

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



На правах рукописи

УДК: 519.6

**Коханов Павел Владимирович**

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ  
В ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ**

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., доцент

Цибулин В.Г.

Ростов-на-Дону – 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ДАРСИ–БУССИНЕСКА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ.....	10
§ 1. Исследование фильтрационной конвекции в замкнутых областях: обзор литературы.....	13
§ 2. Математическая модель конвекции для пористого горизонтального цилиндра .....	19
§ 3. Осесимметричная задача фильтрационной конвекции в вертикальном цилиндре .....	25
§ 4. Косимметрия модели Дарси-Буссинеска для горизонтального цилиндра, аналитический метод определения критических значений числа Рэлея ....	29
Выводы по ГЛАВЕ 1.....	34
ГЛАВА 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ.....	35
§ 5. Численная схема в естественных переменных для горизонтального цилиндра .....	36
§ 6. Переход к дискретной системе уравнений относительно девиации температуры и функции тока.....	48
§ 7. Конечно–разностные уравнения для вертикального цилиндра .....	54
§ 8. Описание программного комплекса «CONV_REGIMES» для расчёта фильтрационной конвекции в цилиндрических областях .....	59
Выводы по ГЛАВЕ 2.....	66
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ .....	67
§ 9. Вычисление конвективных переходов в горизонтальном цилиндре с использованием неравномерных сеток.....	68
§ 10. Конвективные режимы в горизонтальном цилиндре при боковом неоднородном нагреве.....	75

§ 11. Спектральные задачи о возникновении конвекции в вертикальном цилиндре .....	82
§ 12. Моделирование конвективных движений для осесимметричной задачи в вертикальном цилиндре.....	88
Выводы по ГЛАВЕ 3.....	92
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	93
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	95
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	108

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Явления тепломассопереноса в пористых средах активно изучаются из-за приложений в геофизике и энергетике. Для обеспечения устойчивости промышленных и технологических процессов необходимо учитывать динамику жидкости и газа, заполняющих пористую среду. Ввиду сложности аналитического исследования начально-краевых задач фильтрационной конвекции с учетом неоднородного температурного профиля основным методом исследования является вычислительный эксперимент. Задачи термогравитационной конвекции в пористой среде исследовали Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Г.Ф. Путин, А.Ф. Глухов, Д.А. Брацун, Б.С. Марышев, В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин, В. Karasozen, D.A. Nield, A. Bejan, I. Pop, A. Barletta.

Эффект сильной неединственности режимов для конвекции в пористой среде был обнаружен Д.В. Любимовым. Данное свойство задачи было объяснено В.И. Юдовичем на основе разработанной теории косимметрии. При исследовании уравнений Дарси-Буссинеска в результате потери устойчивости состояния покоя ответвляется однопараметрическое семейство стационарных решений. Вычисления самих семейств конвективных режимов были выполнены В.Н. Говорухиным при помощи метода Галёркина для прямоугольных областей в декартовых координатах и В.Г. Цибулиным с А.В. Трофимовой для кольцевых секторов на основе конечно-разностного метода и полярных координат. Вопрос аппроксимации уравнений вблизи сингулярных точек (полюса или осевой линии) не рассматривался.

Компьютерное моделирование фильтрационной конвекции в цилиндрических областях является актуальной проблемой. Исследование возникновения мультистабильных сценариев для уравнений Дарси-Буссинеска требует сохраняющих свойства соответствующих начально-краевых задач численных методов и специализированного программного обеспечения. Развитые подходы далее естественно применять для исследования возмущений, нарушающих косимметрию.

В задачах фильтрационной конвекции эффекты разрушения семейств стационарных режимов анализировались в работах В.И. Юдовича, Д.В. Любимова, Д.А. Брацуна, В.Н. Говорухина и др.

Для горизонтального бесконечно длинного цилиндра в случае линейного по высоте граничного профиля температуры имеется мультистабильность движений, вызываемая косимметрией соответствующей системы уравнений. В диссертации для анализа течений при неоднородном распределении тепловых источников на границе цилиндра развивается подход на основе выделения линейного профиля температуры и решения задач относительно девиации температуры. Исследуются возможности сосуществования конвективных движений, реализуемых при различных начальных распределениях.

**Цель и задачи работы.** Целью диссертационной работы является численное исследование гравитационной конвекции теплопроводной несжимаемой жидкости в непроницаемых горизонтальном и вертикальном цилиндрах, насыщенных пористой средой и подогреваемых снизу. Основными объектами исследования являются системы дифференциальных уравнений в частных производных для цилиндрических координат, описывающих конвекцию Дарси-Буссинеска. Рассматриваются начально-краевые задачи в естественных переменных (скорость, температура, давление) и относительно девиации температуры и функции тока. В связи с поставленной целью необходимо решить следующие **задачи:**

1. Исследование моделей тепломассопереноса для описания конвекции жидкости в заполненных пористой средой цилиндрах.
2. Вывод конечно-разностных аналогов уравнений фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах, а также получение специальных аппроксимаций в окрестности осевой линии цилиндров.
3. Применение теории косимметрии для анализа порога возникновения конвекции и сценариев мультистабильности стационарных и колебательных конвективных режимов.

4. Реализация вычисления критических значений числа Рэлея и конвективных движений при неоднородном нагреве на границе цилиндра, в случае неравномерных сеток, с учётом двух вариантов введения функции тока.

5. Разработка программного комплекса для моделирования термогравитационной конвекции в пористых горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

**Области исследований.** Работа соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

**Методы исследования.** Проводится анализ мультистабильности для модели конвекции Дарси-Буссинеска на основе теории косимметрии В.И. Юдовича. Для дискретизации систем дифференциальных уравнений в частных производных применяются интегро-интерполяционный метод и схема смещённых сеток. Получающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения относительно времени решаются методом Рунге-Кутты.

**Научная новизна:**

1. Развитие аналитического подхода для анализа возникновения конвекции в случае горизонтального пористого цилиндра.

2. Дискретизация начально-краевых задач фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах на сетках с неравномерным распределением узлов.

3. Разработка численных схем для расчёта тепломассопереноса на основе смещённых сеток и специальных аппроксимаций в окрестности осевой линии пористых цилиндров.

4. Моделирование развития стационарных и колебательных конвективных режимов при различных числах Рэлея для горизонтального и вертикального пористых цилиндров, насыщенных теплопроводной жидкостью.

5. Разработка программного обеспечения для вычислительного эксперимента в задачах фильтрационной конвекции с неоднородным нагревом на границе цилиндров.

**На защиту выносятся следующие результаты и положения.  
В области математического моделирования:**

1. Разработка модели мультистабильности для уравнений фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска в цилиндрических координатах и исследование конвективных движений в горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

2. Сравнение моделей конвекции, основанных на различных вариантах введения функции тока, для осесимметричной задачи в случае вертикального цилиндра.

3. Анализ влияния неоднородности нагрева на порог возникновения конвекции и формирование стационарных и колебательных конвективных движений в пористых цилиндрах.

**В области численных методов:**

4. Построение конечно-разностных моделей в цилиндрических координатах со специальной аппроксимацией около осевой линии для задач фильтрационной конвекции.

5. Реализация численной схемы на смещенных сетках в случае неравномерного распределения узлов по радиальной и азимутальной координатам.

**В области комплекса программ:**

6. Создание комплекса программ для численного исследования и математического моделирования конвективных движений в пористых горизонтальном и вертикальном цилиндрах

**Теоретическая и практическая значимости исследования.** Работа вносит теоретический вклад в развитие методов анализа нелинейных уравнений в част-

ных производных. Развитые конечно-разностные схемы могут быть использованы для моделирования конвекции бинарных жидкостей, а также при анализе проблем, возникающих в энергетике, медицине, биотехнологиях. Полученные результаты и программный комплекс будут применены в курсах для студентов физико-математических специальностей.

**Достоверность работы.** В диссертации применялись математически обоснованные методы теории динамических систем, численного анализа и косимметрии. На основе интегро-интерполяционного метода и дискретизации с использованием сеток со смещёнными узлами проведены аппроксимации рассматриваемых начально-краевых задач конвекции в пористой среде. Реализован вывод конечно-разностных уравнений на неравномерных сетках.

**Апробация работы.** Основные результаты исследования докладывались на семинаре кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ и следующих научных конференциях:

1. XXXI научная конференция «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития (СИТО)», Ростов-на-Дону (2024).

2. XIV International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА)», Ростов-на-Дону (2024).

3. International Scientific Conference «St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics», Санкт-Петербург (2024).

4. XXXII научная конференция «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития (СИТО)», Ростов-на-Дону (2025).

5. Всероссийская научно-практическая конференция «Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО)», Симферополь (2025).

6. XXI Всероссийская ежегодная молодежная научная конференция с международным участием «Наука Юга России: достижения и перспективы (ЮНЦ РАН)», Ростов-на-Дону (2025).

7. XIX Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», Дивноморское (2025).

8. XX Владикавказская молодежная математическая школа (ВММШ), Владикавказ (2025).

9. XV International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА)», Ростов-на-Дону (2025).

**Публикации и личный вклад автора.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 10 научных изданиях [115–124]. Из них две статьи [115,116] входят в перечень ВАК, работы [116,117] проиндексированы в базе Scopus. Имеется свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [118]. Статьи [115,116] и тезисы [119,124] проиндексированы в электронной библиотеке РИНЦ. Автору принадлежат аналитические выкладки, конечно-разностные расчёты, написание программного кода, проведение численных экспериментов. Научному руководителю В.Г. Цибулину принадлежат выбор темы исследования, первоначальная постановка целей и задач.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав по 4 параграфа, заключения, списка литературы и приложений. Общий объём работы составляет 110 страниц, включая 38 рисунков и 11 таблиц. В конце глав приводятся основные положения и выводы. Список использованной литературы содержит 124 источника. В приложениях приведены сертификат о регистрации программного комплекса и конечно-разностные уравнения для неравномерной сетки.

# ГЛАВА 1

## УРАВНЕНИЯ ДАРСИ–БУССИНЕСКА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ

Термогравитационная конвекция возникает при наличии силы тяжести и градиента температуры [45]. Сила Архимеда действует на слои жидкости или газа разной плотности, дополнительная теплопередача происходит в результате циркуляции жидкости [33]. Конвекция является причиной ряда природных явлений: формирование облаков и воздушных потоков, движение тектонических плит, извержение вулканов и др.

Движения теплопроводной вязкой жидкости, вызванные конвекцией, описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных, полученной французским механиком Ж.В. Буссинеском (1842-1929) и немецким физиком А. Обербеком (1846-1900) [41]. Система состоит из следующих уравнений: неразрывности в форме Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.01)$$

движения в виде Навье-Стокса

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = \rho(T) \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{v}, \quad (1.02)$$

теплопроводности Фурье в энергетической записи

$$\rho_0 c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right] = \chi \Delta T. \quad (1.03)$$

Входящие в векторные уравнения (1.01)-(1.03) величины условно можно разделить на три вида. К характеризующих жидкость размерным переменным, зависящих от времени  $t$  и пространственных координат, относятся:  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость течения,  $p$  – давление,  $T$  – температура. Коэффициентами являются:  $\rho_0$  – плотность при равновесной (средней) температуре  $T_0$ ,  $g$  – ускорение свободного падения (напряжённость гравитационного поля),  $\eta$  – динамиче-

ская вязкость,  $c_p$  – изобарная удельная теплоёмкость,  $\chi$  – теплопроводность. Используются следующие дифференциальные операторы:  $\partial$  – частная производная по пространству и времени,  $\nabla$  – набла-оператор (оператор Гамильтона),  $\Delta$  – оператор Лапласа (дельта-оператор).

Фильтрационная конвекция является тепловым явлением, при котором происходит движение (просачивание) жидкостей (или газов) в среде, пронизанной сложной системой каналов и трещин [34]. Развитие математических методов анализа теории фильтрации и фильтрационной конвекции необходимо для оптимизации добычи нефти и газа, находящихся в пустотах и трещинах осадочных горных пород [4,67]. Примером пористой среды, которую заполняет жидкость, является несцементированный песок, представляющий множество твёрдых частиц, тесно прилегающих друг к другу. В этой среде имеются пустоты разной формы, которые образуют промежутки между отдельными частицами песка – поровое пространство. Каждая пора соединяется узким каналом с соседними, образуя сообщающуюся систему отверстий – конвективных ячеек, по которым способна перемещаться теплопроводная жидкость [42,105].

Для задач фильтрационной конвекции применяется модель, описывающая относительно медленные течения несжимаемой среды на основе закона французского инженера-гидравлика А.Ф.Г. Дарси (1803-1858). При этом используются условие несжимаемости жидкости (соленоидальность)

$$\nabla \vec{v} = 0, \quad (1.04)$$

приближение Буссинеска (линейная зависимость плотности среды от температуры)

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta[T - T_0]), \quad (1.05)$$

уравнение импульса (баланса сил)

$$\nabla p = \rho(T)\vec{g} - \frac{\eta\omega}{K}\vec{v}. \quad (1.06)$$

Последнее является частным случаем уравнения движения вязкой ньютоновской жидкости (1.02). Здесь трение Ньютона (диффузионный член) заменяется сопротивлением Дарси, массовый член расписывается через силу Архимеда, а также

пренебрегается инерционным и адвективным членами из-за малого влияния инерционных сил по сравнению с вязкостными при медленных течениях [32]. В уравнениях (1.05)–(1.06) используются следующие параметры среды:  $\beta$  – коэффициент объёмного теплового расширения,  $\omega$  – пористость,  $K$  – проницаемость. Пористость в последующих уравнениях принимается равной единице.

## **§ 1. Исследование фильтрационной конвекции в замкнутых областях: обзор литературы**

Для большинства естественно-научных и технических проблем в геофизике и энергетике является анализ течения жидкостей и газов в пористых средах. Существенную часть этих приложений составляют задачи о предупреждении возникновения конвективных движений и анализ стационарных и колебательных режимов [13,93]. Большое число факторов затрудняет исследование явлений тепломассопереноса с помощью натурального физического эксперимента. Таким образом, важную роль составляет математическое моделирование физических процессов, основанное на качественном вычислительном эксперименте [75].

Результаты исследования конвективных процессов и развитые методы решения соответствующих задач позволили получить обшивки из пористого вещества, которые используются в космических кораблях и спутниках [13]. Также решены некоторые проблемы захоронения ядерных отходов, диффузии загрязняющих веществ в почве, экстракции углеводородов, связывания углекислого газа и использования металлических пенопластов для оптимизации конструкций теплообменников [93].

Анализ фильтрационной конвекции является сложной задачей из-за нелинейности данного явления [4,75]. Чаще всего в случае плоских и осесимметричных задач явление конвекции рассматривается для ограниченных геометрических областей, например, для прямоугольников [16,17]. Для реальных геометрических областей численное исследование требует использования криволинейных координат вместо декартовых. К примеру, коллекторы солнечного излучения или изоляционные каналы имеют форму кольцевого сектора [47,72].

Описанию задач фильтрационной конвекции посвящена выдержавшая более десяти переизданий монография [93] и ряд не потерявших актуальности книг [12,13,73]. В [1,2,6,28,38,104] была рассмотрена конвекция в пористой среде в случае анизотропии и неоднородности области.

Изучение конвекции несжимаемой жидкости в пористых средах началось с анализа классических уравнений Дарси-Буссинеска для задач о подогреве снизу заполненного жидкостью непроницаемого объёма. На основе закона Дарси в предположении изотропности проницаемости, механических и тепловых свойств пористой среды были получены важные результаты о возникновении конвекции и потере устойчивости состояния покоя [12]. При незначительных градиентах температуры жидкости доминирует диффузия тепла, что приводит к устойчивому механическому равновесию жидкости. Это означает отсутствие конвекции. В случае превышения порога градиента температуры по высоте возникают конвективные режимы. Градиент температуры содержится в безразмерном параметре, характеризующем движение жидкости – числе Рэлея [11,67]. Эффективность теплопередачи за счёт конвекции измеряется числами Нуссельта, которые характеризуют плотность теплового потока через границы рассматриваемой области [73]. Стоит отметить, что при достаточно больших числах Рэлея стационарные конвективные режимы теряют устойчивость. Впоследствии возникают колебательные движения жидкости. Критические значения монотонной и колебательной неустойчивости конвективного режима определяются путём анализа функции управляющих параметров – линеаризованных уравнений.

Модель конвекции Дарси-Буссинеска (в зарубежной литературе «Larwood Convection») позволила численно проанализировать и смоделировать различные тепловые эффекты [93]. Применимость закона Дарси для конвекции в пористой среде подтверждено экспериментальными данными [91,101]. Например, в [79] дано сравнение моделей фильтрационной конвекции Дарси, Бринкмана и Форчхаймера для контейнера квадратного сечения. Анализ возникновения ячеистой конвекции проводился на основе вычислительного эксперимента.

Большинство исследований, опубликованных за последние десятилетия, посвящены неустойчивости конвективных течений типа Рэлея-Бенара, когда жидкость изначально находится в состоянии покоя, и происходит исключительно молекулярный теплообмен [24,87]. Возникновение конвекции происходит при

превышении некоторого порогового значения параметра подогрева (числа Рэлея). Существуют также исследования, посвящённые задачам о боковом нагреве, когда возникает так называемая многоклеточная неустойчивость [42,93]. В частности, в [68] показано, что параллельное выталкивающее течение в плоском вертикальном пористом слое с равномерным внутренним нагревом начинается даже при отсутствии градиента температуры между боковыми границами.

Результаты в [66] показывают, что теоретические исследования о тепловой неустойчивости в пористых средах, находятся в отличном согласии с экспериментами. Были проведены два эксперимента по конвекции дистиллированной воды либо в прорезиненном слое скрученного кокосового волокна, либо в слое шариков из полиметилметакрилата. Такие эксперименты не только подтверждают теоретические предсказания критического значения числа Рэлея при наступлении термической неустойчивости, но и количественно оценивают скорости теплопередачи для сверхкритического режима [89,92,98,99].

При изучении фильтрационной конвекции на основе модели Дарси-Бусинеска Д.В. Любимовым (1949–2012) был обнаружен нетривиальный эффект – сильная неединственность режимов [35]. Данное явление, т.е. ответвление семейства стационарных решений при потере устойчивости состояния покоя, было теоретически объяснено В.И. Юдовичем (1934–2006) с помощью предложенной теории косимметрии [61]. Благодаря этой теории при рассмотрении конвекции в несжимаемой жидкости в пористой прямоугольной области было изучено ответвление однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов от механического равновесия. Косимметрия исследовалась в натуральных и вычислительных экспериментах [9,14,15,71,88,100,108,109]. В [113] доказано существование нетривиальной косимметрии для задачи фильтрационной конвекции и объяснено возникновение непрерывных семейств стационарных режимов, устойчивость которых индивидуальна, т.е. зависит от скрытого параметра.

В задачах с дискретными симметриями, которые характеризуются одинаковым спектром устойчивости, случай косимметрии определяется появлением семейств решений с индивидуальным спектром. С помощью вычислительного эксперимента было исследовано рождение семейства стационарных режимов и установлена его устойчивость вблизи точки бифуркации ответвления конвективных движений [74,75]. Однопараметрические семейства стационарных движений были вычислены для горизонтального цилиндра с прямоугольным сечением. Для нахождения численных решений использовались метод Галёркина [17], спектрально-разностный метод [27] и метод сеток [50]. Расчёты конвективных режимов в двумерных задачах фильтрационной конвекции теплопроводной несжимаемой жидкости были проведены для прямоугольных, трапециевидных и кольцевых областей [53,54,83]. Также была численно исследована конвекция в пористых плоских средах для многокомпонентных жидкостей без учёта эффекта Соре [29,48,85,95,97,103]. Из перечисленных работ верно следующее: свойство косимметрии задачи означает мультистабильность конвективных решений – существование различных устойчивых режимов, которые получаются из разных начальных данных [75].

Модель конвекции Дарси-Буссинеска была применена для расчёта движений в непрямоугольных областях. Важным этапом в исследовании конвективных движений были работы по вычислению семейств стационарных режимов в трапециевидных и кольцевых областях [53,54]. В этих статьях использовались уравнения в полярных координатах и специальные аппроксимации при реализации метода конечных разностей. Изучалось ответвление семейства стационарных режимов от механического равновесия. При расчёте решений из однопараметрических семейств важным оказалось применение численных схем, наследующих свойство косимметрии исходных дифференциальных уравнений в частных производных. Сохранение косимметрии в сеточных аналогах уравнений плоской задачи фильтрационной конвекции было получено при специальной аппроксимации нелинейных членов и силы Архимеда. В [39,49,58] были развиты конечно-разностные аппроксимации с использованием результатов [5,7,36].

В результате компьютерного моделирования и численного исследования конвекции для кольцевой пористой области была обнаружена монотонная неустойчивость и косимметричный эффект затягивания ответвления от семейства вторичного автоколебательного режима [54]. Было проанализировано появление неустойчивости на семействе стационарных режимов, а также выявлена эволюция конвективных движений с ростом числа Рэлея. Численный эксперимент показал, что при малых надкритичностях семейство стационарных конвективных режимов состоит из устойчивых движений. В случае узкого кольца и тонкого сектора обнаружено, что от семейства стационарных колебательных режимов ответвляется вторичный автоколебательный режим.

В работах [76,77] рассматриваются непрерывные семейства конвективных стационарных режимов, которые распадаются в случае нарушающих косимметрию возмущений. В [74,109] изучено влияние возмущений и исчезновение семейства стационарных режимов при малых параметрах надкритичности. Работы [31,113] посвящены бифуркациям в косимметричных системах. В [63] Предложен аппарат построения селективного уравнения для анализа сохраняющих равновесий. Было доказано, что количество решений селективного уравнения определяется влиянием возмущений на распад или исчезновение однопараметрического семейства конвективных режимов при потере состояния покоя. Если селективное уравнение не имеет решений, то это означает существование медленных (с малым периодом) колебательных конвективных режимов. При этом наличие внутри рассматриваемой замкнутой области равномерно распределённых тепловых источников влияет на интенсивность распада семейства, в результате чего возникают два стационарных режима: устойчивый и неустойчивый.

В [82,83,85] приводятся решения плоской задачи конвекции Дарси-Бусинеска методом конечных разностей и применением смещённых сеток. Доказано, что полученные дискретизации обладают свойством косимметрии, как и исходные уравнения конвекции в дифференциальном виде. Работы [37,107,110] посвящены задачам фильтрационной конвекции в горизонтальном и вертикаль-

ном цилиндрах при подогреве снизу. В [8,70] найдены конвективные стационарные решения в случае неоднородного нагрева на границе горизонтального слоя. Вертикальный коаксиальный цилиндр рассматривался в [3,69,80,102]. Были получены медленные периодические движения несжимаемой теплопроводной жидкости при просачивании через пористую среду.

Развитие теории конвективных движений для цилиндрических замкнутых областей продолжается, в частности, исследуются нетривиальные эффекты мультистабильности и совершенствуются методы вычислительного эксперимента и компьютерного моделирования [9,21,94,106,111]. Анализ литературы по исследованию конвективных течений жидкости (или газа) показывает важность разработки и использования специализированных программных комплексов для проведения численного исследования [22,25,78,96,112,46]. В то же время, актуальным является выделение классов задач, допускающих хотя бы частичное использование аналитических методов. Здесь оказывается полезной теория косимметричных динамических систем [20,31,76]. Отметим, что при исследовании задач фильтрационной конвекции редко используются компактные схемы для повышения порядка аппроксимации [52,90]. Отдельные результаты применения таких схем представлены в современных работах [86,114].

