A . Дисперсионные уравнения изучены для симметричной и антисимметричной задач в виде зависимости частоты от волнового числа.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 123 страницы, включая 34 рисунка. Список литературы содержит 135 наименований.

Во введении представлен обзор литературы по теме диссертационного исследования. Отмечено, что исследования задач о распространении акустических волн в пьезоматериалах, а также задач с учетом поверхностных напряжений являются актуальными. Обсуждены различные теоретические и инженерные модели для описания наноразмерных эффектов и для предсказания поведения наноразмерных тел.

В первой главе приводятся постановки задач электроупругости при движущихся осциллирующих источниках для плоскости и пространства, определяются ФР и проводится кинематический и энергетический анализ решений в дальней зоне.

В первом параграфе формулируется антиплоская задача электроупругости, находятся ФР. Во втором параграфе аналогично рассматривается плоская задача электроупругости. Третий параграф посвящен построению асимптотики волновых полей в дальней зоне, кинематическому и энергетическому анализу решений, анализу полученных численных результатов. В четвертом параграфе рассматриваются аналогичные задачи для электроупругого пространства.

Во второй главе формулируется антиплоская задача о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений.

В первом параграфе рассматриваются симметричная и антисимметричная антиплоские задачи об установившихся колебаниях упругого изотропного слоя при наличии поверхностных напряжений. Во втором параграфе изучается антиплоская симметричная задача о действии комбинированной нагрузки на упругую изотропную нанотонкую полосу при наличии поверхностных напряжений. Третий параграф посвящен решению антисимметричной антиплоской задачи о действии комбинированной нагрузки на упругую изотропную полосу при наличии поверхностных напряжений. В нем же приводятся численные результаты.

В третьей главе формулируется и решается плоская задача о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений. В первом параграфе рассматриваются антисимметричная плоская задача о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений. Во втором параграфе изучается аналогичная, но симметричная плоская задача, а также приводятся и анализируются полученные численные результаты.

В заключении формулируются основные результаты диссертационного исследования.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая ценность проведенных исследований состоит в получении ФР задач с комбинированными источниками для пьезоэлектрического пространства, получении асимптотик дальних полей и в анализе кинематики и энергетики цилиндрических и сферических распространяющихся волн в дальней зоне в подвижной системе координат, а также в исследовании задач об установившихся колебаниях для упругих нанотонких волноводов с учетом поверхностных эффектов.

Практическая значимость работы обусловлена возможными применениями полученных результатов при разработках современного высокоскоростного транспорта и новых эффективных устройств, использующих при своей работе волноводы с наноразмерными поперечными сечениями.

Методология и методы исследования

При решении задач использовалась стандартная техника решения динамических упругих и электроупругих задач для неограниченных и полуограниченных областей. Для выделения единственного решения использовался принцип предельного поглощения. Фундаментальные решения находились с помощью преобразования Фурье по бесконечно протяженной координате, методов контурного интегрирования и теории вычетов для нахождения обратного преобразования Фурье. Для анализа кинематики и энергетики волновых полей в дальней зоне использовался метод стационарной фазы или метод перевала и энергетические соотношения, в том числе в подвижной системе координат для подвижных и неподвижных наблюдателей. Поверхностные эффекты изучались с учетом модели Гуртина-Мурдоха. При проведении численных исследований использовался математический пакет Maple.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту

– Фундаментальные решения двумерных и трехмерных задач электроупругости при движущихся осциллирующих источниках, явные представления для ФР для всех режимов движения с выделением динамических и квазистатических составляющих.

- Кинематический и энергетический анализ волновых полей в дальней зоне для полученных ФР.
- Выводы о влиянии движения источника волн на кинематические и энергетические картины волновых полей в дальней зоне в подвижной системе координат: появление дополнительной анизотропии и зон с различным числом распространяющихся волн; наличие быстрых и медленных волн при транс- и сверхсейсмических режимах движения источника; перенос отрицательной энергии, измеренной подвижным наблюдателем, при транс- и сверхсейсмических движениях источника.
- Решения антиплоских задач о действии комбинированной нагрузки на упругую изотропную полосу при наличии поверхностных напряжений, моделируемых в рамках теории Гуртина – Мурдоха, в симметричной и антисимметричной постановках.
- Решения симметричных и антисимметричных плоских задач о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений, моделируемых в рамках теории Гуртина – Мурдоха.
- Анализ первых дисперсионных кривых в задачах для наноразмерной упругой полосы. Выводы о влиянии поверхностных напряжений и поверхностных инерционных нагрузок на дисперсионные кривые: наличие дисперсии у всех дисперсионных кривых; появление асимптоты у первой дисперсионной кривой, соответствующей поверхностной волне; изменение частот запираания, волновых чисел и зон существования обратных волн у дисперсионных кривых при различных наноразмерных толщинах полосы. Анализ влияния движения источника волн в антиплоских задачах для наноразмерной полосы.

Достоверность

Точность и корректность полученных результатов основана на использовании классических апробированных методов динамической теории упругости и электроупругости, методов теории функции комплексных переменных и методов стационарной фазы для анализа волновых полей в дальней зоне. При моделировании задач для ультратонких волноводов использовалась одна из наиболее популярных в наномеханике теория поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха. Используемые в работе подходы являются теоретически обоснованными, неоднократно применялись для

разнообразных аналогичных динамических упругих и электроупругих задач, а также подтверждались экспериментально. Кроме того, все предложенные в работе модели и полученные результаты сравнивались с известными, когда это было возможно.

Апробация работы

Полученные в диссертации результаты были представлены на следующих конференциях и школах:

- «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону (2010, 2018, 2020);
- «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», п. Дивноморское (2019, 2021, 2022);
- «Достижения молодых ученых в интересах развития Юга России», г. Ростов-на-Дону (2018),
- и др.

Публикации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 13 работах.

Статьи в реферируемых журналах

1. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Плоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. №1. С. 46-55. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.05 (K1)
2. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 1. С. 12–22. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-12-22 (K2)
3. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Плоские волны и функции Грина в пьезоэлектрическом пространстве при движущихся осциллирующих источниках // Экологический вестник

научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 2. С. 47-55.
(К2)

4. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Фундаментальные решения в двумерных задачах электроупругости при движущихся осциллирующих источниках // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2014. №6(184). С. 16-23. (К2)

Статьи в сборниках научных трудов

1. Калинина Т.И. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2018. Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ, 2018. Т. 2. С. 123-127.
2. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Фундаментальные решения в плоских и антиплоских задачах для электроупругих сред при подвижных осциллирующих источниках // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIV Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, Азов, 19-24 июня 2010. Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ, 2010. С. 142-146.
3. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Фундаментальные решения антиплоской задачи электроупругости при движущемся осциллирующем источнике // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию: сборник докладов VI Международной конференции (г. Владикавказ, 29 июня - 4 июля 2008 г.) С. 103-113.

Тезисы докладов на конференциях

1. Калинина, Т. И. О влиянии поверхностных напряжений на дисперсионные кривые плоских и антиплоских задач об установившихся колебаниях упругой нанотонкой полосы // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVI Всероссийской школы, (с. Дивноморское, 26 - 31 мая 2022). Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. С. 41.
2. Калинина Т.И. Плоские задачи о действии осциллирующих нагрузок на упругую полосу при наличии поверхностных напряжений // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тез. докл. XV Всеросс. школы

- (с. Дивноморское, 23 - 31 мая 2021). Ростов-на-Дону, Таганрог: изд-во ЮФУ, 2021. С. 69.
3. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Плоские задачи об установившихся колебаниях упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVI Международной научной конференции (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20-24 сентября 2021 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2021. С. 99.
 4. Калинина Т.И. Антиплоская задача о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XX Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, 18-21 июня 2020. Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ, 2020. С. 80.
 5. Калинина Т.И. О влиянии поверхностных напряжений на резонансные и кинематические характеристики антиплоских колебаний упругого изотропного слоя // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тез. докл. XIV Всеросс. школы (с. Дивноморское, 27 - 31 мая 2019). Ростов-на-Дону, Таганрог: изд-во ЮФУ, 2019. С. 73.
 6. Калинина Т.И. Кинематика и энергетика фундаментальных решений в дальней зоне для двумерных задач теории пьезоэлектричества при движущихся осциллирующих источниках // XIV Ежегодная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Достижения и перспективы молодых ученых в интересах развития Юга России»: тезисы докладов (г. Ростов-на-Дону, 12–26 апреля 2018 г.). Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2018. С. 86.

В опубликованных работах совместно с научным руководителем осуществлены постановки задач и разработаны общие математические подходы, соавторы участвовали вместе в обсуждении общих выводов и в подготовке публикаций. Соискателем получены решения всех рассмотренных задач, разработан необходимый программный инструментарий, реализованы вычислительные эксперименты и проведен анализ полученных результатов.

Глава 1

Задачи электроупругости при движущихся осциллирующих источниках

В материале данной главы используются и цитируются авторские работы [32, 124, 132, 133, 134].

Обозначим неподвижную декартовую систему координат в \mathbf{R}^3 , отнесенную к рассматриваемой электроупругой (пьезоэлектрической) среде, через $O_{\xi_1\xi_2\xi_3}$. Пусть в данной системе координат τ – время, $\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ – вектор-функция перемещений, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ – функция электрического потенциала. Примем, что рассматриваемая электроупругая среда характеризуется следующими материальными модулями: упругими коэффициентами жесткости $c_{\alpha\beta}^E$, составляющими матрицу \mathbf{c}^E размера 6×6 ; диэлектрическими проницаемостями ε_{ij}^S , составляющими 3×3 матрицу ε^S ; и пьезоэлектрическими коэффициентами (пьезомодулями) $e_{i\alpha}$, составляющими 3×6 матрицу \mathbf{e} ($i, j=1, 2, 3, \alpha, \beta=1, 2, \dots, 6$). Верхние буквы у $c_{\alpha\beta}^E$ и ε_{ij}^S означают, что эти величины вычислены при соответствующих постоянных, обычно, нулевых полях: E – при постоянной напряженности электрического поля, S – при постоянных деформациях (для зажатого материала). Неподвижная система координат $O_{\xi_1\xi_2\xi_3}$ часто аналогична кристаллографической для пьезоупругого материала, но это в общем случае не обязательно.

Постановка задачи о действии источников волн – объемных массовых сил \mathbf{b} и объемных электрических зарядов σ – в безграничной пьезоэлектрической среде с плотностью ρ в пренебрежении диссипативными факторами описывается полевыми уравнениями (уравнением движения и уравнением квазиэлектростатики)

$$\nabla^{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2,$$

$$\nabla^{\xi} \cdot \mathbf{D} = \sigma,$$

для которых определяющие соотношения электроупругости в векторно-матричной форме Фойхта, принятой в пьезотехнике, можно представить в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \mathfrak{z}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

где $\nabla^\xi = \{\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2, \partial/\partial\xi_3\}$ – набла-оператор; \mathbf{T} , \mathbf{S} – одномерные массивы, состоящие из шести компонент σ_{ij} , ε_{ij} тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, соответственно; $T_j = \sigma_{jj}$, $S_j = \varepsilon_{jj}$, $j=1, 2, 3$, $T_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}$, $T_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31}$, $T_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21}$, $S_4 = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}$, $S_5 = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31}$, $S_6 = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$; $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial \xi_j + \partial u_j / \partial \xi_i) / 2$; \mathbf{D} , \mathbf{E} – векторы электрического смещения (электрической индукции) и электрического поля (напряженности электрического поля), соответственно; $E_i = -\partial\varphi/\partial\xi_i$.

Зависимости \mathbf{S} от \mathbf{u} и \mathbf{E} от φ можно представить также в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla^\xi \varphi, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla^\xi) = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi_1 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial\xi_3 & \partial/\partial\xi_2 \\ 0 & \partial/\partial\xi_2 & 0 & \partial/\partial\xi_3 & 0 & \partial/\partial\xi_1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\xi_3 & \partial/\partial\xi_2 & \partial/\partial\xi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Используя (1.1) – (1.4), полевые уравнения электроупругости в приближении квазиэлектростатики запишем в форме:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2 - \mathbf{L}^*(\nabla^\xi) \cdot (\mathbf{c}^E \cdot \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e}^* \cdot \nabla^\xi \varphi) = \mathbf{b}, \quad (1.5)$$

$$\nabla^\xi \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}(\nabla^\xi) \cdot \mathbf{u} - \mathfrak{z}^S \cdot \nabla^\xi \varphi) = \sigma. \quad (1.6)$$

Далее рассмотрим три вида задач в зависимости от внешних воздействий сил \mathbf{b} и объемного электрического заряда σ .

Задачи А – обычные задачи об установившихся колебаниях, когда $\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi) e^{i\omega\tau}$, $\sigma(\xi, \tau) = q(\xi) \exp(i\omega\tau)$, где ω – круговая частота, ($\omega = 2\pi f$, f – частота).

Задачи Б – стационарные задачи с подвижными воздействиями, когда $\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi - \mathbf{w}\tau)$, $\sigma(\xi, \tau) = q(\xi - \mathbf{w}\tau)$, где $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ – скорость движения источника возмущений.

Задачи В – наиболее общие задачи с комбинированными (подвижными и осциллирующими) нагрузками, когда $\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi - \mathbf{w}\tau) \exp(i\omega\tau)$, $\sigma(\xi, \tau) = q(\xi - \mathbf{w}\tau) \exp(i\omega\tau)$.

В задачах *В* для нахождения фундаментальных решений (ФР) предполагается, что комбинированные источники колебаний перемещаются прямолинейно с постоянной скоростью \mathbf{w} , осциллируют с круговой частотой ω и являются сосредоточенными, т.е.

$$\begin{cases} \mathbf{b}(\xi, \tau) \\ \sigma(\xi, \tau) \end{cases} = \begin{cases} f_0 \mathbf{l} \\ q_0 \end{cases} \delta(\xi - \mathbf{w}\tau) \exp(i\omega\tau), \quad (1.7)$$

где f_0 , q_0 – константы, определяющие амплитуды массовой силы \mathbf{b} и объемного электрического заряда σ , соответственно; \mathbf{l} – единичный ($|\mathbf{l}|=1$) направляющий вектор массовой силы \mathbf{b} , $\delta(\dots)$ – дельта-функция Дирака.

Для задач с движущимися нагрузками удобно ввести подвижную декартову систему координат $\tilde{O}x_1x_2x_3$, связанную с этими нагрузками. Именно будем считать, что эта система перемещается относительно неподвижной со скоростью движения источника \mathbf{w} . Подвижная система координат будет являться основной для построения решений и их анализа. Поэтому для нее используем стандартные символы, обозначая через $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор пространственных координат, а через t – время. Подвижная и неподвижная системы координат ($\tilde{O}x_1x_2x_3$ и $O\xi_1\xi_2\xi_3$) связаны следующими очевидными соотношениями:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{w}\tau, \quad t = \tau, \quad (1.8)$$

$$\partial / \partial \xi_k = \partial / \partial x_k, \quad k=1, 2, 3, \quad \partial_\tau = \partial_t - \mathbf{w} \cdot \nabla, \quad (1.9)$$

$$\nabla = \{ \partial / \partial x_1, \partial / \partial x_2, \partial / \partial x_3 \} \equiv \{ \partial_1, \partial_2, \partial_3 \}.$$

Будем предполагать, что при действии комбинированного источника (1.7) в подвижной системе координат (1.8) реализуется режим установившихся колебаний для вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и для скалярной функции электрического потенциала $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad \varphi = \psi(\mathbf{x}) e^{i\omega t}. \quad (1.10)$$

Записав полевые уравнения электроупругости (1.5), (1.6) в системе координат (1.8) и используя формулы (1.7), (1.9), для амплитудных функций $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ из (1.10) получаем систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\rho(i\omega - \mathbf{w} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} - \mathbf{A}(\nabla) \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\gamma}(\nabla) \psi = f_0 \mathbf{l} \delta(\mathbf{x}), \quad (1.11)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^*(\nabla) \cdot \mathbf{v} - \varepsilon(\nabla) \psi = q_0 \delta(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

где

$$\mathbf{A}(\nabla) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{L}(\nabla),$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\nabla) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{e}^* \cdot \nabla, \quad \varepsilon(\nabla) = \nabla^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \nabla.$$

1.1. Фундаментальные решения для антиплоской задачи электроупругости

Как известно, для некоторых классов пьезоэлектрических материалов возможна постановка антиплоских двумерных задач электроупругости [123]. Если рассматривается задача об антиплоской деформации в плоскости $O\xi_1\xi_2$, то предполагается, что при действии объемных плотностей массовой силы \mathbf{b} и электрического заряда σ вида

$$\mathbf{b} = \{0, 0, b_3\}; \quad b_3 = b_3(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad \sigma = \sigma(\xi_1, \xi_2, \tau) \quad (1.13)$$

возбуждаются поля перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \tau)$ и электрического потенциала $\varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \tau)$. Эти поля, как и внешние воздействия, зависят от двух пространственных переменных ξ_1, ξ_2 и времени τ , но не зависят от ξ_3 . Наименование антиплоской задачи определяется здесь тем, что как и у массовой силы \mathbf{b} , у вектора \mathbf{u} отлична от нуля лишь одна ненулевая компонента u_3 , т.е. компонента вдоль оси, перпендикулярной плоскости $O\xi_1\xi_2$:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, u_3\}; \quad u_3 = u_3(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad \varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \tau). \quad (1.14)$$

Необходимость удовлетворения первых двух скалярных уравнений в векторном уравнении (1.5) в предположениях (1.13), (1.14) приводит к системе:

$$\begin{cases} c_{15}^E \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_1^2} + (c_{14}^E + c_{65}^E) \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + c_{64}^E \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_2^2} - [e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + (e_{21} + e_{16}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + e_{26} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2}] = 0, \\ c_{65}^E \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_1^2} + (c_{64}^E + c_{25}^E) \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + c_{24}^E \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_2^2} - [e_{16} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + (e_{12} + e_{26}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + e_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2}] = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что для возможности существования антиплоской деформации (1.13), (1.14) должны выполняться следующие ограничения на модули жесткости и пьезомодули:

$$c_{14}^E = c_{15}^E = c_{24}^E = c_{25}^E = c_{46}^E = c_{56}^E = 0, \quad (1.16)$$

$$e_{11} = e_{12} = e_{21} = e_{22} = e_{16} = e_{26} = 0. \quad (1.17)$$

Аналогично, в задачах об антиплоской деформации в плоскости $O\xi_1^{\xi}\xi_3$, получаем ограничения вида

$$c_{14}^E = c_{16}^E = c_{34}^E = c_{36}^E = c_{45}^E = c_{56}^E = 0, \quad (1.18)$$

$$e_{11} = e_{13} = e_{15} = e_{31} = e_{33} = e_{35} = 0, \quad (1.19)$$

а в задачах об антиплоской деформации в плоскости $O\xi_2^{\xi}\xi_3$ должны выполняться равенства

$$c_{25}^E = c_{26}^E = c_{35}^E = c_{36}^E = c_{45}^E = c_{46}^E = 0, \quad (1.20)$$

$$e_{22} = e_{23} = e_{24} = e_{32} = e_{33} = e_{34} = 0. \quad (1.21)$$

Тогда для задачи об антиплоской деформации в плоскости $O\xi_1^{\xi}\xi_2$ из (1.5), (1.6) и (1.13), (1.14) получаем систему уравнений антиплоской задачи относительно полевых функций $u_3 = u_3(\xi_1, \xi_2, \tau)$ и $\varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \tau)$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - A(\nabla_2^{\xi})u_3 - \gamma(\nabla_2^{\xi})\varphi = b_3, \quad (1.22)$$

$$\gamma(\nabla_2^{\xi})u_3 - \vartheta(\nabla_2^{\xi})\varphi = \sigma, \quad (1.23)$$

где $\nabla_2^{\xi} = \{\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2\}$,

$$A(\nabla_2^{\xi}) = c_{55}^E \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2c_{45}^E \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \quad (1.24)$$

$$\gamma(\nabla_2^{\xi}) = e_{15} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + (e_{14} + e_{25}) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + e_{24} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \quad (1.25)$$

$$\vartheta(\nabla_2^{\xi}) = \vartheta_{11}^S \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2\vartheta_{12}^S \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \vartheta_{22}^S \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}. \quad (1.26)$$

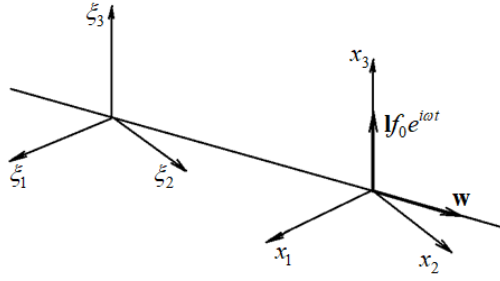


Рисунок 1.1. Подвижная и неподвижная системы координат и сосредоточенный источник для антиплоской задачи B

Как и в (1.10), будем предполагать, что при действии комбинированных источников (1.7) в подвижной системе координат (1.8) для перемещений и электрического потенциала (1.14) существует режим установившихся колебаний с той же круговой частотой ω :

$$u_3 = v(x_1, x_2) e^{i\omega t}, \quad \varphi = \psi(x_1, x_2) e^{i\omega t}. \quad (1.27)$$

Уравнения (1.22), (1.23) запишем в подвижной системе координат (1.8), связанной с источником волн (1.7) (Рисунок 1.1). Очевидно, что тогда с учетом (1.9) будем иметь следующую систему уравнений для компонент v и ψ из (1.27):

$$\rho(i\omega - \mathbf{w} \cdot \nabla_2^x)^2 v - A(\nabla_2^x)v - \gamma(\nabla_2^x)\psi = f_0 \delta(x_1, x_2), \quad (1.28)$$

$$\gamma(\nabla_2^x)v - \varepsilon(\nabla_2^x)\psi = q_0 \delta(x_1, x_2), \quad (1.29)$$

где $\nabla_2^x = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\}$.

Как известно, в неограниченной среде для обеспечения единственности решения в подобных задачах необходимо использовать дополнительные условия. Среди таких условий наиболее простым и удобным является, по-видимому, принцип предельного поглощения (ППП) или принцип постепенно усиливающегося источника [1], который и будем использовать здесь и далее. Согласно этому принципу перейдем к ε – задаче,

заменяя в (1.28), (1.29) v на v_ε , ψ на ψ_ε , ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \ll 1$. После таких замен система (1.28), (1.29) примет вид:

$$\rho(i\omega_\varepsilon - \mathbf{w} \cdot \nabla_2^x)^2 v_\varepsilon - A(\nabla_2^x)v_\varepsilon - \gamma(\nabla_2^x)\psi_\varepsilon = f\delta(x_1, x_2), \quad (1.30)$$

$$\gamma(\nabla_2^x)v_\varepsilon - \vartheta(\nabla_2^x)\psi_\varepsilon = q\delta(x_1, x_2), \quad (1.31)$$

где $f = f_0$, $q = q_0$.

Тогда, согласно ППП решение $\{v, \psi\}$ исходной системы уравнений (1.28), (1.29) определяется в результате предельного перехода в решении $\{v_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$ системы уравнений (1.30), (1.31) с поглощением при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon; \quad \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon. \quad (1.32)$$

Для нахождения решения (1.30), (1.31) для ε – задачи применим стандартную технику двумерного преобразования Фурье ($\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$, $\mathbf{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) \\ \Psi_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} v_\varepsilon(x_1, x_2) \\ \psi_\varepsilon(x_1, x_2) \end{array} \right\} e^{i\mathbf{\alpha} \cdot \mathbf{x}} dx_1 dx_2. \quad (1.33)$$

Тогда из (1.30) – (1.33) будем иметь

$$\left[A(\mathbf{\alpha}) - \rho\Omega_\varepsilon^2(\mathbf{\alpha}) \right] V_\varepsilon + \gamma(\mathbf{\alpha})\Psi_\varepsilon = f, \quad (1.34)$$

$$\gamma(\mathbf{\alpha})V_\varepsilon - \vartheta(\mathbf{\alpha})\Psi_\varepsilon = q, \quad (1.35)$$

где

$$A(\mathbf{\alpha}) = c_{55}^E \alpha_1^2 + 2c_{45}^E \alpha_1 \alpha_2 + c_{44}^E \alpha_2^2, \quad (1.36)$$

$$\gamma(\mathbf{\alpha}) = e_{15} \alpha_1^2 + (e_{14} + e_{25}) \alpha_1 \alpha_2 + e_{24} \alpha_2^2, \quad (1.37)$$

$$\vartheta(\mathbf{\alpha}) = \vartheta_{11}^S \alpha_1^2 + 2\vartheta_{12}^S \alpha_1 \alpha_2 + \vartheta_{22}^S \alpha_2^2, \quad (1.38)$$

$$\Omega_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) = \omega_\varepsilon + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\alpha}; \quad \mathbf{w} = \{w_1, w_2\}. \quad (1.39)$$

Введя полярную систему координат (α, θ)

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad (1.40)$$

для $V_\varepsilon, \Psi_\varepsilon$ находим:

$$V_\varepsilon = \frac{F_v}{\rho(\alpha^2 v^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n}))}, \quad (1.41)$$

$$\Psi_\varepsilon = \frac{F_\psi}{\rho(\alpha^2 v^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n}))} + \Psi_{\varepsilon n}, \quad (1.42)$$

$$F_v = f + \frac{\gamma(\mathbf{n})}{\varepsilon(\mathbf{n})} q, \quad (1.43)$$

$$F_\psi = \frac{\gamma(\mathbf{n})}{\varepsilon(\mathbf{n})} F_v, \quad (1.44)$$

$$\Psi_{\varepsilon n} = -\frac{q}{\alpha^2 \varepsilon(\mathbf{n})}, \quad (1.45)$$

$v(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n})$ – фазовая скорость поперечных волн в задаче (1.28), (1.29) при $\mathbf{w}=0$, т.е. в задаче A ,

$$v(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n}) = \sqrt{\rho^{-1} \tilde{A}(\mathbf{n})}, \quad \tilde{A}(\mathbf{n}) = A(\mathbf{n}) + \frac{\gamma^2(\mathbf{n})}{\varepsilon^s(\mathbf{n})}, \quad (1.46)$$

где $\tilde{A}(\mathbf{n})$ – акустический тензор Кристоффеля (модифицированный за счет пьезоэффекта).

Применив к (1.41), (1.42) обратное преобразование Фурье и перейдя к полярной системе координат (1.40), получим решение ε – задачи в интегральной форме

$$v_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_0^{2\pi} I_{v\varepsilon} d\theta, \quad (1.47)$$

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_0^{2\pi} I_{\psi\varepsilon} d\theta + \psi_{ns}, \quad (1.48)$$

$$\begin{Bmatrix} I_{v\varepsilon} \\ I_{\psi\varepsilon} \end{Bmatrix} = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 v^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n})} \begin{Bmatrix} F_v \\ F_\psi \end{Bmatrix} e^{-iz\alpha} d\alpha, \quad (1.49)$$

$$z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{n} = \{n_1, n_2\} = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad (1.50)$$

$$\psi_{ns} = -\frac{q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon(\mathbf{n})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-iz\alpha} d\alpha. \quad (1.51)$$

Заметим, что электрический потенциал ψ_{ns} из (1.48), (1.51) фактически является ФР отдельной задачи квазиэлектростатики диэлектриков в $R^2 = \{x_1, x_2\}$, (ε_2^S – тензор диэлектрических проницаемостей в R^2):

$$\nabla_2^x \cdot (\varepsilon_2^S \cdot \nabla_2^x \varphi_{ns}) = q\delta(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad \varphi_{ns} = \psi_{ns} e^{i\omega t}. \quad (1.52)$$

В связи с этим, ψ_{ns} логично назвать несвязанным квазиэлектростатическим потенциалом.

Для упрощения полученных выражений разложим подынтегральную функцию из (1.49) на простейшие дроби

$$\alpha_\varepsilon^+ = \frac{\omega_\varepsilon}{v - w_n}, \quad \alpha_\varepsilon^- = -\frac{\omega_\varepsilon}{v + w_n},$$

которые являются корнями уравнения: $\alpha^2 v^2(\mathbf{n}) - (\omega_\varepsilon + \alpha w_n)^2 = 0$, где $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$.

