

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



На правах рукописи

УДК: 519.6

Коханов Павел Владимирович

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ
В ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ**

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» на кафедре теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Цибулин Вячеслав Георгиевич

Официальные оппоненты: **Брацун Дмитрий Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной физики ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (ПНИПУ).
Сидорякина Валентина Владимировна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики ФГБОУ ВО «Донской государственной технической университет» (ДГТУ)

Защита состоится «18» декабря 2025 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.09 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21Ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1346685/>

Автореферат разослан « _____ » _____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

д.ф.-м.н.

Говорухин В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Явления тепломассопереноса в пористых средах активно изучаются из-за приложений в геофизике и энергетике. Для обеспечения устойчивости промышленных и технологических процессов необходимо учитывать динамику жидкости и газа, заполняющих пористую среду. Ввиду сложности аналитического исследования начально-краевых задач фильтрационной конвекции с учетом неоднородного температурного профиля основным методом исследования является вычислительный эксперимент. Задачи термогравитационной конвекции в пористой среде исследовали Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Г.Ф. Путин, А.Ф. Глухов, Д.А. Брацун, Б.С. Марышев, В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин, В. Karasozen, D.A. Nield, A. Bejan, I. Pop, A. Barletta.

Эффект сильной неединственности режимов для конвекции в пористой среде был обнаружен Д.В. Любимовым. Данное свойство задачи было объяснено В.И. Юдовичем на основе разработанной теории косимметрии. При исследовании уравнений Дарси-Буссинеска в результате потери устойчивости состояния покоя ответвляется однопараметрическое семейство стационарных решений. Вычисления самих семейств конвективных режимов были выполнены В.Н. Говорухиным при помощи метода Галёркина для прямоугольных областей в декартовых координатах и В.Г. Цибулиным с А.В. Трофимовой для кольцевых секторов на основе конечно-разностного метода и полярных координат. Вопрос аппроксимации уравнений вблизи сингулярных точек (полюса или осевой линии) не рассматривался.

Компьютерное моделирование фильтрационной конвекции в цилиндрических областях является актуальной проблемой. Исследование возникновения мультистабильных сценариев для уравнений Дарси-Буссинеска требует сохраняющих свойства соответствующих начально-краевых задач численных методов и специализированного программного обеспечения. Развитые подходы далее естественно применять для исследования возмущений, нарушающих косимметрию.

В задачах фильтрационной конвекции эффекты разрушения семейств стационарных режимов анализировались в работах В.И. Юдовича, Д.В. Любимова, Д.А. Брацуна, В.Н. Говорухина и др.

Для горизонтального бесконечно длинного цилиндра в случае линейного по высоте граничного профиля температуры имеется мультистабильность движений, вызываемая косимметрией соответствующей системы уравнений. В диссертации для анализа течений при неоднородном распределении тепловых источников на границе цилиндра развивается подход на основе выделения линейного профиля температуры и решения задач относительно девиации температуры. Исследуются возможности сосуществования конвективных движений, реализуемых при различных начальных распределениях.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является численное исследование гравитационной конвекции теплопроводной несжимаемой жидкости в непроницаемых горизонтальном и вертикальном цилиндрах, насыщенных пористой средой и подогреваемых снизу. Основными объектами исследования являются системы дифференциальных уравнений в частных производных для цилиндрических координат, описывающих конвекцию Дарси-Буссинеска. Рассматриваются начально-краевые задачи в естественных переменных (скорость, температура, давление) и относительно девиации температуры и функции тока. В связи с поставленной целью необходимо решить следующие **задачи:**

1. Исследование моделей тепломассопереноса для описания конвекции жидкости в заполненных пористой средой цилиндрах.
2. Вывод конечно-разностных аналогов уравнений фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах, а также получение специальных аппроксимаций в окрестности осевой линии цилиндров.
3. Применение теории косимметрии для анализа порога возникновения конвекции и сценариев мультистабильности стационарных и колебательных конвективных режимов.

4. Реализация вычисления критических значений числа Рэлея и конвективных движений при неоднородном нагреве на границе цилиндра, в случае неравномерных сеток, с учётом двух вариантов введения функции тока.

5. Разработка программного комплекса для моделирования термогравитационной конвекции в пористых горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

Области исследований. Работа соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Методы исследования. Проводится анализ мультистабильности для модели конвекции Дарси-Буссинеска на основе теории косимметрии В.И. Юдовича. Для дискретизации систем дифференциальных уравнений в частных производных применяются интегро-интерполяционный метод и схема смещённых сеток. Получающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения относительно времени решаются методом Рунге-Кутты.

Научная новизна:

1. Развитие аналитического подхода для анализа возникновения конвекции в случае горизонтального пористого цилиндра.

2. Дискретизация начально-краевых задач фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах на сетках с неравномерным распределением узлов.

3. Разработка численных схем для расчёта тепломассопереноса на основе смещённых сеток и специальных аппроксимаций в окрестности осевой линии пористых цилиндров.

4. Моделирование развития стационарных и колебательных конвективных режимов при различных числах Рэлея для горизонтального и вертикального пористых цилиндров, насыщенных теплопроводной жидкостью.

5. Разработка программного обеспечения для вычислительного эксперимента в задачах фильтрационной конвекции с неоднородным нагревом на границе цилиндров.