## § 2. Математическая модель конвекции для пористого горизонтального цилиндра

Рассматривается термогравитационная конвекция несжимаемой жидкости в горизонтальном цилиндре с непроницаемыми стенками, заполненном пористой средой и подогреваемом снизу. На основе (1.03)–(1.06) для описания конвекции используется система уравнений в естественных переменных и цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (2.01)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{K} U + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g \sin \varphi = 0, \quad (2.02)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\eta}{K} V + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g \cos \varphi = 0, \quad (2.03)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{K} W = 0, \quad (2.04)$$

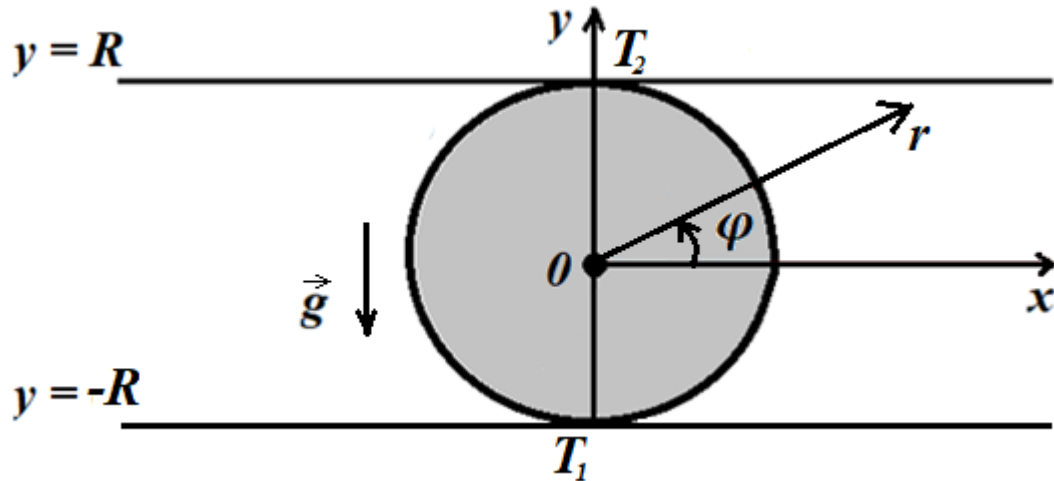
$$c_p \rho_0 \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial r} + V \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \chi \Delta T. \quad (2.05)$$

В системе уравнений (2.01)–(2.05) содержатся размерные переменные [11]. Здесь  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, H]$  – радиальная, азимутальная, осевая координаты,  $R$ ,  $H$  – радиус и длина цилиндра,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  – соответствующие компоненты вектора скорости  $\vec{v}$ . Угол  $\varphi$  отсчитывается как показано на рис. 1. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.06)$$

При нулевых тепловых потоках на торцах непроницаемого цилиндра и однородной по  $z$  температуре на боковой границе существует решение, не зависящее от осевой координаты. Рассматривается цилиндр с длиной, значительно большей радиуса ( $H \gg R$ ), с постоянным по времени и неоднородным по азимутальной координате распределением тепловых источников на границе. В этом случае можно принять осевую скорость  $W = 0$  и пренебречь зависимостью

остальных переменных от осевой координаты  $z$ . Тогда задача сводится к анализу двумерной по пространственным координатам модели конвекции в круговой области радиуса  $R$ , см. рис. 1. Уравнения данной модели записываются через девиацию температуры относительно линейного по высоте профиля. В общем случае это означает задание ненулевой девиации на границе.



**Рис. 1.** Расчётная область сечения горизонтального цилиндра

Температура  $T$  на границе круговой области  $R$  задаётся формулой

$$T(R, \varphi, t) = T_0 - \delta T R \sin \varphi + T_b(\varphi),$$

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \delta T = \frac{T_1 - T_2}{2R} > 0. \quad (2.07)$$

Здесь  $T_0$  – температура в начальный момент времени ( $t = 0$ ),  $\delta T$  – градиент температуры по высоте (координата  $y$ ),  $T_1 > T_2$  – температуры при  $y = -R$  и  $y = R$  соответственно,  $T_b$  – добавка к линейному распределению температуры. Сила тяжести направлена против вертикальной оси. Для девиации температуры  $\theta$  (далее температуры) в любой точке расчётной круговой области и для всех моментов времени получается следующее равенство

$$\theta(r, \varphi, t) = T(r, \varphi, t) - T_0 + \delta T r \sin \varphi. \quad (2.08)$$

На границе сечения горизонтального цилиндра задаётся условие

$$\theta(R, \varphi, t) = T_b(\varphi). \quad (2.09)$$

Тепловые потоки по радиальной  $q_r$  и азимутальной  $q_\varphi$  координатам определяются формулами:

$$q_r = -\frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}. \quad (2.10)$$

Из (2.01)(2.10) получается система уравнений фильтрационной конвекции для горизонтального бесконечно длинного цилиндра:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{K}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} + U - \frac{\rho_0 K \beta g}{\eta} \theta \sin \varphi - \frac{\rho_0 K g \sin \varphi}{\eta} (1 + \beta \delta T r \sin \varphi) &= 0, \\ \frac{K}{\eta} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + V - \frac{\rho_0 K \beta g}{\eta} \theta \cos \varphi - \frac{\rho_0 K g \cos \varphi}{\eta} (1 + \beta \delta T r \sin \varphi) &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - (Uq_r + Vq_\varphi) - \delta T (U \sin \varphi + V \cos \varphi) &= \frac{\chi}{c_p \rho_0} \Delta \theta, \\ \Delta \theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Безразмерные переменные вводятся по формулам:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\tilde{r}}{R}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{\tau}, \\ U &= \frac{\tau}{R} \tilde{U}, \quad V = \frac{\tau}{R} \tilde{V}, \quad P = \frac{\tau}{R^2} \tilde{P}, \quad \theta = \frac{\tilde{\theta}}{\sigma}, \quad q = \frac{R}{\sigma} \tilde{q}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь волной « ~ » помечены размерные переменные, использованные в уравнениях (1.01)–(1.06) и (2.01)(2.11):  $[\tilde{r}] = \text{м}$ ,  $[\tilde{t}] = \text{с}$ ,  $[\tilde{U}] = \text{м/с}$ ,  $[\tilde{V}] = \text{м/с}$ ,  $[\tilde{p}] = \text{Н/м}^2$ ,  $[\tilde{\theta}] = \text{К}$ ,  $[\tilde{q}] = \text{К/м}$ . По определению  $[\tilde{\varphi}] = \text{рад}$  является безразмерной величиной. Вводятся масштабы линейного размера  $[R] = \text{м}$ , времени  $[\tau] = \text{с}$  и температуры  $[\sigma] = \text{К}$ , а также следующее выражение для обобщённого давления  $[\tilde{P}] = \text{м}^2/\text{с}$

$$\tilde{P} = \frac{K}{\eta} \tilde{p} - \frac{\rho_0 K g r \sin \varphi}{\eta} \left( 1 + \frac{\beta \delta T r \sin \varphi}{2} \right). \quad (2.13)$$

Для задачи о подогреве в случае линейного по высоте температурного профиля получается единственный безразмерный параметр – число Рэлея

$$\lambda = \frac{g c_p \rho_0^2 \beta K R^2 \delta T}{\chi \eta}, \quad (2.14)$$

который прямо пропорционален градиенту температуры  $\delta T$ . Безразмерность  $\lambda$  проверяется непосредственной подстановкой размерных величин в (2.14):  $[g] = \text{Н/кг}$ ,  $[c_p] = \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $[\rho_0] = \text{кг}/\text{м}^3$ ,  $[\beta] = 1/\text{К}$ ,  $[K] = \text{м}^2$ ,  $[\delta T] = \text{К}/\text{м}$ ,  $[\chi] = \text{Дж}/(\text{м}\cdot\text{К}\cdot\text{с})$ ,  $[\eta] = \text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ . Таким образом

$$[\lambda] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}} \frac{\text{кг}^2}{\text{м}^6} \frac{1}{\text{К}} \frac{\text{м}^2}{1} \frac{\text{м}^2}{1} \frac{\text{К}}{\text{м}} \frac{\text{м}\cdot\text{К}\cdot\text{с}}{\text{Дж}} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{с}} = 1.$$

После соответствующих преобразований из (2.11) получается система безразмерных уравнений фильтрационной конвекции в естественных переменных и цилиндрических координатах для задачи о подогреве снизу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} + U - \lambda \theta \sin \varphi = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + V - \lambda \theta \cos \varphi = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + G(U, V) - J(\theta, U, V). \quad (2.18)$$

Здесь использованы следующие обозначения силы Архимеда  $G$  и конвективного слагаемого  $J$ :

$$G(U, V) = U \sin \varphi + V \cos \varphi, \quad J(\theta, U, V) = U q_r + V q_\varphi. \quad (2.19)$$

Для системы дифференциальных уравнений (2.15)(2.19) в центре круговой области выполняются симметричные условия: равенство нулю азимутальной компоненты скорости и радиальной плотности теплового потока

$$V(0, \varphi, t) = 0, \quad q_r(0, \varphi, t) = 0. \quad (2.20)$$

На границе сечения горизонтального цилиндра заданы условия непроницаемости и нулевой температуры ( $T_b(\varphi) = 0$ ):

$$U(R, \varphi, t) = 0, \quad \theta(R, \varphi, t) = 0. \quad (2.21)$$

Уравнения в частных производных (2.15)(2.19) с учётом (2.20)(2.21) дополняются начальным условием, которое ставится только для температуры

$$\theta(r, \varphi, 0) = \theta^0(r, \varphi). \quad (2.22)$$

Система уравнений в естественных переменных и цилиндрических координатах (2.15)(2.19) сводится к задаче фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска относительно температуры  $\theta$  и функции тока  $\psi$ , вводимой по формулам:

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.23)$$

где размерная функция тока  $[\tilde{\psi}] = \text{м}^2/\text{с}$  переходит в безразмерную [55].

На осевой линии цилиндра из-за наличия в знаменателе величины  $r$  для  $U(0, \varphi, t) \neq 0$  и  $q_\varphi(0, \varphi, t) \neq 0$  возникает неопределённость. Поэтому во избежание сингулярности требуются дополнительные осевые условия для  $\theta$  и  $\psi$ :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.24)$$

Это обеспечивает конечность радиальной скорости  $U$  и азимутальной плотности теплового потока  $q_\varphi$ , симметрию течения и гладкость решения в полюсе [59].

При подстановке формул (2.23) автоматически удовлетворяется уравнение несжимаемости (2.15) и, в результате исключения давления  $P$  из (2.16)–(2.17), получается равенство, связывающее температуру и функцию тока

$$\Delta \psi = \lambda G(\theta), \quad (2.25)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2.26)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta \sin \varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\theta r \cos \varphi). \quad (2.27)$$

Уравнение теплопроводности (2.18) с учётом безразмерных плотностей тепловых потоков (2.10) и введением функции тока (2.23) переписывается следующим образом

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + G(\psi) - J(\theta, \psi), \quad (2.28)$$

$$G(\psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \varphi, \quad (2.29)$$

$$J(\theta, \psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}. \quad (2.30)$$

Для системы относительно  $\theta$  и  $\psi$  (2.25)(2.30) операторы  $G$  и  $J$ , записанные в естественных переменных (2.19), переопределяются через функцию тока.

Осевые (2.20) и граничные (2.21) условия для всех  $\varphi$  и  $t$  записываются в виде краевых условий Неймана и Дирихле соответственно для функции тока  $\psi$  и температуры  $\theta$ :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (2.31)$$

$$\psi|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{r=R} = 0. \quad (2.32)$$

### § 3. Осесимметричная задача фильтрационной конвекции в вертикальном цилиндре

На основе уравнений Дарси-Буссинеска (1.03)–(1.06) рассматривается задача о конвективных движениях несжимаемой теплопроводной жидкости в вертикальной цилиндрической пористой области при подогреве снизу. Система дифференциальных уравнений в частных производных и естественных переменных для цилиндрических координат записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (3.01)$$

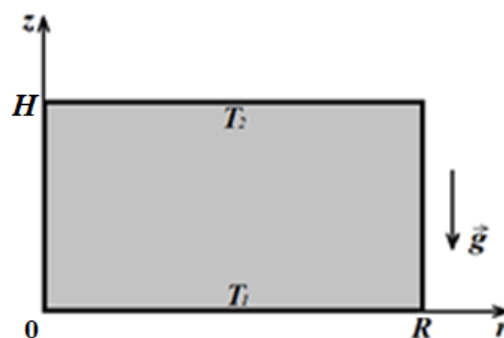
$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{K} U = 0, \quad (3.02)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\eta}{K} V = 0, \quad (3.03)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{K} W + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g = 0, \quad (3.04)$$

$$c_p \rho_0 \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \chi \Delta T. \quad (3.05)$$

Здесь используются размерные переменные:  $p$  – давление,  $T$  – температура, скорости  $U$ ,  $V$ ,  $W$  соответствуют пространственным координатам  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  [33].



**Рис. 2.** Сечение вертикального цилиндра

Для анализа осесимметричной задачи фильтрационной конвекции в вертикально расположенном цилиндре учитывается независимость переменных от

азимутальной координаты  $\varphi$  и полагается равенство нулю азимутальной компоненты скорости  $V = 0$ . На границе непроницаемого цилиндра задаётся линейный температурный профиль по высоте. На рис. 2 представлена схема вертикального сечения сплошного цилиндра высоты  $H$  и радиуса  $R$ , где  $T_1 > T_2$  – температуры при  $z = 0$  и  $z = H$  соответственно.

Температура  $T$  в каждой точке исследуемой области и для любого момента времени  $t$  определяется как сумма линейного распределения температуры по высоте (с учётом равновесной температуры) и девиации  $\theta$ :

$$T(r, z, t) = T_1 - z\delta T + \theta(r, z, t), \quad \delta T = \frac{T_1 - T_2}{H} > 0. \quad (3.06)$$

Аналогично параграфу 2 производится подстановка линейного профиля температуры (3.06) в уравнения движения (3.04) и теплопроводности (3.05). Далее производится переход к безразмерным величинам по формулам (2.12), где масштабом линейного размера выступает величина  $[H] = \text{м}$  ( $[z] = \text{м}$ ,  $[W] = \text{м/с}$ ). Переопределённое давление записывается следующим образом подобно формуле (2.13)

$$\tilde{P} = \frac{K}{\eta} \tilde{p} - \frac{\rho_0 K g z}{\eta} \left( 1 + T_1 - T_0 + \frac{\beta z \delta T}{2} \right). \quad (3.07)$$

В результате проведённых преобразований уравнения осесимметричной задачи фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска в естественных переменных для вертикального цилиндра принимают безразмерный вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (3.08)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} + U = 0, \quad (3.09)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + W - \lambda\theta = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta\theta + W + (Uq_r + Wq_z), \quad (3.11)$$

$$\Delta\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq_r) - \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad q_r = -\frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad q_z = -\frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (3.12)$$

Здесь  $q_r$  и  $q_z$  – плотности теплового потока по пространственным координатам  $r$  и  $z$ . Параметр Рэлея  $\lambda$  выражается через размерные коэффициенты и градиент температуры  $\delta T$  по формуле, аналогичной (2.14)

$$\lambda = \frac{g c_p \rho_0^2 \beta K H^2 \delta T}{\chi \eta}.$$

Для системы (3.08)(3.12) на осевой линии цилиндра обнуляются радиальные скорость и плотность теплового потока:

$$U(0, z, t) = 0, \quad q_r(0, z, t) = 0. \quad (3.13)$$

На боковой стенке и торцах цилиндра выполняются условия непроницаемости и изотермичности:

$$U(R, z, t) = 0, \quad \theta(R, z, t) = 0, \quad (3.14)$$

$$W(r, 0, t) = W(r, H, t) = 0, \quad \theta(r, 0, t) = \theta(r, H, t) = 0. \quad (3.15)$$

Задача (3.08)-(3.15) дополняется начальным условием для температуры

$$\theta(r, z, 0) = \theta^0(r, z). \quad (3.16)$$

В результате исключения давления  $P$  из (3.09)(3.10) получается уравнение, связывающее температуру и компоненты скорости

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Задачу термогравитационной конвекции в пористой среде (3.08)(3.16) можно записать относительно переменных температура  $\theta$  и функция тока  $\psi$ , которую можно ввести различными способами. В [30] используется формулы с сингулярностью:

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.17)$$

В результате система уравнений (3.08)(3.12) переписется в виде:

$$\Delta \psi = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \lambda r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \quad (3.19)$$

где оператор Лапласа для данной задачи принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.20)$$

Далее используется альтернативный вариант введения функции тока, аналогичный по размерности для случая горизонтального бесконечно длинного цилиндра (2.23). При данном варианте введения функции тока для осесимметричной задачи не возникает неопределённости на осевой линии вертикального цилиндра:

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi). \quad (3.21)$$

В этом случае система уравнений фильтрационной конвекции несжимаемой жидкости (3.08)(3.12) принимает вид:

$$\Delta \psi = \frac{\psi}{r^2} - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]. \quad (3.23)$$

Данный способ введения функции тока применялся в [60] для задачи естественной (свободной) конвекции. Оба варианта определения функции тока удовлетворяют уравнению несжимаемости (3.08). Далее проводится сравнение этих моделей для задачи возникновения фильтрационной конвекции в сплошном вертикальном цилиндре.

Для систем (3.17)(3.20) и (3.20)(3.23) краевые условия (3.14)(3.16) переписываются в переменных функция тока и температура соответственно:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=R} = 0, \quad \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0, \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{z=0} = \theta|_{z=H} = 0. \quad (3.25)$$

#### § 4. Косимметрия модели Дарси-Буссинеска для горизонтального цилиндра, аналитический метод определения критических значений числа Рэлея

Задача (2.25)(2.32), (2.22) в случае линейного по высоте на границе цилиндра профиля температуры записывается в виде системы уравнений с начальными краевыми условиями:

$$0 = \Delta\psi - \lambda G(\theta) \equiv S_1(\theta, \psi), \quad (4.01)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + G(\psi) - J(\theta, \psi) \equiv S_2(\theta, \psi), \quad (4.02)$$

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{r=R} = 0, \quad (4.03)$$

$$\theta(r, \varphi, 0) = \theta^0(r, \varphi). \quad (4.04)$$

Данная система дифференциальных уравнений в частных производных является косимметричной в смысле определения В.И. Юдовича [61]. Косимметрией является вектор  $\vec{L} = \{\theta, -\psi\}$ , который ортогонален вектору правой части этой системы  $\{S_1(\theta, \psi), S_2(\theta, \psi)\}$ . Для стационарных решений с ненулевой функцией тока  $\psi \neq 0$  косимметрия не обращается в нуль  $\vec{L} \neq \vec{0}$ .

Действительно, для сечения горизонтального бесконечно длинного цилиндра  $[0, R] \times [0, 2\pi]$  получается

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr [S_2(\theta, \psi)\psi - S_1(\theta, \psi)\theta] = 0. \quad (4.05)$$

Справедливость этого равенства устанавливается аналитически. Для этого представим (4.05) в виде суммы трёх интегралов

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr [\psi\Delta\theta - \theta\Delta\psi],$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr [\psi G(\psi) - \lambda\theta G(\theta)],$$

$$I_3 = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr [\psi J(\theta, \psi)].$$

С использованием метода интегрирования по частям для  $I_1$  получается

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \psi r \frac{\partial \theta}{\partial r} - \theta r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_0^R + \int_0^R \frac{dr}{r} \left[ \psi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right]_0^{2\pi}.$$

Первый интеграл в сумме обращается в нуль за счёт краевых условий (4.03), а второй – в силу периодичности температуры и функции тока по азимутальной координате:

$$\theta|_{\varphi=0} = \theta|_{\varphi=2\pi}, \quad \psi|_{\varphi=0} = \psi|_{\varphi=2\pi}. \quad (4.06)$$

Аналогично для  $I_2$  интегрирование по частям даёт следующую формулу

$$I_2 = \int_0^R dr \left[ \frac{\psi^2}{2} \sin \varphi - \lambda \frac{\theta^2}{2} \sin \varphi \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \left[ \frac{\psi^2}{2} r - \lambda \frac{\theta^2}{2} r \right]_0^R.$$

Здесь интеграл по радиальной координате обнуляется из-за периодичности по углу  $\varphi$  (4.06), а по азимутальной координате – в силу условий (4.03).

Для доказательства равенства нулю интеграла  $I_3$ , содержащего нелинейный член в уравнении теплопроводности, проводится преобразование слагаемых в дивергентную запись подобно [64] и интегрирование по одной из координат

$$I_3 = - \int_0^R dr \left[ \frac{\psi^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{\psi^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right]_0^R.$$

Первый интеграл исчезает из-за периодичности по углу (4.06), а второй – в силу условий (4.03) и (2.24).

Таким образом, все входящие в интеграл (4.05) слагаемые обнуляются, следовательно, вектор  $\vec{L}$  является косимметрией для задачи фильтрационной конвекции в случае горизонтального бесконечно длинного цилиндра в переменных девиация температуры и функция тока. Наличие косимметрии у задачи фильтрационной конвекции позволяет разработать метод вычисления критических чисел

Рэля на основе сведения спектральной задачи для системы двух уравнений второго порядка к одному уравнению того же дифференциального порядка. Для этого использованы специальные замены и аналитические преобразования.

Для определения порогового значения  $\lambda_{cr}$ , при превышении которого возникают конвективные движения, и других критических значений числа Рэля рассматривается спектральная задача, которая получается из (4.01)(4.02) отбрасыванием в уравнении теплопроводности локальной производной температуры по времени и нелинейного члена  $J(\theta, \psi)$ . С помощью замен  $\lambda = \mu^2$ ,  $\hat{\theta} = \mu\theta$  получается следующая система уравнений относительно возмущений  $\theta, \psi$ :

$$\Delta\psi - \mu G(\theta) = 0, \quad (4.07)$$

$$\Delta\theta + \mu G(\psi) = 0. \quad (4.08)$$

Умножение уравнения (4.08) на мнимую единицу  $i$  и суммирование с (4.07) приводит к задаче относительно комплексной функции  $Y = \hat{\theta} + i\psi$  с краевыми условиями, получаемыми из (4.03):

$$\Delta Y - i\mu G(Y) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad Y|_{r=R} = 0.$$

С помощью замены  $Y = X e^{i\frac{\mu}{2} r \sin \varphi}$  записывается краевая задача для уравнения Гельмгольца [62]:

$$\Delta X + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 X = 0, \quad (4.09)$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad X|_{r=R} = 0.$$

Далее используется метод разделения переменных Фурье  $X(r, \varphi) = Q(r)\Phi(\varphi)$  с периодической функцией  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ :

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos(n\varphi), & n = 0, 1, \dots \\ \sin(n\varphi), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.10)$$

В результате получается уравнение Бесселя  $n$ -го порядка для функции  $Q(r)$  при  $0 \leq r \leq R$ :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \left( \left( \frac{\mu}{2} \right)^2 r^2 - n^2 \right) Q = 0. \quad (4.11)$$

Поскольку решение для (4.11)

$$Q_n(r) = C_1 J_n \left( r \frac{\mu}{2} \right) + C_2 N_n \left( r \frac{\mu}{2} \right)$$

определяется с точностью до числового множителя, то  $C_1 = 1$ , а из-за неограниченности функции Неймана  $N_n$  в полюсе  $C_2 = 0$ . Тогда решение задачи (4.09) имеет вид:

$$X_k^{(n)}(r, \varphi) = J_n \left( r \frac{\mu_k^{(n)}}{2} \right) \begin{cases} \cos(n\varphi), & n = 0, 1, \dots \\ \sin(n\varphi), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

где величины  $\mu_k^{(n)}$  находятся из трансцендентного уравнения [57]

$$J_n \left( R \frac{\mu_k^{(n)}}{2} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Выражение (4.12) позволяет аналитически определять все критические значения числа Рэлея, используя таблицу нулей бесселевых функций [44].

Из (4.13) при  $n = 0$ ,  $k = 1$ ,  $R = 1$  получается пороговое значение возникновения конвекции в сечении горизонтального бесконечно длинного цилиндра при линейном по высоте распределении граничной температуры:

$$\lambda_{cr} = 4 \left( \mu_1^{(0)} \right)^2. \quad (4.14)$$

По формуле (4.13) из таблицы корней бесселевых функций или с помощью системы компьютерной алгебры Maple [18] находится первый корень  $\mu_1^{(0)} \approx 2.405$ .

Далее вычисляется пороговое значение по формуле (4.14):  $\lambda_{cr} \approx 23.13$ .

**Таблица 1.** Аналитически вычисленные  $\lambda_{cr}$

$n$	0	1	2	3
$\mu_1^{(n)}$	2.405	3.832	3.832	5.136
$\lambda_{cr}$	23.13	58.68	58.68	105.5

В табл. 1 представлены первые четыре критических значения числа Рэлея в случае горизонтального бесконечно длинного цилиндра с сечением  $R = 1$  для различных значений корня  $\mu$  функции Бесселя  $J$  с разным порядком  $n$  при фиксированном номере  $k = 1$ .

Из таблицы следует, что первое критическое значение числа Рэлея является двукратным, а остальные значения – четырёхкратными в силу гармоничности функции  $\Phi(\varphi)$ , см. формулу (4.10). В работе В.И. Юдовича [113] показано, что в случае двумерной задачи фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска критические значения числа Рэлея имеют кратность не менее двух для произвольной односвязной области.

Проведённый анализ показал, что осесимметричные задачи конвекции для вертикального пористого цилиндра, описываемые уравнениями (3.17)(3.20) и (3.20)(3.23) с учётом краевых условий (3.24)(3.25), не являются косимметричными.

## Выводы по ГЛАВЕ 1

Первая глава посвящена постановке начально-краевых задач для моделирования термогравитационной конвекции теплопроводной несжимаемой жидкости в цилиндрических пористых областях. В первом параграфе дан литературный обзор, посвящённый исследованиям задач фильтрационной конвекции в замкнутых областях.