Тогда имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 v^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n})} = \frac{1}{2v\omega_\varepsilon} \left[\frac{\alpha_\varepsilon^+}{\alpha - \alpha_\varepsilon^+} - \frac{\alpha_\varepsilon^-}{\alpha - \alpha_\varepsilon^-} \right]. \quad (1.53)$$

Для интегралов (1.47), (1.48) используем следующие преобразования по θ :

$$\int_0^{2\pi} (\dots)(\theta)d\theta = \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} (\dots)(\theta)d\theta + \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} (\dots)(\theta+\pi)d\theta, \quad (1.54)$$

где $\tilde{\theta}$ – угол в полярной системе координат физической плоскости \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_x, \quad |\mathbf{e}_x| = 1, \quad \mathbf{e}_x = \{\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}\}. \quad (1.55)$$

$z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = r \cos \theta \cos \tilde{\theta} + r \sin \theta \sin \tilde{\theta} = r \cos(\theta - \tilde{\theta}) > 0$, тогда $-\frac{\pi}{2} < \theta - \tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}$ откуда

$-\frac{\pi}{2} + \tilde{\theta} < \theta < \frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}$. При замене θ на $\theta + \pi$ согласно (1.54) получим

$$z = r \cos(\theta - \tilde{\theta}) = r \cos(\theta + \pi - \tilde{\theta}) = r \cos((\theta - \tilde{\theta}) + \pi) = -r \cos(\theta - \tilde{\theta}).$$

Подставляя (1.53), (1.54) в (1.47) – (1.49), получим:

$$\begin{Bmatrix} v_\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{8\pi^2 \rho \omega_\varepsilon} \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{1}{v(\mathbf{n})} \begin{Bmatrix} I_{v\varepsilon}(\theta) \\ I_{\psi\varepsilon}(\theta) \end{Bmatrix} d\theta + \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_{ns} \end{Bmatrix}, \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} I_{v\varepsilon}(\theta) \\ I_{\psi\varepsilon}(\theta) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_v \\ F_\psi \end{Bmatrix} \left(\alpha_\varepsilon^+ \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-iz\alpha}}{\alpha - \alpha_\varepsilon^+} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz\alpha}}{\alpha + \alpha_\varepsilon^+} d\alpha \right) - \right. \\ &\left. - \alpha_\varepsilon^- \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-iz\alpha}}{\alpha - \alpha_\varepsilon^-} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz\alpha}}{\alpha + \alpha_\varepsilon^-} d\alpha \right) \right) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Рассмотрим контуры $C_R^\pm = [0, R] \cup C_R^\pm \cup [\pm R, 0]$, в которых C_R^\pm – это четверти окружностей радиуса R с центром в начале координат, лежащие соответственно в первой и четвертой четверти комплексной плоскости.

Вычислим интегралы (1.57) стандартными методами контурного интегрирования по C_R^\pm в комплексной плоскости, переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и используя лемму Жордана ($z > 0$).

Проанализируем первые интегралы в формуле (1.57): $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-iz\alpha}}{\alpha - \alpha_\varepsilon^\pm} d\alpha$. Тогда α_ε^\pm – особая точка (полюс первого порядка) функции $f(\alpha) = \frac{e^{-iz\alpha}}{\alpha - \alpha_\varepsilon^\pm}$, следовательно, по теореме о вычетах $\operatorname{Re} f(\alpha_\varepsilon^\pm) = e^{-iz\alpha_\varepsilon^\pm}$.

Рассмотрим положение полюсов $\alpha_\varepsilon^+ = \frac{\omega_\varepsilon}{v - w_n} = \frac{\omega - i\varepsilon}{v - w_n}$ и $\alpha_\varepsilon^- = -\frac{\omega_\varepsilon}{v + w_n} = \frac{\omega - i\varepsilon}{-v - w_n}$ на комплексной плоскости. Для полюса α_ε^+ рассмотрим два случая. Первый случай имеет место для $v - w_n < 0$, тогда $\operatorname{Re} \alpha_\varepsilon^+ < 0$, $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon^+ > 0$ (Рисунок 1.2 (а)). В этом случае полюс не попадает в замкнутый контур. Второй случай реализуется, когда $v - w_n > 0$, и тогда $\operatorname{Re} \alpha_\varepsilon^+ > 0$, $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon^+ < 0$ (Рисунок 1.2 (б)).

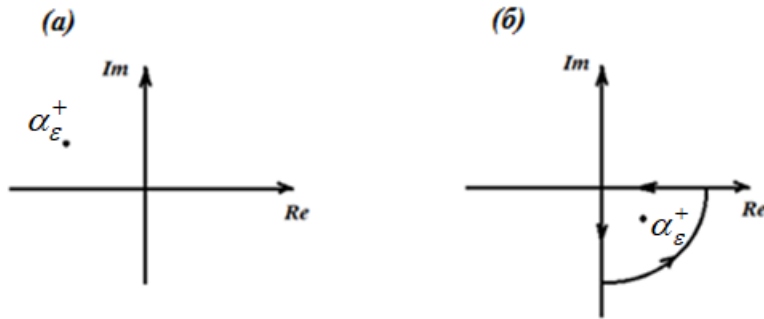


Рисунок 1.2. Положение полюса α_ε^+ на комплексной плоскости при различных случаях

Аналогичные выкладки сделаем для второго полюса α_ε^- . На рисунке 1.3 (а) рассмотрен случай, когда $v + w_n > 0$, тогда $\operatorname{Re} \alpha_\varepsilon^- < 0$, $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon^- > 0$. На рисунке 1.3 (б) соответственно $v + w_n < 0$, и тогда $\operatorname{Re} \alpha_\varepsilon^- > 0$, $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon^- < 0$.

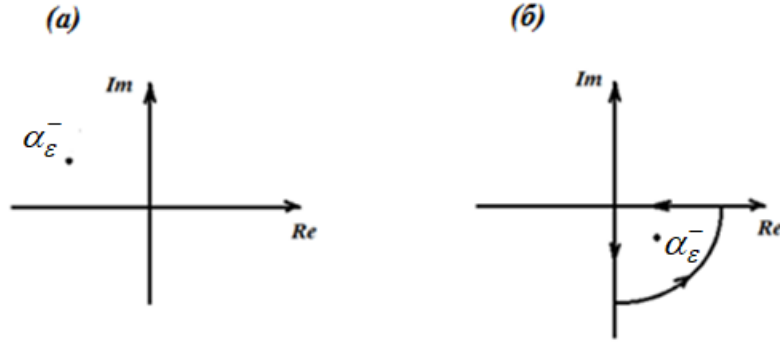


Рисунок 1.3. Положение полюса α_{ε}^{-} на комплексной плоскости при различных случаях

Введя в рассмотрение функцию Хевисайда $H(\pm v - w_n) = \begin{cases} 0, & \pm v - w_n < 0, \\ 1, & \pm v - w_n > 0 \end{cases}$, можно записать

$$\text{Res } f(\alpha_{\varepsilon}^{\pm}) = -2\pi i e^{-iz\alpha_{\varepsilon}^{\pm}} H(\pm v - w_n), \quad (1.58)$$

и в итоге получить формулы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-iz\alpha}}{\alpha - \alpha_{\varepsilon}^{\pm}} d\alpha = -2\pi i e^{-iz\alpha_{\varepsilon}^{\pm}} H[\pm v - w_n] + i \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha_{\varepsilon}^{\pm} - i\eta)}{(\alpha_{\varepsilon}^{\pm})^2 + \eta^2} e^{-z\eta} d\eta, \quad (1.59)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iz\alpha}}{\alpha + \alpha_{\varepsilon}^{\pm}} d\alpha = i \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha_{\varepsilon}^{\pm} - i\eta)}{(\alpha_{\varepsilon}^{\pm})^2 + \eta^2} e^{-z\eta} d\eta. \quad (1.60)$$

Подставляя теперь формулы (1.59), (1.60) в (1.56), (1.57) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ согласно (1.32), получим итоговые выражения для амплитуд $\{v, \psi\}$ ФР антиплоской задачи:

$$v = v_d + v_0, \quad \psi = \psi_d + \psi_0 + \psi_{ns} \quad (1.61)$$

$$\begin{Bmatrix} v_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} = \frac{i}{4\pi\rho} \left(\sum_k' \right) (-1)^k \begin{Bmatrix} I_{vdk} \\ I_{\psi dk} \end{Bmatrix}, \quad (1.62)$$

$$\begin{Bmatrix} I_{vdk} \\ I_{\psi dk} \end{Bmatrix} = \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{H \left[(-1)^{(k-1)} v(\theta) - w_n \right]}{v(\theta) c_p^{B(k)}(\theta)} \begin{Bmatrix} F_v \\ F_\psi \end{Bmatrix} \exp(-i\omega r \mathbf{L}^{B(k)} \cdot \mathbf{e}_x) d\theta, \quad (1.63)$$

$$\mathbf{L}^{B(k)} = \frac{\mathbf{n}}{c_p^{B(k)}(\theta)}, \quad \mathbf{L}^{B(k)} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\cos(\theta - \tilde{\theta})}{c_p^{B(k)}(\theta)}, \quad (1.64)$$

$$\begin{Bmatrix} v_0 \\ \psi_0 \end{Bmatrix} = \frac{i}{4\pi^2 \rho \omega} \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{1}{v(\theta)} I_0 \begin{Bmatrix} F_v \\ F_\psi \end{Bmatrix} d\theta, \quad (1.65)$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \left(\alpha^+ \frac{\alpha^+ - i\eta}{(\alpha^+)^2 + \eta^2} - \alpha^- \frac{\alpha^- - i\eta}{(\alpha^-)^2 + \eta^2} \right) e^{-z\eta} d\eta, \quad (1.66)$$

$$\alpha^\pm = \frac{\omega}{\pm v - w_n}, \quad z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = r \cos(\theta - \tilde{\theta}). \quad (1.67)$$

Здесь $c_p^{B(k)}(\theta) = c_p^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta)) = (-1)^{(k-1)} v(\theta) - w_n$ – фазовая скорость волны с номером k в задаче B с движением ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$), $\mathbf{L}^{B(k)}$ – вектор обратной скорости (медленности или рефракции).

Для задачи B , как и для задачи A , для фазовой скорости $c_p^{B(k)}(\mathbf{n})$ логично выбирать неотрицательное значение. Поэтому, как и в работах [29, 30, 124, 132], фазовую скорость будем определять в зависимости от значений величин $c_p^A(\mathbf{n})$ и $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ по следующим формулам:

$$\left(c_p^A(\mathbf{n}) > w_n \right) \wedge \left(c_p^A(\mathbf{n}) \geq -w_n \right) \Rightarrow c_p^{B(k)}(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad (1.68)$$

$$c_p^A(\mathbf{n}) < -w_n \Rightarrow c_p^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^{(k-1)} c_p^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad k = 1, 2, \quad (1.69)$$

$$c_p^A(\mathbf{n}) \leq w_n \Rightarrow \text{нет прямых плоских волн.} \quad (1.70)$$

Таким образом, в условиях (1.68) имеем одну волну, в условиях (1.69) – две (при $k = 1$ – быстрая, при $k = 2$ – медленная), а в условиях (1.70) прямые плоские волны отсутствуют.

Режим движения (скорость перемещения) источника будем называть досейсмическим (дозвуковым), если для всех направлений \mathbf{n} выполнено условие (1.68). В противном случае режим движения будем называть транс- или сверхсейсмическим (транс- или сверхзвуковым).

Для случаев (1.68), (1.69) введем единое обозначение:

$$c_p^{B(k)} = c_p^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^{(k-1)} (c_p^A(\mathbf{n}) - w_n), \quad (k=1) \vee (k=1, 2).$$

Штрих у знака суммирования \sum_k' в (1.62) добавлен для обозначения того, что суммирование по индексу k может иметь место, но может и отсутствовать в соответствии с ситуациями (1.68) – (1.70), которые реализуются при различных режимах движения.

Отметим, что формулы (1.61) – (1.67), определяющие ФР антиплоской задачи B для электроупругой среды, пригодны как для досейсмических, так и для транс- и сверхсейсмических скоростях движения источника волн.

Численные примеры

Для анализа волн в антиплоской задаче исследуем кривые медленности (кривые обратных скоростей или рефракции) $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ и фазовых скоростей $\mathbf{c}^{B(k)} = c^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$, используем популярный материал пьезоэлектрической керамики PZT-4, модули которого взяты из [125]. Известно, что материалы пьезоэлектрической керамики являются анизотропными кристаллографического класса *6mm* гексагональной системы или трансверсально-изотропными материалами. Следовательно, будут выполнены условия (1.16), (1.17), и тогда возможно рассмотреть в плоскости Ox_1x_2 антиплоскую задачу пьезоэлектричества.

Обратим внимание на основные свойства кривых фазовых скоростей и медленности (обратных скоростей) в задачах B . Кривые фазовых скоростей $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ ограничены при любых режимах движения источника, тогда как кривые медленности $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ в зависимости от скорости \mathbf{w} и направлений $\mathbf{n}(\theta)$ могут быть не только ограниченными, но и неограниченными.

В случае, когда существуют выходящие из начала координат направления, которые не пересекают кривых медленности, все кривые медленности $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ будут являться неограниченными, что соответствует сверхзвуковой скорости движения источника волн.

Скорость перемещения источника будем называть транссейсмической, если найдется хотя бы одна ограниченная кривая рефракции, но также будут существовать и неограниченные.

Заметим, что кривые рефракции в задачах *B* заметно отличаются от соответствующих кривых задачи *A*.

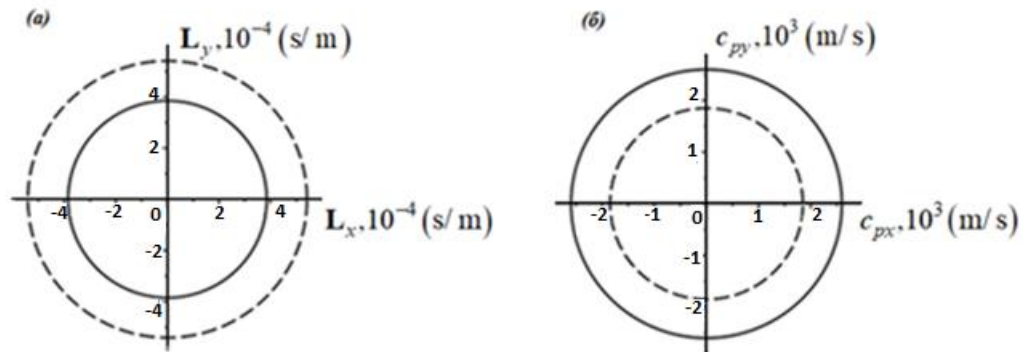


Рисунок 1.4. Кривые медленности (обратных скоростей) (а) и фазовых скоростей (б) для задачи *A*, когда скорость движения источника $\mathbf{w} = 0$ км/с. (Пунктирные кривые соответствуют случаю среды без учета пьезоэффекта.)

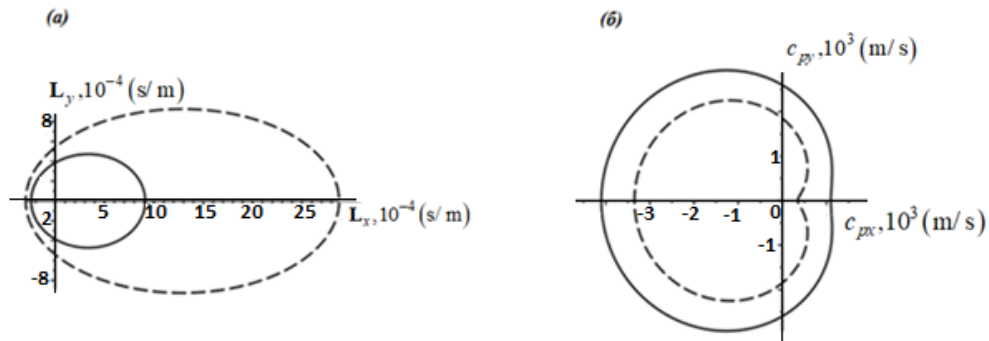


Рисунок 1.5. Кривые медленности (обратных скоростей) (а) и фазовых скоростей (б) для задачи *B*, при дозвуковом режиме движения источника $w = 1,5$ км/с. (Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.)

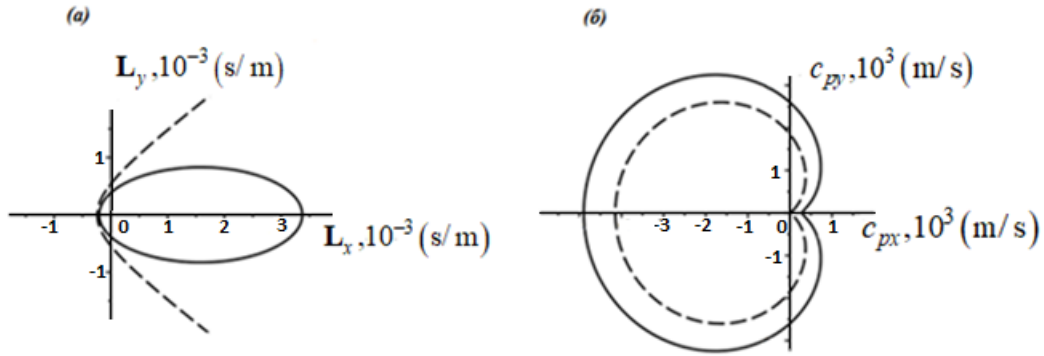


Рисунок 1.6. Кривые медленности (обратных скоростей) (а) и фазовых скоростей (б) для задачи В при $w=2,3$ км/с, когда реализуется дозвуковой режим движения в среде с пьезоэффектом и сверхзвуковой режим в среде без пьезоэффекта. (Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.)

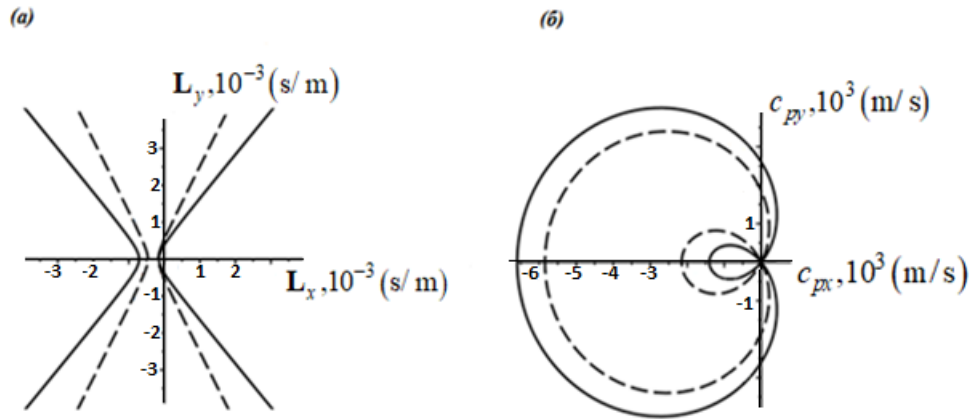


Рисунок 1.7. Кривые медленности (обратных скоростей) (а) и фазовых скоростей (б) для задачи В при сверхзвуковой скорости движения $w = 4$ км/с. (Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.)

Как видно из рисунков 1.4–1.7, учет пьезоэлектрического эффекта достаточно заметно количественно и качественно изменяет как кривые медленности $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$, так и кривые фазовых скоростей $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$.

Кривые $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ и $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ для задач A описываются окружностями (рисунок 1.4). Для задачи B , когда источник перемещается, кривые $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ и $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ значительно меняются, но в большинстве случаев они остаются достаточно схожими. Однако, как видно из рисунка 1.6, учет пьезоэффекта может и поменять тип режима движения (со сверхзвукового на дозвуковой).

Кроме того, из рис. 1.6, 1.7 можно также заметить, что в зависимости от типа движения источника (дозвуковой или сверхзвуковой режим) число распространяющихся волн меняется в разных направлениях $\mathbf{n}(\theta)$, и кривые $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ сильно деформируются. Так, когда источник движется с дозвуковой скоростью, кривые медленности увеличиваются в зонах по направлениям движения источника, а когда источник движется со сверхзвуковой скоростью, кривые медленности уходят на бесконечность. Соответственно, в случае движения источника со сверхзвуковой скоростью, кривые фазовых скоростей $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ самопересекаются в начале координат. Различные участки кривых фазовых скоростей до точки самопересечения в таком случае соответствуют фазовым скоростям быстрых и медленных волн.

1.2. Фундаментальные решения для плоской задачи электроупругости

В настоящем параграфе будут изучаться фундаментальные решения (ФР) для плоских задач B для безграничной электроупругой плоскости.

Как известно, для ряда пьезоэлектрических материалов возможна постановка задач $A - B$ о плоской деформации [123].

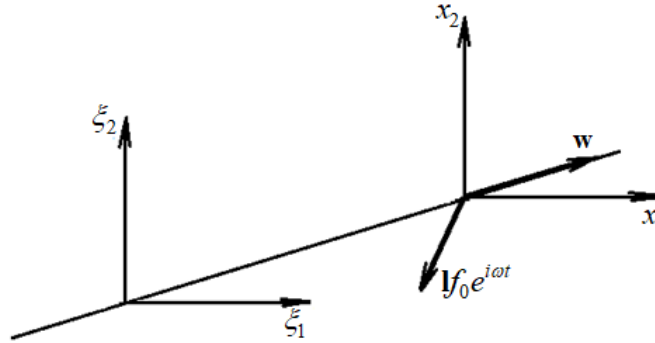


Рисунок 1.8. Подвижная и неподвижная системы координат и сосредоточенный источник для плоской задачи B

Векторы внешних нагрузок в таких задачах не могут зависеть от перпендикулярной к рассматриваемой плоскости координаты, а также компонента в направлении этой координаты будет нулевой.

Так, при рассмотрении задачи о плоской деформации в плоскости $O\xi_1\xi_2$ (рисунок 1.8) принимается, что при воздействии объемной плотности массовой силы \mathbf{b} и/или объемной плотности электрического заряда σ вида

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, 0\}; \quad b_i = b_i(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad i=1,2; \quad \sigma = \sigma(\xi_1, \xi_2, \tau) \quad (1.71)$$

генерируются поля перемещений и электрического потенциала, зависящие от переменных ξ_1, ξ_2 и τ :

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0\}; \quad u_i = u_i(\xi_1, \xi_2, \tau); \quad i=1,2; \quad \varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \tau). \quad (1.72)$$

Чтобы постановка задачи о плоской деформации (1.71), (1.72) была возможной, должны удовлетворяться следующие ограничения на модули жесткости и пьезомодули:

$$c_{14}^E = c_{15}^E = c_{24}^E = c_{25}^E = c_{46}^E = c_{56}^E = 0, \quad (1.73)$$

$$e_{14} = e_{15} = e_{24} = e_{25} = 0. \quad (1.74)$$

Аналогично, в задачах о плоской деформации в плоскости $O\xi_1\xi_3$, получаем следующие ограничения

$$c_{14}^E = c_{16}^E = c_{34}^E = c_{36}^E = c_{45}^E = c_{56}^E = 0, \quad (1.75)$$

$$e_{14} = e_{16} = e_{34} = e_{36} = 0, \quad (1.76)$$

а для задачи о плоской деформации в плоскости $O\xi_2\xi_3$ должны равняться нулю следующие модули:

$$c_{25}^E = c_{26}^E = c_{35}^E = c_{36}^E = c_{45}^E = c_{46}^E = 0, \quad (1.77)$$

$$e_{22} = e_{23} = e_{24} = e_{32} = e_{33} = e_{34} = 0. \quad (1.78)$$

Для определенности будем рассматривать плоскость $O\xi_1\xi_2$. Аналогично случаю антиплоской деформации, описанному в § 1.1, для обеспечения единственности решения (1.10) системы (1.11), (1.12), записанной для подвижной системы координат (1.8), применим ППП [1] с переходом к \mathcal{E} – задаче

$$\rho(i\omega_\varepsilon - \mathbf{w} \cdot \nabla_2^x)^2 \mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{A}(\nabla_2^x) \cdot \mathbf{v}_\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}(\nabla_2^x) \psi_\varepsilon = f_0 \mathbf{I} \delta(x_1, x_2), \quad (1.79)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^*(\nabla_2^x) \cdot \mathbf{v}_\varepsilon - \vartheta(\nabla_2^x) \psi_\varepsilon = q_0 \delta(x_1, x_2), \quad (1.80)$$

где $\nabla_2^x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$, $\mathbf{L}(\nabla_2^x) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{16}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{26}^E \\ c_{16}^E & c_{26}^E & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^* = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \\ e_{16} & e_{26} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\vartheta}^S = \begin{bmatrix} \vartheta_{11}^S & \vartheta_{12}^S \\ \vartheta_{12}^S & \vartheta_{22}^S \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

Под решением $\{\mathbf{v}, \psi\}$ системы уравнений (1.11), (1.12), как и раньше, будем понимать предел решения $\{\mathbf{v}_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$ системы уравнений (1.79), (1.80) при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{v}_\varepsilon; \quad \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_\varepsilon. \quad (1.82)$$

Аналогично антиплоской задаче для нахождения решения (1.79), (1.80) применение стандартной техники интегрального преобразования Фурье по x_1, x_2

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) \\ \Psi_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} \mathbf{v}_\varepsilon(x_1, x_2) \\ \psi_\varepsilon(x_1, x_2) \end{cases} e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2. \quad (1.83)$$

позволяет из (1.79), (1.80) получить следующие равенства

$$[\mathbf{A}(\mathbf{a}) - \rho\Omega_\varepsilon^2(\mathbf{a})\mathbf{E}] \cdot \mathbf{V}_\varepsilon + \gamma(\mathbf{a})\Psi_\varepsilon = f_0 \mathbf{1}, \quad (1.84)$$

$$\gamma^*(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{V}_\varepsilon - \vartheta(\mathbf{a})\Psi_\varepsilon = q_0, \quad (1.85)$$

$$\Omega_\varepsilon(\mathbf{a}) = \omega_\varepsilon + \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad (1.86)$$

Тогда из (1.84), (1.85) находим следующие формулы для \mathbf{V}_ε и Ψ_ε :

$$\Psi_\varepsilon = \frac{1}{\vartheta(\mathbf{a})} \gamma^*(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{V}_\varepsilon - \frac{1}{\vartheta(\mathbf{a})} q_0, \quad (1.87)$$

$$\mathbf{V}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}), \quad (1.88)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}) = f_0 \mathbf{1} + q_0 \frac{\gamma(\mathbf{a})}{\vartheta(\mathbf{a})}, \quad (1.89)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = \mathbf{A}(\mathbf{a}) - \rho\Omega_\varepsilon^2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\vartheta(\mathbf{a})} \gamma(\mathbf{a}) \gamma^*(\mathbf{a}). \quad (1.90)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} c_{11}^E \alpha_1^2 + 2c_{16}^E \alpha_1 \alpha_2 + c_{66}^E \alpha_2^2 & c_{16}^E \alpha_1^2 + (c_{12}^E + c_{66}^E) \alpha_1 \alpha_2 + c_{26}^E \alpha_2^2 \\ c_{16}^E \alpha_1^2 + (c_{12}^E + c_{66}^E) \alpha_1 \alpha_2 + c_{26}^E \alpha_2^2 & c_{66}^E \alpha_1^2 + 2c_{26}^E \alpha_1 \alpha_2 + c_{22}^E \alpha_2^2 \end{bmatrix}, \quad (1.91)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} e_{11}\alpha_1^2 + (e_{21} + e_{16})\alpha_1\alpha_2 + e_{26}\alpha_2^2 \\ e_{16}\alpha_1^2 + (e_{12} + e_{26})\alpha_1\alpha_2 + e_{22}\alpha_2^2 \end{bmatrix}, \quad (1.92)$$

$$\vartheta(\boldsymbol{\alpha}) = \vartheta_{11}^S\alpha_1^2 + 2\vartheta_{12}^S\alpha_1\alpha_2 + \vartheta_{22}^S\alpha_2^2. \quad (1.93)$$

Здесь, как и предыдущем параграфе, матрица $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ соответствует модифицированному за счет пьезоэффекта акустическому тензору Кристоффеля.

Для двумерной задачи в полярной системе координат (1.40) $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{a})$ можно разложить по собственным векторам, используя решение задачи на собственные значения

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{p} = \lambda(\mathbf{n})\mathbf{p}, \quad (1.94)$$

где

$$\lambda(\mathbf{n}) = \rho v^2(\mathbf{n}), \quad v^2(\mathbf{n}) = (c_p^B(\mathbf{n}) + w_n)^2, \quad (1.95)$$

λ – собственное значение, \mathbf{p} – собственный вектор, $c_p^B = \omega / \alpha$ – фазовая скорость плоских волн в задаче B , $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$.

В задаче A при $\mathbf{w} = 0$ для любого направления \mathbf{n} на плоскости, как известно, имеются две плоские акустические волны с фазовыми скоростями $v_j(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) > 0$, $j=1, 2$. Соответствующие этим фазовым скоростям векторы поляризации \mathbf{p}_j являются собственными векторами задачи (1.94) и могут быть выбраны ортонормированными ($\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$, $|\mathbf{p}_1| = 1$, $|\mathbf{p}_2| = 1$).

