

ОТЗЫВ

официального оппонента Брацуна Дмитрия Анатольевича
на диссертацию **Коханова Павла Владимировича «Численное
исследование конвективных движений в пористых цилиндрах»**,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по научной специальности 1.2.2 – «Математическое
моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертационная работа П. В. Коханова посвящена численному исследованию термогравитационной конвекция несжимаемой жидкости в непроницаемых горизонтальном и вертикальном цилиндрах пористой среды. Объектами исследования являются системы дифференциальных уравнений в частных производных, сформулированных в рамках приближения Дарси-Буссинеска и записанных в цилиндрических координатах. Интерес к данным задачам вызван не только обширными приложениями данной модели в природе и технике, но и фундаментальным математическим эффектом, который проявляет себя в виде одновременного сосуществования бесконечного числа стационарных конвективных режимов с различными характеристиками даже в отсутствие у задачи непрерывных групп симметрии. Феномен в виде непрерывных семейств решений был обнаружен впервые в работах Д. В. Любимова, а затем получил своё объяснение в рамках теории косимметрии, развитой В. И. Юдовичем. У систем с косимметрией есть скрытый сохраняющийся интеграл, что требует разработки специальных методов нахождения численного решения, которые бы не затрагивали свойство косимметрии. В частности, для цилиндрических областей применение стандартных конечно-разностных и конечно-элементных методов приводит к разрушению семейств решений. В последнее время появилось ряд новых задач с косимметрией, формулируемых в цилиндрических координатах. Поэтому **актуальным** является разработка численных схем решения таких задач в криволинейных координатах и обеспечение косимметрии при дискретизациях соответствующих уравнений.

Структура и объём диссертации. Во Введении дана общая постановка рассматриваемых проблем. Обсуждаемый в диссертации круг задач остается актуальным для приложений в энергетике и геофизике, их решение также важно с точки зрения развития фундаментальных представлений о динамике нелинейных пространственно-временных систем. Приводятся цель, задачи, области и методы исследования, научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимости работы, описана структура диссертации и представлен список апробаций.

В первой главе дан обзор литературных источников по исследованию фильтрационной конвекции в замкнутых областях. Рассматриваются начально-краевые задачи в естественных переменных (скорость, температура, давление), а также для функции тока и девиации относительно линейного профиля температуры по координате, отвечающей направлению

сил всплытия. Для вертикального цилиндра рассматриваются системы с учётом двух вариантов введения функции тока. Модель Дарси-Буссинеска для сечения горизонтального цилиндра обладает свойством косимметрии. В работе это подтверждается аналитическими выкладками и наличием кратности для критических чисел Рэлея.

Во второй главе выводятся конечно-разностные аналоги уравнений фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах, а также получаются специальные аппроксимации в окрестности осевой линии цилиндров. Дискретные аналоги исходных дифференциальных уравнений конвекции в частных производных имеют различные аппроксимации в естественных переменных, а также относительно функции тока и отклонения температуры. Разработан программный комплекс «CONV_REGIMES» для моделирования термогравитационной конвекции в пористых цилиндрах. Расчёт проводился в среде MATLAB на платформе Engae. Программное обеспечение позволяет рассчитывать порог возникновения конвективных движений в пористых цилиндрах, вычислять стационарные и колебательные режимы, визуализировать динамику течений.

В третьей главе представлены результаты численного исследования моделей тепломассопереноса жидкости в заполненных пористой средой цилиндрах, описаны сценарии мультистабильности стационарных конвективных режимов. Даны вычисления критических значений числа Рэлея и конвективных движений при неоднородном нагреве на границе цилиндра, а также в случае неравномерных сеток. Для вертикально расположенного цилиндра численно исследованы спектральные задачи, получающиеся при двух вариантах введения функции тока: с учетом сингулярности в окрестности осевой линии и без. Проведено сравнение результатов вычисления критических значений числа Рэлея и моделирования конвективных движений жидкости.

В Заключении приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе. В Приложениях приведены сертификат о регистрации программного комплекса и конечно-разностные уравнения для неравномерной сетки.