Во втором параграфе представлена задача фильтрационной конвекции для горизонтального бесконечно длинного цилиндра, подогреваемого снизу. При нулевых тепловых потоках на торцах цилиндра существует решение, не зависящее от осевой координаты. На основе гипотезы Дарси предложена модель конвекции для неоднородного распределения тепловых источников по границе пористого цилиндра. Реализован подход на основе выделения линейного профиля температуры по высоте. Далее рассматриваются начально-краевые задачи относительно девиации температуры и функции тока.

Третий параграф посвящён постановке осесимметричной задачи фильтрационной конвекции для вертикального сплошного цилиндра. Система безразмерных уравнений конвекции в пористой среде относительно девиации температуры и функции тока получается при двух вариантах введения функции тока для цилиндрических координат.

В четвёртом параграфе показано, что система уравнений конвекции для горизонтального пористого цилиндра является косимметричной в смысле определения В.И. Юдовича. Для определения порога возникновения конвекции получена спектральная задача, решение которой даётся явным образом. Выведены формулы для критических чисел с использованием нулей бесселевых функций.

Глава основана на результатах работ [115,116,117].

## ГЛАВА 2

### МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Разрабатываются численные схемы и программный комплекс для решения задач фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска в цилиндрических координатах. Для численного исследования конвекции в горизонтальном бесконечно длинном цилиндре и вертикальном цилиндре применяется метод конечных разностей [26]. На основе интегро-интерполяционного метода и с применением смещённых сеток строятся аппроксимации уравнений в естественных переменных, а также относительно функция тока и девиация температуры [56]. Для дискретизации задачи конвекции в пористой среде используются сетки с неравномерным распределением узлов по радиальной и азимутальной координатам.

Описывается программное обеспечение «CONV\_REGIMES», написанное с помощью компьютера в среде MATLAB. Данный программный комплекс позволяет вычислять критические числа для соответствующих спектральных задач, рассчитывать конвективные режимы для неоднородных распределений тепловых источников по границе, проводить визуализации динамики течения жидкости, анализировать спектр устойчивости стационарных движений.

## § 5. Численная схема в естественных переменных для горизонтального цилиндра

Для численного исследования задачи фильтрационной конвекции в естественных переменных (2.15)(2.22) развивается метод конечных разностей с использованием сеток со смещёнными узлами аналогично [53,54]. По радиальной и азимутальной координатам вводятся неравномерные сетки с соответствующими узлами:

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_j < \dots < r_{N_r} = R,$$

$$0 = \varphi_1 < \varphi_2 \dots < \varphi_i < \dots < \varphi_{N_\varphi+1} = 2\pi,$$

где  $N_r, N_\varphi$  – число узлов,  $j, i$  – порядковые номера по координатам  $r$  и  $\varphi$ .

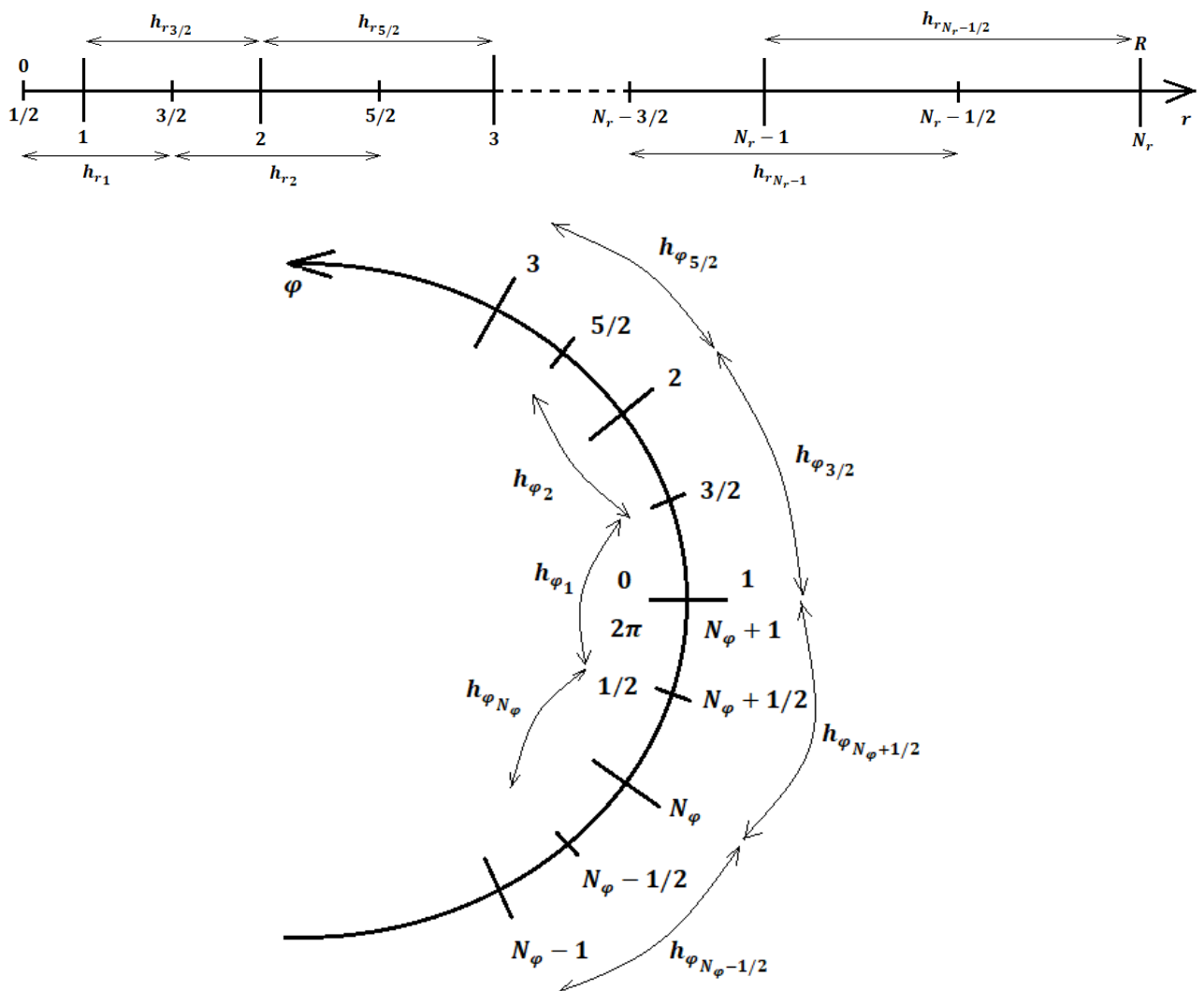


Рис. 3. Дискретизация с неравномерным распределением узлов

На рис. 3 представлено схематичное расположение узлов сетки. Основная сетка состоит из узлов  $(r_j, \varphi_i)$ ,  $j = \overline{1, N_r}$ ,  $i = \overline{1, N_\varphi}$ . Узлы смещённых сеток задаются формулами:

$$r_{j-1/2} = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}, \quad j = \overline{2, N_r}, \quad r_{1/2} = 0,$$

$$\varphi_{i-1/2} = \frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2}, \quad i = \overline{2, N_\varphi}, \quad \varphi_{1/2} = \varphi_{N_\varphi+1/2}.$$

Шаги по радиальной и азимутальной координатам между дробными и целыми узлами определяются формулами:

$$h_{r_j} = r_{j+1/2} - r_{j-1/2}, \quad j = \overline{1, N_r - 1},$$

$$h_{r_{j-1/2}} = r_j - r_{j-1}, \quad j = \overline{2, N_r},$$

$$h_{\varphi_i} = \varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}, \quad i = \overline{2, N_\varphi},$$

$$h_{\varphi_{i-1/2}} = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad i = \overline{2, N_\varphi}.$$

В расчётах использовались сетки с заданным увеличением (уменьшением) шага. В этом случае получаются следующие формулы для неравномерного распределения узлов по обеим координатам (основная сетка):

$$r_j = r_{j-1} + \gamma_1^{j-1} h_r, \quad j = \overline{2, N_r}, \quad r_1 = \frac{h_r}{2},$$

$$\varphi_i = (i-1) \gamma_2^{i-1} h_\varphi, \quad i = \overline{1, N_\varphi + 1}.$$

Здесь  $h_r, h_\varphi$  – исходные шаги,  $\gamma_1, \gamma_2$  – коэффициенты сгущения узлов сетки по радиальной и азимутальной координатам. Если  $\gamma_1 > 1$  ( $0 < \gamma_1 < 1$ ), то узлы по  $r$  сходятся к полюсу (границе) круговой области. При  $\gamma_2 > 1$  ( $0 < \gamma_2 < 1$ ) узлы по  $\varphi$  сходятся к вертикальной (горизонтальной) оси сечения горизонтального цилиндра, см. рис. 3. В случае  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  шаги  $h_r, h_\varphi$  постоянны, и узлы основной сетки по  $r$  и  $\varphi$  определяются следующим образом:

$$r_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) h_r, \quad j = \overline{1, N_r}, \quad h_r = \frac{R}{N_r - \frac{1}{2}},$$

$$\varphi_i = (i-1) h_\varphi, \quad i = \overline{1, N_\varphi + 1}, \quad h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}.$$

В узлах основной сетки вычисляются температура  $\theta_j^i$  и функция тока  $\psi_j^i$ . В узлах смещённых сеток рассчитываются радиальная компонента скорости  $U_j^{i-1/2}$  и плотность теплового потока по азимутальной координате  $q_\varphi^{i-1/2}$ , азимутальная компонента скорости  $V_{j-1/2}^i$  и плотность теплового потока по радиальной координате  $q_r^{i-1/2}$ . В дробных узлах по обеим пространственным координатам определяется давление  $P_{j-1/2}^{i-1/2}$ .

На двухточечных шаблонах определяются разностные операторы первых производных по радиальной  $\delta_r$  и азимутальной  $\delta_\varphi$  координатам для целых и полуцелых индексов  $j, i$ :

$$\begin{aligned} (\delta_r \theta)_{j-1/2}^i &= \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{r_j - r_{j-1}} = \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{h_{r,j-1/2}}, \\ (\delta_\varphi \theta)_j^{i-1/2} &= \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} = \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{h_{\varphi,i-1/2}}, \end{aligned} \quad (5.01)$$

а также операторы вычисления среднего взвешенного  $\delta_r^0$  и  $\delta_\varphi^0$ :

$$\begin{aligned} (\delta_r^0 \theta)_{j-1/2}^i &= \frac{\theta_j^i (r_j - r_{j-1/2}) + \theta_{j-1}^i (r_{j-1/2} - r_{j-1})}{r_j - r_{j-1}}, \\ (\delta_\varphi^0 \theta)_j^{i-1/2} &= \frac{\theta_j^i (\varphi_i - \varphi_{i-1/2}) + \theta_j^{i-1} (\varphi_{i-1/2} - \varphi_{i-1})}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}. \end{aligned} \quad (5.02)$$

С помощью операторов (5.01)(5.02) строятся разностные формулы центральных производных  $D_r \theta = \delta_r^0 (\delta_r \theta)$  и  $D_\varphi \theta = \delta_\varphi^0 (\delta_\varphi \theta)$  на трёхточечных шаблонах для целых индексов:

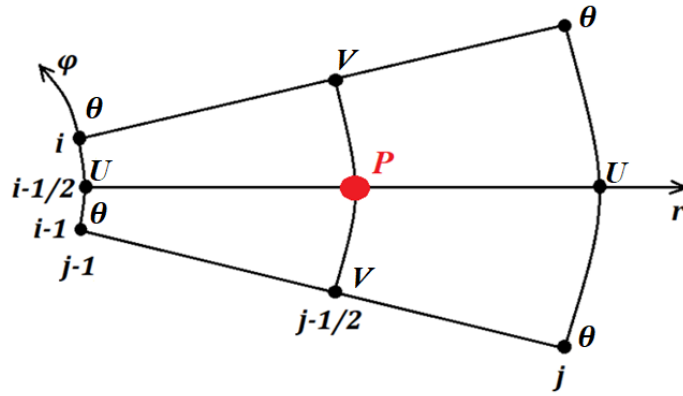
$$\begin{aligned} (D_r \theta)_j^i &= \frac{\frac{\theta_{j+1}^i - \theta_j^i}{r_{j+1} - r_j} (r_{j+1/2} - r_j) + \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{r_j - r_{j-1}} (r_j - r_{j-1/2})}{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}}, \\ (D_\varphi \theta)_j^i &= \frac{\frac{\theta_j^{i+1} - \theta_j^i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} (\varphi_{i+1/2} - \varphi_i) + \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} (\varphi_i - \varphi_{i-1/2})}{\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}}. \end{aligned} \quad (5.03)$$

В случае применения равномерной сетки операторы (5.02)(5.03) имеют вид:

$$(\delta_r^0 \theta)_{j-1/2}^i = \frac{\theta_j^i + \theta_{j-1}^i}{2}, \quad (\delta_\varphi^0 \theta)_j^{i-1/2} = \frac{\theta_j^i + \theta_j^{i-1}}{2}, \quad (5.04)$$

$$(D_r \theta)_j^i = \frac{\theta_{j+1}^i - \theta_{j-1}^i}{2h_r}, \quad (D_\varphi \theta)_j^i = \frac{\theta_j^{i+1} - \theta_j^{i-1}}{2h_\varphi}. \quad (5.05)$$

Формулы (5.01)(5.05) позволяют обеспечить второй порядок аппроксимации системы уравнений для внутренних узлов сетки. Для аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных (2.15)(2.19) используется интегро-интерполяционный метод, формулы численного интегрирования и дифференцирования. Ниже представлен вывод конечно-разностных уравнений на сетке с постоянными шагами по обеим координатам. Финальные формулы для случая неравномерного распределения узлов даны в Приложении 2.



**Рис. 4.** Шаблон для уравнения несжимаемости

Дискретный аналог уравнения несжимаемости (2.15) получается интегрированием по ячейке  $[r_{j-1}, r_j] \times [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$  с расположением давления  $P_{j-1/2}^{i-1/2}$  в центре шаблона, см. рис. 4:

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi \int_{r_{j-1}}^{r_j} r dr \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] = 0.$$

Вычисляя интегралы, получаем

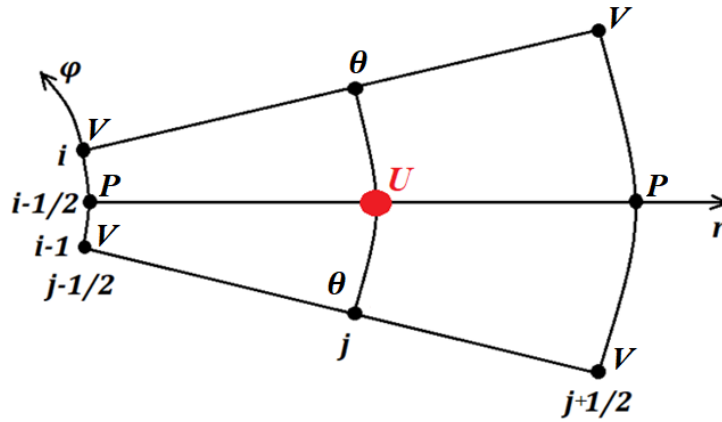
$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi [rU]_{r_{j-1}}^{r_j} + \int_{r_{j-1}}^{r_j} dr [V]_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} = 0.$$

Используя метод центральных прямоугольников для численного интегрирования, приходим к разностному уравнению

$$h_\varphi \left[ r_j U_j^{i-1/2} - r_{j-1} U_{j-1}^{i-1/2} \right] + h_r \left[ V_{j-1/2}^i - V_{j-1/2}^{i-1} \right] = 0,$$

где  $h_\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ ,  $h_r = r_j - r_{j-1}$ . Разделив полученное равенство на множитель  $r_{j-1/2} h_r h_\varphi \neq 0$ , получаем

$$\frac{1}{r_{j-1/2}} \frac{r_j U_j^{i-1/2} - r_{j-1} U_{j-1}^{i-1/2}}{h_r} + \frac{1}{r_{j-1/2}} \frac{V_{j-1/2}^i - V_{j-1/2}^{i-1}}{h_\varphi} = 0. \quad (5.06)$$



**Рис. 5.** Шаблон для уравнения импульса по радиальной координате

Уравнение движения для радиальной скорости  $U_j^{i-1/2}$  получается в результате интегрирования (2.16) по ячейке  $[r_{j-1/2}, r_{j+1/2}] \times [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ , см. рис. 5:

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} r dr \left[ \frac{\partial P}{\partial r} + U - \lambda \theta \sin \varphi \right] = 0. \quad (5.07)$$

Разобьём (5.07) на сумму трёх интегралов. Для первого интеграла воспользуемся интегрированием по частям, формулой Ньютона-Лейбница, методом трапеций для радиальной координаты и методом центральных прямоугольников по азимутальной координате

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr \left[ r \frac{\partial P}{\partial r} \right] \approx r_j h_\varphi \left[ P_{j+1/2}^{i-1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2} \right]. \quad (5.08)$$

Для второго интеграла используем метод центральных прямоугольников

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr [rU] \approx r_j h_r h_\varphi U_j^{i-1/2}. \quad (5.09)$$

Для третьего интеграла применение методов трапеций по азимутальной координате и центральных прямоугольников для радиальной координаты приводит к разностной формуле

$$\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi [\lambda r \theta \sin \varphi] \approx \lambda r_j h_r h_\varphi \frac{\theta_j^i \sin \varphi_i + \theta_j^{i-1} \sin \varphi_{i-1}}{2}. \quad (5.10)$$

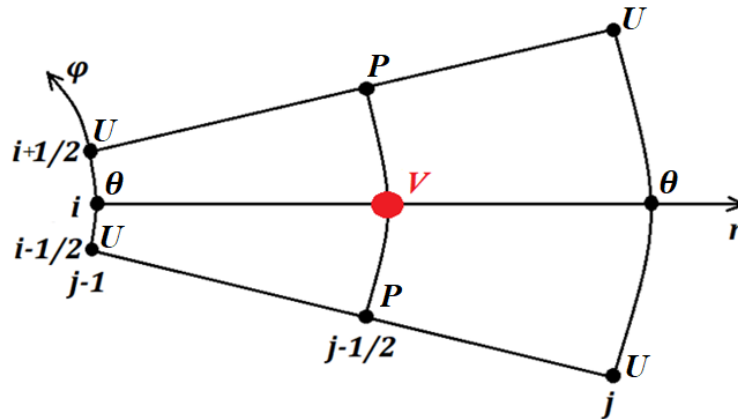
Если по обеим координатам использовать метод центральных прямоугольников, то получается

$$\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} d\varphi [\lambda r \theta \sin \varphi] \approx \lambda r_j h_r h_\varphi \sin \varphi_{i-1/2} \frac{\theta_j^i + \theta_j^{i-1}}{2}. \quad (5.11)$$

Собирая результаты численного интегрирования (5.08)(5.11) и поделив на  $r_j h_r h_\varphi \neq 0$ , получаем два варианта аппроксимации уравнения движения по  $r$ :

$$\frac{P_{j+1/2}^{i-1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}}{h_r} + U_j^{i-1/2} - \lambda \frac{\theta_j^i \sin \varphi_i + \theta_j^{i-1} \sin \varphi_{i-1}}{2} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{P_{j+1/2}^{i-1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}}{h_r} + U_j^{i-1/2} - \lambda \sin \varphi_{i-1/2} \frac{\theta_j^i + \theta_j^{i-1}}{2} = 0.$$



**Рис. 6.** Шаблон для уравнения импульса по азимутальной координате

Уравнение движения (2.17) для азимутальной компоненты скорости  $V_{j-1/2}^i$  интегрируется по ячейке  $[r_{j-1}, r_j] \times [\varphi_{i-1/2}, \varphi_{i+1/2}]$ , см. рис. 6:

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1}}^{r_j} r dr \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + V - \lambda \theta \cos \varphi \right] = 0.$$

Аналогично вышеописанному для уравнения импульса по радиальной координате получаем следующие результаты численного интегрирования:

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} dr \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \left[ \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right] \approx h_r \left[ P_{j-1/2}^{i+1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2} \right], \quad (5.13)$$

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1}}^{r_j} dr [rV] \approx r_{j-1/2} h_r h_\varphi V_{j-1/2}^i. \quad (5.14)$$

Для последнего слагаемого получаем два варианта вычисления интеграла:

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1}}^{r_j} dr [\lambda \theta r \cos \varphi] \approx \lambda h_r h_\varphi \cos \varphi_i \frac{\theta_j^i r_j + \theta_{j-1}^i r_{j-1}}{2}. \quad (5.15)$$

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1}}^{r_j} dr [\lambda \theta r \cos \varphi] \approx \lambda r_{j-1/2} h_r h_\varphi \cos \varphi_i \frac{\theta_j^i + \theta_{j-1}^i}{2}. \quad (5.16)$$

Собирая (5.13)(5.16) и поделив на  $r_{j-1/2} h_r h_\varphi \neq 0$ , получим два варианта аппроксимации уравнения движения для азимутальной компоненты скорости в естественных переменных:

$$\frac{P_{j-1/2}^{i+1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}}{r_{j-1/2} h_\varphi} + V_{j-1/2}^i - \lambda \cos \varphi_i \frac{\theta_j^i r_j + \theta_{j-1}^i r_{j-1}}{2r_{j-1/2}} = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{P_{j-1/2}^{i+1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}}{r_{j-1/2} h_\varphi} + V_{j-1/2}^i - \lambda \cos \varphi_i \frac{\theta_j^i + \theta_{j-1}^i}{2} = 0.$$

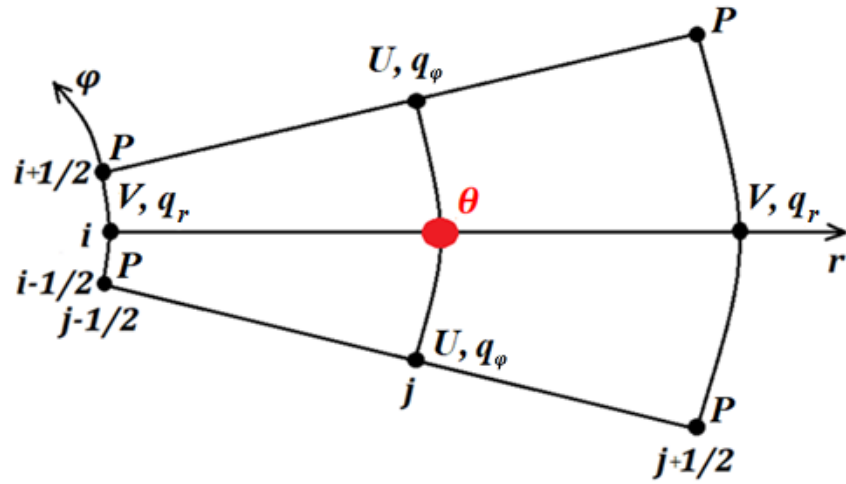


Рис. 7. Шаблон для уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности (2.18)(2.19) интегрируется по ячейке  $[r_{j-1/2}, r_{j+1/2}] \times [\varphi_{i-1/2}, \varphi_{i+1/2}]$  с расположением девиации температуры  $\theta_j^i$  в центре, см. рис. 7:

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} r dr \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta - G(U, V) + J(\theta, U, V) \right] = 0.$$

Разобьём интеграл на части и проинтегрируем по отдельности. По методу центральных прямоугольников для локальной производной по времени получаем

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr \left[ r \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \approx r_j h_r h_\varphi \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_j^i. \quad (5.18)$$

Запишем диффузионный член  $\Delta \theta$  через плотности тепловых потоков и в результате преобразований, аналогичных выводу разностного аналога для уравнения несжимаемости (5.06), получим

$$[\Delta \theta]_j^i = - \frac{r_{j+1/2} q_{r_{j+1/2}}^i - r_{j-1/2} q_{r_{j-1/2}}^i}{r_j h_r} - \frac{q_{\varphi_j}^{i+1/2} - q_{\varphi_j}^{i-1/2}}{r_j h_\varphi}.$$

Здесь плотности тепловых потоков определяются по разностным формулам:

$$q_{r_{j-1/2}}^i \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{h_r}, \quad q_{\varphi_j}^{i-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{r_j h_\varphi}. \quad (5.19)$$

В результате разностный аналог оператора Лапласа имеет вид

$$[\Delta\theta]_j^i = \frac{r_{j+1/2}(\theta_{j+1}^i - \theta_j^i) - r_{j-1/2}(\theta_j^i - \theta_{j-1}^i)}{r_j h_r^2} + \frac{\theta_j^{i+1} - 2\theta_j^i + \theta_j^{i-1}}{r_j^2 h_\varphi}. \quad (5.20)$$

Рассмотрим два варианта аппроксимации силы Архимеда  $G(U, V)$ , см. формулу (2.19),

$$r_j h_r h_\varphi [G(U, V)]_j^i \approx \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr [Ur \sin \varphi + Vr \cos \varphi].$$

Аналогично полученным выкладкам в результате интегрирования уравнений движения (5.10), (5.15) и (5.11), (5.16) выводим:

$$[G_1]_j^i = \frac{U_j^{i+1/2} \sin \varphi_{i+1/2} + U_j^{i-1/2} \sin \varphi_{i-1/2}}{2} + \frac{V_{j+1/2}^i r_{j+1/2} + V_{j-1/2}^i r_{j-1/2}}{2r_j} \cos \varphi_i, \quad (5.21)$$

$$[G_2]_j^i = \frac{U_j^{i+1/2} + U_j^{i-1/2}}{2} \sin \varphi_i + \frac{V_{j+1/2}^i + V_{j-1/2}^i}{2} \cos \varphi_i.$$

Рассмотрим дискретизацию нелинейной части в уравнении теплопроводности – конвективного слагаемого  $J(\theta, U, V)$ , см. формулу (2.19),

$$r_j h_r h_\varphi [J(\theta, U, V)]_j^i \approx \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} d\varphi \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} dr [Uq_r r + Vq_\varphi r].$$

Проинтегрируем  $J(\theta, U, V)$  методом центральных прямоугольников по обеим координатам

$$[J_1]_j^i \approx [Uq_r r + Vq_\varphi r]_j^i.$$

Каждую переменную запишем как среднее арифметическое относительно значений в дробных узлах, а плотности тепловых потоков выразим через температуру в соответствующих узлах (5.19)

$$[J_1]_j^i = -\frac{U_j^{i+1/2} + U_j^{i-1/2}}{2} \frac{\theta_{j+1}^i - \theta_{j-1}^i}{2h_r} - \frac{V_{j+1/2}^i + V_{j-1/2}^i}{2} \frac{\theta_j^{i+1} - \theta_j^{i-1}}{2r_j h_\varphi}. \quad (5.22)$$

Выражение (5.22) является классической аппроксимацией конвективного слагаемого относительно естественных переменных. Для уравнений Эйлера дан-

ная аппроксимация оказывается неудовлетворительной, т.к. не сохраняет кинетическую энергию и энстрофию при численном решении [49]. В [65] рассматривалась задача в декартовых координатах и были предложены дополнительные варианты аппроксимации.