**На защиту выносятся следующие результаты и положения.
В области математического моделирования:**

1. Разработка модели мультистабильности для уравнений фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска в цилиндрических координатах и исследование конвективных движений в горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

2. Сравнение моделей конвекции, основанных на различных вариантах введения функции тока, для осесимметричной задачи в случае вертикального цилиндра.

3. Анализ влияния неоднородности нагрева на порог возникновения конвекции и формирование стационарных и колебательных конвективных движений в пористых цилиндрах.

В области численных методов:

4. Построение конечно-разностных моделей в цилиндрических координатах со специальной аппроксимацией около осевой линии для задач фильтрационной конвекции.

5. Реализация численной схемы на смещенных сетках в случае неравномерного распределения узлов по радиальной и азимутальной координатам.

В области комплекса программ:

6. Создание комплекса программ для численного исследования и математического моделирования конвективных движений в пористых горизонтальном и вертикальном цилиндрах

Теоретическая и практическая значимости исследования. Работа вносит теоретический вклад в развитие методов анализа нелинейных уравнений в част-

ных производных. Развитые конечно-разностные схемы могут быть использованы для моделирования конвекции бинарных жидкостей, а также при анализе проблем, возникающих в энергетике, медицине, биотехнологиях. Полученные результаты и программный комплекс будут применены в курсах для студентов физико-математических специальностей.

Достоверность работы. В диссертации применялись математически обоснованные методы теории динамических систем, численного анализа и косимметрии. На основе интегро-интерполяционного метода и дискретизации с использованием сеток со смещёнными узлами проведены аппроксимации рассматриваемых начально-краевых задач конвекции в пористой среде. Реализован вывод конечно-разностных уравнений на неравномерных сетках.

Апробация работы. Основные результаты исследования докладывались на семинаре кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ и следующих научных конференциях: XXXI и XXXII научные конференции «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития (СИТО)», Ростов-на-Дону (2024, 2025); International Scientific Conferences «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА)», Ростов-на-Дону (2024, 2025); International Scientific Conference «St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics», Санкт-Петербург (2024); Всероссийская научно-практическая конференция «Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО)», Симферополь (2025); XXI Всероссийская ежегодная молодежная научная конференция с международным участием «Наука Юга России: достижения и перспективы (ЮНЦ РАН)», Ростов-на-Дону (2025); XIX Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», Дивноморское (2025); XX Владикавказская молодежная математическая школа (ВММШ), Владикавказ (2025).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 10 научных изданиях [1–10]. Из них две статьи

[1,2] входят в перечень ВАК, работы [2,3] проиндексированы в базе Scopus. Имеется свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [4]. Статьи [1,2] и тезисы [510] проиндексированы в электронной библиотеке РИНЦ. Автору принадлежат аналитические выкладки, конечно-разностные расчёты, написание программного кода, проведение численных экспериментов. Научному руководителю В.Г. Цибулину принадлежат выбор темы исследования, первоначальная постановка целей и задач.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав по 4 параграфа, заключения, списка литературы и приложений. Общий объём работы составляет 110 страниц, включая 38 рисунков и 11 таблиц. В конце глав приводятся основные положения и выводы. Список использованной литературы содержит 124 источника. В приложениях приведены сертификат о регистрации программного комплекса и конечно-разностные уравнения для неравномерной сетки.

Содержание работы

Первая глава посвящена уравнениям Дарси-Буссинеска для моделирования конвекции в пористых цилиндрах. В *первом параграфе* дан литературный обзор, посвящённый исследованию задач фильтрационной конвекции в замкнутых областях, используемых моделях и численных методах.

Во *втором параграфе* представлена математическая модель конвекции для длинного горизонтального цилиндра, заполненного пористой средой и подогреваемого снизу. При нулевых тепловых потоках на торцах непроницаемого цилиндра и постоянной по осевой координате температуре на боковой границе существует решение, зависящее только от радиальной $r \in [0, R]$ и азимутальной $\varphi \in [0, 2\pi]$ координат. Рассматривается цилиндр с длиной, значительно большей радиуса R . На границе задаётся постоянное по времени t и неоднородное по азимутальной координате распределение тепловых источников. Задача сводится к анализу двумерной по пространственным координатам модели конвекции в круговой области, см. рис. 1, g – ускорение свободного падения. Температура $T(r, \varphi, t)$ на границе круговой области задаётся следующей формулой:

$T(R, \varphi, t) = T_0 - \delta T R \sin \varphi + T_b(\varphi)$, $T_0 = (T_1 + T_2)/2$, $\delta T = (T_1 - T_2)/(2R)$, где T_0 – равновесная температура при $t = 0$, $\delta T > 0$ – градиент температуры по высоте, $T_1 > T_2$ – температуры при $y = -R$ и $y = R$, T_b – добавка к линейному профилю. Для девиации температуры $\theta(r, \varphi, t) = T(r, \varphi, t) - T_0 + \delta T r \sin \varphi$ имеем краевое условие $\theta(R, \varphi, t) = T_b(\varphi)$.