Необходимо отметить, что большинство результатов диссертационной работы **получено впервые**. Результаты диссертационного исследования обладают **научной значимостью**, список публикаций диссертанта выглядит достойно. В частности имеется публикация в журнале 1-ого уровня «Белого списка». Среди основных результатов хотелось бы отметить следующие:

1. Разработка модели мультистабильности для уравнений фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска в цилиндрических координатах и исследование конвективных движений в горизонтальном цилиндре с учетом влияния неоднородности нагрева.

2. Сравнение моделей конвекции, основанных на различных вариантах записи функции тока, для осесимметричной задачи в случае рассмотрения вертикального цилиндра, подогреваемого снизу.

3. Построение конечно-разностных моделей в цилиндрических координатах со специальной аппроксимацией около осевой линии для задач фильтрационной конвекции. Реализация численной схемы на смещенных сетках в случае неравномерного распределения узлов по радиальной и азимутальной координатам.

4. Создание комплекса программ для численного исследования и математического моделирования конвективных движений в пористых горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

Отметим высокую **практическую значимость** работы. Разработанная диссертантом численная схема, которая позволяет при дискретизации уравнений в цилиндрических координатах сохранять свойство косимметрии у задачи, даёт возможность получения корректного численного решения для ряда важных практических задач. Они включают в себя не только классические задачи о тепловой конвекции в подогреваемых снизу кюветах, рассматриваемых в работах Юдовича и Любимова, но и новые направления исследований, открывшиеся в последние годы. Например, недавно было показано, что центробежная концентрационная конвекция в быстро вращающейся микрожидкостном цилиндрическом биореакторе при определенных условиях также обладает косимметрией [Bratsun & Utochkin, *Physics of Fluids*, 2024 DOI: 10.1063/5.0229942]. Биофизическая задача о спонтанном возникновении циркуляций в плотных стаях пингвинов, которая казалось бы находится совсем далеко от задач конвекции, также демонстрирует свойство косимметрии [Bratsun & Kostarev, *Physics of Fluids*, 2024 DOI: 10.1063/5.0298772]. Во всех этих случаях численная схема, разработанная диссертантом, будет особенно полезной и рецензент с удовольствием отмечает этот важный факт.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается проведением бенчмарк-вычислений, основанных на численной схеме диссертанта, сравнением полученных результатов с известными данными других работ, а также результатами теоретического анализа (например, линейного анализа устойчивости). Автор использует хорошо апробированные методы исследования. Также обоснованность положений и выводов, сделанных на основе проведенных исследований, обеспечивается их непротиворечивостью с имеющимся литературным данным и современным научным представлениям.

Диссертационная работа Коханова П. В. не лишена некоторых недостатков, в некоторых местах рождает желание подискутировать.

1) В Главе 1 (стр. 11) записано уравнение движения несжимаемой неизотермической жидкости в пористой среде в рамках приближения Дарси (1.06). Удивление вызывает появление коэффициента пористости в выражении для силы Дарси, в то время как согласно стандартной теории фильтрации коэффициент пористости записывается перед нестационарным слагаемым, задавая движение для доли объёма пор, заполненных жидкостью, к единице объёма среды. Приближение Дарси обычно означает, что

движение жидкости рассматривается в безынерционном пределе, в котором уравнение движения уже не зависит от коэффициента пористости (но зависит, разумеется, от коэффициента проницаемости). Эта запись уравнения движения не имеет последствий в работе, так как автор на следующей странице 12 пишет, что «...пористость в последующих уравнениях принимается равной единице» и более этот коэффициент в работе не упоминается. Тем не менее, автор должен пояснить, какой смысл несет запись уравнения (1.06), которое является основным для данной диссертационной работы.