Далее рассматриваются дополнительные варианты аппроксимации нелинейного члена в уравнении теплопроводности  $J(\theta, U, V)$  для цилиндрических координат. Разностный аналог  $[Uq_r r]$  в узле основной сетки получается интегрированием выражения по ячейке методами трапеций по радиальной координате и центральных прямоугольников по азимутальной координате. Аналогично член  $[Vq_\varphi r]$  интегрируется с противоположным выбором методов по пространственным координатам. В результате получается следующая аппроксимация конвективного слагаемого

$$[J_2]_j^i \approx \frac{[rUq_r]_{j+1/2}^i + [rUq_r]_{j-1/2}^i}{2r_j} + \frac{[Vq_\varphi]_j^{i+1/2} + [Vq_\varphi]_j^{i-1/2}}{2}.$$

Отметим, что в узлах  $(r_{j+1/2}, \varphi_i)$  и  $(r_{j-1/2}, \varphi_i)$  вычисляется плотность теплового потока по радиальной координате  $q_r$ , а в узлах  $(r_j, \varphi_{i-1/2})$  и  $(r_j, \varphi_{i+1/2})$  – по азимутальной  $q_\varphi$ . Для вычисления компонент скорости  $U$  и  $V$  используем среднее. Далее выражаем потоки  $q_r, q_\varphi$  через температуру (5.19) и получаем второй вариант аппроксимации конвективного слагаемого

$$\begin{aligned} [J_2]_j^i &= -[O_1 + O_2]_j^i, \\ [O_1]_j^i &= \frac{(U_{j+1}^{i+1/2} + U_{j+1}^{i-1/2})\theta_{j+1}^i r_{j+1} - (U_{j-1}^{i+1/2} + U_{j-1}^{i-1/2})\theta_{j-1}^i r_{j-1}}{4r_j h_r}, \\ [O_2]_j^i &= \frac{(V_{j+1/2}^{i+1} + V_{j-1/2}^{i+1})\theta_j^{i+1} - (V_{j+1/2}^{i-1} + V_{j-1/2}^{i-1})\theta_j^{i-1}}{4r_j h_\varphi}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Данный разностный аналог конвективного члена можно получить также путем аппроксимации следующего выражения

$$J_2(\theta, U, V) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V\theta).$$

Аналогично получается ещё одна аппроксимация нелинейного члена

$$[J_3]_j^i \approx \frac{[Uq_r]_j^{i+1/2} + [Uq_r]_j^{i-1/2}}{2} + \frac{[rVq_\varphi]_{j+1/2}^i + [rVq_\varphi]_{j-1/2}^i}{2r_j}.$$

Используя среднее для величин  $q_r$ ,  $q_\varphi$  и выражая плотности тепловых потоков через температуру (5.19), получим

$$\begin{aligned} [J_3]_j^i &= -[O_3 + O_4]_j^i, \\ [O_3]_j^i &= \frac{U_j^{i+1/2}(\theta_{j+1}^{i+1} - \theta_{j-1}^{i+1}) - U_j^{i-1/2}(\theta_{j+1}^{i-1} - \theta_{j-1}^{i-1})}{4h_r}, \\ [O_4]_j^i &= \frac{V_{j+1/2}^i(\theta_{j+1}^{i+1} - \theta_{j+1}^{i-1}) - V_{j-1/2}^i(\theta_{j-1}^{i+1} - \theta_{j-1}^{i-1})}{4r_j h_\varphi}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Третий вариант аппроксимации конвективного слагаемого может быть получен в результате дискретизации следующего выражения

$$J_3(\theta, U, V) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \int U d\varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \int V dr \right).$$

Полученная дискретизация уравнений фильтрационной конвекции в естественных переменных (5.06), (5.12), (5.17), (5.20), (5.21)(5.44) с использованием операторов (5.04)(5.05) может быть записана в виде:

$$\left[ \frac{1}{r} \delta_r(rU) + \frac{1}{r} \delta_\varphi V \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = 0, \quad (5.25)$$

$$[\delta_r P + U - \lambda \delta_\varphi^0(\theta \sin \varphi)]_j^{i-1/2} = 0, \quad (5.26)$$

$$[\delta_r P + U - \lambda \sin \varphi \delta_\varphi^0 \theta]_j^{i-1/2} = 0,$$

$$\left[ \frac{1}{r} \delta_\varphi P + V - \frac{1}{r} \lambda \cos \varphi \delta_r^0(\theta r) \right]_{j-1/2}^i = 0, \quad (5.27)$$

$$\left[ \frac{1}{r} \delta_\varphi P + V - \lambda \cos \varphi \delta_r^0 \theta \right]_{j-1/2}^i = 0.$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^i = [\Delta \theta + G(U, V) - J(\theta, U, V)]_j^i. \quad (5.28)$$

$$[\Delta \theta]_j^i = \left[ \frac{1}{r} \delta_r(r \delta_r \theta) + \frac{1}{r^2} \delta_\varphi(\delta_\varphi \theta) \right]_j^i, \quad (5.29)$$

Для уравнений импульса (5.26) и (5.27) предложены два варианта дискретизации, обеспечивающие второй порядок аппроксимации. Аналогично для уравнения теплопроводности (5.28) имеются два варианта дискретизации силы Архимеда  $G$

$$\begin{aligned} [G_1(U, V)]_j^i &= \left[ \delta_\varphi^0 (U \sin \varphi) + \frac{1}{r} \cos \varphi \delta_r^0 (Vr) \right]_j^i, \\ [G_2(U, V)]_j^i &= [\sin \varphi \delta_\varphi^0 U + \cos \varphi \delta_r^0 V]_j^i, \end{aligned} \quad (5.30)$$

и три варианта дискретизации конвективного слагаемого  $J$ :

$$\begin{aligned} [J_1(\theta, U, V)]_j^i &= - \left[ \delta_\varphi^0 U D_r \theta + \frac{1}{r} \delta_r^0 V D_\varphi \theta \right]_j^i, \\ [J_2(\theta, U, V)]_j^i &= - \left[ \frac{1}{r} D_r (r \theta \delta_\varphi^0 U) + D_\varphi (\theta \delta_r^0 V) \right]_j^i, \\ [J_3(\theta, U, V)]_j^i &= - \left[ D_\varphi (\delta_\varphi^0 U D_r \theta) + \frac{1}{r} D_r (\delta_r^0 V D_\varphi \theta) \right]_j^i. \end{aligned} \quad (5.31)$$

В работе [53] предложена следующая формула вычисления силы Архимеда:  $G = (G_1 + G_2)/2$ , а для расчёта конвективного слагаемого  $J$  по [64] используется якобиан Аракавы:  $J = (J_1 + J_2 + J_3)/3$ .

Система конечно-разностных уравнений (5.25)(5.31) дополняется дискретными аналогами осевых (2.20) и граничных (2.21) условий для всех  $i = \overline{1, N_\varphi}$ :

$$V_{1/2}^i = 0, \quad q_{r_{1/2}}^i = 0, \quad U_{N_r}^{i+1/2} = 0, \quad \theta_{N_r}^i = 0. \quad (5.32)$$

## § 6. Переход к дискретной системе уравнений относительно девиации температуры и функции тока

Для задачи о конвекции Дарси-Буссинеска в случае горизонтального бесконечно длинного цилиндра получена конечно-разностная аппроксимация уравнений в естественных переменных, см. параграф 5. Аналогично аналитическому переходу к системе уравнений относительно девиации температуры  $\theta$  и функции тока  $\psi$  проведём преобразование разностной задачи (5.25)(5.32) к системе относительно  $\theta$  и  $\psi$ , которые располагаются в одних и тех же узлах, см. рис. 8. Представим формулы перехода с постоянными шагами по обеим координатам.

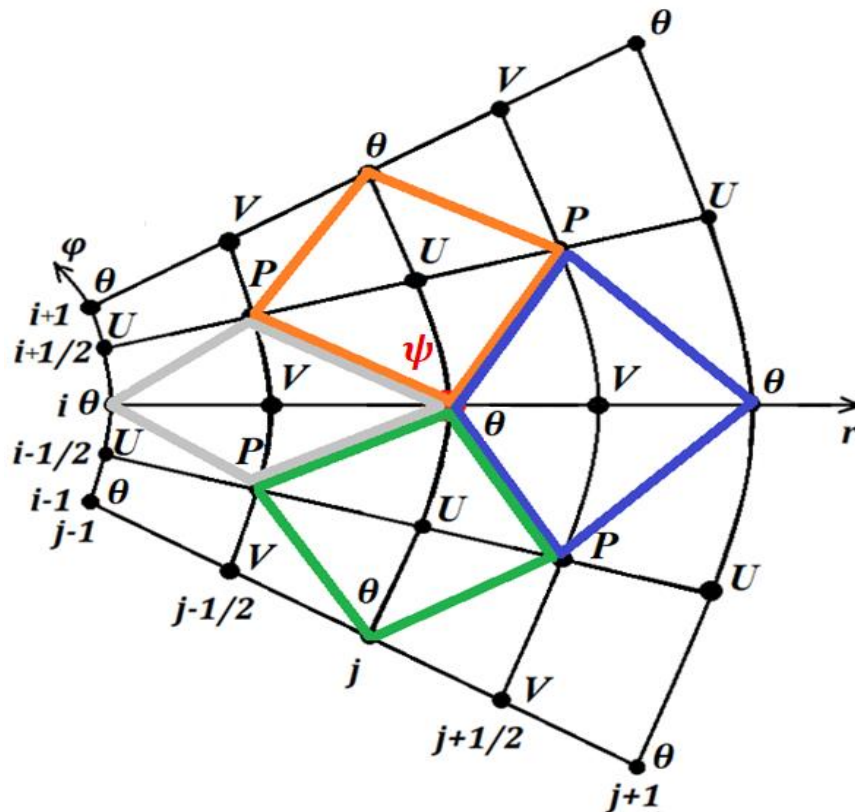


Рис. 8. Общий шаблон для уравнений движения

Используя определение скоростей (2.23) по разностным формулам

$$U_j^{i-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_j^i - \psi_j^{i-1}}{r_j h_\varphi}, \quad V_{j-1/2}^i \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\psi_j^i - \psi_{j-1}^i}{h_r}, \quad (6.01)$$

для уравнения несжимаемости (5.25) получаем:

$$\frac{1}{h_r} \left[ \frac{\psi_j^i - \psi_j^{i-1}}{h_\varphi} - \frac{\psi_{j-1}^i - \psi_{j-1}^{i-1}}{h_\varphi} \right] - \frac{1}{h_\varphi} \left[ \frac{\psi_j^i - \psi_{j-1}^i}{h_r} - \frac{\psi_j^{i-1} - \psi_{j-1}^{i-1}}{h_r} \right] = 0.$$

Это означает, что уравнение несжимаемости, выраженное через функцию тока (6.01), автоматически удовлетворяется.

Проведём замены в уравнениях для радиальной (5.26) и азимутальной (5.27) компонент скорости и избавимся от давления  $P$ . Для этого потребуются соседние значения скоростей относительно узла  $(r_j, \varphi_i)$ . Используя шаблон (цветные области) и переписывая конечно-разностные уравнения (5.26)(5.27), выразим радиальные  $U$  и азимутальные  $V$  компоненты скорости:

$$U_j^{i-1/2} = -\frac{P_{j+1/2}^{i-1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}}{h_r} + \lambda \frac{\theta_j^i \sin \varphi_i + \theta_j^{i-1} \sin \varphi_{i-1}}{2},$$

$$U_j^{i+1/2} = -\frac{P_{j+1/2}^{i+1/2} - P_{j-1/2}^{i+1/2}}{h_r} + \lambda \frac{\theta_j^{i+1} \sin \varphi_{i+1} + \theta_j^i \sin \varphi_i}{2},$$

$$V_{j-1/2}^i = -\frac{P_{j-1/2}^{i+1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}}{r_{j-1/2} h_\varphi} + \lambda \cos \varphi_i \frac{\theta_j^i r_j + \theta_{j-1}^i r_{j-1}}{2r_{j-1/2}},$$

$$V_{j+1/2}^i = -\frac{P_{j+1/2}^{i+1/2} - P_{j+1/2}^{i-1/2}}{r_{j+1/2} h_\varphi} + \lambda \cos \varphi_i \left[ \frac{\theta_{j+1}^i r_{j+1} + \theta_j^i r_j}{2r_{j+1/2}} \right].$$

Вычислим выражение

$$\Omega = \frac{U_j^{i+1/2} - U_j^{i-1/2}}{h_\varphi} - \frac{r_{j+1/2} V_{j+1/2}^i - r_{j-1/2} V_{j-1/2}^i}{h_r}.$$

Приводя подобные слагаемые в правой части, получаем третий вариант аппроксимации силы Архимеда

$$[G_3]_j^i = \lambda \left[ \frac{\theta_j^{i+1} \sin \varphi_{i+1} - \theta_j^{i-1} \sin \varphi_{i-1}}{2h_\varphi r_j} - \frac{\theta_{j+1}^i r_{j+1} - \theta_{j-1}^i r_{j-1}}{2h_r r_j} \cos \varphi_i \right]. \quad (6.02)$$

Подставляя формулы (6.01) в выражение  $\Omega$  и умножая обе части на множитель  $1/r_j \neq 0$ , получаем уравнение, связывающее девиацию температуры и функцию тока

$$[\Delta\psi]_j^i = \lambda [G_3(\theta)]_j^i. \quad (6.03)$$

Если использовать вторые аппроксимации уравнений (5.26)(5.27), то получается формула

$$[\Delta\psi]_j^i = \lambda[G_1(\theta)]_j^i. \quad (6.04)$$

Здесь первый вариант аппроксимации силы Архимеда выглядит следующим образом

$$[G_1]_j^i = \frac{\theta_j^{i+1} \sin \varphi_{i+1/2} - \theta_j^{i-1} \sin \varphi_{i-1/2}}{2r_j h_\varphi} - \frac{\theta_{j+1}^i r_{j+1/2} - \theta_{j-1}^i r_{j-1/2}}{2r_j h_r} \cos \varphi_i. \quad (6.05)$$

Запишем уравнение теплопроводности (5.28) в переменных функция тока и девиация температуры

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^i = [\Delta\theta + G(\psi) + J(\theta, \psi)]_j^i. \quad (6.06)$$

Возможны два варианта аппроксимации силы Архимеда (5.30), записанные через функцию тока:

$$[G_1]_j^i = \frac{\psi_j^{i+1} \sin \varphi_{i+1/2} - \psi_j^{i-1} \sin \varphi_{i-1/2}}{2r_j h_\varphi} - \frac{\psi_{j+1}^i r_{j+1/2} - \psi_{j-1}^i r_{j-1/2}}{2r_j h_r} \cos \varphi_i, \quad (6.07)$$

$$[G_2]_j^i = \frac{\psi_j^{i+1} - \psi_j^{i-1}}{2r_j h_\varphi} \sin \varphi_i + \frac{\psi_{j+1}^i - \psi_{j-1}^i}{2h_r} \cos \varphi_i. \quad (6.08)$$

Видно, что первый вариант обеспечивает одинаковые формулы для  $G_1(\psi)$  и  $G_1(\theta)$ . Если в формуле  $G_2(\psi)$  заменить функцию тока на девиацию температуры, то полученное выражение отличается от  $G_3(\theta)$ .

Разностные уравнения для системы относительно функции тока и девиации температуры также можно получить при помощи интегро-интерполяционного метода. Интегрирование проводится по ячейке  $[r_{j-1/2}, r_{j+1/2}] \times [\varphi_{i-1/2}, \varphi_{i+1/2}]$ , см. рис. 8. Применение данного подхода для (2.27) приводит к аппроксимациям силы Архимеда (6.05) и (6.02), а для (2.29) – соответственно к формулам (6.07) и (6.08). Это подтверждает справедливость полученных конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений фильтрационной конвекции в частных производных.

Рассмотрим преобразование трёх вариантов аппроксимации конвективного слагаемого  $J(\theta, U, V)$  в формулы для функции тока и девиации температуры  $J(\theta, \psi)$ . По аналогии с предыдущим подставим в (5.31) функцию тока по формулам (6.01):

$$[J_1]_j^i = \frac{(\psi_j^{i+1} - \psi_j^{i-1})(\theta_{j+1}^i - \theta_{j-1}^i) - (\psi_{j+1}^i - \psi_{j-1}^i)(\theta_j^{i+1} - \theta_j^{i-1})}{4r_j h_r h_\varphi}, \quad (6.09)$$

$$[J_2]_j^i = \frac{[O_1 - O_2]_j^i}{4r_j h_r h_\varphi}, \quad (6.10)$$

$$[O_1]_j^i = \theta_{j+1}^i (\psi_{j+1}^{i+1} - \psi_{j+1}^{i-1}) - \theta_{j-1}^i (\psi_{j-1}^{i+1} - \psi_{j-1}^{i-1}),$$

$$[O_2]_j^i = \theta_j^{i+1} (\psi_{j+1}^{i+1} - \psi_{j-1}^{i+1}) - \theta_j^{i-1} (\psi_{j+1}^{i-1} - \psi_{j-1}^{i-1}),$$

$$[J_3]_j^i = \frac{[O_4 - O_3]_j^i}{4r_j h_r h_\varphi}, \quad (6.11)$$

$$[O_3]_j^i = \psi_{j+1}^i (\theta_{j+1}^{i+1} - \theta_{j+1}^{i-1}) - \psi_{j-1}^i (\theta_{j-1}^{i+1} - \theta_{j-1}^{i-1}),$$

$$[O_4]_j^i = \psi_j^{i+1} (\theta_{j+1}^{i+1} - \theta_{j-1}^{i+1}) - \psi_j^{i-1} (\theta_{j+1}^{i-1} - \theta_{j-1}^{i-1}).$$

Якобиан  $J_1(\theta, \psi)$  является классической формулой, обеспечивающей выполнение свойства кососимметричности:

$$J_1(\theta, \psi) = -J_1(\psi, \theta), \quad (6.12)$$

Якобианы  $J_2(\theta, \psi)$  и  $J_3(\theta, \psi)$  сохраняют соответственно аналоги интегральных тождеств:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr [\psi J_2(\theta, \psi)] = 0, \quad (6.13)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr [\theta J_3(\theta, \psi)] = 0. \quad (6.14)$$

Предложенная в [64] комбинация аппроксимаций якобиана

$$J(\theta, \psi) = \frac{1}{3} [J_1(\theta, \psi) + J_2(\theta, \psi) + J_3(\theta, \psi)], \quad (6.15)$$

$$J_1(\theta, \psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi},$$

$$J_2(\theta, \psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \theta \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right),$$

$$J_3(\theta, \psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \psi \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \psi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)$$

сохраняет интегральные инварианты, обеспечивает максимальную консервативность на девятиточечном шаблоне [40]. В непрерывном случае все три формы тождественно равны.

Полученные конечно-разностные уравнения относительно температуры и функции тока аппроксимируют исходную нелинейную задачу фильтрационной конвекции по пространственным переменным. С помощью разложения первых членов численной схемы в ряд Тейлора доказано, что аппроксимация обладает вторым порядком точности относительно пространственных шагов сетки  $h_r$  и  $h_\varphi$  при достаточной гладкости решения. Далее после применения метода прямых полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к решению задачи Коши, для которой используется метод Рунге-Кутты четвёртого порядка [23].

Полученная система (6.02)(6.11) записывается в операторном виде с использованием формул (5.04)(5.05):

$$[\Delta \psi]_j^i = \lambda [G_m(\theta)]_j^i,$$

$$[G_1(\theta)]_j^i = \frac{1}{r_j} [\delta_\varphi^0(\theta \sin \varphi) - \cos \varphi \delta_r^0(\theta r)]_j^i, \quad (6.16)$$

$$[G_3(\theta)]_j^i = \frac{1}{r_j} [D_\varphi(\theta \sin \varphi) - \cos \varphi D_r(\theta r)]_j^i,$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^i = [\Delta \theta + G_m(\psi) - J_m(\theta, \psi)]_j^i,$$

$$[G_1(\psi)]_j^i = \frac{1}{r_j} [\delta_\varphi^0(\psi \sin \varphi) - \cos \varphi \delta_r^0(\psi r)]_j^i, \quad (6.17)$$

$$[G_2(\psi)]_j^i = \frac{1}{r_j} [\sin \varphi D_\varphi \psi - r \cos \varphi D_r \psi]_j^i,$$

$$\begin{aligned}
[J_1]_j^i &= \frac{1}{r_j} [D_\varphi \psi D_r \theta - D_r \psi D_\varphi \theta]_j^i, \\
[J_2]_j^i &= \frac{1}{r_j} [D_r (\theta D_\varphi \psi) - D_\varphi (\theta D_r \psi)]_j^i, \\
[J_3]_j^i &= \frac{1}{r_j} [D_\varphi (\psi D_r \theta) - D_r (\psi D_\varphi \theta)]_j^i.
\end{aligned}$$

Для системы (6.16)(6.17) краевые условия записываются через функцию тока:

$$(\delta_r \psi)_{1/2}^i = 0, \quad (\delta_r \theta)_{1/2}^i = 0, \quad \psi_{N_r}^i = 0, \quad \theta_{N_r}^i = 0. \quad (6.18)$$

Полученная в результате дискретизации. система конечно-разностных уравнений фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска для бесконечно длинного горизонтального цилиндра (6.16)(6.18) представляется в матрично-векторном виде:

$$A\Psi = \lambda B\Theta, \quad (6.19)$$

$$\dot{\Theta} = A\Theta + B\Psi - F. \quad (6.20)$$

Здесь точка обозначает производную по времени, ленточная матрица  $A$  соответствует дискретному аналогу оператора Лапласа (5.29). Матрица  $B$  является дискретным аналогом силы Архимеда (6.05). Вектор-столбец  $F$  содержит элементы якобиана (6.15). Массивы  $\Theta$  и  $\Psi$  размерности  $[(N_r - 1) \times N_\varphi]$  заполняются соответственно узловыми значениями температуры  $\theta$  и функции тока  $\psi$ :

$$\Theta = \{\theta_1^1, \theta_1^2, \dots, \theta_j^i, \dots, \theta_{N_r-1}^{N_\varphi}\}, \quad \Psi = \{\psi_1^1, \psi_1^2, \dots, \psi_j^i, \dots, \psi_{N_r-1}^{N_\varphi}\}. \quad (6.21)$$

Задача (6.19)(6.20) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений после выражения  $\Psi$  из уравнения (6.19)

$$\Psi = \lambda A^{-1} B \Theta, \quad (6.22)$$

и дальнейшей подстановки в (6.20)

$$\dot{\Theta} = A\Theta + \lambda B A^{-1} B \Theta - F. \quad (6.23)$$

Вектор  $F$  вычисляется непосредственно по значениям переменных, содержащихся в массивах  $\Theta$  и  $\Psi$ . Примеры построения матриц и специальные формулы обработки узлов около полюса даны в параграфе 8.