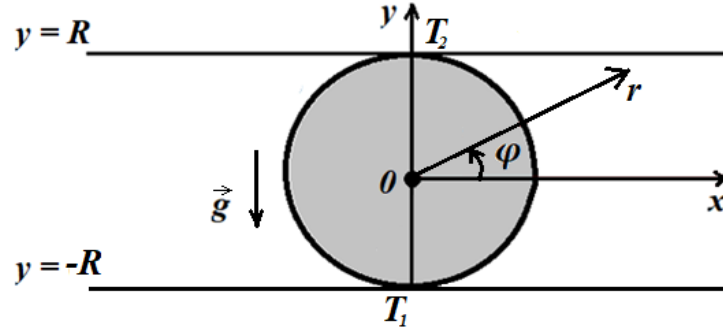


Рис. 1. Расчётная область сечения горизонтального цилиндра

Система безразмерных уравнений фильтрационной конвекции в естественных переменных и цилиндрических координатах для задачи о подогреве снизу выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial r} + U - \lambda \theta \sin \varphi &= 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + V - \lambda \theta \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right] + [U \sin \varphi + V \cos \varphi] - \left[U \frac{\partial \theta}{\partial r} + V \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U, V – компоненты радиальной и азимутальной скорости, P – давление, $\lambda \sim \delta T$ – число Рэлея. Система дополняется краевыми условиями:

$$V(0, \varphi, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(0, \varphi, t) = 0, \quad U(R, \varphi, t) = 0, \quad \theta(R, \varphi, t) = 0.$$

Начальное условие ставится только для температуры: $\theta(r, \varphi, 0) = \theta^0(r, \varphi)$.

Система в естественных переменных (1) сводится к задаче относительно температуры θ и функции тока ψ , вводимой по формулам:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \Delta \psi - \lambda G(\theta) &= 0, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta \sin \varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\theta r \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + G(\psi) - J(\theta, \psi), \quad G(\psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \varphi, \quad (3)$$

$$J(\theta, \psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi},$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{r=R} = 0, \quad (4)$$

где Δ – оператор Лапласа, G – сила Архимеда, J – конвективное слагаемое.

Третий параграф посвящён постановке осесимметричной задачи фильтрационной конвекции для вертикального цилиндра. Система безразмерных уравнений в цилиндрических координатах для температуры и функции тока получается при введении ψ : $U = (\partial \psi / \partial z) / r$, $W = -(\partial \psi / \partial r) / r$.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \quad \Delta \psi = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \lambda r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (5)$$

Здесь W – компонента скорости по осевой координате $z \in [0, H]$, H – высота,

$\Delta = \partial(r\partial/\partial r)/\partial r/r + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа.

Для сравнения моделей фильтрационной конвекции в вертикальном цилиндре рассмотрен второй вариант введения функции тока без сингулярности:

$U = \partial \psi / \partial z$, $W = -(\partial[r\psi]/\partial r)/r$.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \quad \Delta \psi = \frac{\psi}{r^2} - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (6)$$

Системы (5), (6) дополняются краевыми условиями:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=R} = 0, \quad \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{z=0} = \theta|_{z=H} = 0. \quad (7)$$

В *четвёртом параграфе* показано, что задача фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска (2)(4) является косимметричной в смысле определения В.И. Юдовича. Косимметрией является вектор-функция $\vec{L} = \{\theta, -\psi\}$, которая ортогональна вектору правой части системы (2)(3) и не обращается в нуль для стационарных решений с ненулевой функцией тока. Осесимметричные задачи для вертикального цилиндра (5), (7) и (6)-(7) не являются косимметричными.

Для определения порогового значения λ_{cr} , при превышении которого возникают конвективные движения, и других критических чисел Рэлея рассматривается спектральная задача, которая получается из (3)(4) отбрасыванием локальной производной температуры по времени и нелинейного члена $J(\theta, \psi)$. С помощью замен $\lambda = \mu^2$, $\hat{\theta} = \mu\theta$ и подставки в комплексную функцию $\hat{\theta} + i\psi = X e^{i\frac{\mu}{2}r \sin \varphi}$ получается краевая задача для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta X + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 X = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad X|_{r=R} = 0,$$

решение которой имеет вид

$$X_k^{(n)}(r, \varphi) = J_n\left(r \frac{\mu_k^{(n)}}{2}\right) \begin{cases} \cos(n\varphi), & n = 0, 1, \dots \\ \sin(n\varphi), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Величины $\mu_k^{(n)}$ находятся из трансцендентного уравнения $J_n\left(R\mu_k^{(n)}/2\right) = 0$.

При $n = 0, k = 1, R = 1$ находится отвечающее возникновению конвекции критическое значение числа Рэлея $\lambda_{cr} = 4\left(\mu_1^{(0)}\right)^2 \approx 23.13$.

Глава 2 посвящена разработке численных схем и программного комплекса для решения задач фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах. В *параграфе 5* представлен метод конечных разностей для кругового сечения бесконечно длинного горизонтального цилиндра и реализована дискретизация уравнений конвекции на основе интегро-интерполяционного метода. Вводятся сетки с неравномерным распределением узлов по радиальной и азимутальной координатам: $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{N_r} = R$, $0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{N_\varphi+1} = 2\pi$, где N_r, N_φ – число узлов. Основная сетка состоит из (r_j, φ_i) , $j = \overline{1, N_r}$, $i = \overline{1, N_\varphi}$. Узлы смещённых сеток задаются по формулам: $r_{1/2} = 0$, $r_{j-1/2} = (r_j + r_{j-1})/2$, $j = \overline{2, N_r}$; $\varphi_{i-1/2} = (\varphi_i + \varphi_{i-1})/2$, $i = \overline{2, N_\varphi}$. Шаги определяются следующим образом: $h_{r,j} = r_{j+1/2} - r_{j-1/2}$, $j = \overline{1, N_r - 1}$, $h_{r,j-1/2} = r_j - r_{j-1}$, $j = \overline{2, N_r}$; $h_{\varphi,i} = \varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}$, $i = \overline{2, N_\varphi}$, $h_{\varphi,i-1/2} = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{2, N_\varphi + 1}$.