В задаче B при движущемся источнике, как можно заметить из (1.95), ситуация более сложная. Действительно, для прямых плоских волн задачи B , т.е. для волн с положительными фазовыми скоростями $c_{pj}^B(\mathbf{n}) > 0$, при фиксированных \mathbf{n} , $j=1, 2$, аналогично (1.68) – (1.70) имеем:

$$(c_{pj}^A(\mathbf{n}) > w_n) \wedge (c_{pj}^A(\mathbf{n}) \geq -w_n) \Rightarrow c_{pj}^B(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad (1.96)$$

$$c_{pj}^A(\mathbf{n}) < -w_n \Rightarrow c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^{(k-1)} c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n, \quad k=1, 2, \quad (1.97)$$

$$c_{pj}^A(\mathbf{n}) \leq w_n \Rightarrow \text{нет прямых плоских волн.} \quad (1.98)$$

Применяя теперь к (1.79), (1.80) обратное преобразование Фурье

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.99)$$

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.100)$$

аналогично антиплоской задаче получим:

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_0^{2\pi} \mathbf{I}_{v\varepsilon} d\theta, \quad (1.101)$$

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_0^{2\pi} I_{\psi\varepsilon} d\theta + \psi_{ns}, \quad (1.102)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{v\varepsilon} \\ I_{\psi\varepsilon} \end{Bmatrix} = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 v_j^2(\mathbf{n}) - \Omega_\varepsilon^2(\alpha \mathbf{n})} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \alpha} d\alpha, \quad (1.103)$$

$$\mathbf{F}_j^v = \mathbf{P}_j(\mathbf{n}) \cdot \left(f_0 \mathbf{1} + q \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{n})}{\vartheta(\mathbf{n})} \right), \quad (1.104)$$

$$F_j^\psi = \frac{\boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}_j^v}{\vartheta(\mathbf{n})}, \quad (1.105)$$

$$\mathbf{P}_j(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{n}) \mathbf{p}_j^*(\mathbf{n}), \quad (1.106)$$

$$\psi_{ns} = -\frac{q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\vartheta(\mathbf{n})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \alpha} d\alpha. \quad (1.107)$$

Здесь $\mathbf{p}_j(\mathbf{n})$ – ортонормированные векторы поляризации плоских волн из задачи (1.95); $\mathbf{P}_j(\mathbf{n})$ – сопутствующие матрицы; $v_j(\mathbf{n}) = c_{pj}(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n})$.

Все полученные формулы по структуре их подынтегральных выражений практически полностью совпадают с формулами, найденными для антиплоской задачи. Поэтому для их преобразований, повторяя все выкладки, в итоге получим выражения для амплитуд $\{\mathbf{v}, \psi\}$ ФР плоской задачи электроупругости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_0, \quad \psi = \psi_d + \psi_0 + \psi_{ns} \quad (1.108)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} = \frac{i}{4\pi\rho} \sum_{j=1}^2 \left(\Sigma'_k \right) (-1)^k \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ \mathbf{I}_{jk}^\psi \end{Bmatrix}, \quad (1.109)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ \mathbf{I}_{jk}^\psi \end{Bmatrix} = \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} R_{jk} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} \exp(-i\omega r \mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{e}_x) d\theta, \quad (1.110)$$

$$R_{jk} = \frac{H \left[(-1)^{(k-1)} c_{pj}^A(\theta) - w_n \right]}{c_{pj}^A(\theta) c_{pj}^{B(k)}(\theta)}, \quad (1.111)$$

$$\mathbf{F}_j^v = \mathbf{P}_j(\mathbf{n}) \cdot \left(f_0 \mathbf{1} + q \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{n})}{\vartheta(\mathbf{n})} \right), \quad (1.112)$$

$$F_j^\psi = \frac{\boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}_j^v}{\vartheta(\mathbf{n})}, \quad (1.113)$$

$$\mathbf{L}_j^{B(k)} = \frac{\mathbf{n}}{c_{pj}^{B(k)}(\theta)}, \quad \mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\cos(\theta - \tilde{\theta})}{c_{pj}^{B(k)}(\theta)}, \quad (1.114)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \psi_0 \end{Bmatrix} = \frac{i}{4\pi^2 \rho \omega} \sum_{j=1}^2 \int_{-\pi/2+\tilde{\theta}}^{\pi/2+\tilde{\theta}} \frac{1}{c_{pj}^A(\theta)} I_j^0 \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} d\theta, \quad (1.115)$$

$$I_j^0 = \int_0^{+\infty} \left(\alpha_j^+ \frac{\alpha_j^+ - i\eta}{(\alpha_j^+)^2 + \eta^2} - \alpha_j^- \frac{\alpha_j^- - i\eta}{(\alpha_j^-)^2 + \eta^2} \right) e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \eta} d\eta, \quad (1.116)$$

$$\alpha_j^\pm = \frac{\omega}{(\pm c_{pj}^A - w_n)}, \quad (1.117)$$

$$\psi_{ns} = -\frac{q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon(\mathbf{n})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-in \cdot x\alpha} d\alpha. \quad (1.118)$$

Наличие штриха у знака суммирования в (1.109), как и в (1.62), означает суммирование по индексу k наличие или его отсутствие в соответствии с тем, какой из случаев (1.96)–(1.98) реализуется.

Отметим, что полученные формулы (1.108)–(1.118) для ФР плоской задачи B электроупругости справедливы как для дозвуковых, так и для транс- и сверхзвуковых режимов движения. Кроме того, как в задаче A без движения и как в антиплоских задачах B из § 1.1, в выражениях для амплитуд $\{\mathbf{v}, \psi\}$ решений, можно выделить три типа слагаемых: динамические составляющие $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$, статические составляющие $\{\mathbf{v}_0, \psi_0\}$, а также несвязанный электростатический потенциал ψ_{ns} .

Численные результаты

В качестве численного примера рассмотрим электроупругий материал ниобата лития (LiNbO_3) с модулями жесткости, пьезомодулями и диэлектрическими коэффициентами, приведенными в [125]. Ниобат лития является материалом кристаллографического класса $3m$ тригональной сингонии, и для него задача электроупругости о плоской деформации может быть поставлена в плоскости Ox_2x_3 .

На рисунках 1.9–1.12 для этого материала слева представлены кривые медленности (кривые обратных скоростей) (a), а справа – кривые фазовых скоростей (b).

Отмеченные ранее для антиплоской электроупругой задачи свойства кривых медленности (обратных скоростей) и кривых фазовых скоростей будут во многом справедливы и для случая плоской задачи электроупругости.

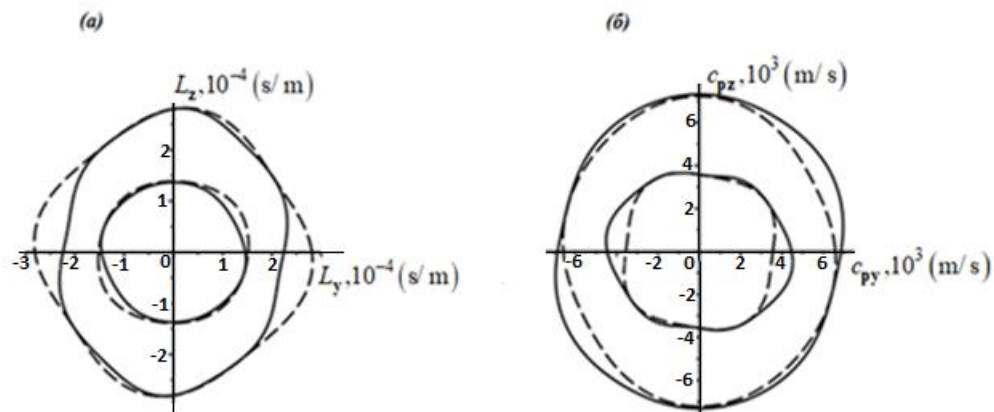


Рисунок 1.9. Кривые медленности $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ (а) и фазовых скоростей $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ (б) для задачи А, когда скорость движения источника $\mathbf{w} = 0$ км/с. (Пунктирные кривые соответствуют случаю среды без учета пьезоэффекта.)

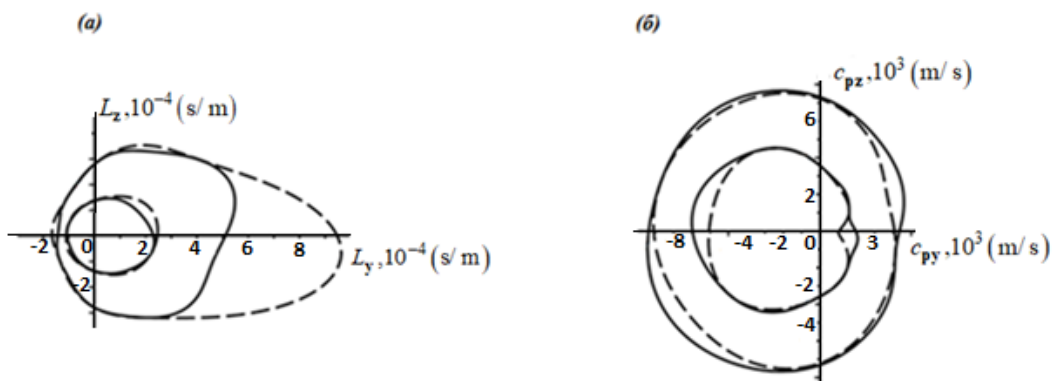


Рисунок 1.10. Кривые медленности (обратных скоростей) (а) и фазовых скоростей (б) для задачи В, при дозвуковом режиме движения источника $\mathbf{w} = 2,5$ км/с. (Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.)

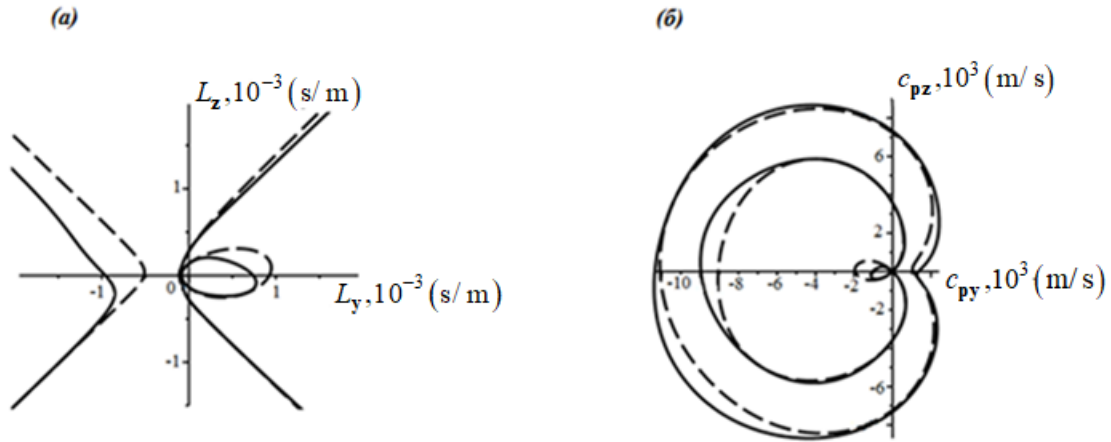


Рисунок 1.11. Кривые $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ (а) и $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ (б) для задачи В, при трансзвуковой скорости перемещения источника $\mathbf{w} = 5,5$ км/с. (Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.)

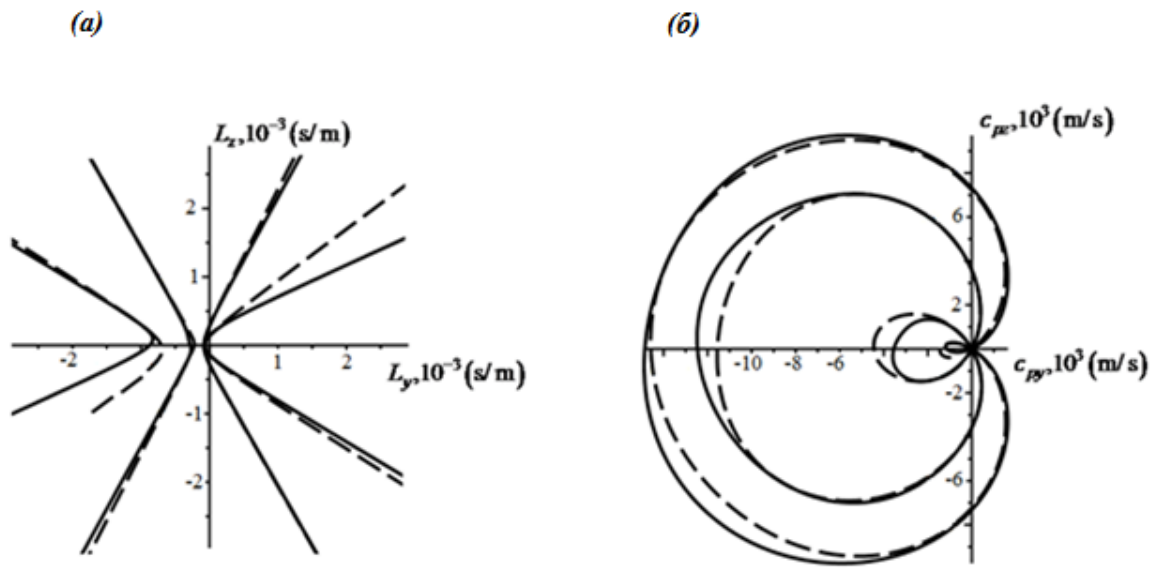


Рисунок 1.12. Кривые $\mathbf{L}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ (обратных скоростей) (а) и $\mathbf{c}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ (б) для задачи В, при сверхзвуковой скорости перемещения источника $\mathbf{w} = 8$ км/с. (Пунктирные кривые описывают случай среды без пьезоэффекта.)

Как видно из приведенных рисунков 1.9–1.12, связанности между механическими и электрическими полями приводят к достаточно заметному количественному и качественному изменению кривых обратных скоростей (медленности) и кривых фазовых

скоростей. Например, для задачи B при дозвуковом режиме движения источника (рисунок 1.10) учет пьезоэффекта значительно изменяет формы кривых фазовых скоростей и обратных скоростей. Обратим внимание, что кривые обратных скоростей сильно деформируются (вытягиваются в направлении движения), а при транс- и сверхзвуковых режимах становятся неограниченными. Пары частей этих кривых по отдельности отвечают быстрым и медленным волнам. При сверхзвуковом режиме здесь для плоской задачи, как и в § 1.1 для антиплоской задачи, кривые фазовых скоростей пересекаются в начале координат, а различные части этих кривых в левой полуплоскости соответствуют значениям фазовых скоростей быстрых и медленных волн.

1.3. Кинематика и энергетика дальнего поля для антиплоской и плоской задач электроупругости

Отметим, что полученные в §§ 1.1, 1.2 выражения для динамических составляющих ФР $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$ по структуре формул совпадают с соответствующими динамическими членами ФР аналогичных задач B теории упругости [29, 30]. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что установленные в [29, 30] асимптотики ФР в дальней зоне с учетом необходимых изменений будут справедливыми и для рассматриваемых здесь антиплоских и плоских задач B для электроупругих сред.

Именно, как и в [29, 30], для исследования дальних полей будем использовать классический метод перевала или метод стационарной фазы. Как известно, согласно этому методу, вклад от седловой точки θ_s в интеграл

$$\int \Phi(\theta) e^{iq(\theta)\omega r} d\theta \quad (1.119)$$

при больших значениях $\omega r \gg 1$ определяется выражением

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\omega r |q''(\theta_s)|}} \Phi(\theta_s) e^{i[q(\theta_s)\omega r + \frac{\pi}{4} \text{sign} q''(\theta_s)]}. \quad (1.120)$$

Здесь θ_s – седловая точка, которая является корнем уравнения

$$q'(\theta) = 0. \quad (1.121)$$

Для интегралов (1.110) при фиксированном k имеем:

$$\Phi(\theta) = \frac{H\left[(-1)^{(k-1)} c_{pj}^A(\theta) - w_n\right]}{c_{pj}^A(\theta) c_{pj}^{B(k)}(\theta)} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix}, \quad q(\theta) = -\mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{e}_x, \quad (1.122)$$

где $H[\dots]$ – функция Хевисайда.

Вычисляя производную по θ для фазовой функции $q(\theta)$ из второй формулы (1.122), получаем, что для выбранного направления \mathbf{e}_x в плоскости физических

координат $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_x$ седловая или стационарная точка θ_s определяется как корень уравнения

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\theta) \left| \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)}(\theta) \right| = \mathbf{e}_x \quad (1.123)$$

при выполнении условия $\mathbf{L}_j^{B(k)} \cdot \mathbf{e}_x > 0$, т.е. когда справедливо неравенство $\cos(\theta - \tilde{\theta}) > 0$.

В (1.123) $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\theta)$ является вектором групповой скорости в задаче B . Как и для многих других задач, групповая скорость здесь может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = \frac{\partial \omega_j^{B(k)}}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.124)$$

из дисперсионного соотношения задачи B

$$D(\mathbf{a}, \Omega(\mathbf{a})) = 0, \quad (1.125)$$

где $D(\mathbf{a}, \Omega(\mathbf{a})) = \det[\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) - \rho \Omega^2(\mathbf{a}) \mathbf{E}]$, $\Omega(\mathbf{a}) = \omega + \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}$, \mathbf{E} – единичная матрица, которая в случае плоских задач имеет размер 2×2 , а в случае антиплоских задач имеет размер 1×1 .

Как видно, вектор групповой скорости по формулам (1.124), (1.125) определяется в зависимости от волнового вектора \mathbf{a} . Если же вычислить групповую скорость как функцию волновой нормали $\mathbf{n}(\theta)$, то для $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n}(\theta))$ удобнее использовать выражение $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = (-1)^{(k-1)} \mathbf{c}_{gj}^A - \mathbf{w}$, где $k = 1$ или $k = 2$, $\mathbf{c}_{gj}^A = \mathbf{c}_{gj}^A(\mathbf{n}(\theta))$ – вектор групповой скорости для задачи A , который можно найти из (1.124), (1.125) при $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Проведя теперь вычисления и ряд преобразований для выражения (1.120) для функций $\Phi(\theta)$ и $q(\theta)$ из (1.122) в седловых точках θ_s , аналогично [29, 30] приходим к результирующим формулам для асимптотик волновых полей ФР в дальней зоне

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_d \\ \Psi_d \end{array} \right\} \approx \sum_j \left(\sum_k \right)' \sum_{m=1}^{N_j^{(k)}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \Psi_{jm}^{(k)} \end{array} \right\}, \quad \omega r \gg 1, \quad (1.126)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \psi_{jm}^{(k)} \end{Bmatrix} = (-1)^k \frac{iG_{jm}^{B(k)}}{\sqrt{2\pi r \rho}} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{jm}^{v(k)} \\ F_{jm}^{\psi(k)} \end{Bmatrix} e^{-i \left(\frac{\omega r}{|\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}|} + \frac{\pi}{4} \sigma_{jm}^{(k)} \right)}, \quad (1.127)$$

$$G_{jm}^{B(k)} = \frac{c_{pjm}^{B(k)}}{2 |\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}| c_{pjm}^A \sqrt{|k_{pjm}^{B(k)}|}}. \quad (1.128)$$

Здесь $|\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}| = |\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})|$ – модуль вектора групповой скорости; составляющие c_{pjm}^A , $c_{pjm}^{B(k)}$, $\mathbf{F}_{jm}^{v(k)}$, $F_{jm}^{\psi(k)}$, $k_{pjm}^{B(k)}$ являются функциями от стационарных значений вектора волновой нормали $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$, т.е. $c_{pjm}^A = c_{pjm}^A(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$, и т.д., $k_{pjm}^{B(k)}$ – кривизна кривой обратных скоростей, $\sigma_{jm}^{(k)} = \text{sign } k_{pjm}^{B(k)}$, $N_j^{(k)}$ – число стационарных значений $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$.

Как видно из (1.126)–(1.128), в дальней зоне асимптотиками волновых полей являются не связанные между собой пары цилиндрических волн $\{ \mathbf{v}_{jm}^{(k)}, \psi_{jm}^{(k)} \}$. Число этих пар цилиндрических волн равно числу стационарных значений вектора волновой нормали (седловых точек) $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$. Поскольку для стационарных значений $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$ вектор групповой скорости $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$ совпадает по направлению с вектором \mathbf{X} , связанным с физической координатной плоскостью, то, как и в задачах B теории упругости, число волн, распространяющихся в направлении \mathbf{X} находим как количество точек пересечения луча $O\mathbf{X}$ с кривыми $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$.

Скорость перемещения комбинированного источника значительно влияет на количество волн, которые распространяются в различных направлениях, аналогично соответствующим задачам теории упругости [29, 30]. Например, количество волн меняется от нуля до двух для антиплоских задач пьезоэлектричества, и от нуля до четырех для плоских задач пьезоэлектричества. Кроме того, как и в других задачах с движением комбинированного источника в среде, при транс- и сверхзвуковых скоростях распространяющиеся волны локализуются внутри конусов Маха, причем эти волны подразделяются на быстрые и медленные.

Если представить вектор групповой скорости в полярной системе координат $\{r, \tilde{\theta}\}$, то в стационарной точке радиальная компонента будет равна его модулю, а угловая компонента будет равна нулю: $c_{gmr}^B = |\mathbf{c}_{gim}^B|$, $c_{gim\tilde{\theta}}^B = 0$. Эти условия являются общими для однородных цилиндрических волн в дальней зоне [126]. Поэтому, как можно показать, для цилиндрических волн (1.127) групповая скорость \mathbf{c}_{gim}^B является скоростью переноса энергий (лучевой скоростью) для неподвижного и для подвижного наблюдателей, а также имеют место энергетические соотношения общего характера [126].

Именно, выполняются формулы [126] для осредненных за период колебаний энергий цилиндрических волн $\langle E^{\xi x} \rangle$ и $\langle E^x \rangle$, вычисляемых в подвижной системе координат неподвижным (ξx) и подвижным (x) наблюдателями, соответственно, а также имеют место формулы, связывающие компоненты осредненных векторов переноса энергии (векторов групповой скорости, векторов Умова-Пойтинга) $\langle \mathbf{J}^{\xi x} \rangle$, $\langle \mathbf{J}^x \rangle$ с осредненными энергиями

$$\begin{aligned} \langle E^{\xi x} \rangle &= \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (\mathbf{a}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*, \\ \langle E^x \rangle &= \frac{1}{2} \rho \omega \Omega (\mathbf{a}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*, \end{aligned} \quad (1.129)$$

$$\langle J_r^{\xi x} \rangle = c_{gr}^B \langle E^{\xi x} \rangle, \quad \langle J_{\tilde{\theta}}^{\xi x} \rangle = 0,$$

$$\langle J_r^x \rangle = c_{gr}^B \langle E^x \rangle, \quad \langle J_{\tilde{\theta}}^x \rangle = 0,$$

где угловые скобки означают осредненные за период колебаний $T = 2\pi / \omega$ величины

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\bullet) dt.$$

Подставляя (1.127), (1.128) в (1.129), приходим к достаточно простым формулам для полярных радиальных компонент векторов Умова-Пойтинга цилиндрических волн в дальней зоне:

$$\langle J_{rjm}^{\xi x(k)} \rangle = \frac{\omega^2 |\mathbf{F}_{jm}^{v(k)}|^2}{16\pi\rho r c_{grjm}^{B(k)} |k_{rjm}^{B(k)}|},$$

$$\langle J_{rjm}^{x(k)} \rangle = \frac{\omega}{\Omega(\mathbf{\alpha}_{jm}^{(k)})} \langle J_{rjm}^{\xi x(k)} \rangle. \quad (1.130)$$

Из формул (1.129), (1.130) следует важный вывод, который также является общим для задач с движущимися источниками. При транс- или при сверхзвуковой скорости перемещения источника, когда существуют быстрые и медленные волны, для медленной волны с волновым вектором $\mathbf{\alpha}_{jm}^{(2)}$ кажущаяся частота колебаний $\Omega(\mathbf{\alpha}_{jm}^{(2)})$ является отрицательной: $\Omega(\mathbf{\alpha}_{jm}^{(2)}) < 0$. Поэтому, в силу этого неравенства и соотношений (1.129), (1.130), будут иметь место энергетические неравенства $\langle E_{jm}^{x(2)} \rangle < 0$, $\langle J_{rjm}^{x(2)} \rangle < 0$. Эти неравенства в свою очередь означают, что при транс- и сверхзвуковых скоростях перемещения источника медленные волны переносят отрицательную энергию, измеряемую подвижным наблюдателем в подвижной системе координат. Данное свойство является общим для медленных волн в задачах B при трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях комбинированного источника и не противоречит основным энергетическим постулатам, поскольку для неподвижного наблюдателя соответствующие величины будут положительными: $\langle E_{jm}^{\xi x(2)} \rangle > 0$, $\langle J_{rjm}^{\xi x(2)} \rangle > 0$.

Численные результаты

В качестве иллюстрации приведенной выше информации о числе распространяющихся волн вначале рассмотрим задачу электроупругости об антиплоской деформации в плоскости Ox_1x_2 для пьезокерамики PZT-4. Кривые групповых скоростей ФР для данного случая приведены на рисунках 1.13, 1.14.

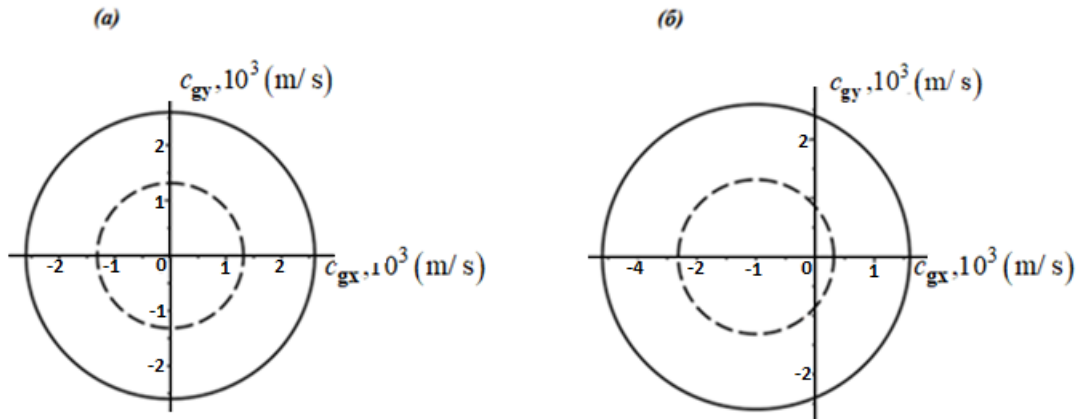


Рисунок 1.13. Кривые групповых скоростей антиплоской задачи *A* электроупругости при скорости движения источника $w=0$ км/с (*a*) и соответствующей задачи *B* при дозвуковом режиме движения источника $w=1$ км/с задачи *B* (*б*). (Пунктирные кривые относятся к случаю среды без пьезоэффекта.)

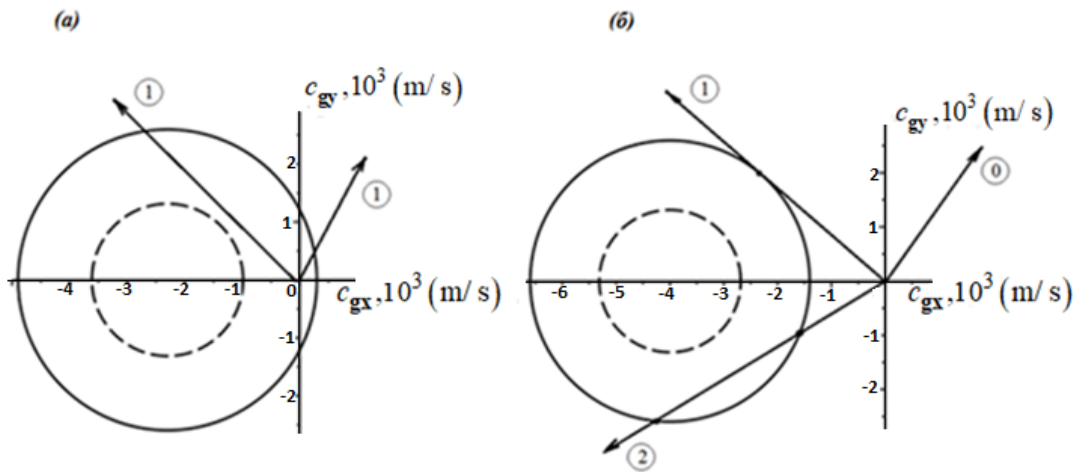


Рисунок 1.14. Кривые групповых скоростей задачи электроупругости для антиплоской деформации для задачи *B* при скорости движения источника $w=2,7$ км/с – дозвуковой режим в среде с пьезоэффектом и сверхзвуковой режим в среде без пьезоэффекта (*a*), при сверхзвуковом режиме движения источника $w=4$ км/с задачи *B* (*б*). (Пунктирные кривые относятся к случаю среды без пьезоэффекта.)

Как видно из рис. 1.13, 1.14 здесь для различных направлений в зависимости от режима скорости источника возможны случаи отсутствия распространяющихся волн и случаи распространения одной или двух волн. Кривые групповых скоростей здесь являются окружностями с центром в начале координат при $w=0$ (задача *A*) и при

ненулевой скорости движения (задача *B*) кривые сдвигаются влево на вектор $-\mathbf{w}$ относительно начала координат.

На рисунках 1.15, 1.16 изображены кривые групповых скоростей ФР плоской задачи электроупругости для ниобата лития (LiNbO_3) в плоскости Ox_2x_3 . Здесь наблюдаются случаи, когда вдоль различных направлений число распространяющихся волн изменяется от 0 до 4, что отмечалось выше.