## § 7. Конечно–разностные уравнения для вертикального цилиндра

Для численного исследования осесимметричной задачи фильтрационной конвекции в вертикальной цилиндрической области развивается численная схема с применением метода конечных разностей [43]. Для уравнений в естественных переменных с использованием смещённых сеток строится аппроксимация второго порядка точности с постоянными шагами по радиальной и осевой координатам. На основе полученной системы уравнений формулируется задача относительно девиации температуры и функции тока. Рассматривается случай сплошного цилиндра при подогреве снизу (линейный профиль температуры по высоте).

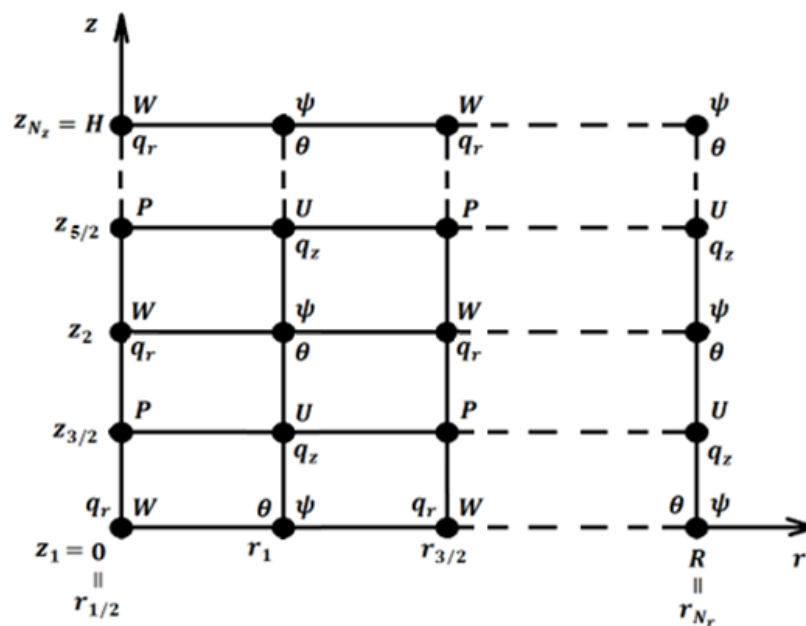


Рис. 9. Переменные в узлах сетки

По радиальной и осевой координатам вводятся основные сетки, см. рис. 9, состоящие из узлов:

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_j < \dots < r_{N_r} = R,$$

$$0 = z_1 < z_2 \dots < z_k < \dots < z_{N_z} = H,$$

где  $N_r, N_z$  – число узлов,  $j, k$  – порядковые номера по координатам  $r$  и  $z$ . По обеим координатам задаются сетки со смещёнными узлами:

$$r_{j-1/2} = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}, \quad j = \overline{2, N_r}, \quad r_{1/2} = 0,$$

$$z_{k-1/2} = \frac{z_k + z_{k-1}}{2}, \quad k = \overline{2, N_z}.$$

В случае равномерного распределения узлов формируются сетки с постоянными шагами по радиальной  $h_r$  и осевой  $h_z$  координатам:

$$r_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) h_r, \quad j = \overline{1, N_r}, \quad h_r = \frac{R}{N_r - \frac{1}{2}},$$

$$z_k = (k - 1) h_z, \quad k = \overline{1, N_z}, \quad h_z = \frac{H}{N_z - 1}.$$

На двухточечных и трёхточечных шаблонах строятся разностные операторы первых производных, а также операторы вычисления среднего:

$$(\delta_z \theta)_j^{k-1/2} = \frac{\theta_j^k - \theta_j^{k-1}}{h_z}, \quad (\delta_r \theta)_j^{k-1/2} = \frac{\theta_j^k - \theta_{j-1}^k}{h_z}, \quad (7.01)$$

$$(\delta_z^0 \theta)_j^{k-1/2} = \frac{\theta_j^k + \theta_j^{k-1}}{2}, \quad (\delta_r^0 \theta)_{j-1/2}^k = \frac{\theta_j^k + \theta_{j-1}^k}{2}, \quad (7.02)$$

$$(D_z \theta)_j^k = \frac{\theta_j^{k+1} - \theta_j^{k-1}}{2h_z}, \quad (D_r \theta)_j^k = \frac{\theta_{j+1}^k - \theta_{j-1}^k}{2h_r}. \quad (7.03)$$

Для аппроксимации задачи в естественных переменных (3.08)(3.16) используется интегро-интерполяционный метод и формулы численного интегрирования. В результате получается система уравнений конвекции в естественных переменных для сечения вертикального цилиндра, записанная через конечно-разностные операторы (7.01)(7.03):

$$\left[ \frac{1}{r} \delta_r (rU) + \delta_z W \right]_{j-1/2}^{k-1/2} = 0, \quad (7.04)$$

$$[\delta_r P + U]_j^{k-1/2} = 0, \quad (7.05)$$

$$[\delta_z P + W - \lambda \delta_r^0 \theta]_{j-1/2}^k = 0, \quad \left[ \delta_z P + W - \frac{\lambda}{r} \delta_r^0 (r\theta) \right]_{j-1/2}^k = 0, \quad (7.06)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^k = [\Delta \theta + G(W) - J(\theta, U, W)]_j^k, \quad (7.07)$$

$$\begin{aligned}
[\Delta\theta]_j^k &= \left[ \frac{1}{r} \delta_r (r \delta_r \theta) + \delta_z (\delta_z \theta) \right]_j^k, \\
G(W) &= \frac{G_1 + G_2}{2}, \quad [G_1]_j^k = [\delta_r^0 W]_j^k, \quad [G_2]_j^k = \left[ \frac{1}{r} \delta_r^0 (rW) \right]_j^k, \\
J(\theta, U, W) &= \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3}, \quad [J_1]_j^k = [\delta_z^0 U D_r \theta + \delta_r^0 W D_z \theta]_j^k, \\
[J_2]_j^k &= \left[ \frac{1}{r} D_r (r \theta \delta_z^0 U) + D_z (\theta \delta_r^0 W) \right]_j^k, \\
[J_3]_j^k &= [D_z (D_r \theta \delta_z^0 U) + D_r (D_z \theta \delta_r^0 W)]_j^k.
\end{aligned}$$

В системе содержатся два варианта аппроксимации уравнения движения для осевой координаты (7.06), силы Архимеда  $G(W)$  и три – конвективного слагаемого  $J(\theta, U, W)$  в уравнении теплопроводности (7.07).

Краевые условия (3.13)(3.15) для системы (7.04)(7.07) принимают следующий дискретный вид:

$$\frac{U_1^{k-1/2} + U_0^{k-1/2}}{2} = 0, \quad U_{N_r}^{k-1/2} = 0, \quad k = \overline{2, N_z}, \quad (7.08)$$

$$\frac{\theta_1^k - \theta_0^k}{h_r} = 0, \quad \theta_{N_r}^k = 0, \quad k = \overline{1, N_z}, \quad (7.09)$$

$$W_{j-1/2}^1 = W_{j-1/2}^{N_z} = 0, \quad \theta_j^1 = \theta_j^{N_z} = 0, \quad j = \overline{1, N_r}. \quad (7.10)$$

Здесь  $U_0^{k-1/2}$  и  $\theta_0^k$  – значения в законтурных узлах.

Далее осуществляется дискретный переход от осесимметричной задачи фильтрационной конвекции в естественных переменных к задаче относительно температуры и функции тока для вертикального сплошного цилиндра. Формулы для функции тока (3.17) имеют конечно-разностные аналоги:

$$U_j^{k-1/2} = \left( \frac{1}{r} \delta_z \psi \right)_j^{k-1/2}, \quad W_{j-1/2}^k = - \left( \frac{1}{r} \delta_r \psi \right)_{j-1/2}^k. \quad (7.11)$$

В результате использования интегро-интерполяционного метода, аналогично параграфу 6, получаются аппроксимации уравнений (3.18)(3.20) для внутренних узлов сетки:

$$[\Delta\psi]_j^k = \left[ \frac{2}{r} D_r \psi - \lambda r D_r \theta \right]_j^k, \quad (7.12)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^k = \left[ \Delta \theta - \frac{1}{r} D_r \psi - \frac{1}{r} (D_z \psi D_r \theta - D_r \psi D_z \theta) \right]_j^k, \quad (7.13)$$

$$[\Delta]_j^k = \left[ \frac{1}{r} \delta_r (r \delta_r) + \delta_z^2 \right]_j^k. \quad (7.14)$$

Для второго варианта введения функции тока (параграф 3) имеем

$$U_j^{k-1/2} = (\delta_z \psi)_j^{k-1/2}, \quad W_{j-1/2}^k = - \left[ \frac{1}{r} \delta_r (r \psi) \right]_{j-1/2}^k \quad (7.15)$$

и следующую систему уравнений:

$$[\Delta\psi]_j^k = \left[ \frac{\psi}{r^2} - \lambda D_r \theta \right]_j^k, \quad (7.16)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^k = \left[ \Delta \theta - \frac{1}{r} \delta_r (r \psi) - \left( D_r \theta D_z \psi - D_z \theta \frac{1}{r} \delta_r (r \psi) \right) \right]_j^k. \quad (7.17)$$

В окрестности полюса ( $r = 0$ ) для уравнений (7.11)(7.17) использовались следующие аппроксимации:

$$[\Delta\psi]_1^k = \left[ \frac{\psi}{r^2} \right]_1^k - \frac{\lambda}{2} (\delta_r \theta)_{3/2}^k,$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_1^k = \left[ \Delta \theta - \frac{1}{r} \delta_r (r \psi) \right]_1^k - \frac{1}{2} (\delta_r \theta)_{3/2}^k (D_z \psi)_1^k + \frac{1}{2} (D_z \theta)_1^k \left( \frac{1}{r} \delta_r (r \psi) \right)_{3/2}^k.$$

Краевые условия (3.24)(3.25) переписутся:

$$(\delta_r \psi)_{1/2}^k = 0, \quad (\delta_r \theta)_{1/2}^k = 0, \quad k = \overline{1, N_z}, \quad (7.18)$$

$$\psi_{N_r}^k = 0, \quad \theta_{N_r}^k = 0, \quad k = \overline{1, N_z}, \quad (7.19)$$

$$\psi_j^1 = \psi_j^{N_z} = 0, \quad \theta_j^1 = \theta_j^{N_z} = 0, \quad j = \overline{1, N_r}. \quad (7.20)$$

Для численного исследования задачи фильтрационной конвекции Дарси-Буссинеска системы уравнений (7.11)(7.14) и (7.14)(7.17) представляются в матрично-векторном виде соответственно для первого варианта

$$A\Psi = 2C_1\Psi - \lambda B_1\Theta, \quad \dot{\Theta} = A\Theta - C_1\Psi - F_1. \quad (7.21)$$

и для второго

$$A\Psi = C_2\Psi - \lambda B_2\Theta, \quad \dot{\Theta} = A\Theta - D\Psi - F_2. \quad (7.22)$$

Здесь ленточная матрица  $A$  соответствует дискретному аналогу оператора Лапласа (7.14), матрицы  $B_1$  и  $B_2$  – первому слагаемому в правой части (7.12) и (7.16) без учёта числа Рэлея  $\lambda$ ,  $C_1$  и  $C_2$  – второму слагаемому (7.12) и (7.16) соответственно, матрица  $D$  – второму слагаемому в правой части (7.17), векторы-столбцы  $F_1$  и  $F_2$  – нелинейным членам в правой части уравнения теплопроводности (7.13) и (7.17). Массивы  $\Theta$  и  $\Psi$  имеют размерность  $[(1:N_r - 1) \times (2:N_z - 1)]$  и содержат узловые значения  $\theta$ ,  $\psi$ :

$$\Theta = \{\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_j^k, \dots, \theta_{N_r-1}^{N_z-1}\}, \quad \Psi = \{\psi_1^2, \psi_2^2, \dots, \psi_j^k, \dots, \psi_{N_r-1}^{N_z-1}\}. \quad (7.23)$$

Задачи (7.21) и (7.22) приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений после выражения  $\Psi$ :

$$\dot{\Theta} = A\Theta - \lambda C_1 B_1 (A - 2C_1)^{-1} \Theta - F_1, \quad \Psi = -\lambda B_1 (A - 2C_1)^{-1} \Theta. \quad (7.24)$$

$$\dot{\Theta} = A\Theta - \lambda D B_2 (A - C_2)^{-1} \Theta - F_2, \quad \Psi = -\lambda B_2 (A - C_2)^{-1} \Theta. \quad (7.25)$$

## § 8. Описание программного комплекса «CONV\_REGIMES» для расчёта фильтрационной конвекции в цилиндрических областях

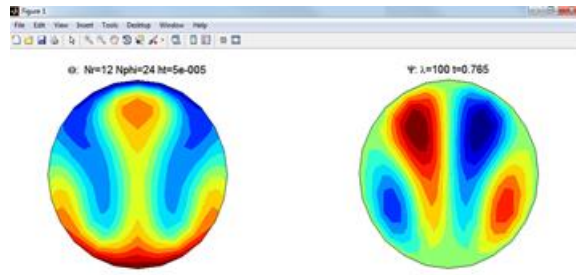
Для проведения вычислительного эксперимента и анализа конвекции теплопроводной жидкости в пористых цилиндрах разработан программный комплекс «CONV\_REGIMES» [118] на основе описанных в параграфах 5-7 методов, см. Приложение 1. Программы реализованы в среде MATLAB [19] на платформе Engee [81] и предназначены для следующих задач:

- расчёт конвективных режимов при различных распределениях тепловых источников,
- вычисление критических чисел и собственных функций для пороговых температур,
- визуализация движения жидкости,
- нахождение спектра устойчивости стационарных состояний,
- построение различных графиков зависимости величин.

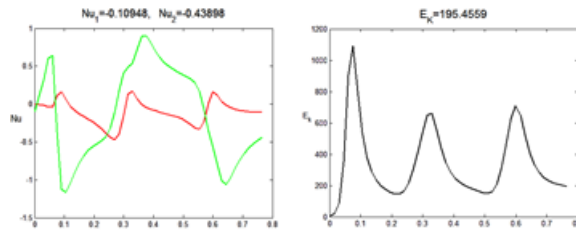
Базовыми элементами являются блок подготовки начальных данных и расчётных параметров, функции вычисления динамики и критических чисел, подсистема подготовки выходных данных и графических материалов. Отдельные программы написаны в среде Maple [18] для проверки аппроксимации конечно-разностных схем, вычисления критических чисел Рэлея и проверки условий коммутации для дискретных уравнений (6.16)(6.18) подобно [84].

В комплексе «CONV\_REGIMES» основными являются функции:

- определение начальных распределений девиации температуры (`initial_theta`),
- формирование матриц и вычисление спектральных значений (`matr_AB`),
- расчёт функции тока, кинетической энергии и чисел Нуссельта (`stream_fun`),
- вычисление правой части уравнения теплопроводности (`right_part`),
- нахождение спектра устойчивости (`jacobian`).



**Рис. 10.** Визуализация динамики: температура и функция тока



**Рис. 11.** Визуализация динамики: числа Нуссельта и кинетическая энергия

На рис. 10 и 11 представлен ряд графических окон программного комплекса «CONV\_REGIMES». На рис. 10 слева направо представлены окна: температура и функция тока. На рис. 11 расположены графики зависимости от времени чисел Нуссельта и кинетической энергии.

Для сечения горизонтального цилиндра кинетическая энергия рассчитывается по формуле:

$$E_k(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \left[ \frac{U^2 + V^2}{2} \right]. \quad (8.01)$$

Числа Нуссельта характеризуют плотность теплового потока через центральное вертикальное сечение и границу круговой области соответственно:

$$Nu_1(t) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R dy \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad Nu_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (8.02)$$

В случае вертикального сплошного цилиндра кинетическая энергия рассчитывается по формуле

$$E_k(t) = \int_0^H dz \int_0^R r dr \left[ \frac{U^2 + W^2}{2} \right], \quad (8.03)$$

а числа Нуссельта характеризуют плотность теплового потока через основание цилиндра  $z = 0$  и его боковую поверхность  $r = R$ :

$$Nu_1(t) = \frac{1}{R} \int_0^R dr \left[ \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=0}, \quad Nu_2(t) = \frac{1}{b} \int_0^b dz \left[ \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (8.04)$$

С помощью прямого расчёта можно проверить, что при  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  состояние покоя ( $\theta = \psi = 0$ ) является устойчивым, найти стационарные распределения температуры и функции тока при  $\lambda > \lambda_{cr}$ , рассчитать колебательный режим движения жидкости при больших  $\lambda$ .

В программе используются массивы для внутренних узлов сетки и формируются расширенные массивы со значениями в законтурных узлах. Для узлов около сингулярных точек (полюс и осевая линия) цилиндров используются специальные формулы.

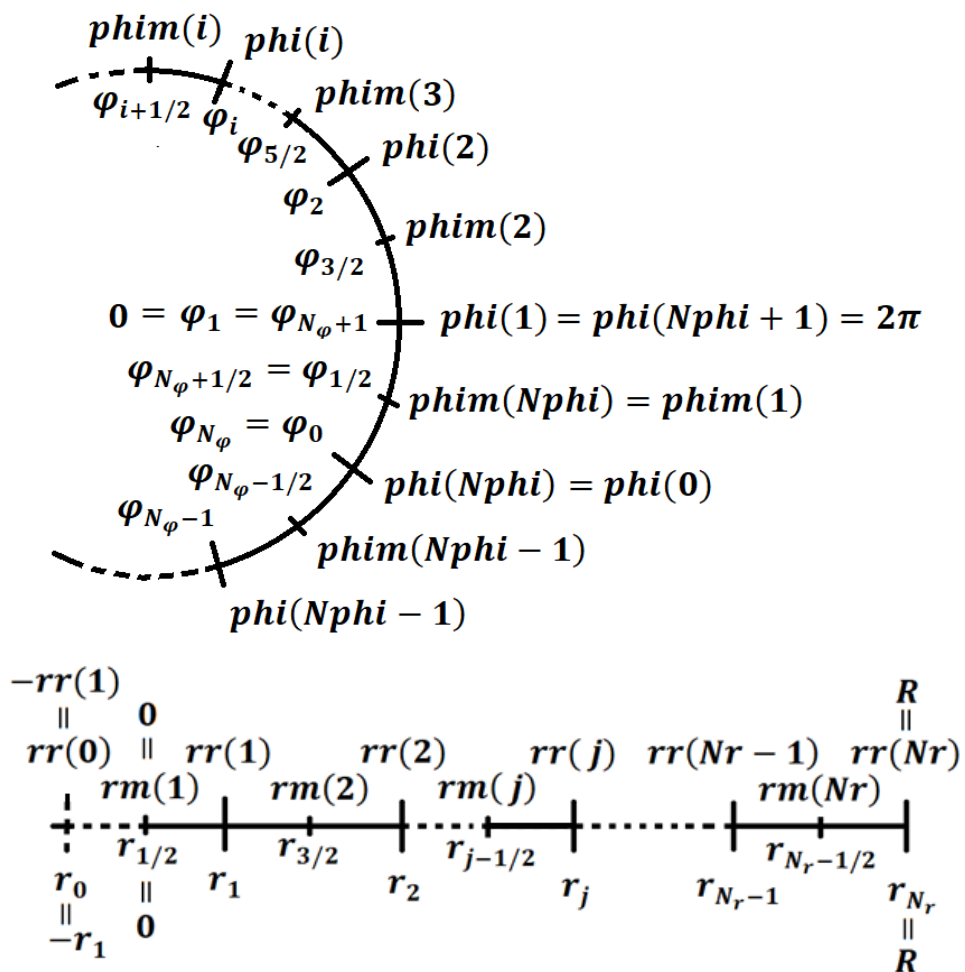


Рис. 12. Расположение узлов по азимутальной и радиальной координатам

При дискретизации сеточных узлов используется расположение узлов, как показано на рис. 12. Здесь  $phi$  и  $phim$  обозначают целочисленные и дробные узлы по азимутальной координате, а  $rr$  и  $rm$  – соответственно по радиальной. Ниже представлены примеры формирования матриц  $A$  и  $B$  для горизонтального бесконечно длинного цилиндра, см. формулы из параграфа 6.

Дискретный вариант оператора Лапласа (5.47) для внутренних точек с индексами  $j = \overline{2, N_r - 2}$  и  $i = \overline{2, N_\varphi}$ , например для узла  $(r_2, \varphi_2)$ , принимает вид

$$[\Delta\theta]_2^2 = \frac{r_{5/2}(\theta_3^2 - \theta_2^2) - r_{3/2}(\theta_2^2 - \theta_1^2)}{r_2 h_r^2} + \frac{\theta_2^3 - 2\theta_2^2 + \theta_2^1}{r_2^2 h_\varphi^2}.$$

Для этого случая ненулевыми коэффициентами являются:

$$A_{22} = -\frac{r_{5/2} + r_{3/2}}{r_2 h_r^2} - \frac{2}{r_2^2 h_\varphi^2}, \quad A_{23} = \frac{1}{r_2^2 h_\varphi^2},$$

$$A_{25} = \frac{1}{r_2^2 h_\varphi^2}, \quad A_{26} = \frac{r_{5/2}}{r_2 h_r^2}, \quad A_{21} = \frac{r_{3/2}}{r_2 h_r^2}.$$

Отдельно находятся коэффициенты для узлов около оси. Для узла  $(r_1, \varphi_1)$  с учётом периодичности ( $\varphi_0 = \varphi_{N_\varphi}$ ) и условия в полюсе ( $r_{1/2} = 0$ ) оператор Лапласа записывается в виде

$$[\Delta\theta]_1^1 = \frac{r_{3/2}(\theta_2^1 - \theta_1^1)}{r_1 h_r^2} + \frac{\theta_1^2 - 2\theta_1^1 + \theta_1^{N_\varphi}}{r_1^2 h_\varphi^2}.$$

Таким образом, для первой строки матрицы  $A$  получаем:

$$A_{11} = -\frac{r_{3/2}}{r_1 h_r^2} - \frac{2}{r_1^2 h_\varphi^2}, \quad A_{12} = \frac{1}{r_1^2 h_\varphi^2}, \quad A_{14} = \frac{1}{r_1^2 h_\varphi^2}, \quad A_{15} = \frac{r_{3/2}}{r_1 h_r^2}.$$

Для приграничного узла  $(r_{N_r-1}, \varphi_{N_\varphi})$  с учётом свойства периодичности ( $\varphi_{N_\varphi+1} = \varphi_1$ ) и краевых условий ( $\theta_{N_r} = 0$ ) имеем

$$[\Delta\theta]_{N_r-1}^{N_\varphi} = -\frac{r_{N_r-1/2}\theta_{N_r-1}^{N_\varphi} + r_{N_r-3/2}(\theta_{N_r-1}^{N_\varphi} - \theta_{N_r-2}^{N_\varphi})}{r_{N_r-1} h_r^2} + \frac{\theta_{N_r-1}^1 - 2\psi_{N_r-1}^{N_\varphi} + \psi_{N_r-1}^{N_\varphi-1}}{r_{N_r-1}^2 h_\varphi^2}.$$

Коэффициенты для данного выражения принимают вид:

$$A_{N_r-2N_\varphi-2} = -\frac{r_{N_r-1/2} + r_{N_r-3/2}}{r_{N_r-1} h_r^2} - \frac{2}{r_{N_r-1}^2 h_\varphi^2}, \quad A_{N_r-2N_\varphi-1} = \frac{1}{r_{N_r-1}^2 h_\varphi^2},$$

$$A_{N_r-2N_\varphi} = \frac{1}{r_{N_r-1}^2 h_\varphi^2}, \quad A_{N_r-2N_\varphi-3} = \frac{r_{N_r-3/2}}{r_{N_r-1} h_r^2}.$$

Элементы матрицы  $B$  находятся из выражений, аппроксимирующих  $G_1(\theta)$ .