Сетка на рис. 2 организована так, что узлы $(r_{1/2}, \varphi_i)$ соответствуют полюсу.

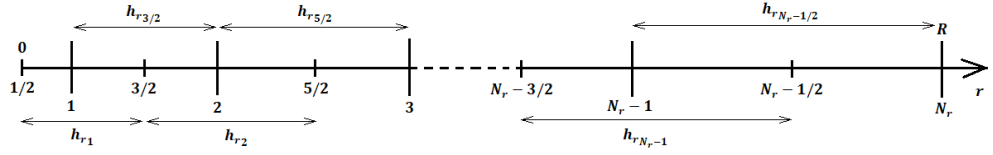


Рис. 2. Дискретизация по радиальной координате

В узлах основной сетки вычисляются температура θ_j^i и функция тока ψ_j^i . В узлах смещённых сеток рассчитываются скорости по радиусу $U_j^{i-1/2}$ и углу $V_{j-1/2}^i$, в дробных узлах по r и φ определяется давление $P_{j-1/2}^{i-1/2}$.

На двухточечных и трёхточечных шаблонах определяются разностные операторы первых производных δ_r , δ_φ и D_r , D_φ , а также операторы вычисления среднего взвешенного δ_r^0 и δ_φ^0 для целых и полуцелых индексов j , i :

$$\begin{aligned}
 (\delta_r \theta)_{j-1/2}^i &= \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{h_{r,j-1/2}}, & (\delta_\varphi \theta)_j^{i-1/2} &= \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{h_{\varphi,i-1/2}}, \\
 (\delta_r^0 \theta)_{j-1/2}^i &= \frac{\theta_j^i (r_j - r_{j-1/2}) + \theta_{j-1}^i (r_{j-1/2} - r_{j-1})}{r_j - r_{j-1}}, & (D_r \theta)_j^i &= \frac{\theta_{j+1}^i - \theta_{j-1}^i}{2h_{r,j}}, \\
 (\delta_\varphi^0 \theta)_j^{i-1/2} &= \frac{\theta_j^i (\varphi_i - \varphi_{i-1/2}) + \theta_j^{i-1} (\varphi_{i-1/2} - \varphi_{i-1})}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}, & (D_\varphi \theta)_j^i &= \frac{\theta_j^{i+1} - \theta_j^{i-1}}{2h_{\varphi,i}}.
 \end{aligned}$$

В параграфе 6 рассматривается конечно-разностная схема в переменных функция тока и температура (2)(4) в случае горизонтального бесконечно длинного цилиндра:

$$\begin{aligned}
 [\Delta \psi - \lambda G(\theta)]_j^i &= 0, & \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^i &= [\Delta \theta + G(\psi) - J(\theta, \psi)]_j^i, \\
 G &= \frac{1}{r} [\delta_\varphi^0 (\theta \sin \varphi) - \cos \varphi \delta_r^0 (\theta r)], & J &= \frac{1}{r} [D_\varphi \psi D_r \theta - D_r \psi D_\varphi \theta], \\
 (\delta_r \psi)_{1/2}^i &= 0, & (\delta_r \theta)_{1/2}^i &= 0, & \psi_{N_r}^i &= 0, & \theta_{N_r}^i &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для узлов около полюса (r_1, φ_i) применялись специальные формулы:

$$[J(\theta, \psi)]_1^i = \frac{1}{2r_1} \left[(D_\varphi \psi)_1^i (\delta_r \theta)_{3/2}^i - (\delta_r \psi)_{3/2}^i (D_\varphi \theta)_1^i \right].$$

Полученная в результате дискретизации конечно-разностная схема (8) содержит неизвестные, зависящие только от времени, и представляется в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Theta} = A\Theta + B\Psi + F, \quad A\Psi - \lambda B\Theta = 0.$$

Здесь точка обозначает производную по времени, матрица A соответствует дискретному аналогу оператора Лапласа, с помощью матрицы B реализуется аппроксимация силы Архимеда, а вектор-столбец F содержит элементы конвективного слагаемого. Векторы узловых значений температуры Θ и функции тока Ψ имеют размерность $[(N_r - 1) \times N_\varphi]$:

$$\Theta = \{\theta_1^1, \theta_1^2, \dots, \theta_{N_r-1}^{N_\varphi}\}, \quad \Psi = \{\psi_1^1, \psi_1^2, \dots, \psi_{N_r-1}^{N_\varphi}\}.$$