Отметим, что при любых режимах движения источника, кривые групповых скоростей остаются ограниченными. В отличие от кривых фазовых скоростей и кривых обратных скоростей (медленности), которые существенно деформируются при ненулевой скорости движения источника, кривые групповых скоростей здесь получаются просто в результате перемещения кривых групповых скоростей задачи *A* на вектор скорости влево, т.е. на вектор $(-\mathbf{w})$. Поэтому естественно, что число кривых групповых скоростей не изменяется в задаче *B* по сравнению с числом этих кривых в задаче *A*.

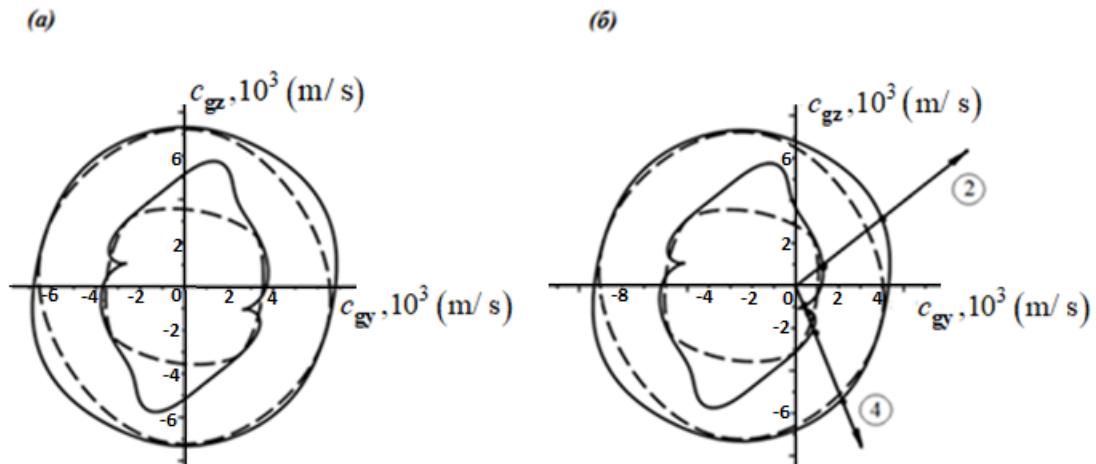


Рисунок 1.15. Кривые групповых скоростей в плоской задаче электроупругости для ниобата лития: при нулевой скорости движения источника ($\mathbf{w} = 0$), т.е. для задачи *A* (*a*); при дозвуковом режиме движения источника $w = 2,5$ км/с в задаче *B* (*б*). (Пунктирные кривые отвечают случаю среды без пьезоэффекта.)

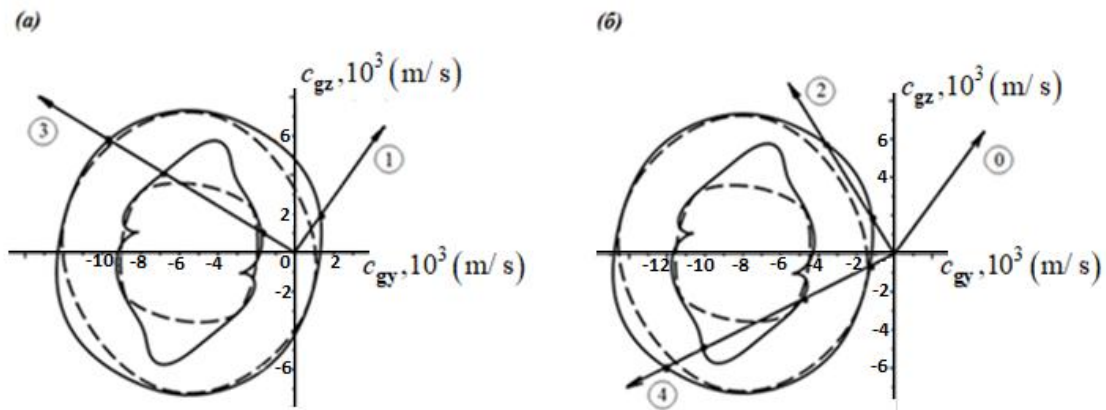


Рисунок 1.16. Кривые групповых скоростей задачи в плоской задаче электроупругости для задачи B для ниобата лития: при трансзвуковой скорости движения источника $w = 5,5$ км/с (а); при сверхзвуковой скорости движения источника $w = 8$ км/с (б). (Пунктирные кривые отвечают случаю среды без пьезоэффекта.)

Как видно из рисунков 1.14 (б), 1.16 (б), при сверхзвуковом режиме движения источника кривые групповых скоростей целиком смещаются в левую полуплоскость, что отражает естественный для сверхзвуковых скоростей факт отсутствия волн перед источником. Участки быстрых и медленных волн для кривых групповых скоростей являются частями одних и тех же кривых, разграниченных линиями конусов Маха, т.е. касательными к этим кривым, направленными из начала координат.

1.4. Фундаментальные решения, кинематика и энергетика дальнего поля для пространственной задачи электроупругости

В данном параграфе исследуются фундаментальные решения (ФР) для трехмерных задач для электроупругого (пьезоэлектрического) пространства при комбинированных источниках волн.

Как и ранее, будем предполагать, что источник является сосредоточенным и комбинированным, т.е. перемещается с постоянной скоростью \mathbf{w} и колеблется с круговой частотой ω . Для такого источника будем использовать те же обозначения, что и в (1.7)

$$\begin{cases} \mathbf{b}(\xi, \tau) \\ \sigma(\xi, \tau) \end{cases} = \begin{cases} f_0 \mathbf{l} \\ q_0 \end{cases} \delta(\xi - \mathbf{w}\tau) \exp(i\omega\tau), \quad (1.131)$$

где f_0 , q_0 – постоянные значения амплитуд массовой силы и электрического заряда, соответственно; \mathbf{l} – единичный вектор, определяющий направление массовой силы \mathbf{b} .

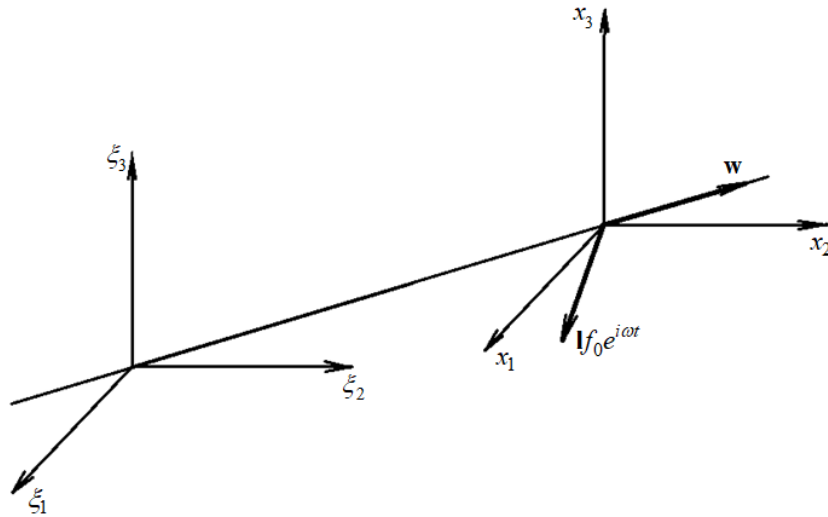


Рисунок 1.17. Подвижная и неподвижная системы координат и сосредоточенный источник для пространственной задачи B

Аналогично антиплоской и плоской задачам, в системе $Ox_1x_2x_3$ (1.8), (1.9), перемещающейся со скоростью движения источника (1.31) (Рисунок 1.17), существует режим (1.10) гармонических колебаний.

Представим уравнения электроупругости (1.5), (1.6) в этой системе координат и используем формулы (1.131), (1.8), (1.9). Тогда для амплитудных значений функций перемещений \mathbf{v} и электрического потенциала ψ из (1.10) имеем следующую систему уравнений ($\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$)

$$\rho(i\omega - \mathbf{w} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} - \mathbf{A}(\nabla) \cdot \mathbf{v} - \gamma(\nabla)\psi = f_0 \mathbf{l} \delta(\mathbf{x}), \quad (1.132)$$

$$\gamma^*(\nabla) \cdot \mathbf{v} - \varepsilon(\nabla)\psi = q_0 \delta(\mathbf{x}), \quad (1.133)$$

где

$$\mathbf{A}(\nabla) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{e}^E \cdot \mathbf{L}(\nabla),$$

$$\gamma(\nabla) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{e}^* \cdot \nabla, \quad \varepsilon(\nabla) = \nabla^* \cdot \varepsilon^S \cdot \nabla,$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.134)$$

Как и в задачах об антиплоской и плоской деформациях, для обеспечения единственности решения используем ППП [1], и, таким образом, в системе (1.132), (1.133) перейдем к ε – задаче:

$$\rho(i\omega_\varepsilon - \mathbf{w} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{A}(\nabla) \cdot \mathbf{v}_\varepsilon - \gamma(\nabla)\psi_\varepsilon = f_0 \mathbf{l} \delta(\mathbf{x}), \quad (1.135)$$

$$\gamma^*(\nabla) \cdot \mathbf{v}_\varepsilon - \varepsilon(\nabla)\psi_\varepsilon = q_0 \delta(\mathbf{x}). \quad (1.136)$$

Под решением $\{\mathbf{v}, \psi\}$ системы уравнений (1.132), (1.133), как и раньше, будем понимать предел решения $\{\mathbf{v}_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$ системы уравнений (1.135), (1.136) при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{v}_\varepsilon; \quad \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_\varepsilon. \quad (1.137)$$

Решениями системы (1.132), (1.133) являются плоские объемные волны вида:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = A_v \mathbf{p} \exp(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.138)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = A_\psi \exp(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}),$$

где A_v, A_ψ – постоянные значения амплитуд волн; \mathbf{p} – единичный ($|\mathbf{p}| = 1$) вектор поляризации, определяющий направление смещений в волне перемещений; $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – волновой вектор, в котором будем выделять единичный вектор волновой нормали \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1, \boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$).

Подставляя представления для объемных волн (1.138) в систему дифференциальных уравнений (1.135), (1.136), получаем задачу на собственные значения λ и собственные векторы \mathbf{p} :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{p} = \lambda(\mathbf{n}) \mathbf{p}, \quad (1.139)$$

где

$$\lambda(\mathbf{n}) = \rho v^2(\mathbf{n}), \quad v(\mathbf{n}) = |c_p^B(\mathbf{n}) + w_n|, \quad (1.140)$$

$w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ – проекция вектора скорости источника на волновую нормаль; $v(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n})$,

$c_p^B(\mathbf{n}) = \frac{\omega}{\alpha}$ – фазовые скорости плоских волн в задачах A и B , соответственно;

$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{n}) = \mathbf{A}(\mathbf{n}) + \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{n}) \otimes \boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{n})}{\vartheta(\mathbf{n})}$ – модифицированный за счет пьезоэлектрического эффекта

акустический тензор Кристоффеля.

Для задачи A электроупругого пространства, как и для соответствующих задач теории упругости, в любом направлении волновой нормали \mathbf{n} распространяются три объемные плоские волны, фазовые скорости которых имеют вид: $v_j(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}), j=1,2,3$,

($c_{pj}^A(\mathbf{n}) > 0$), и с собственными векторами \mathbf{p}_j , которые могут быть ортонормированными:

$$\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k = \delta_{jk}.$$

В задаче B , как видно из (1.140), для прямых плоских волн с положительной фазовой скоростью $c_{pj}^B > 0$ при фиксированных направлениях волновой нормали \mathbf{n} и индексе $j=1,2,3$ возможны три различные ситуации, которые были отмечены выше для двумерных задач электроупругости (формулы (1.68)–(1.70) для антиплоской задачи и формулы (1.96)–(1.98) для плоской задачи). В первой ситуации распространяется одна волна с фазовой скоростью $c_{pj}^B(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n$, во второй ситуации имеется две волны со скоростями $c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^{(k-1)} c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n$, $k=1, 2$, ($k=1$ – быстрая волна, $k=2$ – медленная волна), и наконец в третьей ситуации прямые плоские волны в данном направлении \mathbf{n} отсутствуют. Однако, теперь для пространственной задачи эти три ситуации могут иметь место для волн с индексами $j=1,2,3$. Как легко видеть из (1.139), (1.140), собственные векторы или векторы поляризации \mathbf{p}_j плоских волн для соответствующих задач A и B совпадают между собой, естественно, за исключением той третьей ситуации, когда в задаче B для выбранного направления волновой нормали \mathbf{n} прямые плоские волны отсутствуют, а в противоположных направлениях имеются две быстрые и медленные волны, имеющие единый вектор поляризации.

Как и в двумерных задачах, введем в рассмотрение векторы фазовых скоростей $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}$ и векторы обратных скоростей (векторы медленностей или векторы рефракции) $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ задачи B :

$$\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) = c_{pj}^{B(k)} \mathbf{n} = [(-1)^{(k-1)} c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n] \mathbf{n} = (-1)^{(k-1)} \mathbf{c}_{pj}^A(\mathbf{n}) - \mathbf{w}, \quad (1.141)$$

$$\mathbf{L}_j^{B(k)} = (c_{pj}^{B(k)})^{-1} \mathbf{n}, \quad (1.142)$$

где $\mathbf{c}_{pj}^A(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) \mathbf{n}$ – вектор фазовой скорости в задаче A .

Для плоских объемных волн (1.10), (1.138) задачи B дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$D_B(\mathbf{a}, \omega) = 0, \quad (1.143)$$

где $D_B(\boldsymbol{\alpha}, \omega) = \det[\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}) - \rho \Omega^2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{E}]$, $\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \omega + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{E} – единичная матрица размера 3×3 .

Решения уравнения (1.143) для круговой частоты ω , как функции волнового вектора $\boldsymbol{\alpha}$, можно представить в виде набора трех гиперповерхностей:

$$\omega = \omega_j^{B(k)}(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha \mathbf{c}_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}), \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}, \quad j=1,2,3. \quad (1.144)$$

Дифференцируя (1.144) по волновому вектору $\boldsymbol{\alpha}$, получаем выражение для вектора групповой скорости:

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = \frac{\partial \omega_j^{B(k)}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}_{pj}^{B(k)} + (\mathbf{E} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_{pj}^{B(k)}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (1.145)$$

или, принимая во внимание равенства (1.141), имеем также формулу

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = (-1)^{(k-1)} \mathbf{c}_{gj}^A(\mathbf{n}) - \mathbf{w}, \quad (1.146)$$

где $\mathbf{c}_{gj}^A(\mathbf{n})$ – вектор групповой скорости задачи A .

Аналогично случаям задач теории упругости, в задаче B для плоских волн в электроупругом пространстве обратим внимание на имеющие большое значение равенства, которые для задач A [125] и B [131] для упругого пространства известны:

$$\mathbf{c}_{pj}^{B(k)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}_{gj}^{B(k)}, \quad \mathbf{n} \cdot d\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = 0, \quad (1.147)$$

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)} = 1, \quad \mathbf{c}_{gj}^{B(k)} \cdot d\mathbf{L}_j^{B(k)} = 0, \quad (1.148)$$

причем суммирование по индексам j и k в (1.147), (1.148) отсутствует.

Из формул (1.147), (1.148), получим свойства основных волновых поверхностей. Аналогично рассмотренным ранее волновым кривым в двумерных задачах, к таким поверхностям можно отнести поверхности фазовых скоростей $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)} = \mathbf{c}_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n})$, поверхности обратных скоростей (медленностей или рефракции) $\mathbf{L}_j^{B(k)} = \mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n})$ и поверхности

групповых скоростей (волновые поверхности или поверхности лучевых скоростей) $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = \mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n})$. Все эти поверхности в задачах B с подвижным источником при $\mathbf{w} \neq 0$ в общем случае не являются центрально симметричными, т.е. они не инвариантны при замене вектора волновой нормали на противоположный ($\mathbf{n} \leftrightarrow (-\mathbf{n})$). Кроме того, у этих поверхностей в задачах B также может не сохраняться симметрия, связанная с группой сингонии электроупругого материала. Как и в случае антиплоских и плоских задач, поверхности $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}$ и $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ являются ограниченными при любых скоростях перемещения источника. Между тем, поверхности рефракции $\mathbf{L}_j^{B(k)}$, как и в ранее рассмотренных 2D задачах, в соответствии с различными скоростями перемещения источника также и неограниченными.

Для пространственной задачи электроупругости, как и в 2D задачах, рассмотрим классификацию скорости перемещения источника в зависимости от характеристик волновых поверхностей. Итак, скорость перемещения источника будем называть дозвуковой (досейсмической) в случае, когда все поверхности $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ ограниченные, и всегда найдутся пересечения луча, выходящего из начала координат в произвольном направлении, с поверхностью рефракции. В случае, когда существует хотя бы одна ограниченная поверхность $\mathbf{L}_j^{B(k)}$, но также найдутся и неограниченные, то такую скорость перемещения источника будем считать трансзвуковой (транссейсмической). Если же в трехмерном пространстве найдутся направления, когда луч не будет пересекать ни одну поверхность $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ (все поверхности являются неограниченными), тогда скорость перемещения источника назовем сверхзвуковой (сверхсейсмической).

Поверхности $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ для задачи B различаются значительно сильнее по сравнению с задачей A . Отметим, что количество поверхностей $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ зависит от скорости перемещения источника: от трех при дозвуковых скоростях до шести при сверхзвуковых скоростях (или от двух до шести, когда кратные значения скоростей принимать за одно). В соответствии с

(1.146) поверхности $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ для задачи B могут быть получены из соответствующих поверхностей $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ задачи A путем их смещения на вектор $(-\mathbf{w})$, тогда для различных скоростей перемещения источника число поверхностей $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ не меняется. В случае трансзвуковой и сверхзвуковой скорости перемещения источника две части $\mathbf{c}_{gj}^{B(1)}$ и $\mathbf{c}_{gj}^{B(2)}$ поверхности групповых скоростей фактически составляют единую замкнутую поверхность. Однако, в случае (1.69) для фиксированных \mathbf{n} и j имеются две плоские волны (быстрая и медленная) с обратными скоростями, принадлежащими двум разным поверхностям обратных скоростей. Зоны существования быстрых и медленных волн (1.69) ограничены асимптотически поверхностями $\mathbf{c}_{pj}^A(\mathbf{n}) \pm w_n \mathbf{n} = 0$.

Хотя характеристические поверхности плоских, цилиндрических и сферических волн в задачах A и B имеют многочисленные отличия, имеются и общие свойства, следующие из (1.139), (1.147), (1.148). Так, классификация квазипродольных и квазипоперечных волн не изменяется для задач A и B , поскольку векторы поляризации \mathbf{p}_j из (1.139), как легко можно заметить, не зависят от скорости \mathbf{w} .

Поверхности фазовых скоростей $\mathbf{c}_p(\mathbf{n})$ ($\mathbf{c}_{pj}^A(\mathbf{n})$ или $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n})$) и поверхности обратных скоростей $\mathbf{L}(\mathbf{n})$ ($\mathbf{L}_j^A(\mathbf{n})$ или $\mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n})$) связаны между собой операцией инверсии относительно единичной сферы $|\mathbf{n}|=1$ с центром инверсии в начале координат, поскольку при фиксированном \mathbf{n} векторы \mathbf{c}_p и \mathbf{L} направлены вдоль этого вектора, и $\mathbf{c}_p \cdot \mathbf{L} = 1$.

Из (1.148) следует, что вектор групповой скорости \mathbf{c}_g (\mathbf{c}_{gj}^A или $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$) в каждой точке поверхности обратных скоростей \mathbf{L} ортогонален к касательной плоскости ($\mathbf{c}_g \cdot d\mathbf{L} = 0$). Справедливо и обратное, вектор волновой нормали \mathbf{n} плоской волны, групповая скорость которой равна $\mathbf{c}_g(\mathbf{n})$, ортогонален к касательной плоскости в соответствующей точке волновой поверхности \mathbf{c}_g , что следует из второй формулы (1.147): $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{c}_g = 0$.

Поверхности фазовых и групповых скоростей (\mathbf{c}_p и \mathbf{c}_g) связаны между собой также одинаково для задач A и B , что следует из формул:

$$\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{n} = c_p; \quad \mathbf{c}_p = c_p \mathbf{n}.$$

Наконец, поверхность групповых скоростей \mathbf{c}_g в задачах A и B является огибающей семейства плоскостей, проведенных через конец вектора фазовой скорости \mathbf{c}_p перпендикулярно этому вектору [125].

Для нахождения ФР применяем стандартную технику, которая уже использовалась для нахождения ФР антиплоской и плоской задач электроупругости, но с очевидными изменениями, связанными с трехмерностью задачи. Именно, здесь применяется ППП с переходом к \mathcal{E} – задаче с малым поглощением, трехмерное преобразование Фурье по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 , методы теории функции комплексных переменных, включая при нахождении обратного преобразования Фурье методы контурного интегрирования и лемму Жордана. В результате, после ряда аналогичных двумерным задачам преобразований, для амплитуд \mathbf{v} и ψ ФР задачи B для электроупругого пространства получаем следующие интегральные представления:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_0, \quad \psi = \psi_d + \psi_0 + \psi_s, \quad (1.149)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} = \frac{i\omega}{8\pi^2 \rho} \sum_{j=1}^3 \left(\sum_k' \right) (-1)^k \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ I_{jk}^\psi \end{Bmatrix}, \quad (1.150)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ I_{jk}^\psi \end{Bmatrix} = \iint_{\substack{|\mathbf{n}|=1, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq 0}} R_{jk} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} \exp(-i\omega \mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}) dS, \quad (1.151)$$

$$R_{jk} = \frac{H \left[(-1)^{(k-1)} c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n \right]}{c_{pj}^A(\mathbf{n}) \left(c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) \right)^2}, \quad (1.152)$$

$$\mathbf{F}_j^v = \mathbf{P}_j(\mathbf{n}) \cdot \left(f_0 \mathbf{1} + q_0 \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{n})}{\vartheta(\mathbf{n})} \right), \quad (1.153)$$

$$F_j^\psi = \frac{\gamma^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}_j^v}{\vartheta(\mathbf{n})}, \quad (1.154)$$

$$\mathbf{P}_j(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_j^*(\mathbf{n}), \quad (1.155)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_s \\ \psi_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{8\pi^2 \rho R} \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{v_j^2(\mathbf{n}) - w_n^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} d\theta', \quad (1.156)$$

$$\psi_s = \frac{q_0}{8\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\vartheta(\mathbf{n})}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{n}'. \quad (1.157)$$

Здесь $R = |\mathbf{x}|$; \mathbf{e}'_k – ортогональный базис повернутой декартовой системы координат с ортом \mathbf{e}'_3 , направленным вдоль оси \mathbf{x} ; $|\mathbf{e}'_1| = |\mathbf{e}'_2| = 1$; $\mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{x}}{R}$; \mathbf{Q} – ортогональная матрица перехода из исходной системы координат в повернутую: $\mathbf{n}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$.

Формулы (1.149) – (1.157) определяют ФР трехмерных динамических задач теории электроупругости при комбинированных источниках в виде, пригодном для различных режимов движения.

В полученных выражениях для амплитуд ФР $\{\mathbf{v}, \psi\}$, как и в случаях двумерных задач электроупругости, содержатся в (1.150) динамические составляющие $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$, статические слагаемые $\{\mathbf{v}_0, \psi_0\}$ в (1.156), и несвязанный квазиэлектростатический потенциал ψ_{ns} в (1.157), который можно определить из решения несвязанной задачи электростатики диэлектриков.

Кинематика и энергетика дальнего поля

Для построения асимптотики дальнего поля, как и в двумерных задачах, важны только динамические составляющие $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$ ФР. Их структура, как можно заметить, в основном идентична соответствующим членам ФР для трехмерных задач теории упругости [131]. Это позволяет для вывода асимптотики дальних полей использовать

результаты [131], полученные по методу стационарной фазы, и их анализ с учетом необходимых изменений, обусловленных наличием членов с электромеханической связанностью. В предположении наличия только простых стационарных точек, которое как правило выполняется, итоговые формулы для дальнего поля $\omega R \gg 1$ ($R = |\mathbf{x}|$) можно представить в форме:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \Psi_d \end{Bmatrix} \approx \sum_{j=1}^3 \left(\sum_k \right)' \sum_{m=1}^{N_j^{(k)}} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \Psi_{jm}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (1.158)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \Psi_{jm}^{(k)} \end{Bmatrix} \approx \frac{i}{4\pi\rho R} G_{jm}^{(k)} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v(\mathbf{n}_{jm}^{(k)}) \\ F_j^\psi(\mathbf{n}_{jm}^{(k)}) \end{Bmatrix} \exp \left(-i \left(\frac{\omega R}{|c_{gjm}^{B(k)}|} + \frac{\pi}{4} \sigma_{jm}^{B(k)} \right) \right), \quad (1.159)$$

$$G_{jm}^{(k)} = -\frac{\omega}{\Omega(\alpha_{jm}^{(k)}) |c_{gjm}^{B(k)}| \sqrt{|k_{pjm}^{B(k)}|}}, \quad (1.160)$$

где $|c_{gjm}^{B(k)}| = |\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})|$ – модуль вектора групповой скорости; $\sigma_{jm}^{B(k)} = \text{sign } k_{1jm}^{B(k)} + \text{sign } k_{2jm}^{B(k)}$ – сигнатура, $k_{pjm}^{B(k)}$ – полная кривизна, $k_{1jm}^{B(k)}$, $k_{2jm}^{B(k)}$ – главные кривизны поверхности обратных скоростей $\mathbf{L}_{jm}^{B(k)} = \mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$ в стационарных точках $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$, соответственно; $N_j^{(k)}$ – число стационарных точек. Стационарные значения вектора волной нормали $\mathbf{n}_{jm}^{B(k)}$ на поверхности медленности $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ здесь можно определить из равенства

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} \left| \mathbf{x} \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)} \right| = \mathbf{x}, \quad (1.161)$$

при условии $\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}_j^{B(k)} \geq 0$.

Согласно (1.161), для заданного направления \mathbf{x} стационарные точки на поверхности обратных скоростей $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ находятся как такие точки $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$, для которых вектор групповой скорости $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$, направленный по нормали к $\mathbf{L}_j^{B(k)}$, параллелен \mathbf{x} . При этом по

дополнительному условию к (1.161) вектор волновой нормали $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$ должен образовывать с вектором $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ острый угол.

Как видно из (1.158) – (1.160), в электроупругом пространстве вдали от источника в подвижной системе координат поле перемещений и поле электрического потенциала можно разделить на отдельные волны со сферическим фронтом (1.159), (1.160), убывающие по амплитуде как $1/R$.

В силу условий (1.161), в сферической системе координат $(R, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta})$, связанной с подвижной декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$, среди компонент вектора групповой скорости в стационарных точках $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$ только радиальная компонента не равна нулю, и, таким образом, выполняются формулы: $c_{gjmR}^{B(k)} = |c_{gjm}^{B(k)}|$; $c_{gjm\tilde{\varphi}}^{B(k)} = 0$; $c_{gjm\tilde{\theta}}^{B(k)} = 0$. В итоге можно заметить, что в дальней зоне сферические волны (1.159), (1.160) удовлетворяют всем условиям, наложенным в [126] на сферические акустоэлектрические волны общего типа. Поэтому для волн (1.159), (1.160) справедливы основные энергетические соотношения для сферических волн и теорема вириала из [126]. Вектор групповой скорости $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}$ является здесь скоростью переноса средней за период колебаний энергии, как для неподвижного, так и для подвижного наблюдателей. Как следует из [126], для средних за период колебаний потоков энергии $\langle E^{\xi x} \rangle$ и $\langle E^x \rangle$ в подвижной системе координат для неподвижного и подвижного наблюдателей, соответственно, и для радиальных компонент векторов переноса энергий $\langle J_R^{\xi x} \rangle$, $\langle J_R^x \rangle$ справедливы формулы:

$$\langle E^{\xi x} \rangle = \frac{1}{2} \Omega^2 (\mathbf{a}) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*, \quad \langle E^x \rangle = \frac{1}{2} \omega \Omega (\mathbf{a}) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*, \quad (1.162)$$

$$\langle J_R^{\xi x} \rangle = c_{gR}^B \langle E^{\xi x} \rangle, \quad \langle J_R^x \rangle = c_{gR}^B \langle E^x \rangle. \quad (1.163)$$

Как видно, эти формулы полностью аналогичны соответствующим формулам (1.129), приведенным ранее для двумерных задач B электроупругости. При этом

остальные компоненты векторов переноса энергий (векторов Умова-Пойтинга) равны нулю: $\langle J_{\dot{\phi}}^{\xi x} \rangle = 0$, $\langle J_{\dot{\theta}}^{\xi x} \rangle = 0$, $\langle J_{\dot{\phi}}^x \rangle = 0$, $\langle J_{\dot{\theta}}^x \rangle = 0$.