Для узла  $(r_2, \varphi_2)$  сила Архимеда рассчитывается по формуле

$$[G_1(\theta)]_2^2 = \frac{\theta_2^3 \sin \varphi_{5/2} - \theta_2^1 \sin \varphi_{3/2}}{2r_2 h_\varphi} - \frac{\theta_3^2 r_{5/2} - \theta_1^2 r_{3/2}}{2r_2 h_r} \cos \varphi_2,$$

а коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$B_{21} = \frac{r_{3/2} \cos \varphi_2}{2r_2 h_r}, \quad B_{23} = \frac{\sin \varphi_{5/2}}{2r_2 h_\varphi},$$

$$B_{25} = -\frac{\sin \varphi_{3/2}}{2r_2 h_\varphi}, \quad B_{26} = -\frac{r_{5/2} \cos \varphi_2}{2r_2 h_r}.$$

Для узла  $(r_1, \varphi_1)$  имеем

$$[G_1(\theta)]_1^1 = \frac{\theta_1^2 \sin \varphi_{3/2} - \theta_1^{N_\varphi} \sin \varphi_{1/2}}{2r_1 h_\varphi} - \frac{\theta_2^1 r_{3/2}}{2r_1 h_r} \cos \varphi_1.$$

Тогда соответствующие коэффициенты матрицы  $B$  принимают вид:

$$B_{12} = \frac{\sin \varphi_{3/2}}{2r_1 h_\varphi}, \quad B_{14} = -\frac{\sin \varphi_{1/2}}{2r_1 h_\varphi}, \quad B_{15} = -\frac{r_{3/2} \cos \varphi_1}{2h_r}.$$

Для узла  $(r_{N_r-1}, \varphi_{N_\varphi})$  получается формула

$$[G_1(\theta)]_{N_r-1}^{N_\varphi} = \frac{\theta_{N_r-1}^1 \sin \varphi_{1/2} - \theta_{N_r-1}^{N_\varphi-1} \sin \varphi_{N_\varphi-1/2}}{2r_{N_r-1} h_\varphi} + \frac{\theta_{N_r-2}^{N_\varphi} r_{N_r-1/2}}{2r_{N_r-1} h_r} \cos \varphi_{N_\varphi}.$$

Ненулевые коэффициенты даются выражениями:

$$B_{N_r-2N_\varphi-1} = \frac{\sin \varphi_{1/2}}{2r_{N_r-1} h_\varphi}, \quad B_{N_r-2N_\varphi} = -\frac{\sin \varphi_{N_\varphi-1/2}}{2r_{N_r-1} h_\varphi},$$

$$B_{N_r-1N_\varphi-1} = \frac{r_{N_r-1/2} \cos \varphi_{N_\varphi}}{2r_{N_r-1} h_r}.$$

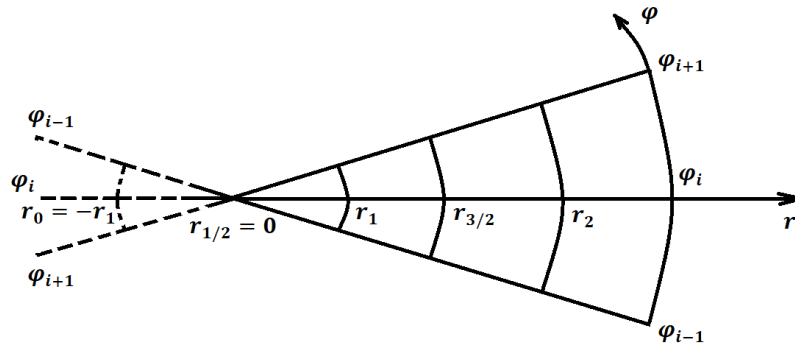
Благодаря использованию сетки со смещёнными узлами в полученных формулах за счёт множителя  $r_{1/2} = 0$ , стоящего перед фиктивным слагаемым  $\theta_0^i$ , не участвуют законтурные узлы по радиальной координате.

Отдельно опишем обработку формул  $G_3(\theta)$  и  $G_2(\theta)$ , для которых требуется специальная аппроксимация около полюса с использованием законтурных узлов.

При  $j = 1$  для вторых слагаемых (6.02) и (6.08) с учётом симметрии геометрической области ( $r_0 = -r_1$ ) и осевого условия ( $\theta_0^i = \theta_1^i$ ) получаются следующие аппроксимации соответственно:

$$\frac{\theta_2^i r_2 - \theta_0^i r_0}{2r_1 h_r} \cos \varphi_i = \frac{\theta_2^i r_2 + \theta_1^i r_1}{2r_1 h_r} \cos \varphi_i, \quad (8.05)$$

$$\frac{\theta_2^i - \theta_0^i}{2h_r} \cos \varphi_i = \frac{\theta_2^i - \theta_1^i}{2h_r} \cos \varphi_i. \quad (8.06)$$



**Рис. 13.** Шаблон для аппроксимации  $J_2$  и  $J_3$

Вектор  $F$ , аппроксимирующий конвективное слагаемое  $J$ , вычисляется непосредственно по заданным  $\theta$  и  $\psi$ . Для узлов около полюса  $(r_1, \varphi_i)$  используются специальные формулы в силу осевых условий и расположения законтурных узлов, см. рис. 13:

$$[J_1]_1^i = \frac{(\psi_1^{i+1} - \psi_1^{i-1})(\theta_2^i - \theta_1^i) - (\psi_2^i - \psi_1^i)(\theta_1^{i+1} - \theta_1^{i-1})}{4r_1 h_r h_\varphi}, \quad (8.07)$$

$$[J_2]_1^i = \frac{1}{4r_1 h_r h_\varphi} [O_1 - O_2]_1^i, \quad (8.08)$$

$$[O_1]_1^i = \theta_2^i (\psi_2^{i+1} - \psi_2^{i-1}) + \theta_1^i (\psi_1^{i+1} - \psi_1^{i-1}),$$

$$[O_2]_1^i = \theta_1^{i+1} (\psi_2^{i+1} - \psi_1^{i+1}) - \theta_1^{i-1} (\psi_2^{i-1} - \psi_1^{i-1}),$$

$$[J_3]_1^i = \frac{1}{4r_1 h_r h_\varphi} [O_4 - O_3]_1^i, \quad (8.09)$$

$$[O_3]_j^i = \psi_2^i (\theta_2^{i+1} - \theta_2^{i-1}) + \psi_1^i (\theta_1^{i+1} - \theta_1^{i-1}),$$

$$[O_4]_j^i = \psi_1^{i+1} (\theta_2^{i+1} - \theta_1^{i+1}) - \psi_1^{i-1} (\theta_2^{i-1} - \theta_1^{i-1}).$$

Для интегрирования по времени применяется метод Рунге-Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом [23]. Например, при расчёте колебательного режима на сетке размера  $12 \times 24$  шаг по времени был равен  $h_t = 5 \cdot 10^{-5}$ . Для проверки результатов использовались расчёты на более детальной сетке и с меньшим шагом по времени. Характерные размеры сетки при вычислениях критических значений числа Рэлея и конвективных режимов приведены в параграфах 912.

Для вычисления спектра устойчивости стационарных решений реализуется численное определение матрицы Якоби. Производные вычисляются разностными отношениями первого порядка, инкремент равен  $10^{-7}$ . В параграфах 912 представлены вычисления для различных сеток, реализованная процедура позволяет быстро рассчитывать динамику для систем с несколькими тысячами узлов [51].

## **Выводы по ГЛАВЕ 2**

В главе 2 представлены разработанные численные схемы и программный комплекс для решения задач в цилиндрических координатах термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости, пронизывающей пористую среду. С использованием интегро-интерполяционного метода построены конечно-разностные схемы для уравнений в естественных переменных и относительно функции тока и девиации температуры. Описаны дискретизации с применением смещённых сеток для неравномерного распределением узлов по радиальной и азимутальной координатам. Получены дискретные аналоги спектральных задач для определения критических значений числа Рэлея. Описан разработанный в среде MATLAB программный комплекс «CONV\_REGIMES» для численного исследования конвективных движений в пористых горизонтальном и вертикальном цилиндрах.

Глава основана на результатах работ [115,116,118].

### ГЛАВА 3

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ

Двумерные по пространству начально-краевые задачи о конвекции теплопроводной несжимаемой жидкости численно исследуются в пористых цилиндрах. На основе описанных в главах 12 моделей и методов проводятся вычисления критических значений числа Рэлея и расчёты стационарных и колебательных конвективных режимов для горизонтального и вертикального цилиндров.

Изучается влияние на возникновение конвекции неоднородного температурного поля, заданного на границе горизонтально расположенного цилиндра. Анализируются расчёты критических чисел Рэлея с неравномерным распределением узлов по радиальной координате. Порядок аппроксимации системы конечно-разностных уравнений конвекции с учётом точки полюса проверяется с помощью процесса Эйткена. Устойчивость разработанных схем и численная сходимость при расчёте стационарных и колебательных конвективных режимов устанавливается на основе вычислительных экспериментов.

Для осесимметричной задачи термогравитационной конвекции в вертикальном цилиндре при подогреве снизу проводятся расчёты порога возникновения конвективных движения с учётом двух вариантов введения функции тока. Строятся собственные функции относительно функции тока, отвечающие критическим значениям числа Рэлея. Численно исследуются ответвляющиеся от механического равновесия конвективные режимы для узкого и широкого цилиндров. Расчёты конвективных режимов иллюстрируются графиками зависимости чисел Нуссельта и кинетической энергии от времени, вычисленными распределениями полей температуры и функции тока.

## § 9. Вычисление конвективных переходов в горизонтальном цилиндре с использованием неравномерных сеток

Рассматривается задача о возникновении конвекции в горизонтальном бесконечно длинном цилиндре при не зависящих от осевой координаты граничных условиях на боковой поверхности. В этом случае решается двумерная начально-краевая задача (2.25)(2.32), (2.22) и используется численная схема, описанная в параграфе 6. Расчёты проводились для круговой области радиуса  $R = 1$  в среде MATLAB.

Для определения критических чисел Рэлея решается спектральная задача, которая получается из (6.22)(6.23) при нулевых значения величин  $\dot{\Theta}$  и  $F$ :

$$A\Theta = -\lambda B A^{-1} B \Theta. \quad (9.01)$$

Расчёты на основе разработанной конечно-разностной схемы показали высокую точность при определении спектральных величин: двукратность критических чисел получалась для 15 значащих цифр при 16-значной мантиссе.

В табл. 2 представлены результаты вычисления порога возникновения конвективных движений для различных сеток в сравнении с аналитическим результатом на основе нулей бесселевых функций, полученным в параграфе 4.

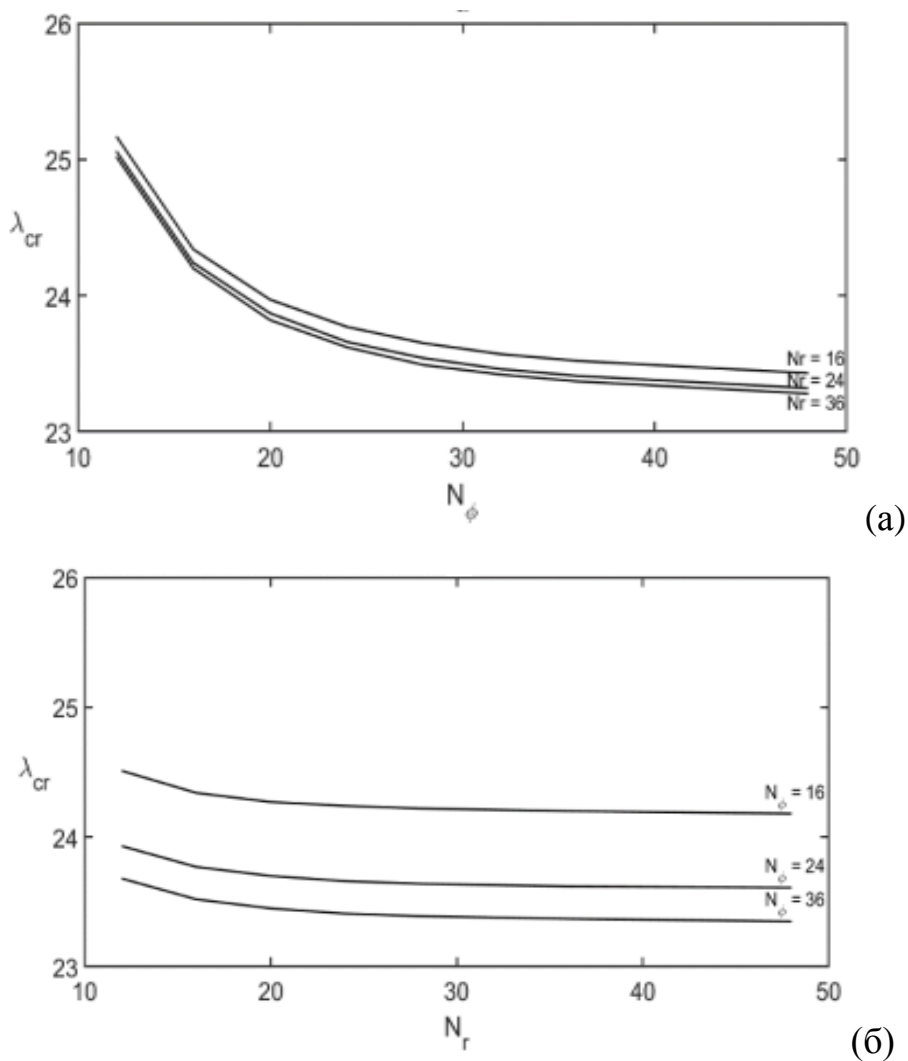
**Таблица 2.** Сходимость вычисленных на различных сетках значений  $\lambda_{cr}$  к пороговому, полученному по формуле (4.14)

$N_r \times N_\varphi$	$12 \times 18$	$24 \times 36$	$36 \times 54$	$48 \times 72$	$60 \times 90$	<b>(4.14)</b>
$\lambda_{cr}$	24.07	23.36	23.24	23.19	23.17	<b>23.13</b>

С ростом числа узлов по радиальной и азимутальной координатам вычисленные критические значения  $\lambda_{cr}$  стремятся к точному значению, которое получается по формуле (4.14). Расчёты позволили определить оптимальный размер сетки для последующего численного эксперимента и вычисления конвективных режимов. Так, сетки размерами  $12 \times 32$  и  $24 \times 24$  обеспечивают 2% точности

определения  $\lambda_{cr}$ , а сетка  $12 \times 24$  более точна по сравнению с дискретизацией, имеющей  $20 \times 20$  узлов. При этом уменьшение числа узлов сокращает затраты времени на вычисления.

На рис. 14а построены графики зависимости вычисленных критических значений числа Рэлея от количества узлов по азимутальной координате для трёх различных сеток по радиальной координате (16, 24, 36). Аналогично на рис. 14б при фиксированном числе узлов по азимутальной координате (16, 24, 36) были построены графики зависимости  $\lambda_{cr}(N_r)$ . Из графиков видно, что сходимость для  $\lambda_{cr}$  наблюдается при достаточно умеренных разбиениях, причём дискретизация по азимутальной координате требует большего количества узлов.



**Рис. 14.** Графики зависимости критических значений числа Рэлея от количества узлов: а)  $\lambda_{cr}(N_\phi)$  при различных  $N_r$ ; б)  $\lambda_{cr}(N_r)$  при различных  $N_\phi$

Расчёт критических чисел Рэля проводился на последовательности сеток, для оценки точности которых применялся процесс Эйткена. Эффективный порядок  $d$  находился по формуле [52]

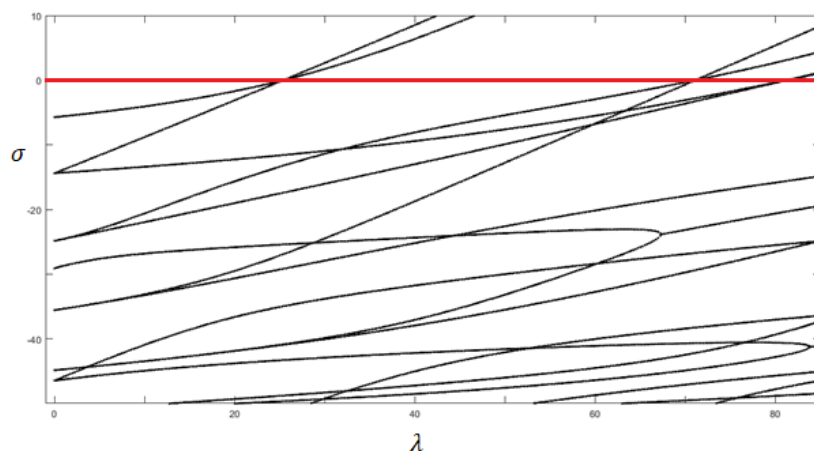
$$d = \log_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_3)}. \quad (9.02)$$

Здесь  $\lambda_j$  – результат вычисления критического значения на сетке с шагом  $h_j$ , где  $j = 1, 2, 3$ , причём  $h_1 = h$ ,  $h_2 = h/2$ ,  $h_3 = h/4$ ,  $h \equiv h_\varphi$ .

**Таблица 3.** Эффективный порядок точности  $d$

$N_r \backslash N_\varphi$	$N_\varphi$	12/24/48	16/32/64
	12	2.042	2.037
	16	2.042	2.019
	20	2.042	2.019
	24	2.042	2.037

Приведенные в табл. 3 значения вычисленных  $d$  показывают сохранение второго порядка аппроксимации для предложенной дискретизации с размещением в центре круговой области узла, в котором задаются азимутальная компонента скорости  $V$  и плотность теплового потока по радиальной координате  $q_r$ .



**Рис. 15.** Зависимость спектра устойчивости состояния механического равновесия от числа Рэля; сетка  $8 \times 12$  узлов

На рис. 15 приведены графики зависимости спектра устойчивости  $\sigma$  состояния механического равновесия (собственные значения матрицы линеаризации для нулевого равновесия) в зависимости от числа Рэлея. Видно, что спектральные линии пересекаются при  $\sigma = 0$  (красная линия). Это подтверждает двукратность критического значения числа Рэлея, отвечающего потере устойчивости нулевого равновесия. Двукратность наблюдается и для последующих пересечений, см. также критические числа из табл. 2.

**Таблица 4.** Критические значения числа Рэлея для круга, описанного и вписанного квадратов, квадрата с площадью круга

Сетка для круга $R = 1$	$\lambda_1^1$	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^1$
$8 \times 8$	27.12	72.28	104.3
$16 \times 16$	24.13	63.09	69.42
$24 \times 24$	23.58	60.83	63.51
$32 \times 32$	23.38	59.95	61.42
$40 \times 40$	23.29	59.52	60.46
<i>Квадрат,</i> $a = 2$	19.74	49.35	49.35
<i>Квадрат</i> $a = \sqrt{2}$	39.48	98.70	98.70
<i>Квадрат</i> $a = \sqrt{\pi}$	25.13	62.83	62.83

В табл. 4 представлено сопоставление критического значения числа Рэлея, отвечающего возникновению конвекции  $\lambda_1^1$  для круга и набора квадратов: вписанного, описанного и равного площади круга.

Вычисления критического числа для квадратов со стороной  $a$  производилось по следующей формуле [41]

$$\lambda_j^i = \frac{4\pi^2(i^2 + j^2)}{a^2}, \quad (9.03)$$

где  $i$  и  $j$  соответствуют порядковым номерам гармоник по декартовым координатам  $x$  и  $y$ . Видно, что значения первой пары критических чисел Рэля, полученные для квадратной области, равной площади круговой, близки к значениям для круга. Заметное отличие наблюдается для следующих четырёх значений. Аналитический расчёт для квадратов даёт четырехкратное значение  $\lambda_1^2 = \lambda_2^1$  в силу симметрии, а рассчитанные значения для круга при выборе грубой сетке (до  $24 \times 24$  узлов) отличаются.

Сравнение критических значений для круга и различных квадратов (описанного, вписанного и эквивалентной площади) проводилось на сетке  $16 \times 16$  узлов по формуле рабочей погрешности  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{|\lambda_{кр} - \lambda_{кв}|}{\lambda_{кв}} \cdot 100 \%, \quad (9.04)$$

где  $\lambda_{кр}$ ,  $\lambda_{кв}$  – критические значения числа Рэля из табл. 4, вычисленные для круга и квадратов соответственно. Видно, что критические значения близки к значениям, полученные для квадрата, площадь которого равна площади круга  $\varepsilon = 3 \%$ . Для круга и описанного около него квадрата из (9.04) получено  $\varepsilon = 19 \%$ , для круга и вписанного в него квадрата  $\varepsilon = 62 \%$ .

Далее проводились численные эксперименты с неравномерным распределением узлов по радиальной и азимутальной координатам для определения порога возникновения конвективных движений. Эксперименты проводились для разных сеток и вариантов неравномерности сгущения узлов.

В табл. 56 приведены результаты расчёта спектральной задачи (9.01). Дано сравнение критических чисел Рэля  $\lambda_{cr}^m$  ( $m = \overline{1,6}$ ) для равномерных сеток и сеток с неравномерным разбиением по радиальной координате  $N_r$  при фиксированном числе узлов по азимутальной координате  $N_\varphi$ .

Узлы неравномерной сетки рассчитывались по формуле

$$r_j = r_{j-1} + \gamma_1^{j-1} h_r, \quad j = \overline{2, N_r}, \quad r_1 = \frac{h_r}{2}, \quad (9.05)$$

где  $\gamma_1 > 0$  – коэффициент сгущения по  $r$ , а  $h_r$  определялось следующим образом

$$h_r = \frac{R}{\left(\frac{1}{2} + \frac{(1 - \gamma_1^{N_r - 1})\gamma_1}{1 - \gamma_1}\right)}. \quad (9.06)$$

**Таблица 5.** Критические значения числа Рэлея при  $\gamma_1 < 1$

$N_r \times N_\varphi$	$\gamma_1$	$\lambda_{cr}^m$		
		$\lambda_{cr}^{1,2}$	$\lambda_{cr}^{3,4}$	$\lambda_{cr}^{5,6}$
12 × 24	1.00	23.79	62.91	64.02
	0.95	23.88	62.92	63.99
	0.90	24.01	63.22	63.96

**Таблица 6.** Критические значения числа Рэлея при  $\gamma > 1$

$N_r \times N_\varphi$	$\gamma_1$	$\lambda_{cr}^m$		
		$\lambda_{cr}^{1,2}$	$\lambda_{cr}^{3,4}$	$\lambda_{cr}^{5,6}$
24 × 24	1.00	23.58	60.86	63.64
12 × 24	1.10	23.69	63.78	64.16
	1.15	23.68	64.31	64.71
	1.20	23.69	64.53	65.99
24 × 24	1.10	23.54	61.61	63.72
	1.15	23.54	62.57	63.85
	1.20	23.56	63.97	64.08
18 × 32	1.10	23.41	61.46	61.71
	1.15	23.40	61.84	62.36
	1.20	23.42	62.06	63.65

При  $0 < \gamma_1 < 1$  (сгущение узлов к границе) получающиеся критические значения  $\lambda_{cr}^{1,2}$  больше рассчитанных на равномерной сетке с тем же количеством узлов, которые, в свою очередь, превышают найденные критические значения по формуле (4.29).

При  $\gamma_1 > 1$  (сгущение узлов к центру) имеются оптимальные значения коэффициента  $\gamma$  (выделено цветом), когда при меньшем числе узлов по радиальной координате получаются результаты, сравнимые с критическими значениями числа Рэлея, рассчитанными на равномерной сетке. В частности, неравномерная сетка размера  $12 \times 24$  при  $\gamma_1 \approx 1.15$  позволяет добиться величин, найденных для равномерной сетки  $24 \times 24$  узлов.

Отметим, что сгущение сетки позволяет сблизить значения второй и третьей пары критических чисел Рэлея, но добиться полного их совпадения не удаётся. Были проведены также эксперименты с неравномерным распределением узлов по азимутальной координате ( $\gamma_2 > 0$ ), но улучшения результатов выявить не удалось. Использовалась следующая сетка

$$\varphi_i = (i - 1)\gamma_2^{i-1}h_\varphi, \quad i = \overline{1, N_\varphi + 1}, \quad (9.07)$$

где

$$h_\varphi = \frac{\pi(1 - \gamma_2)}{(1 + \gamma_2)(1 - \gamma_2^{N_\varphi})}. \quad (9.08)$$

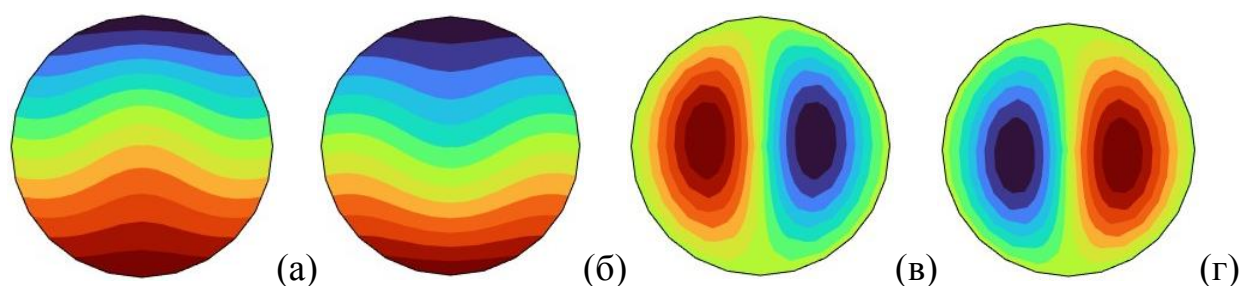
Проведённые эксперименты показали, что можно повысить точность расчётов критических чисел, задавая по радиальной координате сгущение к центру круговой области ( $\gamma_2 > 1$ ) и используя равномерную сетку по азимутальной координате. При этом получается сближение пар критических значений, начиная со второй, но в расчётах не удаётся достичь четырёхкратности критических значений, что является аналитическим результатом для исходной задачи. Проведённые расчёты показали, что сокращение времени вычисления при использовании неравномерной сетки мало, и далее для моделирования конвективных движений применялись равномерные сетки по обеим пространственным координатам.