В *седьмом параграфе* для осесимметричной задачи фильтрационной конвекции в вертикальном цилиндре получается следующая аппроксимация уравнений, полученных введением функции тока без сингулярности (6):

$$\begin{aligned} [\Delta\psi]_j^k &= \left[\frac{\psi}{r^2} - \lambda D_r \theta \right]_j^k, & \Delta_j^k &= \left[\frac{1}{r} \delta_r (r \delta_r) + \delta_z^2 \right]_j^k, \\ [\partial_t \theta]_j^k &= \left[\Delta \theta - \frac{1}{r} \delta_r (r \psi) - (D_r \theta D_z \psi - D_r \theta \frac{1}{r} \delta_r (r \psi)) \right]_j^k, \end{aligned} \quad (9)$$

где δ_z , D_z – разностные операторы первых производных, h_z , N_z – равномерный шаг и количество узлов по осевой координате с индексами $k = \overline{1, N_z}$. Дискретные аналоги условий для (7) запишутся в виде:

$$(\delta_r \psi)_{1/2}^k = 0, (\delta_r \theta)_{1/2}^k = 0; \quad \psi_{N_r}^k = 0, \theta_{N_r}^k = 0; \quad \psi_j^1 = \psi_j^{N_z} = 0, \theta_j^1 = \theta_j^{N_z} = 0.$$

При $j = 1$ и $k = \overline{1, N_z}$ используется специальная аппроксимация для нелинейного члена: $J_1^k = [r_1 (\delta_r \theta)_{3/2}^k (D_z \theta)_1^k - (D_z \psi)_1^k \delta_r (r \psi)_{3/2}^k] / (2r_1)$.

В *параграфе 8* описан программный комплекс «CONV_REGIMES» для численного исследования конвективных движений в пористых цилиндрах. Базовыми элементами являются блок подготовки начальных данных и расчётных параметров, функции вычисления динамики и критических чисел, подсистема подготовки выходных данных и графических материалов, см. рис. 3.

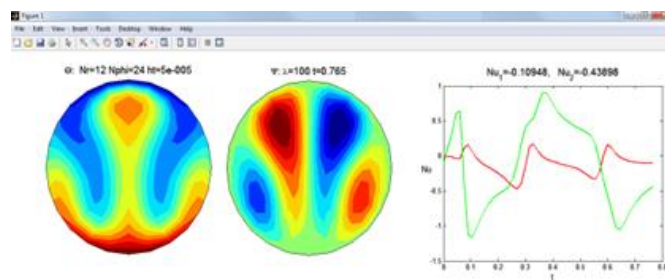


Рис. 3. Визуализация динамики: температура, функция тока, числа Нуссельта

В комплексе «CONV_REGIMES» основными являются функции: определение начальных распределений девиации температуры (initial_theta), формирование матриц и вычисление спектральных значений (matr_AB), расчёт функции тока, кинетической энергии и чисел Нуссельта (stream_fun), вычисление правой части уравнения теплопроводности (right_part), нахождение спектра устойчивости (jacobian).

Глава 3 посвящена вычислительному эксперименту и моделированию конвективных режимов в горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

В *девятом параграфе* рассматривается вычисление конвективных переходов в длинном горизонтальном цилиндре с использованием неравномерных сеток. В табл. 1 представлены результаты вычисления порога возникновения конвективных движений для различных равномерных сеток в сравнении с аналитическим результатом, полученным на основе нулей бесселевых функций. Видно, что с ростом числа узлов по радиальной и азимутальной координатам вычисленные критические числа стремятся к точному значению. В случае плоской задачи конвекции Дарси для произвольной односвязной области В.И. Юдовичем было установлено, что критические числа Рэлея имеют кратность не менее двух.

Таблица 1. Вычисление критического числа Рэлея λ_{cr} на различных сетках

$N_r \times N_\varphi$	12×18	24×36	48×72	60×90	точное
λ_{cr}	24.09	23.37	23.19	23.17	23.13

Таблица 2. Критические числа Рэлея для разных сеток и параметра γ

Сетка $N_r \times N_\varphi$	γ	$\lambda_{cr}^k (k = \overline{1,6})$		
		$\lambda_{cr}^{1,2} = 23.13$	$\lambda_{cr}^{3,4} = 58.74$	$\lambda_{cr}^{5,6} = 58.74$
12×24	1.00	23.79	62.91	64.02
	0.95	23.88	62.92	63.99
	0.90	24.01	63.22	63.96
24×24	1.00	23.58	60.86	63.64
12×24	1.10	23.69	63.78	64.16
	1.15	23.68	64.31	64.71
	1.20	23.69	64.53	65.99

Для задачи (2)(4) первое критическое число Рэлея является двукратным, а остальные – четырёхкратными. В табл. 2 даны результаты вычисления ряда критических чисел Рэлея для неравномерного распределения узлов по радиальной координате $r_{j+1} = r_j + h_r \gamma^j$, $j = \overline{1, N_r}$, $r_1 = h_r/2$. Случай $\gamma = 1$ соответствует равномерной сетке.

При сгущении узлов к границе ($0 < \gamma < 1$) результаты ухудшаются, и требуется увеличение числа узлов для получения значений, сравнимых со случаем равномерной сетки. При сгущении узлов к центру ($\gamma > 1$) оптимальные значения достигаются при $\gamma \approx 1.15$. Неравномерная сетка размером 12×24 позволяет добиться результатов, получаемых на равномерной сетке 24×24 узлов. Значения второй и третьей пар критических чисел стремятся друг к другу при сгущении узлов к центру, что приближает к аналитическому результату о четырёхкратности второй и последующих пар критических чисел Рэлея.