Подставляя (1.162), (1.163) в (1.159), (1.160), получаем выражения, связывающие радиальные компоненты потоков энергий отдельных сферических волн в дальней зоне для подвижного и неподвижного наблюдателей в подвижной системе координат:

$$\langle J_{jmR}^{x(k)} \rangle = \frac{\omega}{\Omega(\alpha_{jm}^{(k)})} \langle J_{jmR}^{\xi x(k)} \rangle = (-1)^{(k-1)} \frac{c_{pjm}^{B(k)}}{c_{pjm}^A} \langle J_{jmR}^{\xi x(k)} \rangle, \quad (1.164)$$

$$\langle J_{jmR}^{\xi x(k)} \rangle = \frac{\omega^2 \left| \mathbf{F}_j^v \left(n_{jm}^{(k)} \right) \right|^2}{32\pi^2 \rho R^2 \left| c_{gjm}^{B(k)} \right| \left| k_{pjm}^{B(k)} \right|}. \quad (1.165)$$

При сверхзвуковых режимах движения в (1.164) $\Omega(\alpha_{jm}^{(k)}) < 0$ при $k=2$, поэтому $\langle E_{jm}^{x(2)} \rangle < 0$, $\langle J_{jmR}^{x(2)} \rangle < 0$, т.е. медленные волны переносят отрицательную энергию, измеренную подвижным наблюдателем. Как отмечалось ранее для двумерных задач и в [126], это свойство обычно для медленных волн в задачах B при сверхзвуковых режимах движения.

Заметим, что количество волн $\{ \mathbf{v}_{jm}^{(k)}, \psi_{jm}^{(k)} \}$ в дальней зоне определяется числом $N_j^{(k)}$ стационарных точек $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}(\mathbf{x})$, а точнее суммами этих чисел по j и k . Как отмечалось выше, в стационарных точках $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}(\mathbf{x})$ вектор групповой скорости $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$ направлен вдоль вектора выбранного пространственного направления \mathbf{X} . Поэтому число волн для направления \mathbf{X} в физическом пространстве определяется как число пересечений луча $O\mathbf{x}$ с поверхностями групповых скоростей. В зависимости от режима движения число волн может существенно меняться, причем при транс- и сверхзвуковых режимах позади источника существуют зоны распространения быстрых и медленных волн, ограниченные коническими поверхностями Маха.

Численные результаты

На рисунках 1.18-1.20 приведены картинки сечений поверхностей групповых скоростей плоскостью Ox_1x_3 рабочей декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ для парателлуриита и для α -кварца. На рисунках 1.18-1.20 анализируются отдельные направления, отмеченные стрелками. Число распространяющихся волн в заданном направлении (цифра в кружочке) находится как количество пересечений $c_{gj}^{(\dots)}$ с выбранным направлением \mathbf{X} . Такие пересечения отмечены на рисунках “жирными” точками. Пьезоэффект на постороенных кривых не учитывался, а характеристики материалов даны в [125].

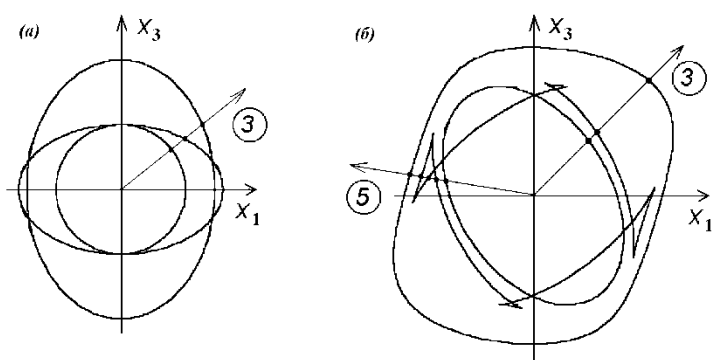


Рисунок 1.18. Сечения поверхностей групповых скоростей задачи А для электроупругого пространства из парателлуриита (а), из α -кварца, $\beta = 90^\circ$ (б).

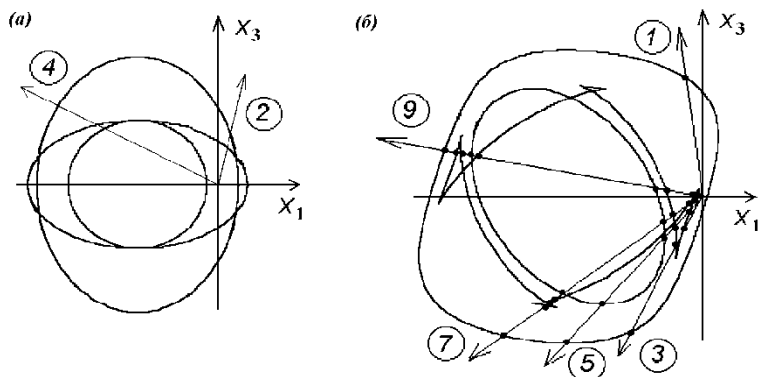


Рисунок 1.19. Сечения поверхностей групповых скоростей при транссейсмическом режиме в задаче В для электроупругого пространства из парателлуриита (а), из α -кварца, $\beta = 90^\circ$ (б).

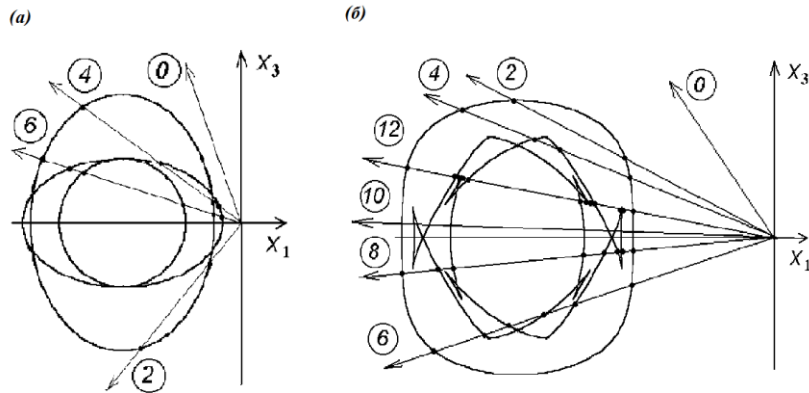


Рисунок 1.20. Сечения поверхностей групповых скоростей при сверхсейсмическом режиме в задаче B для электроупругого пространства из парателлуриата (а), для α -кварца (б).

На рисунке 1.18 (а) продемонстрирован обычный для задачи A случай, когда имеется три распространяющиеся волны (с учетом возможной кратности квазипоперечных волн). На рисунке 1.18 (б) приведены картинки сечений поверхностей групповых скоростей для более сложного материала α -кварца. Здесь, как и на рисунке 1.16 (б) рабочая декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ повернута вокруг оси Ox_3 на угол β относительно кристаллографической системы координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2x_3$ материала α -кварца. Как видно из рисунка 1.15 (б), в зависимости от выбранного направления в задаче A для α -кварца имеются зоны с тремя и с пятью волнами. Аналогичные ситуации имеют место и в задачах B при досейсмических режимах движения.

Однако при транс- и сверхсейсмических режимах движения число волн может существенно меняться. Так, на рисунке 1.19 показаны транссейсмические режимы движения, в которых имеются зоны с числами волн, равными 2, 4 на рисунке 1.19 (а) и с числами волн, равными 1, 3, 5, 7 и 9 на рисунке 1.19 (б). Заметим, что четность и нечетность волн здесь зависит от положения начала координат. Если, как на рисунке 1.19 (а), лишь одна из трех поверхностей групповых скоростей располагается за началом координат O , то число волн четное. Если же таких поверхностей, располагающихся за началом координат O , две, как на рисунке 1.19 (б), то число волн нечетное. На рисунке 1.20 приведены картинка некоторых сечений поверхностей групповых скоростей при сверхсейсмическом режиме движения. Здесь при простых поверхностях групповых

скоростей имеются зоны с 0, 2, 4 и 6 числом волн (рисунок 1.20 (а)), а для более сложных поверхностей число волн в различных зонах может принимать любые четные значения от 0 до 12 (рисунок 1.20 (б)). Результаты по числу распространяющихся волн конечно же зависят от материала электроупругого пространства, от выбранных сечений поверхностей групповых скоростей и от режима движения комбинированного источника. Для других входных данных, чем на рисунках 1.18-1.20 могут получаться совсем другие результаты.

Наконец, отметим, что волновые поля в дальней зоне имеют специфические особенности в окрестности направлений $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}(\mathbf{x})$, для которых $k_{pjm}^{(k)} \approx 0$, т.е. для близко расположенных и для кратных стационарных точек. Для таких направлений, как и в задаче А [127], требуются иные, нежели (1.159), (1.160), формы асимптотических разложений, которые здесь не рассматривались, поскольку такие случаи достаточно экзотичны и требуют значительно более сложной техники исследований.

1.5. Выводы по главе 1

Итак, в первой главе исследованы задачи В о действии комбинированного сосредоточенного источника в неограниченной пьезоэлектрической среде антиплоской, плоской и пространственной постановках. Все эти три случая изучены с применением единообразных подходов. В частности, для обеспечения единственности решения применялся ППП. Были отмечены основные свойства плоских волн и их характеристических кривых и поверхностей: фазовых скоростей, обратных скоростей и групповых скоростей. ФР были получены в интегральных формах, пригодных как для дозвуковых режимов движения, так и для транс- и сверхзвуковых режимов. В интегральных представлениях ФР выделены динамические и квазистатические составляющие. По методу перевала найдены асимптотики волновых полей ФР в дальней зоне, проведен их кинематический и энергетический анализ. Были представлены компактные формулы для энергий и векторов потока энергий Умова-Пойтинга, измеряемых в подвижной системе координат как подвижным наблюдателем, так и неподвижным. Отмечено, что в дальней зоне волновые поля разделяются на отдельные волны по кинематике и энергетике.

Как показано, для ФР в задачах электроупругости, как и в аналогичных задачах теории упругости, движение источника приводит к дополнительной асимметрии в кинематике и энергетике волновых полей. Так, появляются зоны с различным числом распространяющихся волн, быстрые и медленные волны, конусы Маха, ограничивающие зоны наличия волн, и т.д. При этом, как и в других задачах с подвижными комбинированными источниками, при транссейсмических (трансзвуковых) и сверхсейсмических (сверхзвуковых) движениях медленные волны переносят отрицательную энергию, измеренную подвижным наблюдателем в подвижной системе координат.

Глава 2: Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений

В материале данной главы используются и цитируются авторские работы [106, 107].

2.1. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений

Будем рассматривать упругий изотропный однородный слой $\left\{ -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2} \right\}$. Считаем, что в плоскости Ox_1x_2 существует возможность постановки антиплоской задачи.

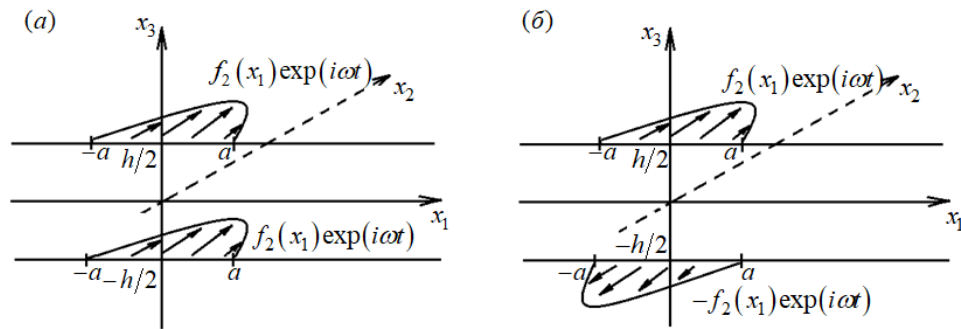


Рисунок 2.1. Распределенные нагрузки для симметричной (слева) и антисимметричной (справа) антиплоских задач A для полосы

Пусть на торцах полосы $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ осциллирует нагрузка:

$$f_2(x_1, t) = f(x_1, t) = f^\pm(x_1) \exp(i\omega t), \quad (2.1)$$

тогда полоса $\left\{ -\infty < x_1 < \infty, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2} \right\}$ является рабочей областью задачи о гармонических колебаниях. В данной постановке задачи \mathbf{u} - вектор перемещений, $v(x_1, x_3)$ - его комплексная амплитуда, тогда:

$$\mathbf{u} = \{0, v, 0\}. \quad (2.2)$$

Рассматриваем задачу для комплексных амплитуд, которые будем далее называть перемещениями, а множитель $\exp(i\omega t)$ опустим.

Уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = -\omega^2 \rho v, \quad (2.3)$$

где σ_{21} и σ_{23} - компоненты напряжений, причем:

$$\sigma_{21} = \mu \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial v}{\partial x_3}.$$

Согласно теории поверхностных напряжений Гуртина-Мурдоха [89-91] граничные условия запишем в виде:

$$\pm \sigma_{23} = \frac{\partial \sigma_{21}^s}{\partial x_1} + \omega^2 \rho^s v + f^\pm, \quad x_3 = \pm \frac{h}{2}, \quad (2.4)$$

где σ_{21}^s - поверхностные напряжения, ρ^s - поверхностная плотность. Для σ_{21}^s и v справедлив закон Гука (поверхностный): $\sigma_{21}^s = \mu^s \frac{\partial v}{\partial x_1}$, где μ^s - поверхностный модуль упругости.

В случае, когда поверхностная плотность и поверхностный модуль упругости равны нулю $\rho^s = \mu^s = 0$, тогда рассматриваемая задача переходит в стандартную антиплоскую упругую задачу для полосы обычной толщины.

Отметим, что поверхностный модуль упругости μ^s и поверхностная плотность ρ^s отличаются по размерности от объемных значений μ и ρ . В системе единиц Си величины имеют следующие измерения: μ (Н/м²), ρ (кг/м³), μ^s (Н/м), а ρ^s (кг/м²). Экспериментальные данные показывают, что объемные и поверхностные величины можно сопоставить ($\mu \sim \mu^s / d$, $\rho \sim \rho^s / d$), если характерный размер d измеряется в

нм. В данной задаче характерный размер d - это толщина слоя h , тогда можно предположить, что значительное влияние поверхностных эффектов будет проявляться при наноразмерных толщинах слоя.

В граничном условии (2.4) будем предполагать, что осциллирующие на границе нагрузки $f^\pm(x_1)$ отличаются от нуля лишь при $|x_1| \leq a$. Отметим, что для анализа нагрузок $f^+(x_1)$ и $f^-(x_1)$ общего вида достаточно исследовать лишь два различных случая: симметричную нагрузку $f^+(x_1) = f^-(x_1) = f(x_1)$ и антисимметричную нагрузку $f^+(x_1) = -f^-(x_1) = f(x_1)$. Описанные случаи будем рассматривать отдельно.

Краевая задача (2.3), (2.4) для симметричного воздействия имеет вид:

$$\Delta v + \Lambda^2 v = 0, \quad (2.5)$$

$$\mu^s \partial^2 v / \partial x_1^2 = \pm \mu \partial v / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 v - f, \quad x_3 = \pm h/2, \quad (2.6)$$

где $\Lambda = \frac{\omega}{c}$, $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - скорость упругих сдвиговых волн.

Для выделения единственного решения используем ППП [127], согласно которому перейдем к ε - задаче, заменив ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, v на v_ε . По ППП под решением (2.5), (2.6) будем понимать предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения v_ε соответствующей ε - задачи.

Для нахождения решения ε - задачи используем преобразование Фурье по бесконечно протяженной координате x_1 :

$$V_\varepsilon(\alpha, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_\varepsilon(x_1, x_3) \exp(i\alpha x_1) dx_1, \quad (2.7)$$

тогда

$$\partial^2 V / \partial x_3^2 - \gamma_\varepsilon^2 V_\varepsilon = 0, \quad (2.8)$$

$$-\mu^s \alpha^2 V_\varepsilon = \pm \mu \partial V_\varepsilon / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 V_\varepsilon - F(\alpha), \quad x_3 = \pm \frac{h}{2}, \quad (2.9)$$

где $\gamma_\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 - \Lambda_\varepsilon^2}$, $\Lambda_\varepsilon = \frac{\omega_\varepsilon}{c}$, $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1$.

Очевидно, что общее решение дифференциального уравнения (2.8) будем записывать в виде:

$$V_\varepsilon = A \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon x_3) + B \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon x_3). \quad (2.10)$$

Числовые коэффициенты A и B находим из (2.9):

$$A = \frac{F(\alpha)}{\mu \gamma_\varepsilon \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon h/2) - (\rho^s \omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2) \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon h/2)}, \quad B = 0. \quad (2.11)$$

Используя обратное преобразование Фурье, найдем решение ε -задачи из (2.10), (2.11):

$$v_\varepsilon(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon x_3)}{\mu \gamma_\varepsilon \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon h/2) - (\rho^s \omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2) \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon h/2)} e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \quad (2.12)$$

Дисперсионное уравнение данной задачи получим, приравнявая к нулю знаменатель подынтегрального выражения (2.12) ($\varepsilon = 0$):

$$\operatorname{th}(\gamma h/2) = \frac{\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha^2}{\mu \gamma}. \quad (2.13)$$

Если в (2.12) предположить, что $\mu^s = 0$, $\rho^s = 0$, то получим дисперсионное уравнение $\operatorname{sh}(\gamma h/2) = 0$ классической задачи теории упругости распространения сдвиговых волн в слое.

Теперь решение исходной задачи можно найти из (2.12), используя контурное интегрирование и вычеты в корнях уравнения (2.13) для ε -задачи. В результате, например, для $x_1 > a$ будем иметь:

$$v(x_1, x_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon = i \sum_{k=0}^m G(\alpha_k) + i \sum_{k=m+1}^{\infty} H(\alpha_k^i), \quad (2.14)$$

$$G(\alpha_k) = \frac{F(\alpha_k) \operatorname{ch}(\gamma_k x_3) e^{-i\alpha_k x_1}}{\frac{\alpha_k}{\gamma_k} \operatorname{sh}\left(\gamma_k \frac{h}{2}\right) \left(\mu - (\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha_k^2) h/2\right) + \alpha_k \operatorname{ch}(\gamma_k h/2) (2\mu^s + \mu h/2)}, \quad (2.15)$$

$$H(\alpha_k^i) = \frac{F(\alpha_k^i) \operatorname{ch}(\gamma_k^i x_3) e^{-i\alpha_k^i x_1}}{\frac{\alpha_k^i}{\gamma_k} \operatorname{sh}\left(\gamma_k^i \frac{h}{2}\right) \left(\mu - (\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha_k^{i2}) h/2\right) + \alpha_k^i \operatorname{ch}(\gamma_k^i h/2) (2\mu^s + \mu h/2)}, \quad (2.16)$$

где α_k, α_k^i – вещественные и комплексные нули α дисперсионного уравнения (2.13),

соответственно, $\operatorname{Im} \alpha_k^i < 0, \gamma_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \Lambda^2}, \gamma_k^i = \sqrt{\alpha_k^{i2} - \Lambda^2}$.

Проведем аналогичные выкладки для случая антисимметричного воздействия:

$$f^+(x_1) = -f^-(x_1) = f(x_1).$$

Краевая задача (2.3), (2.4) для антисимметричного воздействия относительно функции v примет вид:

$$\Delta v + \Lambda^2 v = 0, \quad (2.17)$$

$$\mu^s \partial^2 v / \partial x_1^2 = \mu \partial v / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 v - f, \quad x_3 = h/2, \quad (2.18)$$

$$\mu^s \partial^2 v / \partial x_1^2 = \mu \partial v / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 v + f, \quad x_3 = -h/2. \quad (2.19)$$

Далее, используя ППП и применяя преобразование Фурье по координате x_1 , представим краевую задачу в виде:

$$\partial^2 V_\varepsilon / \partial x_3^2 - \gamma_\varepsilon^2 V_\varepsilon = 0, \quad (2.20)$$

$$-\mu^s \alpha^2 V_\varepsilon = \mu \partial V_\varepsilon / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 V_\varepsilon - F(\alpha), \quad x_3 = h/2, \quad (2.21)$$

$$-\mu^s \alpha^2 V_\varepsilon = -\mu \partial V_\varepsilon / \partial x_3 - \rho^s \omega^2 V_\varepsilon + F(\alpha), \quad x_3 = -\frac{h}{2}, \quad (2.22)$$

где $\gamma_\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 - \Lambda_\varepsilon^2}$, $\Lambda = \frac{\omega_\varepsilon}{c}$, $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1$.

Общее решение уравнения (2.20) запишем в виде (2.10), а коэффициенты A и B найдем из граничных условий (2.21), (2.22):

$$A = 0, \quad B = \frac{F(\alpha)}{\mu \gamma_\varepsilon \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon h/2) - (\rho^s \omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2) \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon h/2)}. \quad (2.23)$$

Тогда решение ε -задачи можно найти из (2.10), (2.23) с использованием обратного преобразования Фурье:

$$v_\varepsilon(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon x_3)}{\mu \gamma_\varepsilon \operatorname{ch}\left(\gamma_\varepsilon \frac{h}{2}\right) - (\rho^s \omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2) \operatorname{sh}\left(\gamma_\varepsilon \frac{h}{2}\right)} e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \quad (2.24)$$

Из условия равенства нулю знаменателя подынтегрального выражения из (2.24) при $\varepsilon = 0$ получим дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи:

$$\operatorname{cth}(\gamma h/2) = \frac{\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha^2}{\mu \gamma}. \quad (2.25)$$

Если в (2.25) положить $\mu^s = 0$, $\rho^s = 0$, то получим дисперсионное уравнение $\operatorname{ch}(\gamma h/2) = 0$ классической задачи теории упругости распространения сдвиговых волн в слое.

Теперь решение исходной задачи можно найти из (2.24), используя контурное интегрирование и находя вычеты в корнях уравнения (2.25) для ε -задачи. В результате, например, для $x_1 > a$ будем иметь:

$$v(x_1, x_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon = i \sum_{k=0}^m G(\alpha_k) + i \sum_{k=m+1}^{\infty} H(\alpha_k^i), \quad (2.26)$$

$$G(\alpha_k) = \frac{F(\alpha_k) \operatorname{sh}(\gamma_k x_3) e^{-i\alpha_k x_1}}{\frac{\alpha_k}{\gamma_k} \operatorname{ch}\left(\gamma_k \frac{h}{2}\right) \left(\mu - (\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha_k^2) \frac{h}{2}\right) + \alpha_k \operatorname{sh}\left(\gamma_k \frac{h}{2}\right) \left(2\mu^s + \mu \frac{h}{2}\right)}, \quad (2.27)$$

$$H(\alpha_k^i) = \frac{F(\alpha_k^i) \operatorname{sh}(\gamma_k^i x_3) e^{-i\alpha_k^i x_1}}{\frac{\alpha_k^i}{\gamma_k} \operatorname{ch}\left(\gamma_k^i \frac{h}{2}\right) \left(\mu - (\rho^s \omega^2 - \mu^s \alpha_k^{i2}) \frac{h}{2}\right) + \alpha_k^i \operatorname{sh}\left(\gamma_k^i \frac{h}{2}\right) \left(2\mu^s + \mu \frac{h}{2}\right)}, \quad (2.28)$$

где α_k, α_k^i – вещественные и комплексные нули α дисперсионного уравнения (2.13), соответственно, $\operatorname{Im} \alpha_k^i < 0$, $\gamma_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \Lambda^2}$, $\gamma_k^i = \sqrt{\alpha_k^{i2} - \Lambda^2}$.

2.2. Симметричная антиплоская задача для полосы с поверхностными напряжениями при движущемся осциллирующем источнике

В данном разделе рассматривается антиплоская задача о движении с постоянной скоростью осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной нанотонкой полосы, жестко заземленной по нижнему основанию (рисунок 2.2). Учет наноразмерности толщины полосы моделируется введением поверхностных напряжений по теории Гуртина-Мурдоха [89-91].

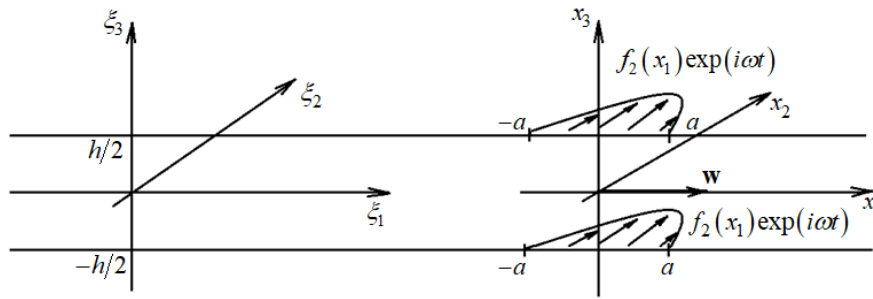


Рисунок 2.2. Неподвижная и подвижная системы координат и распределенные нагрузки для симметричной антиплоской задачи B для полосы

Пусть $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижная система координат, отнесенная к рассматриваемой изотропной среде, τ – время, $\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ – вектор перемещений. Пусть $V = \left\{ -\infty < \xi_1 < \infty, -\infty < \xi_2 < \infty, -\frac{h}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{h}{2} \right\}$ – рассматриваемый объем в упругой изотропной среде. В задаче об антиплоской деформации предполагается, что в результате действия силы:

$$\mathbf{f} = \{0, f_2, 0\}, \quad f_2 = f_2(\xi_1, \xi_3, \tau) \quad (2.29)$$

в рассматриваемой полосе возникает поле перемещений, которое зависит от ξ_1, ξ_3, τ , и в этом случае вектор перемещений будет иметь вид:

$$\mathbf{u} = \{0, u_2, 0\}, \quad u_2 = u_2(\xi_1, \xi_3, \tau). \quad (2.30)$$

Тогда уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \xi_3} = \rho \ddot{u}_2, \quad (2.31)$$

где компоненты напряжений σ_{21} и σ_{23} связаны с перемещением u_2 по обычным

формулам: $\sigma_{21} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}$, $\sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}$.

Граничные условия с учетом поверхностных эффектов будут иметь вид:

$$\pm \sigma_{21} = \frac{\partial \sigma_{21}^s}{\partial \xi_1} - \rho^s \ddot{u}_2 + f_2^\pm, \quad \xi_3 = \pm \frac{h}{2}, \quad (2.32)$$

где σ_{21}^s – поверхностные напряжения, а ρ^s – поверхностная плотность, причем

$$f_2^\pm = \begin{cases} f_2^\pm, & |\xi_3| \leq a, \\ 0, & |\xi_3| > a. \end{cases} \quad (2.33)$$

Для σ_{21}^s и u_2 справедлив закон Гука $\sigma_{21}^s = \mu^s \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}$ (поверхностный), где μ^s – поверхностный модуль упругости.

В данной главе будут рассматриваться два типа граничных условий. Если $f_2^+ = f_2^- = f_2$, то имеем симметричный случай, принятый в этом параграфе, а если $f_2^\pm = \pm f_2$, то антисимметричный случай, принятый в следующем параграфе.

Рассмотрим задачу о действии сосредоточенного осциллирующего источника, который движется вдоль $O\xi_1$ со скоростью w :

$$f_2 = f_2(\xi_1, \xi_3, \tau) = f \delta(\xi_1 - w\tau) \exp(i\omega\tau). \quad (2.34)$$

Выше было отмечено, что для задач B удобно также рассматривать подвижную систему $Ox_1x_2x_3$, которая перемещается относительно $O\xi_1\xi_2\xi_3$ со скоростью движения

нагрузки w . Пусть t – время в системе $Ox_1x_2x_3$. Тогда системы $Ox_1x_2x_3$ и $O\xi_1\xi_2\xi_3$ связаны соотношениями:

$$x_1 = \xi_1 - w\tau, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3, \quad t = \tau, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_\tau = \partial_t - w \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (2.36)$$

Будем предполагать наличие режима установившихся колебаний, при действии источника (2.34) для антиплоской задачи в системе координат $Ox_1x_2x_3$ (2.35):

$$u_2 = v(x_1, x_2) \exp(i\omega t). \quad (2.37)$$

Рассмотрим сначала симметричную задачу. В (2.31), (2.32) перейдем к подвижной системе (2.35) $Ox_1x_2x_3$, для компоненты v будем иметь следующую краевую задачу:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right) = \rho \left(i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v, \quad (2.38)$$

$$\mu^s \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = \pm \mu \frac{\partial v}{\partial x_3} - \rho^s \left(i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v - f, \quad x_3 = \pm \frac{h}{2}. \quad (2.39)$$

Для выделения единственного решения используем ППП [127], согласно которому перейдем к ε - задаче, заменив ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, v на v_ε . По ППП под решением (2.38), (2.39) будем понимать $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon$.