## § 10. Конвективные режимы в горизонтальном цилиндре при боковом неоднородном нагреве

В случае линейного подогрева по высоте задача для горизонтального бесконечно длинного цилиндра является косимметричной. При увеличении числа Рэлея  $\lambda$  и превышении критического значения  $\lambda_{cr}$  от потерявшего устойчивость механического равновесия ответвляется семейство стационарных конвективных режимов [31]. Получающиеся решения зависят от задания начальных данных.

На рис. 16 представлены результаты расчёта на сетке  $12 \times 24$  для двух стационарных конвективных движений при  $\lambda > \lambda_{cr}$ , характеризующихся симметричным полем температуры (линейный профиль плюс девиация). Эти режимы получены в результате установления из следующих начальных данных:

$$\theta^0(r, \varphi) = \pm 0.1 \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (10.01)$$

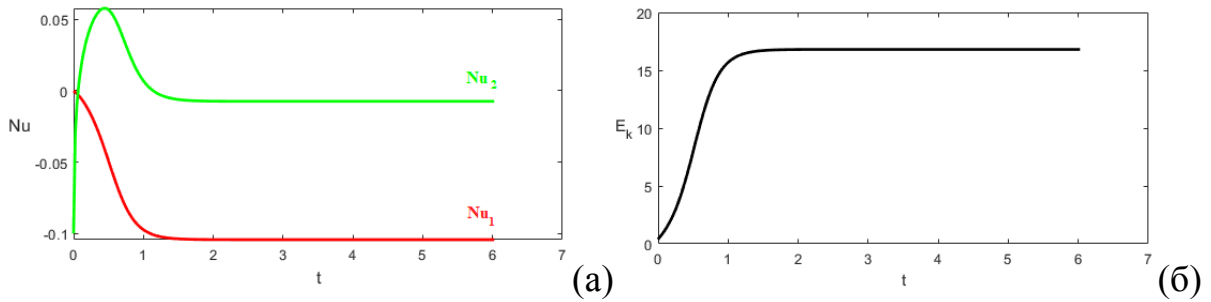


**Рис. 16.** Температура (а), (б) и функция тока (в), (г);  $\lambda = 25 > \lambda_{cr}$

На рис. 16а представлено распределение температуры для движения с восходящим потоком в центральной части, а на рис. 15в дана соответствующая функция тока с двумя конвективными валами. Правый вал вращается по часовой стрелке, а левый – против. Режим с противоположной структурой течения дан на рис. 16б16г.

На рис. 17 построены графики зависимости чисел Нуссельта  $Nu_1$ ,  $Nu_2$  и кинетической энергии  $E_k$  от времени  $t$ . Расчёт конвективных движений проводился

при числе Рэлея  $\lambda = 25$  с начальными данными, соответствующими симметричному полю температуры стационарному режиму, приведённому на рис. 16а-16в.



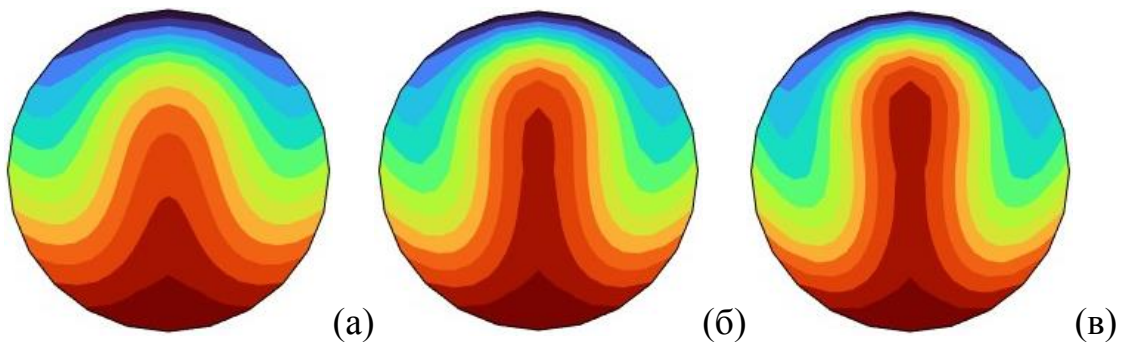
**Рис. 17.** Графики зависимости от времени чисел Нуссельта (а) и кинетической энергии (б) для  $\lambda = 25$

Видно, что установление нового режима движений происходит достаточно быстро, и в результате формируется стационарный конвективный режим. Дискретные варианты вычисления кинетической энергии и чисел Нуссельта по исходным формулам (8.01)(8.02) имеют вид соответственно:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_r} \left[ \frac{u^2 + v^2}{2} r h_r h_\varphi \right]_j^i, \quad u_j^i = \frac{\psi_j^{i+1} - \psi_j^{i-1}}{2h_\varphi r_j}, \quad v_j^i = -\frac{\psi_{j+1}^i - \psi_{j-1}^i}{2h_r},$$

$$Nu_1 = \frac{1}{2R} \left( \sum_{j=1}^{N_r-1} \frac{h_r}{2r_j h_\varphi} [\theta_j^{i^*} - \theta_j^{i^*+2} + \theta_j^{3i^*+2} - \theta_j^{3i^*}] + [\theta_1^1 - \theta_j^{2i^*+1}] \right),$$

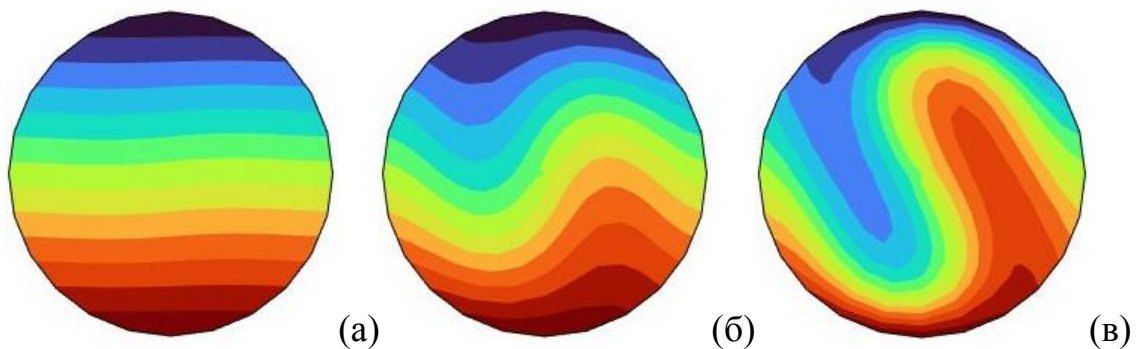
$$Nu_2 = -\frac{h_\varphi}{2\pi h_r} \sum_{i=1}^{N_\varphi} \theta_{N_r-1}^i, \quad i^* = N_\varphi/4.$$



**Рис. 18.** Температура при росте подогрева:  $\lambda = 30$  (а),  $\lambda = 35$  (б),  $\lambda = 40$  (в)

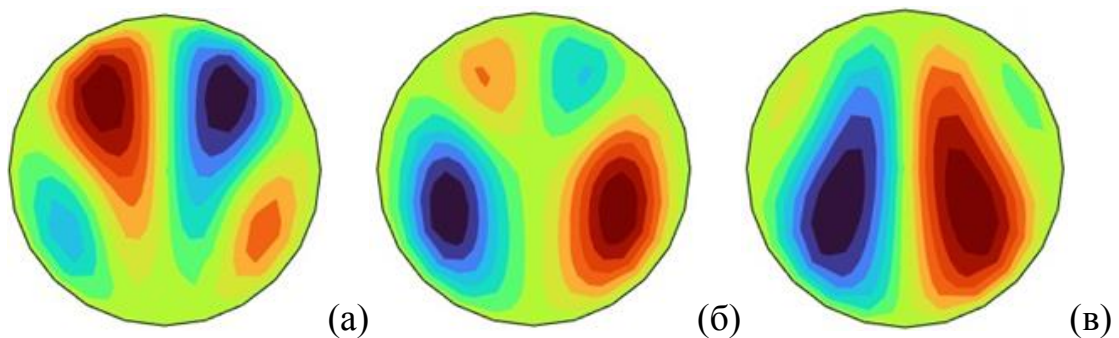
С увеличением подогрева (рост числа Рэлея) происходит трансформация поля температуры и течения. На рис. 18 даны распределения температуры конвективного режима с восходящим потоком тепла в центральной части при разных  $\lambda$ . Видно, что с ростом числа Рэлея происходит горизонтальное сужение теплового потока и его распространение по вертикали.

В расчётах реализуется мультистабильность конвективных режимов [8]. Например, на рис. 19 приведено развитие с ростом числа Рэлея стационарного режима с несимметричным по высоте распределением температуры.



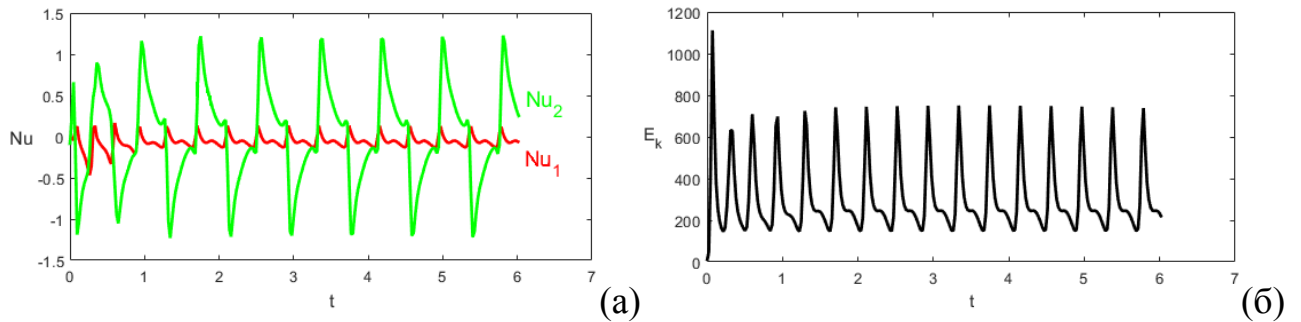
**Рис. 19.** Температура для несимметричного стационарного конвективного режима при  $\lambda = 30$  (а),  $\lambda = 35$  (б),  $\lambda = 40$  (в)

При достаточно больших числах Рэлея стационарные конвективные режимы теряют устойчивость и возникают колебательные движения. На рис. 20-21 приведены результаты расчёта для  $\lambda = 100$



**Рис. 20.** Колебательный режим при  $\lambda = 100$ . Функции тока в моменты времени  $t = 0.2$  (а),  $t = 0.3$  (б),  $t = 0.4$  (в)

На рис. 20 представлены функции тока для трёх моментов времени на этапе установления периодического нестационарного движения. На рис. 21а построены графики зависимости чисел Нуссельта  $Nu_1$  и  $Nu_2$  от времени  $t$ , а на рис. 21б изображён график зависимости от времени  $t$  кинетической энергии  $E_k$ . Видно, что структура течения с четырьмя валами динамически меняется, но режим остаётся симметричным относительно вертикального сечения круговой области.



**Рис. 21.** Графики зависимости от времени чисел Нуссельта (а) и кинетической энергии (б) для  $\lambda = 100$

Далее анализируется случай неоднородного нагрева круговой области по границе. На основе модели Дарси-Буссинеска рассматриваются уравнения относительно температуры  $\theta$  и функции тока  $\psi$ . На границе задаются условия непроницаемости, а также температурный профиль соответственно:

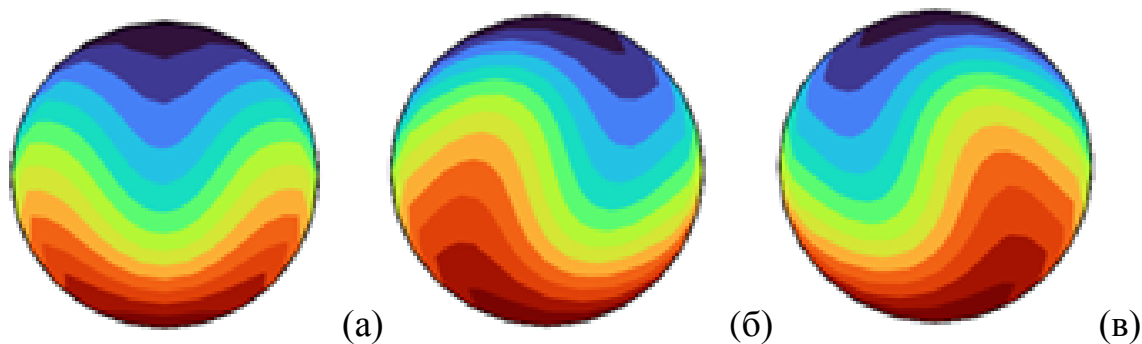
$$\psi(R, \varphi, t) = 0, \quad (10.02)$$

$$\theta(R, \varphi, t) = T_b(\varphi). \quad (10.03)$$

Задача (2.31)(2.34) с учётом краевых условий (10.02)(10.03) решалась при заданной на границе температуре:

$$T_b(\varphi) = \begin{cases} a_l \sin(b\varphi), & \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \\ a_r \sin(b\varphi), & 0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (10.04)$$

где  $a_l$  и  $a_r$  – амплитуды возмущения,  $b$  – мода, индексы  $l$  и  $r$  обозначают левую и правую сторону круговой области.



**Рис. 22.** Конвективные режимы для различных двухсторонних возмущений:

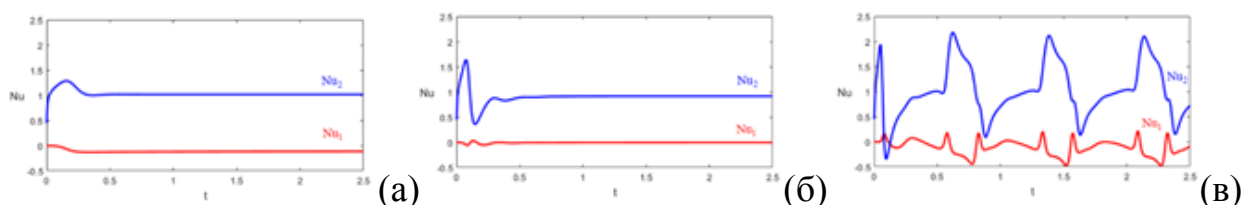
а)  $a_l = -a_r = 0.05$ , б)  $a_l = a_r = 0.05$ , в)  $a_l = a_r = -0.05$ ;  $\lambda = 24$ ,  $b = 1$

На рис. 22 приведены распределения температуры для конвективных режимов с различными двусторонними возмущениями на границе и заданной модой  $b = 1$ . Помимо симметричных (рис. 22а) возможны асимметричные распределения температуры, см. рис. 22б, 22в.

**Таблица 7.** Уменьшение  $\lambda_{cr}$  с ростом возмущения  $a_r = -a_l$

$a_r$	0.00	0.01	0.05	0.10
$\lambda_{cr}$	23.8	21.4	20.2	18.2

Отклонение температуры от линейного профиля приводит к уменьшению критического значения числа Рэлея. Из табл. 7 видно, что с увеличением величины возмущения при  $a_l = -a_r$  происходит уменьшение порогового значения  $\lambda_{cr}$ .

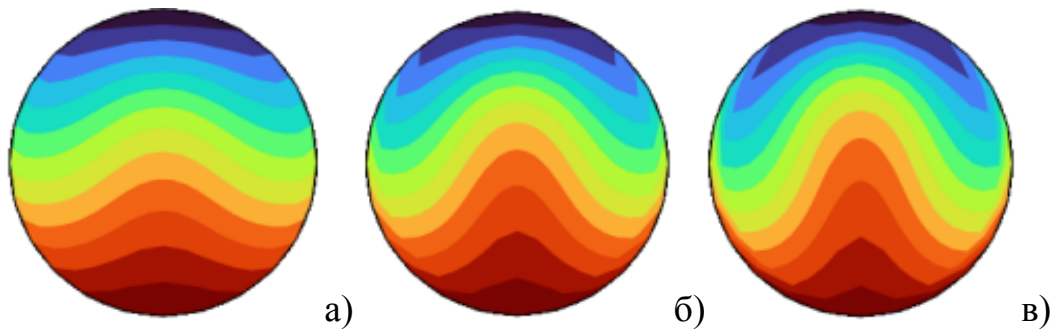


**Рис. 23.** Графики изменения чисел Нуссельта во времени для различных чисел

Рэлея: а)  $\lambda = 40$ , б)  $\lambda = 70$ , в)  $\lambda = 100$ ;  $a_l = -a_r = 0.05$ ,  $b = 1$

Увеличение числа Рэлея приводит к более сложной конвективной динамике, см. рис. 23. Графики чисел Нуссельта демонстрируют быстрый переход к стационарному режиму при  $\lambda = 40$ , затухание колебаний при  $\lambda = 70$ , формирование колебательного режима при  $\lambda = 100$ .

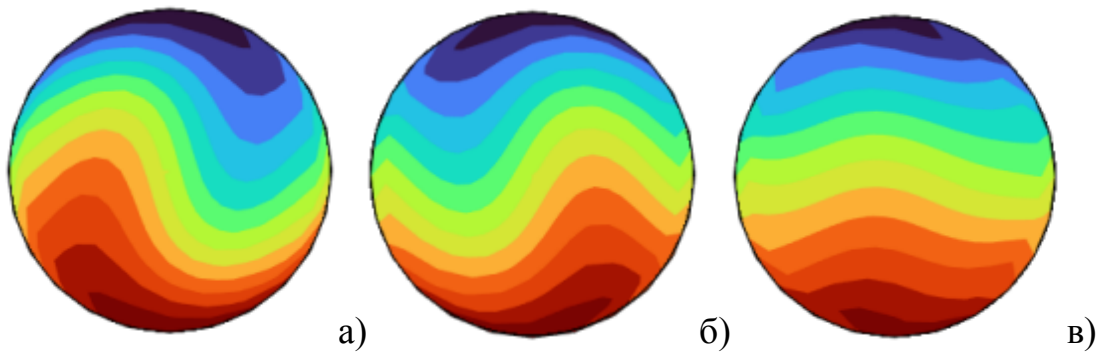
Зафиксировав число  $b = 1$ , проведём численные эксперименты с различными величинами нагрева на боковых границах при  $a_l = -a_r$ . С увеличением  $a_r$  восходящий поток в центральной области становится интенсивнее, см. рис. 24.



**Рис. 24.** Симметричный режим с двухсторонним возмущением:

а)  $a_l = -a_r = 0.01$ , б)  $a_l = -a_r = 0.05$ , в)  $a_l = -a_r = 0.1$ ;  $\lambda = 24$ ,  $b = 1$

Симметричные распределения температуры получаются, когда возмущения слева и справа имеют разный знак ( $a_l = -a_r$ ), как показано на рис. 22а-24а. Эти распределения аналогичны тем, что показаны на рис. 16а-16б, которые соответствуют нулевому возмущению на границе.



**Рис. 25.** Конвективный режим при различных модах:

а)  $b = 1$ , б)  $b = 3$ , в)  $b = 5$ ;  $a_l = a_r = 0.05$

Рис. 25 иллюстрирует режимы с двусторонним возмущением на границе при фиксированной величине возмущения  $a_l$  и для разных мод  $b$ . При  $b = 1$  и возмущении  $a_l = a_r$  нагрев происходит с левой стороны круга, а охлаждение – с правой. В случае  $b > 1$  температура несколько раз меняет знак при  $y \in [-R, R]$ . При больших  $b$  это приводит к практически нулевому отклонению температуры, что соответствует линейному распределению температуры по высоте.

## § 11. Спектральные задачи о возникновении конвекции в вертикальном цилиндре

Для сплошного вертикального цилиндра соответствующие начально-краевые задачи фильтрационной конвекции не являются косимметричными. Поэтому для определения критических значений числа Рэлея требуется численное решение соответствующих спектральных задач. В главе 2 описаны разностные схемы аппроксимации уравнений фильтрационной конвекции и программный комплекс «CONV\_REGIMES», позволяющий рассчитывать конвективные режимы и находить пороговые значения, при которых возникает конвекция

Рассмотрим спектральные задачи по определению порога возникновения осесимметричных конвективных движений на основе двух вариантов введения функции тока. Из (7.24)(7.25) при нулевых  $\dot{\Theta}$  и  $F$  получаются две задачи на собственные числа – критические значения параметра Рэлея.

При введении функции тока на основе соотношений (3.20) получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Psi = -\lambda B_1(A - 2C_1)^{-1}\Theta, \quad (11.01)$$

$$A\Theta = \lambda C_1 B_1(A - 2C_1)^{-1}\Theta, \quad (11.02)$$

а на основе формулы (3.24) анализируется система

$$\Psi = -\lambda B_2(A - C_1)^{-1}\Theta, \quad (11.03)$$

$$A\Theta = \lambda D B_2(A - C_2)^{-1}\Theta. \quad (11.04)$$

В табл. 8-10 и на рис. 2728 представлены результаты вычисления критических значений числа Рэлея и соответствующих собственных функций для второго варианта задания функции тока (без сингулярности). Решалась спектральная задача (11.03)(11.04) для узкого ( $H > R$ ) и широкого ( $H < R$ ) сплошных цилиндров. В табл. 810 приведены первые пять критических значений числа Рэлея  $\lambda_{cr}^m$  ( $m = \overline{1,5}$ ) для разных сеток. По каждому столбцу таблицы наблюдается численная сходимость критических чисел с увеличением числа узлов по радиальной и осевой координатам.

**Таблица 8.** Критические значения числа Рэлея  $\lambda_{cr}^m$ ,  $H = 2$ ,  $R = 1$

Сетка $N_r \times N_z$	Критические значения числа Рэлея $\lambda_{cr}^m$				
	$\lambda_{cr}^1$	$\lambda_{cr}^2$	$\lambda_{cr}^3$	$\lambda_{cr}^4$	$\lambda_{cr}^5$
$8 \times 12$	23.27	50.98	65.22	94.68	102.1
$12 \times 18$	22.80	50.04	60.08	86.47	100.4
$16 \times 24$	22.65	49.73	58.54	83.99	99.71
$24 \times 36$	22.55	49.52	57.51	82.34	99.25
$32 \times 48$	22.52	49.45	57.17	81.79	99.09

**Таблица 9.** Сходимость вычисленных на различных сетках значений  $\lambda_{cr}^m$  для широкого цилиндра при  $H = 1$ ,  $R = 2$

Сетка $N_r \times N_z$	Критические значения числа Рэлея ( $\lambda_{cr}^m$ )				
	$\lambda_{cr}^1$	$\lambda_{cr}^2$	$\lambda_{cr}^3$	$\lambda_{cr}^4$	$\lambda_{cr}^5$
$12 \times 8$	44.09	54.91	72.76	103.45	153.5
$18 \times 12$	42.89	51.86	66.24	88.19	119.4
$24 \times 16$	42.47	50.83	64.21	83.79	110.5
$36 \times 24$	42.18	50.10	62.83	80.90	104.9
$48 \times 32$	42.08	49.85	62.37	79.94	103.1

**Таблица 10.** Критические числа для разных областей

Размер области $R \times H$	Размер сетки $N_r \times N_z$	Критические значения числа Рэлея ( $\lambda_{cr}^m$ )				
		$\lambda_{cr}^1$	$\lambda_{cr}^2$	$\lambda_{cr}^3$	$\lambda_{cr}^4$	$\lambda_{cr}^5$
$0.5 \times 1$	$6 \times 12$	96.25	214.0	298.4	440.2	443.2
$1 \times 1$	$12 \times 12$	50.22	86.64	153.9	174.6	217.7
$2 \times 1$	$24 \times 12$	42.35	50.69	64.07	83.65	110.4
$3 \times 1$	$36 \times 12$	40.93	44.59	50.39	58.99	70.24
$4 \times 1$	$48 \times 12$	40.44	42.52	45.75	50.56	56.63

В табл. 10 представлены результаты расчёта критических значений числа Рэлея для нескольких областей с фиксированной высотой  $H = 1$ . Менялось значение радиуса и соответственно число узлов сетки по радиальной координате.