В параграфе 10 представлены конвективные режимы, спектр устойчивости, графики зависимостей чисел Нуссельта и кинетической энергии от времени для бесконечно длинного горизонтального цилиндра радиуса $R = 1$. На рис. 4–6 приведены результаты расчётов на сетке 12×24 узлов. На рис. 4 представлены два стационарных конвективных режима с симметричным полем температуры, полученные при установлении из начальных данных: $\theta^0(r, \varphi) = \pm 0.1(1 - r/R)$.

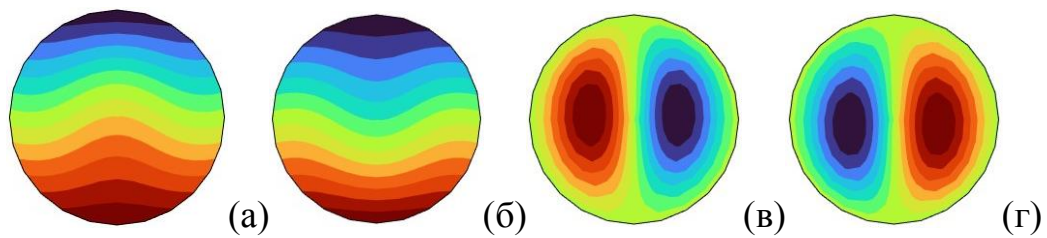


Рис. 4. Температура (а), (б) и функция тока (в), (г), $\lambda = 25 > \lambda_{cr}$

Распределение температуры с восходящим потоком в центральной части и функция тока с двумя конвективными валами представлены соответственно на рис. 4а–4в. Правый вал вращается по часовой стрелке, а левый – против. Режим с противоположной структурой течения дан на рис. 4б–4г.

В расчётах реализуется мультстабильность конвективных режимов. Например, на рис. 5 приведено развитие с ростом числа Рэлея стационарного режима с несимметричным распределением температуры.

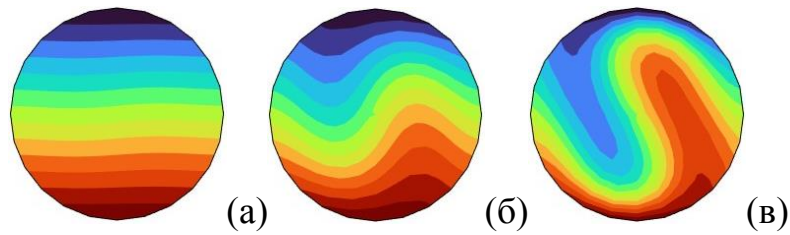


Рис. 5. Температура при $\lambda = 30$ (а), $\lambda = 35$ (б), $\lambda = 40$ (в)

При достаточно больших числах Рэлея стационарные конвективные режимы теряют устойчивость и возникают колебательные движения.

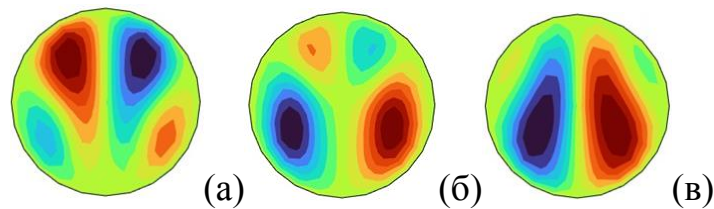


Рис. 6. Функция тока при $\lambda = 100$ для $t = 0.2$ (а), 0.3 (б), 0.4 (в)

На рис. 6 представлены функции тока для трёх моментов времени на этапе установления периодического нестационарного движения. Видно, что структура течения с четырьмя валами динамически меняется, но режим остаётся симметричным относительно вертикального сечения.

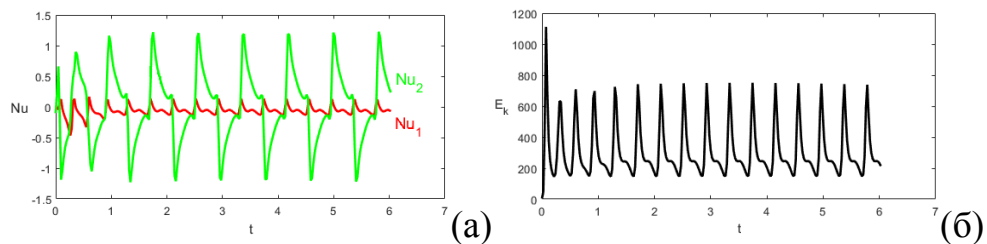


Рис. 7. Изменение во времени чисел Нуссельта (а) и кинетической энергии (б), $\lambda = 100$

На рис. 5 построены графики зависимости от времени чисел Нуссельта Nu_1 , Nu_2 и кинетической энергии для колебательного режима при $\lambda = 100$. Числа Нуссельта характеризуют плотность теплового потока через центральное вертикальное сечение и границу круговой области:

$$Nu_1(t) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R dy \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad Nu_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_{r=R}.$$

Далее рассматривается модель возникновения конвекции в случае неоднородного нагрева круга на границе. На основе модели Дарси рассматриваются уравнения относительно температуры θ и функции тока ψ . На границе задаются условие непроницаемости и температура: $\psi(R, \varphi, t) = 0$, $\theta(R, \varphi, t) = T_b(\varphi)$.