Перейдем к безразмерным координатам: $\tilde{x}_i = x_i / h$, $\tilde{v} = v / h$, $\tilde{\mu} = 1$, $\tilde{\omega} = \omega h / c$, $c = \sqrt{\mu / \rho}$, $\tilde{c} = 1$, $\tilde{\rho} = 1$, $\tilde{\mu}^s = \mu^s / (\mu h)$, $\tilde{\rho}^s = \rho^s c^2 / (\mu h)$, $\tilde{f} = f / \mu$. Далее знак тильда будем опускать. В безразмерных координатах задачу (2.38), (2.39) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \left(i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v, \quad (2.40)$$

$$\mu^s \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = \pm \frac{\partial v}{\partial x_3} - \rho^s (i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1})^2 v - f, \quad x_3 = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.41)$$

Для нахождения решения (2.40), (2.41) для ε – задачи применим стандартную технику преобразования Фурье по бесконечно протяженной координате x_1 :

$$V_\varepsilon(\alpha, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_\varepsilon(x_1, x_3) \exp(i\alpha x_1) dx_1, \quad (2.42)$$

тогда система примет вид:

$$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_3^2} - \gamma_\varepsilon^2 V_\varepsilon = 0, \quad (2.43)$$

$$-\mu^s \alpha^2 V_\varepsilon = \pm \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_3} - \rho^s \Omega_\varepsilon^2 V_\varepsilon - F(\alpha), \quad x_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.44)$$

где $\gamma_\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 - \Omega_\varepsilon^2}$, $\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon + w\alpha$, $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1$.

Общее решение дифференциального уравнения (2.43) будем искать в виде $V_\varepsilon = A \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon x_3) + B \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon x_3)$, где $\gamma_\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 - \Omega_\varepsilon^2}$.

Находя неизвестные коэффициенты из граничных условий (2.44), получим:

$$A = \frac{F(\alpha)}{\gamma_\varepsilon \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right)(\rho^s \Omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2)}, \quad B = 0. \quad (2.45)$$

Тогда решение ε – задачи будет иметь вид:

$$v_\varepsilon(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha) \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon x_3)}{\gamma_\varepsilon \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right)(\rho^s \Omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2)} \exp(-i\alpha x_1) dx_1. \quad (2.46)$$

Обычно дисперсионное уравнение записывают без поглощения и, следовательно, дисперсионное уравнение для симметричной антиплоской задачи можно записать в виде:

$$D_s^B(\alpha, \omega) = 0, \quad (2.47)$$

где $D_s^B(\alpha, \omega) = \gamma \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{2}\right)(\rho^s \Omega^2 - \mu^s \alpha^2)$.

Пусть в (2.46) $x_1 > a$. Так как подынтегральная функция не имеет точек ветвления, то решение можно найти в результате применения методов функции комплексного переменного в виде суммы вычетов в корнях дисперсионного уравнения (2.47) для ε – задачи:

$$v(x_1, x_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon = i \sum_{k=0}^m Y_k^0(x_3) \exp(-i\alpha_k^0 x_1) + i \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^p(x_3) \exp(-i\alpha_k^p x_1), \quad (2.48)$$

$$Y_k^0 = Y_k^0(x_3) = \frac{F(\alpha_k^0) \operatorname{ch}(\gamma_k^0 x_3)}{A^0 + B^0 w}, \quad Y_k^p = Y_k^p(x_3) = \frac{F(\alpha_k^p) \operatorname{ch}(\gamma_k^p x_3)}{A^p + B^p w}, \quad (2.49)$$

$$A^0 = \frac{\alpha_k^0}{\gamma_k^0} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(1 - \frac{\rho^s (\Omega_k^0)^2 - \mu^s (\alpha_k^0)^2}{2}\right) + \alpha_k^0 \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\mu^s\right), \quad (2.50)$$

$$B^0 = \frac{\Omega_k^0}{\gamma_k^0} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(\frac{\rho^s (\Omega_k^0)^2 - \mu^s (\alpha_k^0)^2}{2} - 1\right) - \Omega_k^0 \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\rho^s\right), \quad (2.51)$$

$$A^p = \frac{\alpha_k^p}{\gamma_k^p} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(1 - \frac{\rho^s (\Omega_k^p)^2 - \mu^s (\alpha_k^p)^2}{2}\right) + \alpha_k^p \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\mu^s\right), \quad (2.52)$$

$$B^p = \frac{\Omega_k^p}{\gamma_k^p} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(\frac{\rho^s (\Omega_k^p)^2 - \mu^s (\alpha_k^p)^2}{2} - 1\right) - \Omega_k^p \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\rho^s\right), \quad (2.53)$$

где α_k^0 и α_k^p – вещественные и комплексные нули α дисперсионного уравнения (2.47)

соответственно, $\operatorname{Im} \alpha_k^p < 0$, $\gamma_k^0 = \sqrt{(\alpha_k^0)^2 - (\Omega_k^0)^2}$, $\gamma_k^p = \sqrt{(\alpha_k^p)^2 - (\Omega_k^p)^2}$, $\Omega_k^0 = \omega + \alpha_k^0 w$,

$\Omega_k^p = \omega + \alpha_k^p w$.

Выполняются соотношения между дисперсионными уравнениями задач *A* и *B*:

$$D_s^B(\alpha, \omega) = D_s^A(\alpha, \Omega) = D_s^A(\alpha, \omega + w\alpha), \quad (2.54)$$

где $D_s^A(\alpha, \omega) = 0$ – дисперсионное уравнение для случая $w = 0$ (Задача *A*). С помощью (2.54) можно анализировать дисперсионное уравнение задачи *B*. Можно находить смещение решений дисперсионного уравнения с учетом малого трения [1].

2.3. Антисимметричная антиплоская задача для полосы с поверхностными напряжениями при движущемся осциллирующем источнике

Теперь аналогично рассмотрим антисимметричную задачу (рисунок 2.3).

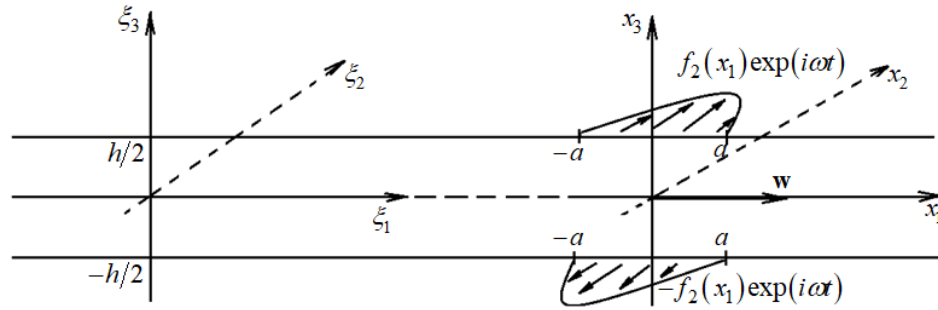


Рисунок 2.3. Неподвижная и подвижная системы координат и распределенные нагрузки для антисимметричной антиплоской задачи B для полосы

Переходя в (2.31), (2.32) к подвижной системе координат (2.35), для компоненты v будем иметь следующую краевую задачу:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right) = \rho \left(i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v, \quad (2.55)$$

$$\mu^s \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = \pm \mu \frac{\partial v}{\partial x_3} - \rho^s \left(i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v \pm f, \quad x_3 = \pm \frac{h}{2}. \quad (2.56)$$

Для выделения единственного решения также используем ППП [127], согласно которому перейдем к ε - задаче, заменив ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, v на v_ε . По ППП под решением (2.55), (2.56) будем понимать $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon$.

Будем переходить к безразмерным координатам аналогично случаю симметричной задачи, тогда система (2.55), (2.56) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \left(i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v, \quad (2.57)$$

$$\mu^s \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = \pm \frac{\partial v}{\partial x_3} - \rho^s (i\omega - w \frac{\partial}{\partial x_1})^2 v \pm f, \quad x_3 = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.58)$$

Решения (2.57), (2.58) для ε – задачи находим методами, которые использовали для нахождения решения симметричной задачи. Тогда система примет вид:

$$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_3^2} - (\alpha^2 - \Omega_\varepsilon^2) V_\varepsilon = 0, \quad (2.59)$$

$$-\mu^s \alpha^2 V_\varepsilon = \pm \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_3} - \rho^s \Omega_\varepsilon^2 V_\varepsilon \mp F(\alpha), \quad x_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.60)$$

где аналогично $\Omega_\varepsilon = \omega + \alpha w - i\varepsilon$, $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1$.

Общее решение дифференциального уравнения (2.59) будем искать в виде $V_\varepsilon = A \operatorname{ch}(\gamma_\varepsilon x_3) + B \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon x_3)$, где $\gamma_\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 - \Omega_\varepsilon^2}$, а неизвестные коэффициенты будем находить из граничных условий (2.60). В итоге получим:

$$A = 0, \quad B = \frac{F(\alpha)}{\gamma_\varepsilon \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right) (\rho^s \Omega_\varepsilon^2 - \mu^s \alpha^2)}. \quad (2.61)$$

Тогда решение ε – задачи будет иметь вид:

$$v_\varepsilon(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha) \operatorname{sh}(\gamma_\varepsilon x_3)}{\gamma_\varepsilon \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_\varepsilon}{2}\right) (\mu^s \alpha^2 - \rho^s \Omega_\varepsilon^2)} \exp(-i\alpha x_1) d\alpha. \quad (2.62)$$

В итоге, при нулевом поглощении, дисперсионное уравнение для антисимметричной антиплоской задачи можно записать следующим образом:

$$D_a^B(\alpha, \omega) = 0, \quad (2.63)$$

где $D_a^B(\alpha, \omega) = \gamma \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}\right)(\mu^s \alpha^2 - \rho^s \Omega^2)$.

Пусть в (2.62) $x_1 > a$. Так как подынтегральная функция не имеет точек ветвления, то решение можно найти в результате применения методов функции комплексного переменного в виде суммы вычетов в корнях дисперсионного уравнения (2.63) для ε – задачи:

$$v(x_1, x_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon = i \sum_{k=0}^m Y_k^0(x_3) \exp(-i\alpha_k^0 x_1) + i \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^p(x_3) \exp(-i\alpha_k^p x_1), \quad (2.64)$$

$$Y_k^0 = Y_k^0(x_3) = \frac{F(\alpha_k^0) \operatorname{sh}(\gamma_k^0 x_3)}{A^0 + B^0 w}, \quad Y_k^p = Y_k^p(x_3) = \frac{F(\alpha_k^p) \operatorname{sh}(\gamma_k^p x_3)}{A^p + B^p w}, \quad (2.65)$$

$$A^0 = \frac{\alpha_k^0}{\gamma_k^0} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(1 - \frac{\rho^s (\Omega_k^0)^2 - \mu^s (\alpha_k^0)^2}{2}\right) + \alpha_k^0 \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\mu^s\right), \quad (2.66)$$

$$B^0 = \frac{\Omega_k^0}{\gamma_k^0} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(\frac{\rho^s (\Omega_k^0)^2 - \mu^s (\alpha_k^0)^2}{2} - 1\right) - \Omega_k^0 \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^0}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\rho^s\right), \quad (2.67)$$

$$A^p = \frac{\alpha_k^p}{\gamma_k^p} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(1 - \frac{\rho^s (\Omega_k^p)^2 - \mu^s (\alpha_k^p)^2}{2}\right) + \alpha_k^p \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\mu^s\right), \quad (2.68)$$

$$B^p = \frac{\Omega_k^p}{\gamma_k^p} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(\frac{\rho^s (\Omega_k^p)^2 - \mu^s (\alpha_k^p)^2}{2} - 1\right) - \Omega_k^p \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_k^p}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 2\rho^s\right), \quad (2.69)$$

где α_k^0 и α_k^p – вещественные и комплексные нули α дисперсионного уравнения (2.63)

соответственно, $\operatorname{Im} \alpha_k^p < 0$, $\gamma_k^0 = \sqrt{(\alpha_k^0)^2 - (\Omega_k^0)^2}$, $\gamma_k^p = \sqrt{(\alpha_k^p)^2 - (\Omega_k^p)^2}$, $\Omega_k^0 = \omega + \alpha_k^0 w$,

$\Omega_k^p = \omega + \alpha_k^p w$.

Также справедливы соотношения, связывающие дисперсионные уравнения задач A и B :

$$D_a^B(\alpha, \omega) = D_a^A(\alpha, \Omega) = D_a^A(\alpha, \omega + \omega\alpha). \quad (2.67)$$

Численные примеры

В качестве численного примера проведем исследования дисперсионных соотношений и волновых полей при константах материала, взятых из [128, 129], $\mu = 6.98 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho = 7000$ кг/м³, $\mu^s = 2.5$ Н/м и $\rho^s = 7 \cdot 10^{-6}$ кг/м². На рисунке 2.4 проиллюстрирована взаимосвязь между безразмерными значениями волнового числа α и частоты Ω . Так, на рисунке 2.4. (а) построены дисперсионные кривые для симметричного случая, а на рисунке 2.4. (б) – для антисимметричного. Сплошные кривые описывают случай без поверхностных эффектов (классический случай), а пунктирные отражают поверхностный эффект для слоя толщиной $h = 10$ нм. Для задачи *B* рассматривать дисперсионные кривые нет необходимости, так как значения α для задачи *B* можно найти как пересечения соответствующих кривых задачи *A* и прямой $\Omega = \Omega(\alpha)$, $\Omega(\alpha) = \omega_* + \omega\alpha$ (по принципу соответствия). Такая прямая для фиксированных значений $\omega_* = 10$, $\omega = 0.2$ изображена на рисунке 2.4 толстой линией.

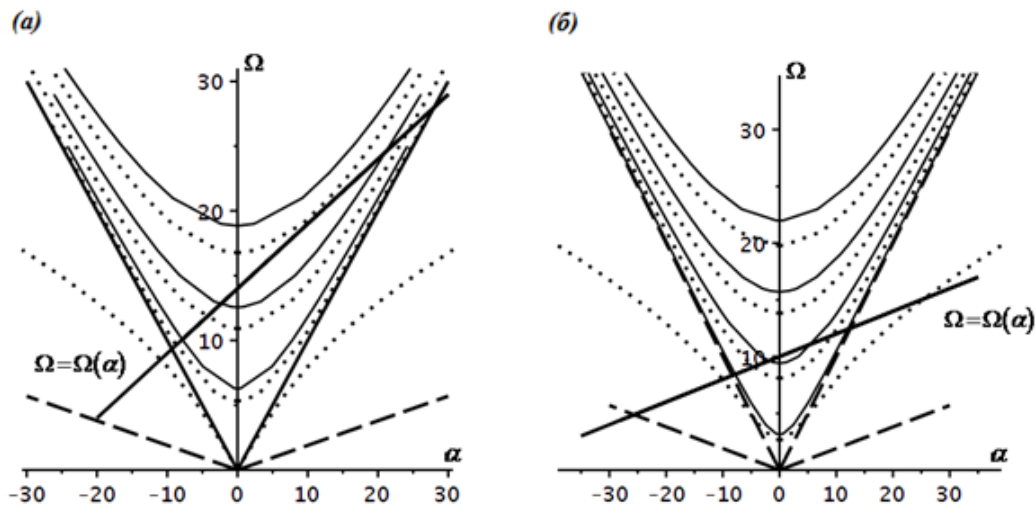


Рисунок 2.4 Зависимость безразмерных волновых чисел от безразмерных частот. (а) – симметричный случай, (б) – антисимметричный.

Анализируя рисунок 2.4 можно отметить, что для фиксированных значений частоты ω_* при дозвуковом режиме движения источника при наличии поверхностных напряжений волновые числа α возрастают в области $\alpha > 0$.

Получены аналитические формулы для нахождения частот отсечки (запирания) ω_n^s (частоты, найденные для $\alpha = 0$): $\omega_n^s \approx \omega_n (1 - 2\rho^s)$, где ω_n - частоты отсечки для классической задачи. В случае симметричной нагрузки $\omega_n = 2\pi(n-1)$ и $\omega_n = \pi(2n-1)$ для антисимметричной нагрузки. Заметим, что частоты запирания для случая с поверхностными эффектами уменьшаются относительно частот запирания для классического случая. Согласно проведенному обезразмериванию, это уменьшение обратно пропорционально значению h (толщина слоя).

Важно заметить, что для классического случая при симметричной нагрузке существует кривая, не обладающая дисперсией (рисунок 2.4 (а)), однако, при учете поверхностных эффектов, таких кривых нет. Для задач *A* этот факт отмечен в работах [100,106]. Очевидно, что и для задач *B* полученные выводы будут справедливы.

Проведен анализ асимптот дисперсионных кривых (штриховые линии на рисунке 2.4). Для симметричной и антисимметричной задачи найдены асимптоты: $\omega = \pm\alpha$, которая для симметричного случая задачи *A* совпадает с первой дисперсионной кривой классической задачи, а $\omega = \pm\sqrt{\frac{\mu^s}{\rho^s}}\alpha$ - новая асимптота, которая существует в задачах с поверхностными эффектами, согласно теории Гуртина – Мурдоха [94, 95, 101, 108].

Для случая с поверхностными эффектами интересно исследовать свойства дисперсионных кривых для различных толщин слоя. Такое исследование приведено для задачи *A* ($\omega = \Omega$) на рисунке 2.5 (а) для симметричной нагрузки и для антисимметричной (б). На рисунке 2.5 показаны первые дисперсионные соотношения для различной толщины слоя: первая кривая приведена для толщины 10 нм, вторая кривая – для толщины слоя 30 нм, третья кривая – для толщины слоя 100 нм, а четвертая кривая для классического случая без поверхностных эффектов (причем значения толщины слоя размерные).

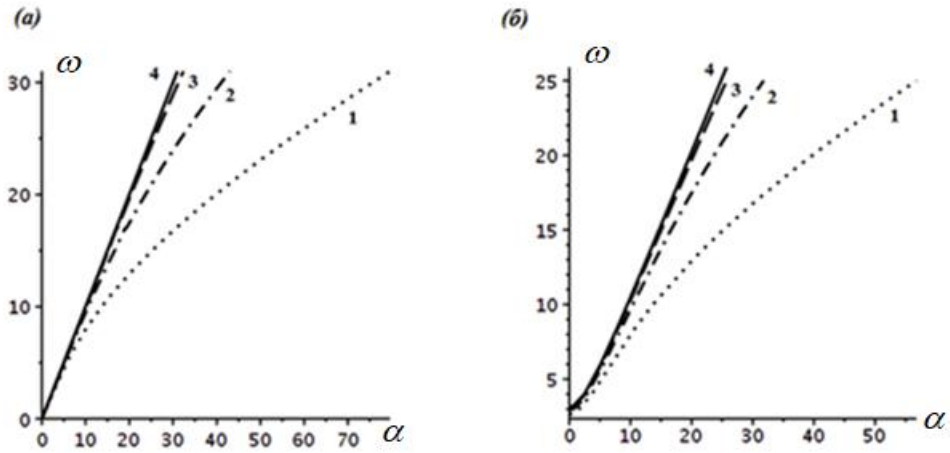


Рисунок 2.5. Первые дисперсионные кривые для симметричной (а) и антисимметричной (б) задач при различных значениях толщины.

Как мы и ожидали, из рисунка 2.5 видно, что с увеличением толщины полосы кривые при наличии поверхностных напряжений стремятся к соответствующим дисперсионным кривым классического случая. Когда же значения толщин полосы малы (для первой и второй кривых) поверхностные эффекты существенно влияют на дисперсионные кривые, что можно заметить при увеличении значений ω или α .

Рисунок 2.6 иллюстрирует зависимость кривых амплитуд смещений от толщины слоя h впереди источника, где значение частоты и скорости движения источника соответственно равны $\omega = 14$ и $w = 0,1$. Кривые на рисунке 2.6 имеют ту же нумерацию, что и на рисунке 2.5 в зависимости от толщины слоя. Отметим, что на рисунке 2.6 показаны безразмерные значения амплитуд первой моды колебаний.

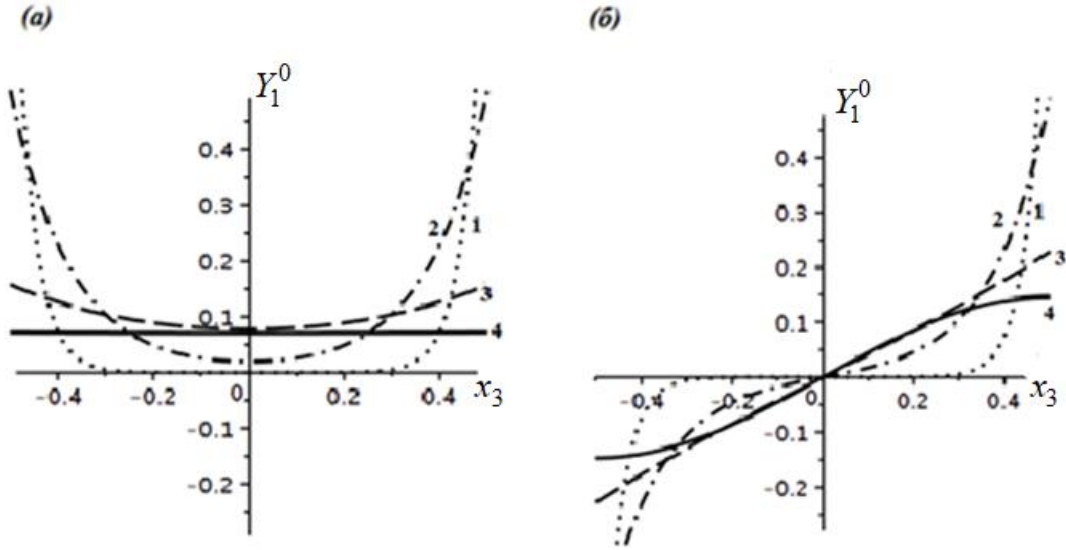


Рисунок 2.6. Графики амплитуды первой моды смещений в зависимости от изменения толщины пластины для симметричной (а) и антисимметричной (б) задачи

Для нахождения размерной амплитуды ее безразмерное значение нужно умножить на толщину слоя h , которая имеет разные значения для кривых на рисунке 2.6. Поэтому имеет смысл анализировать относительные значения, например отношения $\tilde{Y}_1^0(x_3) = Y_1^0(x_3) / Y_1^0(0)$. Как можно заметить из рисунка 2.6, значения $\tilde{Y}_1^0(x_3)$ при наличии поверхностных напряжений оказываются локализованными у торцов полосы $x_3 = \pm 1/2$, причем эта локализация возрастает при уменьшении толщины полосы, что обусловлено ростом влияния поверхностных напряжений.

Рисунки 2.7, 2.8 для симметричного случая (рисунок 2.7) и антисимметричного (рисунок 2.8) иллюстрируют зависимость безразмерной амплитуды смещения (впереди источника (а) и позади источника (б)) от скорости перемещения нагрузки, когда значения толщины слоя и частоты зафиксированы ($h = 10$ нм и $\omega = 14$). На рисунках 2.7, 2.8 показаны кривые для трех различных скоростей перемещения источника. Так, сплошная кривая иллюстрирует случай, когда движения нет ($w = 0$), пунктирная кривая отражает случай, когда $w = 0,05$, штриховая кривая показывает случай, когда $w = 0,1$. Для исходных данных задачи, с учетом поверхностных эффектов, найдена скорость волны сдвига $k_2 = 0,189$ (безразмерная). Так как для всех скоростей движения нагрузки,

выбранных на рисунках 2.7, 2.8 справедливо неравенство $w < k_2$, то данные скорости являются дозвуковыми. В соответствии с терминологией из [126] при дозвуковых скоростях перемещения нагрузки позади источника не существуют медленные волны.

Для симметричного случая (рисунок 2.7) с увеличением скорости движения источника амплитуды смещения уменьшаются впереди источника (а), в то время как позади источника (б) их модули увеличиваются с ростом скорости перемещения источника.

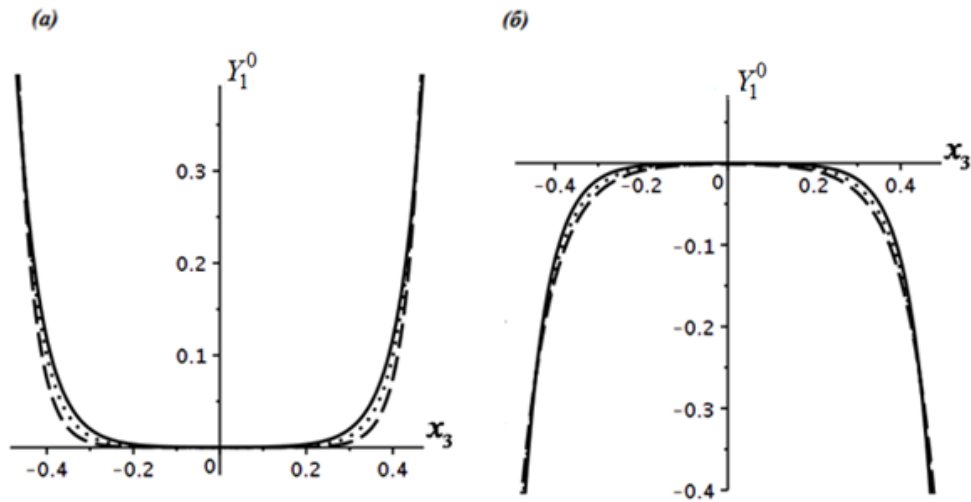


Рисунок 2.7. Графики амплитуды первой моды смещений в зависимости от изменения скорости источника для симметричной задачи впереди (а) и позади (б) источника

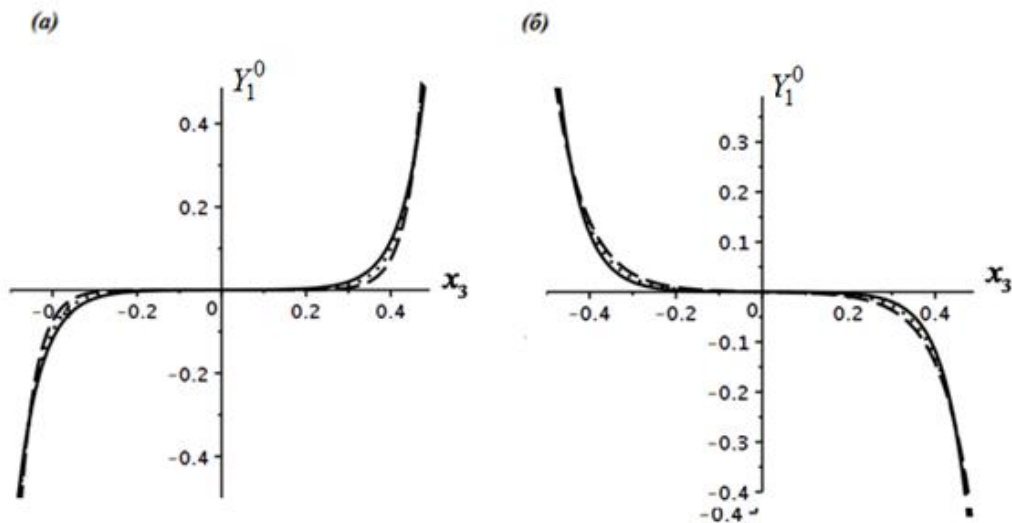


Рисунок 2.8. Графики амплитуды первой моды смещений в зависимости от изменения скорости источника для антисимметричной задачи впереди (а) и позади (б) источника

Такие же выводы мы можем сделать и для антисимметричного случая (рисунок 2.8): увеличение амплитуд смещений с ростом скорости впереди источника (а) и уменьшение позади источника (б). Анализ показал, что впереди источника волновые числа положительны и они увеличиваются с ростом скорости, тогда как позади источника отрицательные волновые числа, и с увеличением скорости их модули уменьшаются.

2.4. Выводы по главе 2

Во второй главе диссертационной работы рассмотрены несколько задач. В параграфе 2.1 рассмотрена антиплоская задача об установившихся колебаниях упругого изотропного слоя при наличии поверхностных напряжений в соответствии с моделью Гуртина-Мурдоха. В параграфе 2.2 изучалась симметричная антиплоская задача для изотропной упругой полосы с поверхностными напряжениями при движущемся осциллирующем источнике, а в параграфе 2.3 рассмотрена аналогичная антисимметричная задача. Для нахождения решений указанных выше задач как ряды по собственным волнам использовалась стандартная техника, принятая для решения задач упругости. Проведено исследование первых дисперсионных кривых, найдены формулы для нахождения частот запирания. Проведен анализ изменения частот запирания в соответствии с классическими задачами. Выявлены особенности при учете поверхностных эффектов. Обнаружена новая асимптота дисперсионных кривых. Проведенный анализ подтвердил известный вывод [93,97,99,100] о том, что поверхностные напряжения оказывают существенное влияние лишь при значительном уменьшении толщины полосы, когда упругая полоса становится ультратонкой нанопленкой.

Глава 3: Плоская задача о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений

В материале данной главы используется и цитируется авторская работа [135].

В главе рассматривается плоская задача о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной нанотонкой полосы. Учет наноразмерности толщины полосы моделируется аналогично Главе 2 введением поверхностных напряжений по теории Гуртина-Мурдоха [89-91].

Пусть упругая изотропная область с модулями упругости λ и μ с плотностью ρ занимает полосу $V = \left\{ -\infty < x_1 < \infty, -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2}, -\infty < x_3 < \infty \right\}$.