2) В параграфе 2 Главы 1, в которой выводятся уравнения тепловой конвекции в бесконечном горизонтальном цилиндре круглого сечения, автор пишет: «При нулевых тепловых потоках на торцах непроницаемого цилиндра и однородной по z температуре на боковой границе существует решение, не зависящее от осевой координаты. Рассматривается цилиндр с длиной, значительно большей радиуса ($H \gg R$), с постоянным по времени и неоднородным по азимутальной координате распределением тепловых источников на границе. В этом случае можно принять осевую скорость $W=0$ и пренебречь зависимостью остальных переменных от осевой координаты z . Тогда задача сводится к анализу двумерной по пространственным координатам модели конвекции в круговой области радиуса R , см. рис. 1». Рецензент имеет сказать тут следующее. В целом, действительно, при рассмотрении бесконечного цилиндра в задаче появляется трансляционная симметрия в направлении оси z . С математической точки зрения это позволяет формально рассматривать класс решений, не зависящих от координаты z . Однако, с физической точки зрения ситуация ровно обратная: двумерные решения более устойчивы в коротких цилиндрах меньше некоторого критического значения $H < H_0$. В длинных цилиндрах $H > H_0$ трёхмерные возмущения становятся менее устойчивыми, при малейших 3D возмущениях система сползает к трехмерной конвекции. Тем более это справедливо для бесконечного цилиндра. Существуют работы, где этот вопрос исследовался, например, устойчивость цилиндров квадратного сечения рассматривалась в работе [Брацун Д.А., Любимов Д.В., Теплов В.С. Трёхмерные конвективные движения в пористом цилиндре конечной длины. Сб. Гидродинамика. Пермь, вып.11, 1998, с.58-77]. Найденное критическое значение, при котором 3D возмущения становятся более опасными равно $H_0 = 0.46$ при стороне квадрата 2. То есть весьма короткий цилиндр. Кстати, свойство косимметрии есть только у 2D конвективных движений.

3) Встречаются дефекты оформления, орфографические ошибки, опечатки и неудачные выражения. Например, на рис.27 линии тока уходят за границу области на обеих вертикальных границах, что не соответствует указанным граничным условиям. Неразборчивые обозначения осевых значений на графиках (см. рис. 23, 26-28).

Стр. 11: «операторы: ∂ – частная производная по пространству и времени» (все таки дифференциал);

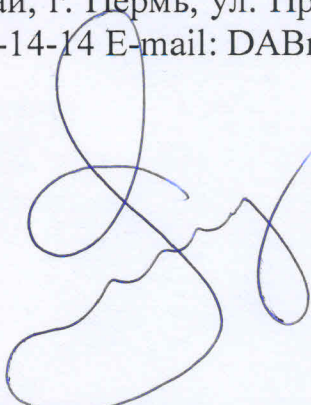
Стр. 15: «с помощью предложенной теории косимметрии [61]» и т.д.

Отмеченные недочеты не снижают научной значимости представленной диссертационной работы и высокого квалификационного уровня диссертанта. Переходя к общей оценке диссертации, необходимо отметить, что она является законченной научно-квалификационной работой, выполненной соискателем самостоятельно. Достоверность основных представленных в работе результатов не вызывает сомнений. Текст автореферата и диссертации, а также публикации полностью отражают суть работы. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Считаю, что диссертационная работа «Численное исследование конвективных движений в пористых цилиндрах» соответствует всем требованиям п. 9–11,13,14 «Положения о присуждении учёных степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 (в редакциях от 21.04.2016 № 335 и от 12.10.2018 № 1168), предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор **Коханов Павел Владимирович** достоин присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент,

Доктор физ.-мат. наук (01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы, 2010 г.), доцент, заведующий кафедрой «Прикладная физика» ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

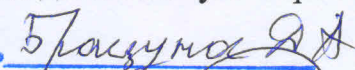
614990, Пермский край, г. Пермь, ул. Профессора Поздеева, 11, корпус В, к. 120. Тел.: +7(342) 239-14-14 E-mail: DABracun@pstu.ru



Брацун Дмитрий Анатольевич

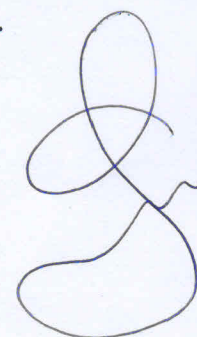
«28» ноября 2025 г.

Я, Брацун Дмитрий Анатольевич, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.

Подпись 

ЗАВЕРЯЮ
Учёный секретарь
Учёного совета ПНИПУ
В.И. Макаревич

« » 20 г.



Брацун /