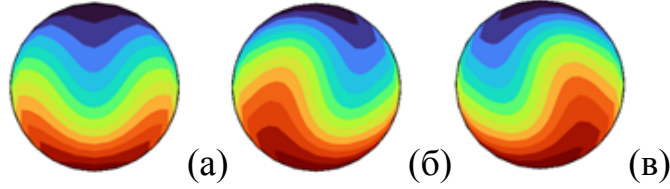


Рис. 8. а) $a_l = -a_r = 0.05$, б) $a_l = a_r = 0.05$, в) $a_l = a_r = -0.05$; $\lambda = 24$

Задача (3)(4) решалась при заданной на границе температуре

$$T_b(\varphi) = \begin{cases} a_l \sin(b\varphi), & \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \\ a_r \sin(b\varphi), & 0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

где a_l и a_r – амплитуды возмущения, b – мода. На рис. 8 показаны режимы с различными двусторонними возмущениями на границе и $b = 1$. Получены асимметричные распределения температуры, см. рисунки 8б8в. С увеличением величины возмущения при $a_l = -a_r$ происходит уменьшение порогового значения λ_{cr} . Увеличение числа Рэлея приводит к более сложной конвективной динамике, см. рис. 9. Графики чисел Нуссельта демонстрируют быстрый переход к стационарному режиму при $\lambda = 40$, затухание колебаний при $\lambda = 70$, формирование колебательного режима при $\lambda = 100$.

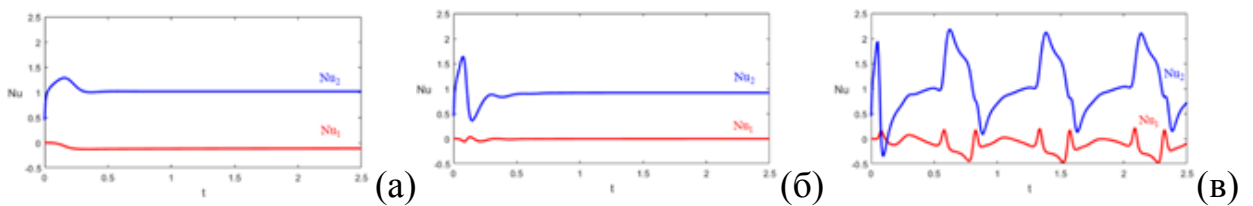


Рис. 9. Графики изменения чисел Нуссельта во времени для различных чисел Рэлея:

а) $\lambda = 40$, б) $\lambda = 70$, в) $\lambda = 100$; $a_l = -a_r = 0.05$, $b = 1$

В параграфе 11 представлено исследование спектральной задачи о возникновении конвекции в вертикальном цилиндре. В табл. 3 приведены результаты вычисления порога возникновения конвекции для различных сеток с учётом двух

вариантов введения ψ (I / II), см. формулы (8)– (9). По каждому столбцу наблюдается сходимость при увеличении количества узлов сетки.

Таблица 3. Вычисление λ_{cr}^m ($m = \overline{1,3}$) на разных сетках; $R = 2, H = 1$

$N_r \times N_z$	λ_{cr}^1 (I / II)	λ_{cr}^2 (I / II)	λ_{cr}^3 (I / II)
12×8	44.09 / 45.73	54.91 / 53.88	72.76 / 80.35
18×12	42.89 / 43.57	51.86 / 51.44	66.24 / 68.83
24×16	42.47 / 42.85	50.83 / 50.59	64.21 / 65.55
36×24	42.18 / 42.35	50.10 / 50.00	62.83 / 63.40
48×32	42.08 / 42.17	49.85 / 49.79	62.37 / 62.68

Для расчёта конвективных движений далее используется сетка из 24×16 узлов. Сравнения с расчетами на более детальной сетке не выявили существенных отличий в моделировании конвекции. На рис. 10 представлены собственные функции для первых трех критических чисел из табл. 3. Видно, что каждому λ_{cr} соответствует определенное количество валов.

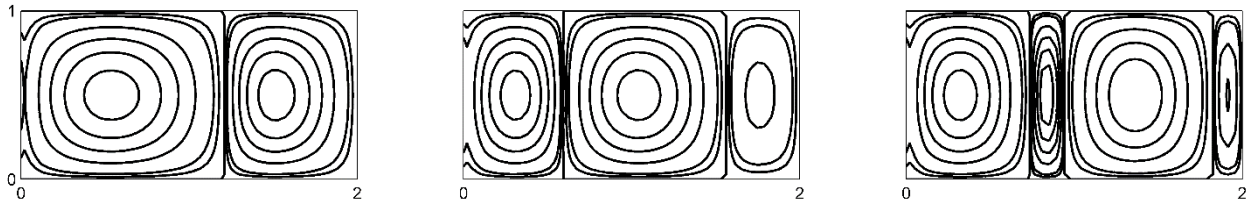


Рис. 10. Собственные функции (ψ): а) $\lambda_{cr}^1 = 42.47$, б) $\lambda_{cr}^2 = 50.83$, в) $\lambda_{cr}^3 = 64.21$

Результаты по расчету конвективных движений в вертикальном цилиндре представлены в параграфе 12. В диапазоне $\lambda \in [60; 70]$ наблюдается стационарный режим. При превышении числа Рэлея ($\lambda \geq 90$) возникают колебательные режимы. На рис. 11 отмечены точки, для которых даны линии тока.