Пусть в плоскости Ox_1x_2 можно рассмотреть плоскую задачу. Поле перемещений в таком случае будет иметь вид:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0\}, \quad u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t).$$

Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho \ddot{u}_1, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = \rho \ddot{u}_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

где справедлив закон Гука: $\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$,

$$\sigma_{22} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Пусть слой V является ультратонким. На гранях $x_2 = \pm h/2$ действует нагрузка:

$$f_2^\pm = \begin{cases} f_2^\pm, & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a. \end{cases} \quad (3.2)$$

В рамках модели Гуртина–Мурдоха граничные условия запишем в виде:

$$\begin{cases} \pm\sigma_{22} = f_2^\pm, x_2 = \pm\frac{h}{2}, \\ \pm\sigma_{12} = \frac{\partial\sigma_{11}^s}{\partial x_1} - \rho^s \ddot{u}_1, x_2 = \pm\frac{h}{2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

В граничных условиях (3.3) на границе слоя существуют поверхностные напряжения σ_{11}^s и поверхностные инерционные нагрузки, ρ^s - поверхностная плотность.

Выполняется закон Гука $\sigma_{11}^s = (\lambda^s + 2\mu^s) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ (поверхностный), где μ^s, λ^s - поверхностные упругие модули.

Рассмотрим два случая действующих нагрузок f_2^\pm . Симметричный случай, когда $f_2^+ = f_2^- = f_2$, и антисимметричный при $f_2^\pm = \pm f_2$.

Пусть нагрузка осциллирует с частотой ω :

$$f_2(x_1, t) = f(x_1) \exp(i\omega t). \quad (3.4)$$

Следовательно, при действии нагрузки (3.4) для перемещений u_1 и u_2 можно рассматривать режим установившихся колебаний:

$$u_j = v_j(x_1, x_2) \exp(i\omega t), \quad j=1,2, \quad (3.5)$$

где v_1 и v_2 - комплексные амплитуды. Запишем задачу для v_1 и v_2 , причем множитель $\exp(i\omega t)$ будем опускать.

3.1. Антисимметричная плоская задача для полосы при наличии поверхностных напряжений

В настоящем параграфе рассмотрим антисимметричную задачу.

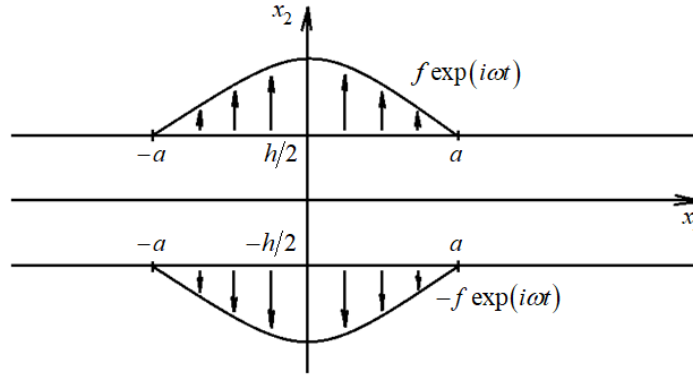


Рисунок 3.1. Распределенные нагрузки в антисимметричной плоской задаче для полосы

Уравнения движения и граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = -\rho \omega^2 v_1, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = -\rho \omega^2 v_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_{22} = f, x_2 = \frac{h}{2}, \\ \sigma_{22} = -f, x_2 = -\frac{h}{2}, \\ \sigma_{12} = \frac{\partial \sigma_{11}^s}{\partial x_1} + \rho^s \omega^2 v_1, x_2 = \frac{h}{2}, \\ -\sigma_{12} = \frac{\partial \sigma_{11}^s}{\partial x_1} + \rho^s \omega^2 v_1, x_2 = -\frac{h}{2}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$, $\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$, $\sigma_{22} = \lambda \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$.

Отметим, что при $\lambda^s = \mu^s = 0$, $\rho^s = 0$ задача (3.6)-(3.7) является обычной задачей о плоских колебаниях полосы без поверхностных эффектов, решение которой известно

[127, 130]. Отметим, что поверхностные модули упругости μ^s , λ^s и поверхностная плотность ρ^s отличаются по размерности от объемных значений μ , λ и ρ . В системе единиц Си величины имеют следующие измерения: μ и λ (Н/м²), ρ (кг/м³), μ^s и λ^s (Н/м), а ρ^s (кг/м²). Экспериментальные данные показывают, что объемные и поверхностные величины можно сопоставить ($\lambda \sim \lambda^s / d$, $\mu \sim \mu^s / d$, $\rho \sim \rho^s / d$), если характерный размер d измеряется в нм. В данной задаче характерный размер d - это толщина слоя h , тогда можно предположить, что значительное влияние поверхностных эффектов будет проявляться при наноразмерных толщинах слоя.

Для выделения единственного решения задачи (3.6), (3.7) используем ППП [126], согласно которому перейдем к ε - задаче, заменив ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, а v_1 и v_2 на $v_{1\varepsilon}$ и $v_{2\varepsilon}$ соответственно. По ППП под решением задачи будем понимать предел решения ε - задачи: $v_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_{1\varepsilon}$, $v_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_{2\varepsilon}$.

Для нахождения аналитического решения аналогично Главе 2 к ε - задаче применяем интегральное преобразование Фурье по бесконечно протяженной координате x_1 :

$$V_{j\varepsilon}(\alpha, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{j\varepsilon}(x_1, x_2) \exp(i\alpha x_1) dx_1, \quad j=1,2.$$

Из системы (3.6), (3.7) получаем систему:

$$\begin{cases} -\alpha^2 (\lambda + 2\mu) V_1 - (\lambda + \mu) i\alpha \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = -\rho \omega^2 V_1, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - (\lambda + \mu) i\alpha \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \mu \alpha^2 V_2 = -\rho \omega^2 V_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda i \alpha V_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = F(\alpha), x_2 = \frac{h}{2}, \\ -\lambda i \alpha V_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = F(\alpha), x_2 = -\frac{h}{2}, \\ \mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - i \alpha V_2 \right) = -(\lambda^s + 2\mu^s) \alpha^2 V_1 + \rho^s \omega^2 V_1, x_2 = \frac{h}{2}, \\ -\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - i \alpha V_2 \right) = -(\lambda^s + 2\mu^s) \alpha^2 V_1 + \rho^s \omega^2 V_1, x_2 = -\frac{h}{2}, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

где $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1$.

Для компактности индекс ε будем опускать.

Далее решение системы (3.8), (3.9) будем искать в виде:

$$V_1 = A_1 \operatorname{ch}(\gamma_1 x_2) + B_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 x_2) + A_2 \operatorname{ch}(\gamma_2 x_2) + B_2 \operatorname{sh}(\gamma_2 x_2),$$

$$V_2 = A_3 \operatorname{ch}(\gamma_1 x_2) + B_3 \operatorname{sh}(\gamma_1 x_2) + A_4 \operatorname{ch}(\gamma_2 x_2) + B_4 \operatorname{sh}(\gamma_2 x_2), \quad (3.10)$$

$$\text{где } \gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}, \gamma_2 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}, c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Подставив решения (3.10) в дифференциальные уравнения (3.8), найдем связь между коэффициентами A_i и B_i , $i = \overline{1, 4}$:

$$B_1 = -\frac{i\alpha}{\gamma_1} A_3, \quad B_2 = -\frac{i\gamma_2}{\alpha} A_4, \quad B_3 = \frac{i\gamma_1}{\alpha} A_1, \quad B_4 = \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_2. \quad (3.11)$$

Определив неизвестные коэффициенты A_i , $i = \overline{1, 4}$ из граничных условий (3.9), получим:

$$A_1 = A_2 = 0,$$

$$A_3 = \frac{-F \left(\mu \theta \gamma_1 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2} + d_1 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \frac{h\gamma_2}{2} \right)}{D(\alpha, \omega)}, \quad (3.12)$$

$$A_4 = \frac{F \alpha^2 \left(2\mu \gamma_1 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} + d_1 \operatorname{sh} \frac{h\gamma_1}{2} \right)}{D(\alpha, \omega)}, \quad (3.13)$$

где $\theta = 2\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}$, $d_1 = (\lambda^s + 2\mu^s)\alpha^2 - \rho^s\omega^2$,

$$D(\alpha, \omega) = -\mu^2 \left(\theta^2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2} \operatorname{sh} \frac{h\gamma_1}{2} - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{sh} \frac{h\gamma_2}{2} \right) + \rho\omega^2 d_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{sh} \frac{h\gamma_2}{2}. \quad (3.14)$$

Решение системы (3.10) примет вид:

$$V_1 = -\frac{i\alpha}{\gamma_1} A_3 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 - \frac{i\gamma_2}{\alpha} A_4 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2,$$

$$V_2 = A_3 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + A_4 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2. \quad (3.15)$$

Для нахождения решения ε – задачи применим обратное преобразование Фурье:

$$v_{1\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{i\alpha}{\gamma_1} A_3 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 - \frac{i\gamma_2}{\alpha} A_4 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 \right) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (3.16)$$

$$v_{2\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_3 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + A_4 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha.$$

Из условия $D(\alpha, \omega) = 0$ получим дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи.

Для исследования дисперсионного уравнения удобно перейти к безразмерным координатам:

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{h}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{h}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \tilde{\mu} = 1, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega h}{c_2}, \quad \tilde{\lambda}^s = \frac{\lambda^s}{\mu h}, \quad \tilde{\mu}^s = \frac{\mu^s}{\mu h}, \quad \tilde{\rho} = 1,$$

$$\tilde{\rho}^s = \frac{\rho^s c_2^2}{\mu h}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha h, \quad \tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{h} \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}}, \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{h} \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2}, \quad \theta = \frac{1}{h^2} (2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2).$$

В безразмерных координатах (знак «тильда» далее будем опускать) дисперсионное уравнение симметричной задачи можно записать в виде:

$$(2\alpha^2 - \omega^2)^2 \operatorname{ch} \frac{g_1}{2} \operatorname{sh} \frac{g_2}{2} - 4\alpha^2 g_1 g_2 \operatorname{ch} \frac{g_2}{2} \operatorname{sh} \frac{g_1}{2} - \omega^2 d_1 g_2 \operatorname{ch} \frac{g_1}{2} \operatorname{ch} \frac{g_2}{2} = 0, \quad (3.17)$$

где $g_1 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}}$, $g_2 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$.

Если положить $\mu^s = 0$, $\lambda^s = 0$ и $\rho^s = 0$, то получим дисперсионное уравнение

$$(2\alpha^2 - \omega^2)^2 \operatorname{ch} \frac{g_1}{2} \operatorname{sh} \frac{g_2}{2} - 4\alpha^2 g_1 g_2 \operatorname{ch} \frac{g_2}{2} \operatorname{sh} \frac{g_1}{2} = 0$$

классической задачи теории упругости распространения сдвиговых волн в слое [127, 130].

3.2. Симметричная плоская задача для полосы при наличии поверхностных напряжений

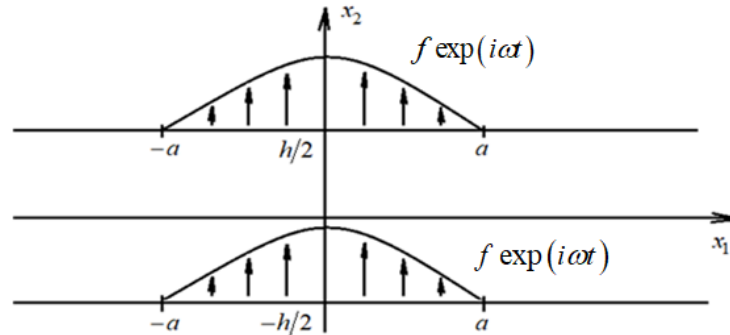


Рисунок 3.2. Распределенные нагрузки в симметричной плоской задаче для полосы

Рассмотрим теперь симметричную задачу (рисунок 3.2). Уравнения движения, определяющие соотношения и граничные условия можно представить в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = -\rho\omega^2 v_1, \\ \sigma_{22,2} + \sigma_{12,1} = -\rho\omega^2 v_2, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)v_{1,1} + \lambda v_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \mu(v_{1,2} + v_{2,1}), \quad \sigma_{22} = \lambda v_{1,1} + (\lambda + 2\mu)v_{2,2},$$

$$\begin{cases} \sigma_{22} = f, x_2 = h/2, \\ \sigma_{22} = -f, x_2 = -h/2, \\ \sigma_{12} = \sigma_{11,1}^s + \rho^s \omega^2 v_1, x_2 = h/2, \\ -\sigma_{12} = \sigma_{11,1}^s + \rho^s \omega^2 v_1, x_2 = -h/2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Для выделения единственного решения задачи (3.18), (3.19) используем ППП [126], согласно которому перейдем к ε – задаче, заменив в (3.18)-(3.19) вещественную частоту ω на комплексную частоту $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, а v_1 и v_2 на $v_{1\varepsilon}$ и $v_{2\varepsilon}$ соответственно. Тогда по ППП под решением исходной задачи будем понимать предел решения ε – задачи: $v_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_{1\varepsilon}$, $v_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_{2\varepsilon}$.

Для нахождения аналитического решения аналогично антисимметричной задаче применим к ε – интегральное преобразование Фурье по координате x_1 :

$$V_{j\varepsilon}(\alpha, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{j\varepsilon}(x_1, x_2) \exp(i\alpha x_1) dx_1, \quad j=1,2.$$

Тогда из (3.18), (3.19) получим следующую систему:

$$\begin{cases} -\alpha^2(\lambda + 2\mu)V_1 - (\lambda + \mu)i\alpha \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = -\rho\omega^2 V_1, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - (\lambda + \mu)i\alpha \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \mu\alpha^2 V_2 = -\rho\omega^2 V_2. \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} -\lambda i\alpha V_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = F(\alpha), x_2 = h/2, \\ -\lambda i\alpha V_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -F(\alpha), x_2 = -h/2, \\ \mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - i\alpha V_2 \right) = -(\lambda^s + 2\mu^s) \alpha^2 V_1 + \rho^s \omega^2 V_1, x_2 = h/2, \\ -\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - i\alpha V_2 \right) = -(\lambda^s + 2\mu^s) \alpha^2 V_1 + \rho^s \omega^2 V_1, x_2 = -h/2, \end{cases} \quad (3.21)$$

где $F(\alpha) = \int_{-a}^a f(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1$.

Аналогично антисимметричному случаю нижний индекс ε будем опускать.

Общее решение системы (3.20) ищем в виде:

$$V_1 = A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2 + B_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2, \quad (3.22)$$

$$V_2 = A_3 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B_3 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + A_4 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2 + B_4 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2,$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}$, $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Подставив решения (3.22) в дифференциальные уравнения (3.20), найдем связь между коэффициентами A_i и B_i , $i = \overline{1, 4}$:

$$B_1 = -\frac{i\alpha}{\gamma_1} A_3, \quad B_2 = -\frac{i\gamma_2}{\alpha} A_4, \quad B_3 = \frac{i\gamma_1}{\alpha} A_1, \quad B_4 = \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_2. \quad (3.23)$$

Неизвестные коэффициенты A_i , $i = \overline{1, 4}$, определяем из граничных условий (3.21).

В результате получим:

$$A_3 = A_4 = 0, \quad B_1 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = \frac{-iF\alpha \left(\mu\theta \operatorname{sh} \frac{h\gamma_2}{2} + d_1\gamma_2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2} \right)}{D(\alpha, \omega)}, \quad (3.24)$$

$$A_2 = \frac{iF\alpha\gamma_2 \left(2\mu\gamma_1 \operatorname{sh} \frac{h\gamma_1}{2} + d_1 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} \right)}{D(\alpha, \omega)}, \quad (3.25)$$

где

$$D(\alpha, \omega) = \mu^2 d_2 - \rho\omega^2 d_1\gamma_2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2}, \quad (3.26)$$

$$d_1 = (\lambda^s + 2\mu^s)\alpha^2 - \rho^s\omega^2, \quad d_2 = \theta^2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{sh} \frac{h\gamma_2}{2} - 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2}, \quad (3.27)$$

$$\theta = 2\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}. \quad (3.28)$$

С учетом (3.24), (3.25) решение (3.22) примет вид:

$$V_1 = A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2,$$

$$V_2 = \frac{i\gamma_1}{\alpha} A_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2. \quad (3.29)$$

Для нахождения решения ε – задачи применим обратное преобразование Фурье:

$$v_{1\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (3.30)$$

$$v_{2\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i\gamma_1}{\alpha} A_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 \right) e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \quad (3.31)$$

Наконец, решение исходной задачи находится из (3.30), (3.31) с учетом (3.24)–(3.28) путем применения методов контурного интегрирования по лемме Жордана, теории вычетов и выполнения предельных переходов при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поскольку подынтегральные выражения в (3.30), (3.31) являются мероморфными функциями, то решения будут представимы в виде рядов по вычетам в полюсах. Последние являются нулями дисперсионных уравнений

$$D(\alpha, \omega) = 0 \quad (3.32)$$

где функция $D(\alpha, \omega)$ определена по (3.26)–(3.28).

Для исследования дисперсионного уравнения аналогично антисимметричной задаче удобно перейти к безразмерным координатам. Тогда дисперсионное уравнение симметричной задачи примет вид:

$$(2\alpha^2 - \omega^2)^2 \operatorname{ch} \frac{g_2}{2} \operatorname{sh} \frac{g_1}{2} - 4\alpha^2 g_1 g_2 \operatorname{ch} \frac{g_1}{2} \operatorname{sh} \frac{g_2}{2} - \omega^2 d_1 g_2 \operatorname{sh} \frac{g_1}{2} \operatorname{sh} \frac{g_2}{2} = 0, \quad (3.33)$$

где $g_1 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}}$, $g_2 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$.

Если положить $\mu^s = 0$, $\lambda^s = 0$ и $\rho^s = 0$, то получим дисперсионное уравнение

$$(2\alpha^2 - \omega^2)^2 \operatorname{ch} \frac{g_2}{2} \operatorname{sh} \frac{g_1}{2} - 4\alpha^2 g_1 g_2 \operatorname{ch} \frac{g_1}{2} \operatorname{sh} \frac{g_2}{2} = 0$$

классической задачи теории упругости распространения сдвиговых волн в слое [127, 130].

В качестве численного примера проведем исследования дисперсионных соотношений и волновых полей при константах материала, взятых из [111]:

$\lambda = 22.5 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu = 22.5 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 3000$ кг/м³, $\lambda^s = 7 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\mu^s = 8 \cdot 10^{-3}$ Н/м и $\rho^s = 7 \cdot 10^{-4}$ кг/м². Пусть действующая нагрузка (3.4) является сосредоточенной, безразмерная амплитуда которой равна единице: $f(x_1) = \delta(x_1)$.

На рисунке 3.3 построены кривые дисперсионных соотношений (зависимость волнового числа α и частоты ω), здесь значения α и ω являются безразмерными. Рисунок 3.3 (а) отражает симметричный случай, а (б) – антисимметричный. Дисперсионные кривые для случая без поверхностных эффектов показаны сплошными кривыми (классический случай отмечен индексом “с”), а штриховые отражают случай с поверхностными напряжениями для полосы толщиной $h = 10$ нм (отмечены индексом “s”). Над дисперсионной кривой надписан ее номер.

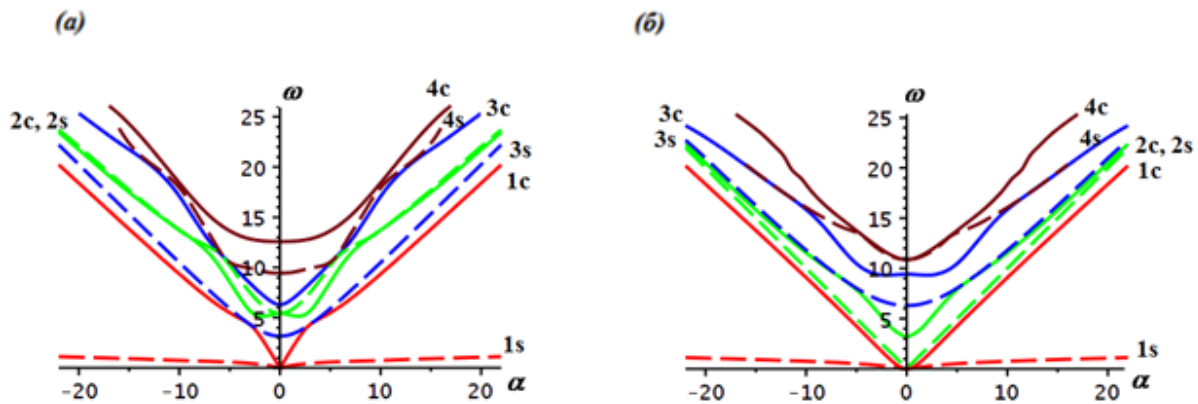


Рисунок 3.3. Дисперсионные кривые при толщине полосы $h = 10$ нм для симметричной (а) и антисимметричной (б) задач

Проанализируем частоты отсечки (частоты ω , для которых $\alpha = 0$) для симметричного и антисимметричного случаев. Для случая с поверхностными эффектами частоты отсечки обозначим ω_n^s , а для классического случая – ω_n .

Сначала рассмотрим частоты запираия для симметричного случая при $\omega_n \geq 0$, занумерованные по возрастанию. Частоты могут размещаться в двух подмножествах:

$$\omega_l = 2\pi l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

$$\omega_k = \pi(2k - 1)\sqrt{\lambda + 2\mu}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

где упругие модули даны в безразмерной форме ($\lambda = \mu = 1$).

Частоты запирающие для рисунка 3.3 (а) принимают значения: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{3}\pi$, $\omega_3 = 2\pi$, $\omega_4 = 4\pi$, из которых частоты ω_1 , ω_3 , ω_4 принадлежат первому подмножеству (3.34), а частота ω_2 принадлежит второму подмножеству (3.35).

Для симметричного случая аналитически найдены частоты отсечки при поверхностных эффектах $\omega_l^s = \omega_l + \varepsilon_l$, $l=1,2,\dots$. Если $\rho^s > 0$, то частоты отсечки ω_l^s становятся меньше, чем соответствующие значения частот без поверхностных эффектов. Смещение ε_l находим в численном виде из соотношения $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_l}{2} = -\rho^s (\omega_l + \varepsilon_l)$. Отметим, что найдутся частоты отсечки, которые не меняются при изменении толщины слоя. На рисунке 3.3 (а) видно, что частоты ω_1 и ω_2 остаются неизменными для классического случая и при учете поверхностных эффектов, а частоты ω_3 и ω_4 в случае с поверхностными эффектами уменьшаются.

Теперь рассмотрим антисимметричный случай. Для задачи без поверхностных напряжений подмножества частот запирающие $\omega_n \geq 0$ имеют вид:

$$\omega_l = \pi(2l-1), \quad l=1,2,\dots \quad (3.36)$$

$$\omega_k = 2\pi k \sqrt{\lambda + 2\mu}, \quad k=1,2,\dots \quad (3.37)$$

Для антисимметричного случая, показанного на рисунке 3.3 (б) видно, что частоты запирающие $\omega_1 = 0$ и $\omega_4 = 2\sqrt{3}\pi$ из (3.37) не изменяются для задач с поверхностными эффектами, а остаются такими же как и для классической задачи. Частоты запирающие $\omega_l^s = \omega_l + \varepsilon_l$ (в рассматриваемом случае $\omega_2 = \pi$ и $\omega_3 = 3\pi$) из (3.36) при поверхностных эффектах уменьшаются на $|\varepsilon_l|$.

Проанализируем различие дисперсионных кривых на рисунке 3.3 с учетом поверхностных эффектов.

Для кривой номер один, при фиксированном значении волнового числа, частоты уменьшаются значительно при учете поверхностных эффектов, в отличие от кривых с номерами 2 - 4. Интересно отметить, что для симметричного случая (рисунок 3.3 (а))

вторая дисперсионная кривая при учете поверхностных напряжений лежит выше кривой для классического случая, тогда как остальные дисперсионные кривые для задач с поверхностными напряжениями лежат ниже кривых для классического случая. Все дисперсионные кривые на рисунке 3.3 (б) для антисимметричного случая при учете поверхностных эффектов лежат ниже кривых для классического случая.

Пусть $\omega < \alpha$ ($\alpha > 0$), тогда, как известно, для симметричного и антисимметричного случаев классической задачи существует асимптота дисперсионных кривых: $\omega = c_1 \alpha$, где $c_1 < 1$ – скорость волны Релея (безразмерная), которую находим из

уравнения $(2 - c^2)^2 - 4 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{\lambda + 2\mu}\right)} (1 - c^2) = 0$. С учетом поверхностных эффектов

получим новую асимптоту $\omega = c_2^s \alpha$, где $c_2^s = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s}}$ и $\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s} < \frac{\mu}{\rho}$. При исходных

данных задачи условие $\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s} < \frac{\mu}{\rho}$ выполнено и $c_2^s \approx 0,002$.

На рисунке 3.4 показаны первые дисперсионные кривые для разных толщин слоя h . Первая кривая соответствует толщине слоя 10 нм, вторая – 300 нм, третья – 1800 нм, а четвертая иллюстрирует случай без поверхностных эффектов. Из рисунка 3.4 можно сделать вывод о том, что как для симметричного, так и для антисимметричного случаев, при наноразмерной толщине слоя кривые значительно изменяются. А также с увеличением толщины полосы кривые стремятся к соответствующим дисперсионным кривым классического случая.

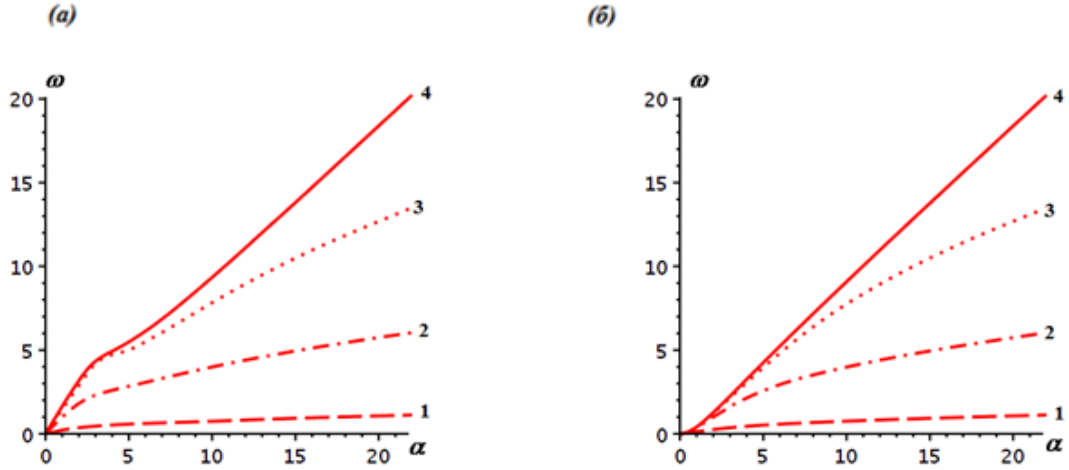


Рисунок 3.4. Первые дисперсионные кривые при различных толщинах полосы: (а) – симметричная задача, (б) – антисимметричная задача

На рисунках 3.5 и 3.6 рассматриваются такие же толщины слоя, что и на рисунке 3.4, с соответствующими типами пунктиров для второй и третьей дисперсионной кривой.

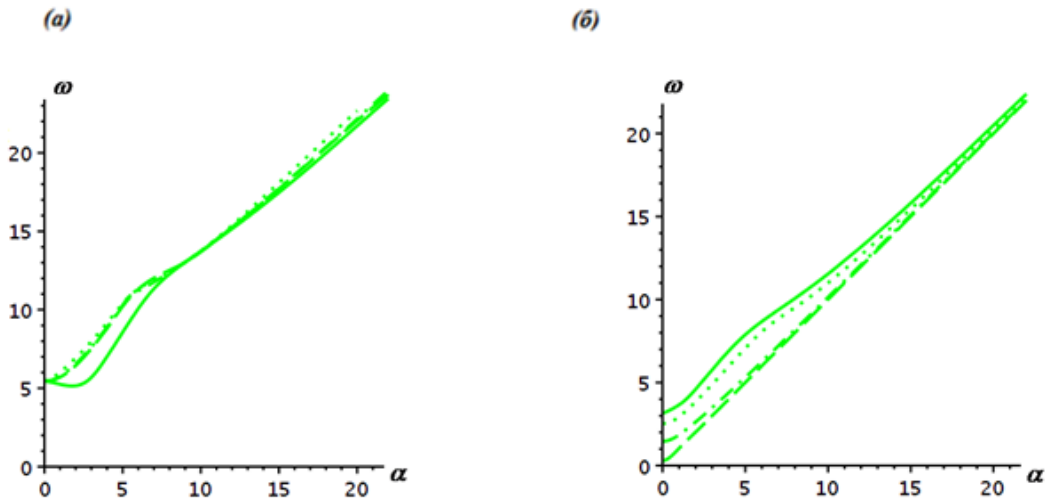


Рисунок 3.5. Вторые дисперсионные кривые при различных толщинах полосы: (а) – симметричная задача, (б) – антисимметричная задача

Отметим, что для классического случая существуют частоты отсечки, в окрестности которых кривизна дисперсионной ветви отрицательна, тогда дисперсионная ветвь располагается ниже частоты отсечки, например, на рисунке 3.5 (а) для второй дисперсионной ветви симметричного случая. Тогда можно говорить об образовании обратных волн в слое. При учете поверхностных эффектов кривизна всегда положительна. В антисимметричном случае на рисунке 3.5 (б) обратных волн нет.