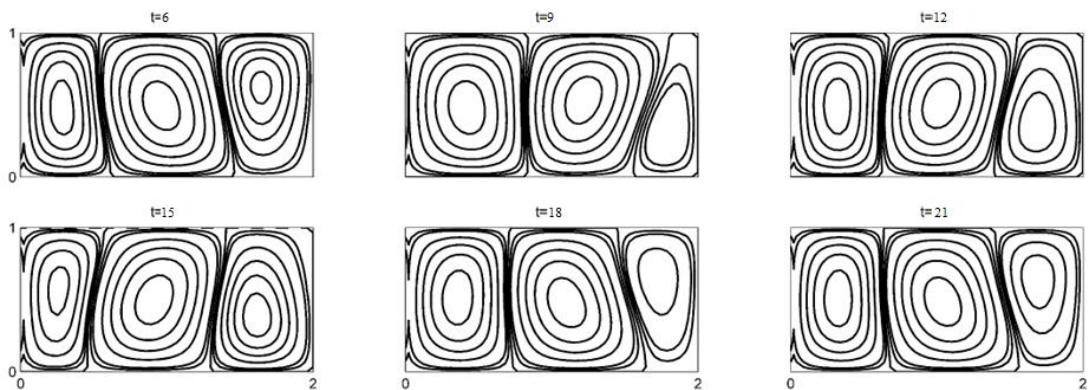


Рис. 11. Колебательный режим при $\lambda = 90$

В **Заключении** приведены основные результаты диссертационного исследования:

1. Развита аналитическая методика вычисления критических чисел Рэлея для задачи фильтрационной конвекции в случае горизонтального бесконечно длинного цилиндра.

2. Проведено сравнение моделей конвекции, основанных на различных вариантах введения функции тока, для осесимметричной задачи в случае пористого вертикального цилиндра.

3. Разработаны конечно-разностные схемы для уравнений фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах со специальной аппроксимацией около осевой линии.

4. Реализована численная схема решения задачи конвекции Дарси-Буссинеска для случая неравномерного распределения узлов сетки в горизонтальном пористом цилиндре.

5. Изучены стационарные и колебательные режимы фильтрационной конвекции при росте числа Рэлея и неоднородном нагреве на границе.

6. Исследована мультстабильность конвективных движений в пористой среде, заполняющей горизонтальный цилиндр.

7. Разработан программный комплекс для вычислительного эксперимента по моделированию фильтрационной конвекции в горизонтальных и вертикальных цилиндрах.

Список публикаций автора по теме работы

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК и Scopus:

1. *Коханов, П. В.* Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде / П. В. Коханов, В. Г. Цибулин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 37-44. – DOI 10.31429/vestnik-20-4-37-44. (K2).

2. *Коханов, П. В.* Моделирование фильтрационной конвекции в полярных координатах на неравномерной сетке / П. В. Коханов, В. Г. Цибулин // Математическое моделирование. – 2025. – Т. 37, № 3. – С. 127-143. – DOI 10.20948/mm-2025-03-09. (K1)

3. *Kokhanov, P. Modeling of Convective Flows in a Porous Circular Enclosure / Kokhanov P., Tsybulin V. // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications / Altenbach H. (eds). – Springer, Cham, 2025. – Ch. 23. – P. 337-348. – (Advanced Structured Materials, STRUCTMAT, vol. 223). – URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_23*

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025660956 Российская Федерация. Программная реализация расчета конвекции в пористом цилиндре : № 2025619783 : заявл. 22.04.2025 : опубл. 28.04.2025 / В. Г. Цибулин, П. В. Коханов ; правообладатель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет». – EDN FYNJEN.

В сборниках трудов конференций

5. *Коханов П.В. Конечно-разностная схема на неравномерной сетке для задачи фильтрационной конвекции в круговой области // В сб.: Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Материалы XXXI научной конференции. ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2024. С. 254-257.*

6. *Коханов П.В. Мультистабильные решения задачи фильтрационной конвекции в круговой области // В сб.: International Scientific Conference St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics. СПбГУ, Санкт-Петербург, 2024. С. 10-11.*

7. *Коханов П.В. Конечно-разностная схема расчета конвекции в вертикальном пористом цилиндре // В сб.: Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО-2025). ФТИ КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, 2025. С. 360-365.*

8. *Коханов П.В. Разностная схема для расчета конвекции в вертикальном пористом цилиндре // В сб.: Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Материалы XXXII научной конференции. ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2025. С. 232-236.*

9. *Коханов П.В. Метод конечных разностей для расчета конвекции в пористом цилиндре // В сб.: XXI Всероссийская ежегодная молодежная научная конференция с международным участием «Наука Юга России: достижения и перспективы». ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, 2025. С. 286.*

10. *Коханов П.В., Цибулин В.Г. Расчет конвективных движений в пористом цилиндре // В сб.: Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. ЮФУ, ДГТУ, Дивноморское, 2025. С. 58.*

Коханов Павел Владимирович

Численное исследование конвективных движений в пористых цилиндрах

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.__.2025 г.

Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Тираж 100 экз.

Усл. печ. лист. 1,0. Уч. изд. д. 1,0. Заказ № ____.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.

344090, г. Ростов-на-Дону, пр-т. Стачки. 200/1, тел +7 (863) 243-41-66.