Еще раз заметим, что в симметричном случае для второй кривой значение частоты отсечки не меняется для различных толщин слоя и в классическом случае (рисунок 3.5 (а)). Также отметим, что с поверхностными эффектами для фиксированного значения волнового числа частоты уменьшаются для антисимметричного случая и увеличиваются для симметричного случая (для антисимметричного случая такое изменение значительнее) относительно частот классической задачи.

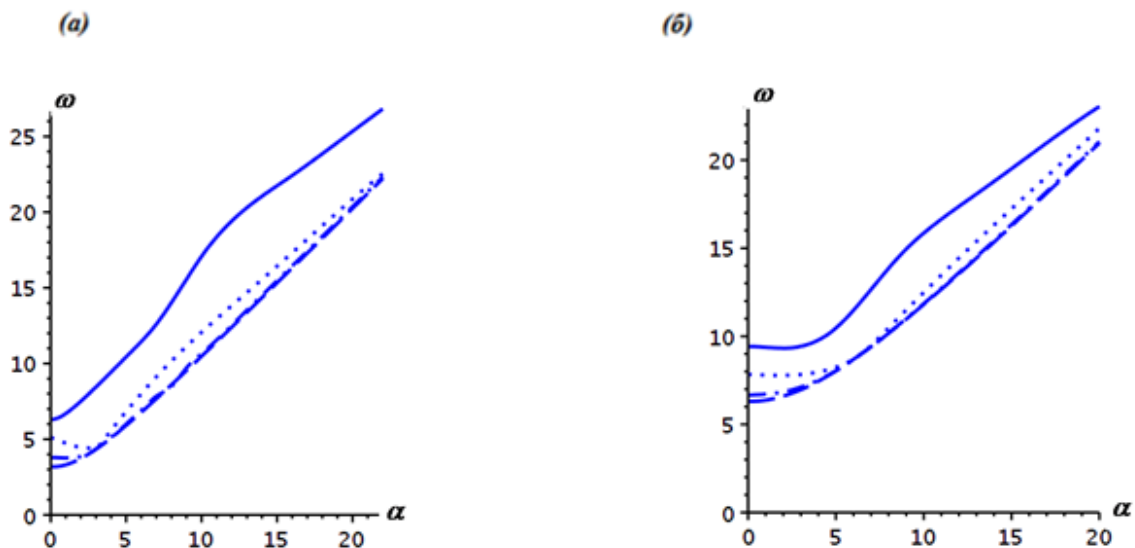


Рисунок 3.6. Третьи дисперсионные кривые при различных толщинах полосы: (а) – симметричная задача, (б) - антисимметричная задача

Однако, для третьей кривой в симметричном и антисимметричном случаях частоты уменьшаются относительно частот классической задачи (рисунок 3.6).

На рисунке 3.6 (а) для симметричного случая можно наблюдать участки, где кривизна становится отрицательной (толщина слоя 1800 нм и 300 нм). На рисунке 3.6. (б) аналогично можно проанализировать появление участков, где кривизна отрицательна (в классической задаче при толщине слоя 1800 нм).

В результате вывод о том, что поверхностные эффекты проявляются для малых наноразмерных толщинах слоя, остается верным. Причем эти эффекты могут быть противоположными для антисимметричного и симметричного случаев. Для рассматриваемых исходных данных при толщине слоя 8000 нм происходит почти полное совпадение кривых с соответствующими кривыми для классического случая.

3.3. Выводы по главе 3

В главе 3 рассмотрена плоская задача о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений. В параграфе 3.1 рассмотрена соответствующая антисимметричная задача, а в параграфе 3.2 – симметричная. Учет наноразмерности осуществлялся по модели Гуртина – Мурдоха, согласно которой на торцах полосы учитывались поверхностные напряжения и инерционные нагрузки. Для нахождения решения в виде рядов по собственным волнам использовалась стандартная техника, включающая ППП, преобразование Фурье и методы контурного интегрирования. Проанализированы первые, вторые и третьи дисперсионные кривые. При учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок обнаружен ряд особенностей в полученных решениях. Так, появляется асимптота у первой дисперсионной кривой, соответствующая поверхностной продольной волне. Существенно изменяются зоны наличия или отсутствия обратных волн у различных дисперсионных кривых. Поверхностные эффекты при фиксированных волновых числах обычно приводят к уменьшению собственных частот, но наблюдаются также случаи увеличения собственных частот. Как и в главе 2, был сделан вывод о том, что поверхностные напряжения и инерционные нагрузки оказывают заметное влияние только при очень малых наноразмерных значениях толщины полосы.

Заключение

Итак, в диссертационной работе рассмотрен комплекс динамических задач теории упругости с усложненными свойствами, объединенных между собой действием осциллирующих и подвижных (кроме задачи из главы 3) источников волн. В задачах для безграничных сред усложненные свойства состояли в учете связанности механических и электрических полей (пьезоэлектрические или электроупругие среды), а в задачах для волноводов учитывались поверхностные напряжения и поверхностные инерционные нагрузки, моделирующие в рамках теории Гуртина-Мурдоха наноразмерность сечения волновода.

Основные результаты и выводы диссертационной работы можно сформулировать следующим образом.

- 1) Изучены антиплоские, плоские и пространственные задачи о движении с постоянной скоростью осциллирующего источника в безграничной электроупругой среде. Установлены свойства плоских волн и поверхностей фазовых скоростей, медлительностей и групповых скоростей. С использованием интегрального преобразования Фурье получены ФР (функции Грина) в интегральных формах, пригодные для различных режимов движения, выделены динамические и квазистатические составляющие решений. Построены асимптотики дальних полей по методу стационарной фазы, проведен кинематический и энергетический анализ решений. Представлены компактные формулы для вектора потока энергии для подвижного и неподвижного наблюдателей. Отмечено, что в дальней зоне волновые поля разделяются на отдельные волны по кинематике и энергетике.
- 2) Из анализа ФР задач электроупругости при подвижных осциллирующих возмущениях сделаны выводы о влиянии движения источника на свойства волновых полей в дальней зоне: изменения зон распространения волн и их числа, появление быстрых и медленных волн, а также перенос медленными волнами отрицательной энергии, измеренной подвижным наблюдателем, при транс и сверхсейсмических движениях.
- 3) Получены решения симметричных и антисимметричных антиплоских задач для упругой полосы с поверхностными напряжениями при движущихся осциллирующих источниках в виде рядов по собственным волнам, изучены дисперсионные

соотношения и построены графики распределения амплитуд перемещений по толщине. Проведен анализ характеристик решений в зависимости от толщины полосы и скорости движения источника.

- 4) Получены решения симметричных и антисимметричных плоских задач для упругой изотропной нанотонкой полосы при действии на ее границе осциллирующей нагрузки в виде рядов по собственным волнам. На конкретном примере были исследованы первые дисперсионные кривые, дан анализ поведения частот запираения, изменения волновых чисел и зон существования обратных волн при варьировании наноразмерных толщин упругой полосы.
- 5) Проведенные исследования для упругой полосы подтвердили известное заключение, что поверхностные напряжения и инерционные нагрузки оказывают существенное влияние лишь при очень малых толщинах полосы.

Список литературы

1. Белоконь А. В. Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1982. Т. 46. № 2. С. 296-302.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат. 1953. 264 с.
3. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз. 1961. 219 с.
4. Ungar A. A. The propagation of elastic waves from moving normal point loads in layered media // Pure and Applied Geophysics. 1976. V. 114. P. 845-861.
5. Radok, J. R. On the solution of problems of dynamic plane elasticity // Quarterly of Applied Mathematics. 1956. V. 14. P. 289-298.
6. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung // Jberg Deutsch Kath. Vaveen. 1912. V. 21. P. 309-353.
7. Сретенский Л. Н. Распространение упругих волн, возникающих при движении системы нормальных напряжений по поверхности полупространства // Труды Моск. мат. об-ва. 1952. Т. 1. С. 167-187.
8. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Возбуждение упругих волн движущимся гармоническим источником // Кубан. ун-т. Краснодар. 1985. 21 с. Деп. в ВИНТИ 3.09.85. №6470-85Деп.
9. Барниев А. Б. Распространение волн в полупространстве, возбужденных подвижной нагрузкой, бегущей по ее границе с дозвуковой скоростью // Тр. Фрунз. Политехн. ин-та. 1975. Вып. 90. С. 128-132.
10. Зильбергейт А. С., Копилевич Ю. И. Спектральная теория регулярных волноводов. Ленинград. 1983. 302 с.
11. Ляпин А. А. и др. Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. М.: ГНИЦ ПГК. 1999. 294 с.
12. Чурилов В. А. О действии на упругое полупространство движущейся по его границе с постоянной скоростью нормальной нагрузки // ПММ. 1977. Т. 41. №1. С.134-142.

13. Ставровский А. С. Об одной модификации задачи Лэмба // Вестн. Моск. ун-та. 1975. №5. С. 86-95.
14. Усманиев А. Воздействие сдвигового пульсирующего напряжения на поверхности упругого полупространства и слоя // Изв. АН Узб. ССР. Сер. Технич. Наук. 1980. №2. С. 46-50.
15. Усманиев А., Бахрамов Б. М. Некоторые задачи для упругого слоя при воздействии пульсирующей сдвиговой упругой волны // Докл. АН Узб. ССР. 1981. С. 15-17.
16. Филиппов И. Г., Бахрамов Б. М. Некоторые задачи волновой динамики сплошных сред и вырожденных упругих систем. Ташкент: Фан. 1981. 160 с.
17. Терентьев В. Н. Подвижные пульсирующие нагрузки в трехмерных задачах теории упругости // Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 327-332.
18. Терентьев В. Н., Филиппов А. П. Вынужденные установившиеся колебания бесконечных балок, лежащих на упругом полупространстве // Прикладная механика. 1965. Т. 1. № 9. С. 107-114.
19. Болдин В. П. Машины и приборы волнового принципа действия // АН СССР. Ин-т машиновед. Горьк. фил. М.: Наука. 1991. С. 30-44.
20. Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. №5. С. 863-866.
21. Весницкий А. И. Волновые эффекты в упругих системах // Волновая динамика машин. М.: Наука. 1991. С. 15-30.
22. Весницкий А. И., Метрикин А. В. Переходное излучение в периодически неоднородной упругой направляющей // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 6. С. 164-168.
23. Кононов А. В., Метрикин А. В. Эффект переходного излучения в двумерной упругой системе // Изв. АН СССР. МТТ. 1994. № 6. С. 95-100.

24. Уткин Г. А. Постановка задач динамики упругих систем с движущимися по ним объектам // Волновая динамика машин / АН СССР. Ин-т машиновед. Горьк. фил. М.: Наука. 1991. С. 4-14.
25. Белоконь А. В. К теории динамических задач с подвижными возмущениями для неоднородной упругой полосы // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 5. С. 1079-1082.
26. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Распространение волн в изотропной жестко заземленной упругой полосе от движущихся осциллирующих нагрузок // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 9. С. 90-97.
27. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Модельная задача на распространение волн от движущихся пульсирующих нагрузок в упругом слое. Ростов-н/Д ун-т. Ростов н/Д. 1986 31 с. Деп. в ВИНТИ 11.05.86. №3359-B86.
28. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Общие энергетические теоремы и принципы излучения для однородных волн // Динамич. задачи мех. сплош. среды, теор. и прикл. вопросы вибрац. просвечивания Земли: Матер. рег. конф. Краснодар: Куб. гос. ун-т. 1992. С. 13-14.
29. Iovane G., Nasedkin A. V., Passarella F. Fundamental solutions in antiplane elastodynamic problem for anisotropic medium under moving oscillating source // Europ. J. Mech. A/Solids. 2004. V. 23. P. 935-943.
30. Iovane G., Nasedkin A. V., Passarella F. Moving oscillating loads in 2D anisotropic elastic medium: plane waves and fundamental solutions // Wave Motion. 2005. V. 43. No. 1. P. 51-66.
31. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в задачах электроупругости при установившихся колебаниях // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. Науки. 2001. Спецвыпуск. С. 23-25.
32. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Фундаментальные решения антиплоской задачи электроупругости при движущемся осциллирующем источнике // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН. 2008. С. 103-113.

33. Ватульян А. О., Кубликов В. Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т.53. № 6. С. 1037-1041.
34. Liu Jinxi, Wang Biao, Du Shanyi. Two-dimensional electroelastic fundamental solutions for general anisotropic piezoelectric media // Applied Mathematics and Mechanics. English Edition. 1997. V. 18. No. 10. P. 949-956.
35. Hu Yiantai, Huang Yuying, Chen Chuanyao, Zhong Weifang. Green's functions for 2D problems of anisotropic piezoelectric material with a strip region // Acta mechanica solida sinica. 2000. V. 13. No. 2. P. 149-154.
36. Wang X., Zhong Z. Two-dimensional time-harmonic dynamic Green's functions in transversely isotropic piezoelectric solids // Mech. res. Commun. 2003. V. 30. P. 589-593.
37. Ernian Pan, Fulvio Tonon. Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids // Int. Journal of Solids and Structures. 2000. V. 37. P. 943-958.
38. A. Fil'shtinskii. Fundamental solutions of electroelasticity equations for a piezoceramic layer in R^3 // Mechanics of Composite Materials. 2001. V. 37. No. 3. P. 237-244.
39. Li X., Wang M. Three-dimensional Green's functions for infinite anisotropic piezoelectric media // Int. Journal of Solids and Structures. 2007. V. 44. P. 1680-1684.
40. Wang C.-Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids // Eng. Anal. Bound. Elem. 2005. V. 29. P. 454-465.
41. Ding H. J., Chen W. Q., Jiang A. M. Green's functions and boundary element method for transversely isotropic piezoelectric materials // Eng. Anal. Bound. Elem. 2004. V. 28. P. 975-987.
42. Daros C. H., Antes H. Dynamic fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectric materials of crystal class 6 mm // Int. Journal of Solids and Structures. 2000. V. 37. P. 1639-1658.
43. Daros C. H. A fundamental solutions for transversely isotropic, piezoelectric solids under electrically irrotational approximation // Mech. res. Commun. 2002. V. 29. P. 61-71.

44. Zhou Y.-T., Lee K. Y. Theory of moving contact of anisotropic piezoelectric materials via real fundamental solutions approach // *Europ. J. Mech.- A/Solids*. 2012. V. 35. P. 22-36.
45. Norris A. N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1994. V 447. No. 1929. P. 175-188.
46. Khutoryansky N., Sosa H. Dynamic representation formulas and fundamental solutions for piezoelectricity // *Int. Journal of Solids and Structures*. 1995. V. 32. P. 3307-3325.
47. Daros C. H. Wave propagation in unbounded piezoelectric media of transversely isotropic symmetry. *Mechanik-Zentrum*. 1999.
48. Daros C. H., Antes H. Dynamic fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectric materials of crystal class 6 mm // *International Journal of Solids and Structures*. 2000. V. 37. No. 11. P. 1639-1658.
49. Daros C. H. A fundamental solutions for transversely isotropic, piezoelectric solids under electrically irrotational approximation // *Mechanics Research Communications*. 2002. V. 29. No. 1. P. 61-71.
50. Daros C. H., Antes H. The elastic motion of a transversely isotropic, piezoelectric solid caused by impulsive loading // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. 2000. V. 51. No. 3. P. 397-418.
51. Jiang L. Z. Integral representation and Green's functions for 3D time-dependent thermo-piezoelectricity // *International Journal of Solids and Structures*. 2000. V. 37. No. 42. P. 6155-6171.
52. Ватульян А. О., Кубликов В. Л. Метод граничных элементов в электроупругости // *Механика деформируемых тел. Межвуз. сб. науч. тр. ДГТУ, Ростов-на-Дону*. 1994. С. 17-21.
53. Vatulian A. O., Kublikov V. L. Boundary element method in electroelasticity // *Boundary Elements Communications*. 1995. V. 6. No. 2. P. 59-61.

54. Gaul L. et al. Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course With Advanced Topics // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. B19-B19.
55. Kögl M., Gaul L. A boundary element method for transient piezoelectric analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2000. V. 24. No. 7-8. P. 591-598.
56. Denda M., Araki Y. Eigenvalue analysis by time-harmonic BEM for 2-D piezoelectricity: comparison of eigensolvers // Boundary element techniques. Tsinghua University Press Beijing, China. 2002. P. 71-76.
57. Ватульян А. О., Кирютенко А. Ю., Наседкин А. В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектрoупругости // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. №. 5. С. 135-142.
58. Ватульян А. О., Кирютенко А. Ю., Наседкин А. В. О формулировке граничных интегральных уравнений связанной термоэлектрoупругости // Интегродифференциальные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. Трудов. Ростов н/Д: ДПУ. 1996. С. 19-25.
59. Zhang C. Transient dynamic analysis of cracked piezoelectric solids by a time-domain BIEM // Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCMV). Vienna University of Technology. Vienna. Austria. 2002. P. 7-12.
60. Zhang C., Wang C. Y., Hirose S. A time-domain BIEM for dynamic crack analysis of a piezoelectric solid // Boundary element techniques. 2002. V. 3. P. 10-12.
61. Bhushan B., Baumann. Springer handbook of nanotechnology. Berlin : Springer. 2017. 1500 p.
62. Craighead H. G. Nanoelectromechanical systems // Science. 2000. V. 290. No. 5496. P. 1532-1535.
63. Ekinici K. L., Roukes M. L. Nanoelectromechanical systems // Review of scientific instruments. 2005. V. 76. No. 6. P. 061101.
64. Wang X. et al. Piezoelectric field effect transistor and nanoforce sensor based on a single ZnO nanowire // Nano letters. 2006. V. 6. No. 12. P. 2768-2772.

65. Wang Z. L., Song J. Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays // *Science*. 2006. V. 312. No. 5771. P. 242-246.
66. Adam N. K. *The Physics and Chemistry of Surfaces*. London: Oxford Univers. Press. 1938. 402 p.
67. Shuttleworth R. The surface tension of solids // *Proceedings of the physical society. Section A*. 1950. V. 63. No. 5. P. 444.
68. Nicholson M. M. Surface tension in ionic crystals // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1955. V. 228. No. 1175. P. 490-510.
69. Orowan E. Surface energy and surface tension in solids and liquids // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1970. V. 316. No. 1527. P. 473-491.
70. Chandel V. S., Wang G., Talha M. Advances in modelling and analysis of nano structures: a review // *Nanotechnol. Rev.* 2020. V. 9. P. 230-258.
71. Eremeyev V. A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects // *Acta Mech.* 2016. V. 227. P. 29-42.
72. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // *Acta Mech. Solida Sin.* 2011. V. 24. iss. 1. P. 52-82.
73. Wang K. F., Wang B. L., Kitamura T. A review on the application of modified continuum models in modeling and simulation of nanostructures // *Acta Mech. Sin.* 2016. V. 32. iss. 1. P. 83-100.
74. Arroyo M., Belytschko T. An atomistic-based finite deformation membrane for single layer crystalline films // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002. V. 50. No. 9. P. 1941-1977.
75. Davydov D. et al. Size effects in a silica-polystyrene nanocomposite: molecular dynamics and surface-enhanced continuum approaches // *Soft Materials*. 2014. V. 12. No. sup1. P. S142-S151.

76. Miller R. E., Shenoy V. B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. 2000. V. 11. No. 3. P. 139.
77. Sfyris D., Sfyris G. I., Galiotis C. Curvature dependent surface energy for a free standing monolayer graphene: Some closed form solutions of the non-linear theory // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V.67. P. 186-197.
78. Shenoy V. B. Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces // *Physical Review B*. 2005. V. 71. No. 9. P. 094104.
79. Ibach H. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // *Surface science reports*. 1997. V. 29. No. 5-6. P. 195-263.
80. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 1965. V. 1. No. 4. P. 417-438.
81. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1962. V. 11. P. 385-414.
82. Aifantis E. C. Update on a class of gradient theories // *Mechanics of materials*. 2003. V. 35. No. 3-6. P. 259-280.
83. Askes H., Aifantis E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *International Journal of Solids and Structures*. 2011. V. 48. No. 13. P. 1962-1990.
84. dell'Isola F., Rotoli G. Validity of Laplace formula and dependence of surface tension on curvature in second gradient fluids // *Mech. Res. Commun.* 1995. V. 22. P. 485-490.
85. dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S. Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials // *Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2009. V. 465. P. 2177-2196.
86. Eringen A. C. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer, New York . 2002. 393 p.
87. de Gennes P. G. Some effects of long range forces on interfacial phenomena // *Journal de Physique Lettres*. 1981. V. 42. No. 16. P. 377-379.
88. Seppecher P. *Les fluides de cahn-hilliard* : дис. – Université du Sud Toulon Var. 1996.

89. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rat. Mech. Anal. 1975. V. 57. iss. 4. P. 291-323.
90. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Effect of surface stress on wave propagation in solids // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. P. 4414-4421.
91. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids // Int. J. Solids Struct. 1978. V. 14. iss. 6. P. 431-440.
92. Chakraborty A. The effect of surface stress on the propagation of Lamb waves // Ultrasonics. 2010. V. 50. iss. 7. P. 645-649.
93. Enzevae C., Shodja H. M. Crystallography and surface effects on the propagation of Love and Rayleigh surface waves in fcc semi-infinite solids // Int. J. Solids Struct. 2018. V. 138. P. 109-117.
94. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Comparison of anti-plane surface waves in strain-gradient materials and materials with surface stresses // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24. iss. 8. P. 2526-2535.
95. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy // Mech. Res. Commun. 2016. V. 74. P. 8-13.
96. Eremeyev V. A., Sharma B. L. Anti-plane surface waves in media with surface structure: discrete vs. continuum model // Int. J. Eng. Sci. 2019. V. 143. P. 33-38.
97. Jia F., Zhang Z., Zhang H., Feng X.-Q., Gu B. Shear horizontal wave dispersion in nanolayers with surface effects and determination of surface elastic constants // Thin Solid Films. 2018. V. 645. P. 134-138.
98. Jia N., Peng Z., Li J., Chen S. Dispersive behavior of high frequency Rayleigh waves propagating on an elastic half space // Acta Mech. Sin. 2021. V. 37. P. 562-569.
99. Li Y. D., Lee K. Y. Size-dependent behavior of Love wave propagation in a nanocoating // Mod. Phys. Lett. B. 2010. V. 24. P. 3015-3023.

100. Liu H., Liu H., Yang J. L. Surface effects on the propagation of shear horizontal waves in thin films with nanoscale thickness // *Physica E*. 2013. V. 49. P. 13-17.
101. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating // *Int. J. Eng. Sci.* 2021. V. 158. P. 103428.
102. Murdoch A. I. The propagation of surface waves in bodies with material boundaries // *J. Mech. Phys. Solids*. 1976. V. 24. P. 137-146.
103. Pal P. K., Acharya D., Sengupta P. R. Effect of surface stresses on surface waves in elastic solids // *Sadhana*. 1997. V. 22. P. 659-670.
104. Peng X. L., Huang G. Y. Elastic vibrations of a cylindrical nanotube with the effect of surface stress and surface inertia // *Physica E*. 2013. V. 54. P. 98-102.
105. Sharma B. L., Eremeyev V. A. Wave transmission across surface interfaces in lattice structures // *Int. J. Eng. Sci.* 2019. V. 145. P. 103173.
106. Калинина Т. И. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений // *Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XIX Междунар. конф. (15–18 октября 2018 г., Ростов-на-Дону)*. Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во ЮФУ. 2018. Т. 2. С. 123-127.
107. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2022. № 1. С. 12-22.
108. Eremeyev V. A. Strongly anisotropic surface elasticity and antiplane surface waves // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019. V. 378. P. 20190100.
109. Murdoch A. I. The effect of interfacial stress on the propagation of stoneley waves // *J. Sound Vib*. 1977. V. 50. P. 1-11.

110. Enzevae C., Shodja H. M. Surface/interface effect on the propagation of high-frequency SH surface waves in an ultra-thin FGP over-layer bonded to a substrate // *Acta Mech.* 2021. V. 232. P. 4677-4689.
111. Enzevae C., Shodja H. M. Torsional surface wave propagation in a transversely isotropic FG substrate with piezoelectric over-layer within surface/interface theory // *Acta Mech.* 2020. V. 231. P. 2203-2216.
112. Xu L. M., Wang X., Fan H. Anti-plane waves near an interface between two piezoelectric half-spaces // *Mech. Res. Commun.* 2015. V. 67. P. 8-12.
113. Zhang C., Chen W., Zhang C. On propagation of anti-plane shear waves in piezoelectric plates with surface effect // *Phys. Lett. A.* 2012. V. 376. P. 3281-3286.
114. Zhang L., Zhao J., Nie G., Liu J. Propagation of Rayleigh-type surface waves in a layered piezoelectric nanostructure with surface effects // *Appl. Math. Mech., Engl. Ed.* 2022. V. 43. iss. 3. P. 327-340.
115. Zhang L. L., Liu J. X., Fang X. Q., Nie G. Q. Effects of surface piezoelectricity and nonlocal scale on wave propagation in piezoelectric nanoplates // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2014. V. 46. P. 22-29.
116. Zhang L. L., Liu J. X., Fang X. Q., Nie G. Q. Size-dependent dispersion characteristics in piezoelectric nanoplates with surface effects // *Physica E.* 2014. V. 57. P. 169-174.
117. Zhang S., Gu B., Zhang H., Feng X.-Q., Pan R., Alamusi, Hu N. Propagation of Love waves with surface effects in an electrically-shortened piezoelectric nanofilm on a half-space elastic substrate // *Ultrasonics.* 2016. V. 66. P. 65-71.
118. Fang X.-Q., Liu Y., Liu X.-L., Liu J.-X. Interface energy effect on the dispersion relation of nano-sized cylindrical piezoelectric/piezomagnetic composites // *Ultrasonics.* 2015. V. 56. P. 444-448.
119. Wu B., Zhang C., Chen W., Zhang C. Surface effects on anti-plane shear waves propagating in magneto-electro-elastic nanoplates // *Smart Mater. Struct.* 2015. V. 24. P. 095017.

120. Zhou Y. Y., Lu C. F., Chen W. Q. Bulk wave propagation in layered piezomagnetic/piezoelectric plates with initial stresses or interface imperfections // *Compos. Struct.* 2012. V. 94. iss. 9. P. 2736-2745.
121. Eremeyev V. A., Nasedkin A. V. Mathematical models and finite element approaches for nanosized piezoelectric bodies with uncoupled and coupled surface effects // *Wave Dynamics and Composite Mechanics for Microstructured Materials and Metamaterials. Advanced Structured Materials.* Vl. 59, M.A. Sumbatyan (Ed.) Springer, Singapore. 2017. ch. 1. P. 1-18.
122. Nasedkin A. V., Eremeyev V. A. About models of nanosized piezoelectric materials with coupled surface effects // *Problems of Strength and Plasticity.* 2017. V. 79. iss. 4. P. 375-384.
123. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. 1988. 472 с.
124. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в плоских и антиплоских задачах для электроупругих сред при подвижных осциллирующих источниках // *Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XIV междунар. конф., г. Ростов-на-Дону, Азов, 19-24 июня 2010 г. Т. 2. Ростов н/Д. 2010. С. 142-146.*
125. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М. 1982. 424 с.
126. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 3. С. 421-427.
127. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1979. 320 с.
128. Huang D. W. Size-dependent response of ultra-thin films with surface effects // *International Journal of Solids and Structures.* 2008. V. 45. No. 2. P. 568-579.
129. Lim C. W., He L. H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2004. V. 46. No. 11. P. 1715-1726.

130. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка. 1981. 283 с.
131. Наседкин А. В. Волновое поле движущегося гармонического источника в анизотропной упругой среде // Труды XXVIII Летней школы “Актуальные проблемы механики”, г. С.-Петербург (Репино), 1-10 июня 2000. / Под ред. Индейцева Д.А. СПб.: ИПМаш РАН. 2001. Т. 2. С. 66-79.
132. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Плоские волны и функции Грина в пьезоэлектрическом пространстве при движущихся осциллирующих источниках // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 2. С. 47-55.
133. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в двумерных задачах электроупругости при движущихся осциллирующих источниках // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2014. № 6(184). С. 16-23.
134. Калинина Т. И. Кинематика и энергетика фундаментальных решений в дальней зоне для двумерных задач теории пьезоэлектричества при движущихся осциллирующих источниках // Тезисы докладов XIV Ежегодной молодежной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Достижения и перспективы молодых ученых в интересах развития Юга России”, г. Ростов-на-Дону, 12-26 апреля 2018 г. Ростов-н/Д: Издательство ЮНЦ РАН. 2018. С. 86.
135. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Плоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. №1. С. 46-55.