На рис. 26 представлены графики зависимости критических значений числа Рэлея от величины радиуса при фиксированной высоте цилиндра. Видно, что с ростом  $R$  наблюдается сближение критических значений  $\lambda_{cr}$ .

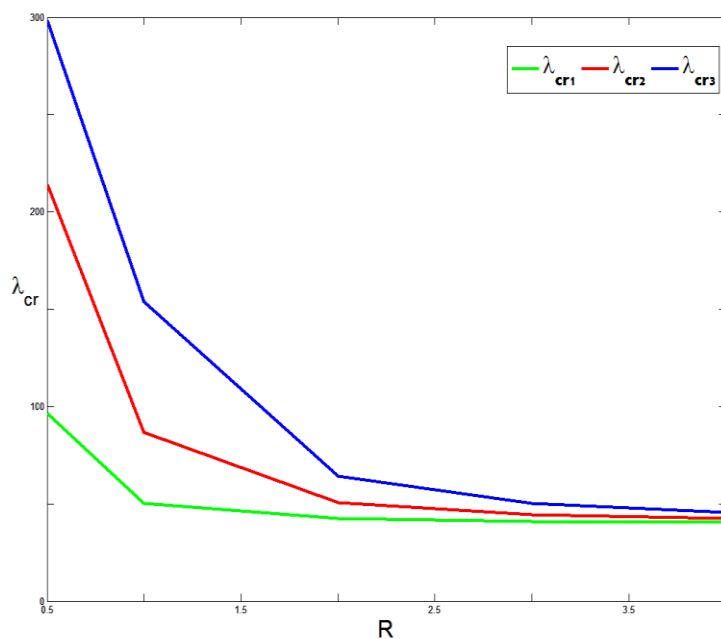


Рис. 26. Зависимость  $\lambda_{cr}$  от  $R$ ,  $H = 1$

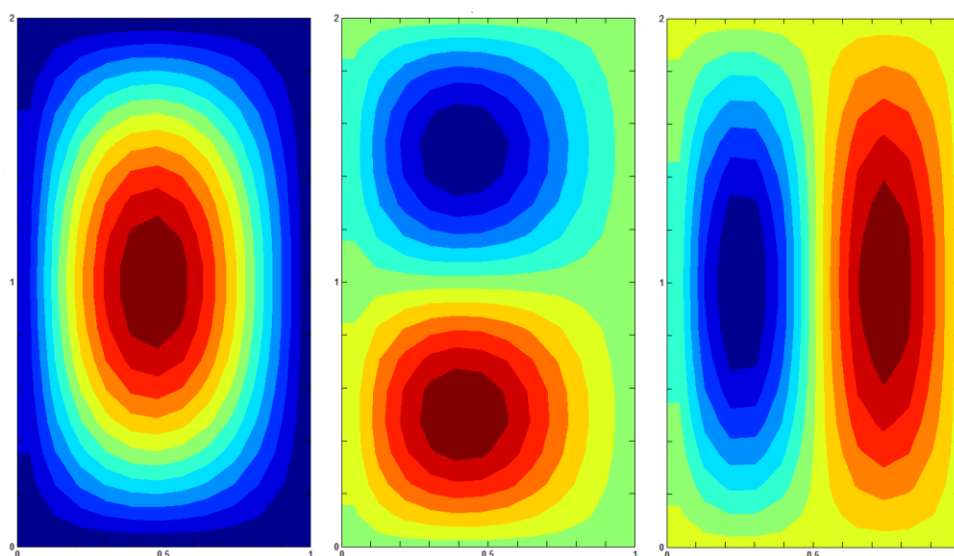
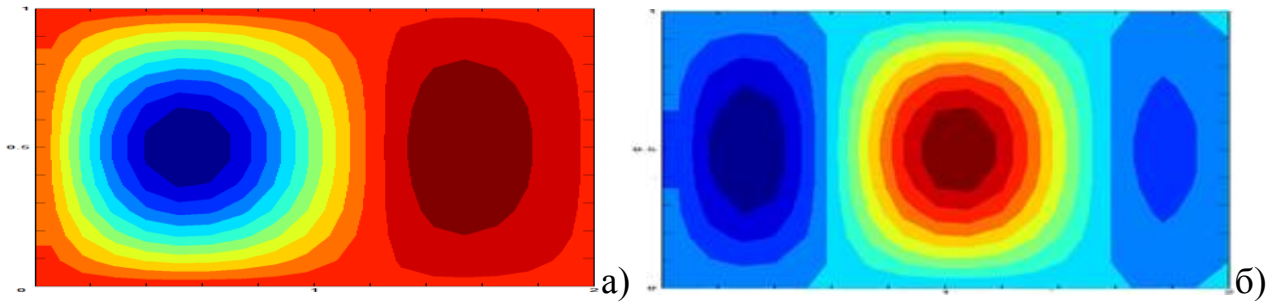


Рис. 27. Собственные функции ( $\psi$ ), отвечающие собственным числам:

а)  $\lambda_{cr}^1 = 22.80$ , б)  $\lambda_{cr}^2 = 50.04$ , в)  $\lambda_{cr}^3 = 60.08$



**Рис. 28.** Собственные функции ( $\psi$ ), отвечающие собственным числам:

а)  $\lambda_{cr}^1 = 42.89$ , б)  $\lambda_{cr}^2 = 51.86$

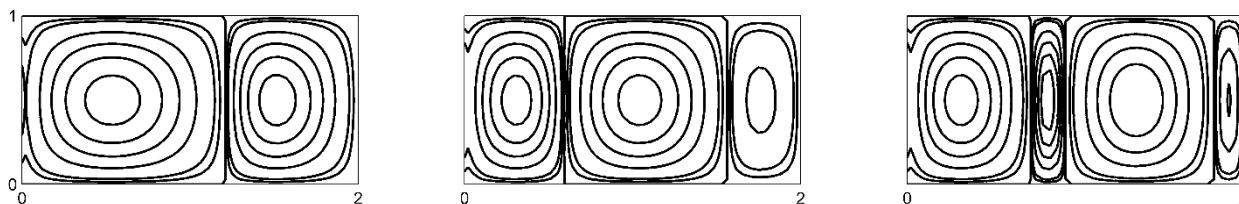
На рис. 2728 приведены результаты расчётов собственных функций ряда критических значений  $\lambda_{cr}^m$  для узкого и широкого цилиндров. На рис. 27 представлены распределения функции тока для узкого цилиндра с  $R = 1$ ,  $H = 2$  на сетке  $24 \times 16$ . На рис. 28 даны соответствующие функции тока  $\psi$  для широкого цилиндра с  $R = 2$  и  $H = 1$  на сетке  $16 \times 24$ . Видно, что каждому  $\lambda_{cr}$  соответствует определённое количество валов.

**Таблица 11.** Вычисление критических значений числа Рэлея  $\lambda_{cr}^m$  ( $m = \overline{1,3}$ ) на разных сетках;  $R = 2$ ,  $H = 1$

$N_r \times N_z$	$\lambda_{cr}^1$ (I / II)	$\lambda_{cr}^2$ (I / II)	$\lambda_{cr}^3$ (I / II)
$12 \times 8$	44.09 / 45.73	54.91 / 53.88	72.76 / 80.35
$18 \times 12$	42.89 / 43.57	51.86 / 51.44	66.24 / 68.83
$24 \times 16$	42.47 / 42.85	50.83 / 50.59	64.21 / 65.55
$36 \times 24$	42.18 / 42.35	50.10 / 50.00	62.83 / 63.40
$48 \times 32$	42.08 / 42.17	49.85 / 49.79	62.37 / 62.68

В табл. 11 представлены результаты вычисления порога возникновения конвекции для двух вариантов введения функции тока (I / II). Расчёты проведены на различных сетках. С увеличением числа узлов наблюдается численная сходимость для обоих вариантов, при этом критические значения мало отличаются друг от друга.

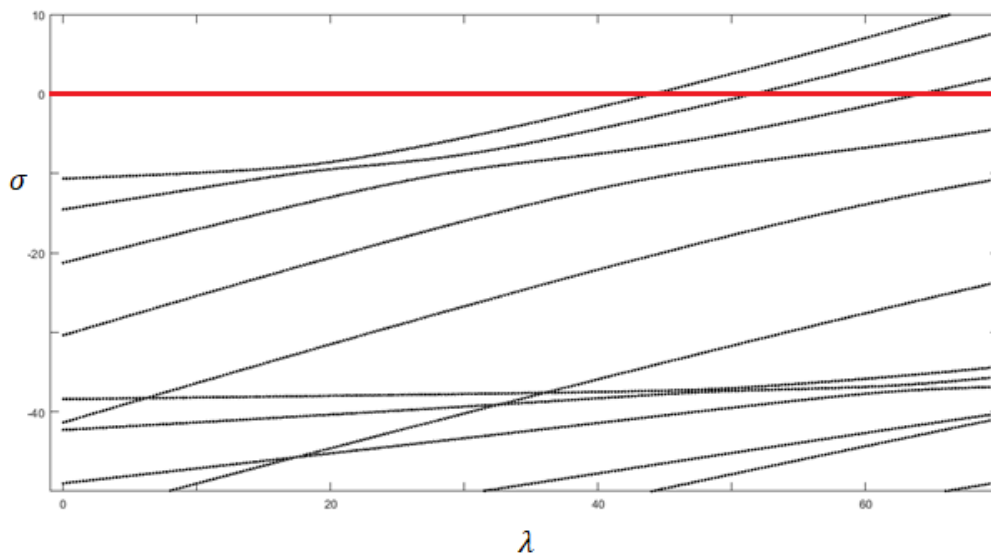
Для сравнения с рис. 27 на рис. 29 приведены результаты вычисления собственных функций, вычисленные для спектральной задачи (11.01)-(11.02).



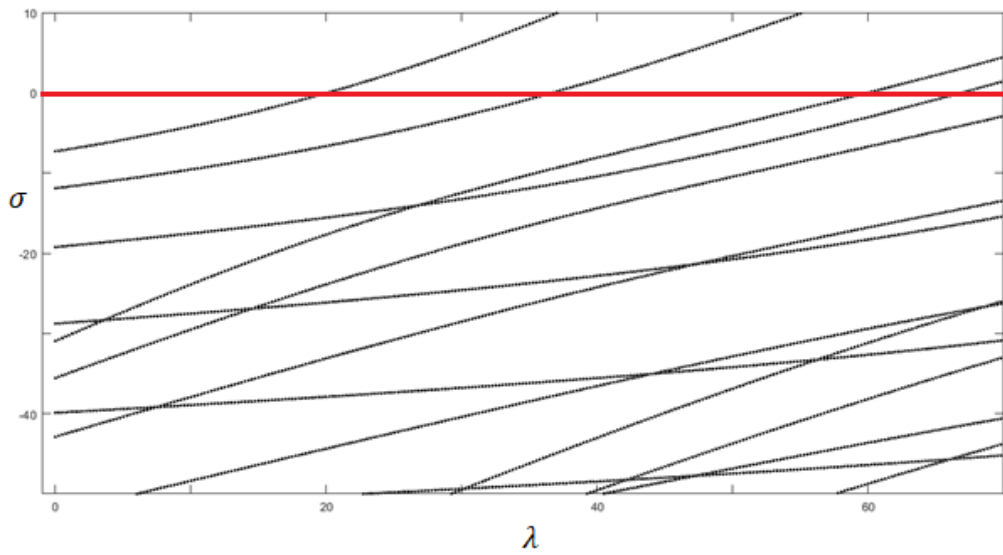
**Рис. 29.** Собственные функции ( $\psi$ ):

а)  $\lambda_{cr}^1 = 42.47$ , б)  $\lambda_{cr}^2 = 50.83$ , в)  $\lambda_{cr}^3 = 64.21$

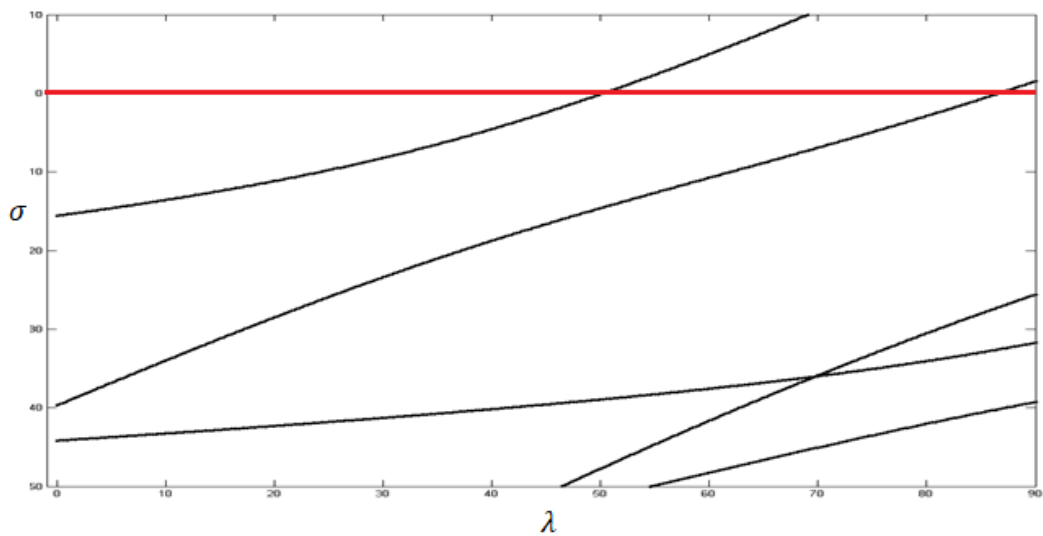
На рис. 3032 приведены графики зависимости спектра устойчивости  $\sigma$  состояния механического равновесия (собственные значения матрицы линеаризации для нулевого равновесия) в зависимости от числа Рэлея для различных областей. Видно, что для осесимметричной задачи при разных отношениях высоты и радиуса вертикального цилиндра критические числа не являются кратными. Это подтверждает отсутствие в данной задаче косимметрии.



**Рис. 30.** Зависимость спектральных значений от чисел Рэлея для короткого цилиндра  $R = 2.5$ ,  $H = 1$ , сетка  $13 \times 9$



**Рис. 31.** Зависимость спектральных значений от чисел Рэлея для длинного цилиндра  $R = 1$ ,  $H = 2.5$ , сетка  $9 \times 13$



**Рис. 32.** Зависимость спектральных значений от чисел Рэлея для вертикального цилиндра  $R = 1$ ,  $H = 1$ , сетка  $12 \times 12$

## § 12. Моделирование конвективных движений для осесимметричной задачи в вертикальном цилиндре

Моделирование конвективных режимов осуществляется на основе решения уравнений относительно температуры и функции тока методом прямых при помощи программного комплекса «CONV\_REGIMES». Рассмотрены результаты для двух вариантов введения функции тока, см. формулы (3.17) и (3.21).

Для второго варианта введения функции тока осесимметричная задача конвекции в вертикальном цилиндре описывается системой уравнений:

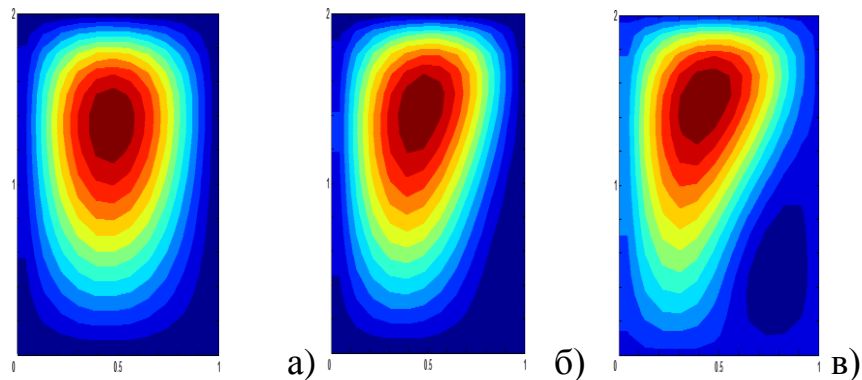
$$\Delta\psi = \frac{\psi}{r^2} - \lambda \frac{\partial\theta}{\partial r}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \left[ \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right],$$

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=R} = 0, \quad \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta|_{r=R} = 0, \quad \theta|_{z=0} = \theta|_{z=H} = 0.$$

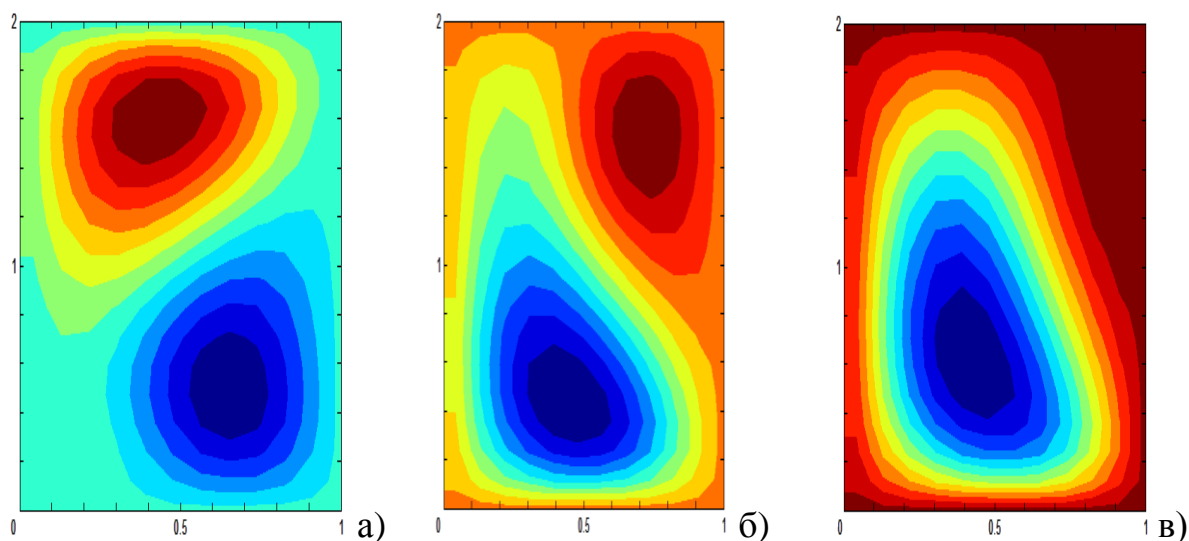
Ниже представлены расчёты конвективных режимов на основе численной схемы параграфа 6. Для моделирования конвективных движений далее используется сетка  $24 \times 16$  узлов. Сравнения с расчётами на более детальной сетке не выявили существенных отличий в моделировании конвекции.



**Рис. 33.** Изменение стационарного конвективного режима с ростом числа Рейля: а)  $\lambda = 30$ , б)  $\lambda = 50$ , в)  $\lambda = 65$ , сетка  $12 \times 18$ ,  $R = 1$ ,  $H = 2$

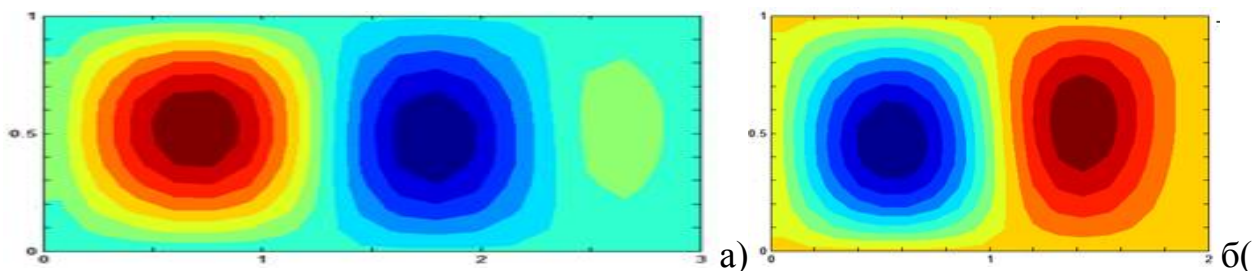
При превышении порогового значения  $\lambda_{cr}^1 = 22.80$  наступает конвекция и формируются стационарные режимы, см. рис. 33, где для половины вертикального сечения цилиндра показано развитие конвективного режима с ростом числа Рэлея.

При достаточно больших числах Рэлея возникают нестационарные конвективные режимы, см. рис. 34. Видно, что структура течения жидкости меняется от режима одного вала до двухвалковой.



**Рис. 34.** Колебательный режим при  $\lambda = 70$  а)  $t = 5$ , б)  $t = 10$ , в)  $t = 15$

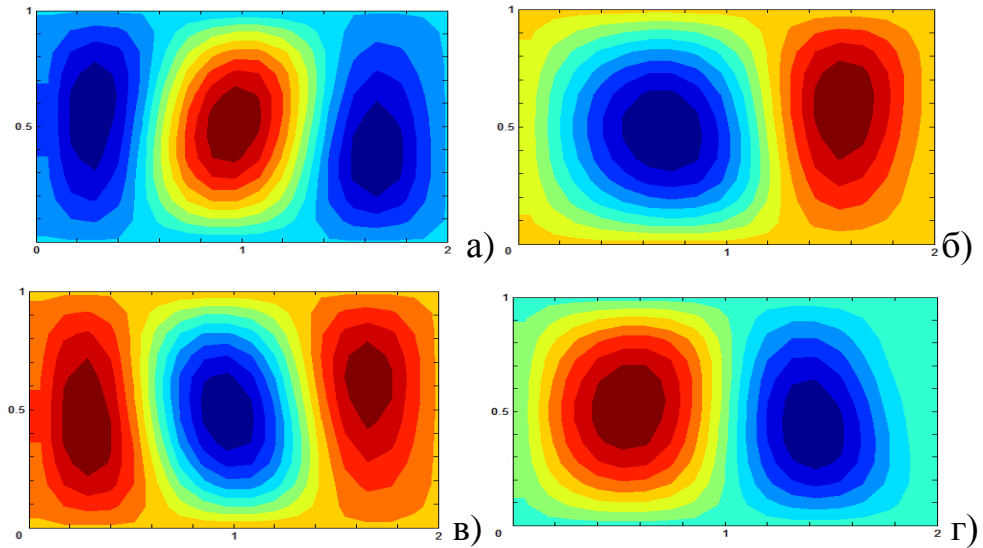
Для случая широкого цилиндра на рис. 35 представлены конвективные режимы (линии тока) для двух областей с фиксированной высотой, но разными радиусами.



**Рис. 35.** Конвективные режимы для линий тока сетка  $12 \times 18$ :

а)  $R = 3$ ,  $H = 1$ ,  $\lambda = 50$ , б)  $R = 2$ ,  $H = 1$ ,  $\lambda = 60$

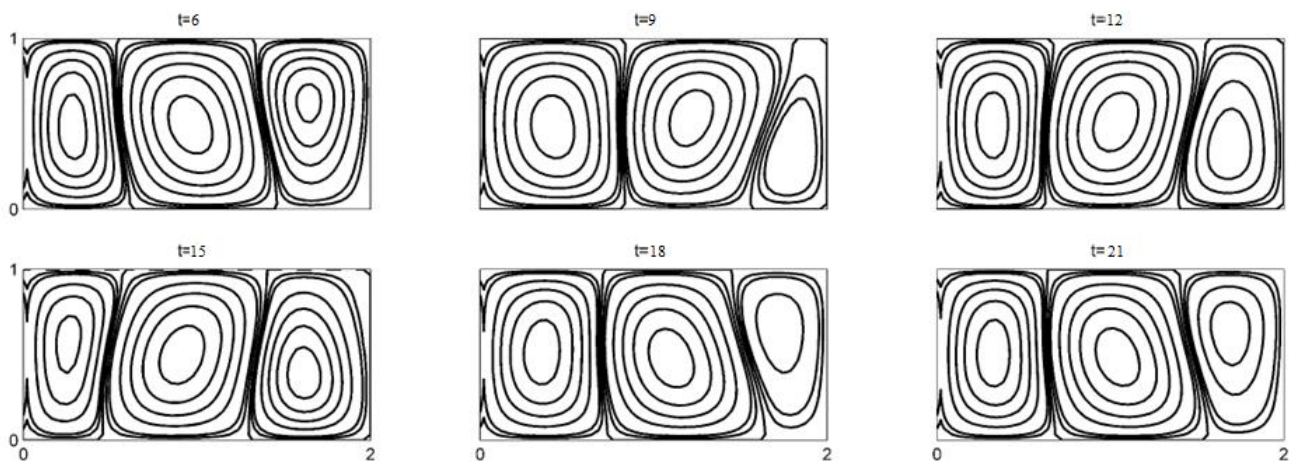
На рис. 36 представлен колебательный конвективный режим для широкого цилиндра ( $R = 2, H = 1$ ), вычисленный при  $\lambda = 80$ . Видно, что движение жидкости основано на чередовании структуры из двух валов в структуру с тремя валами и обратно.



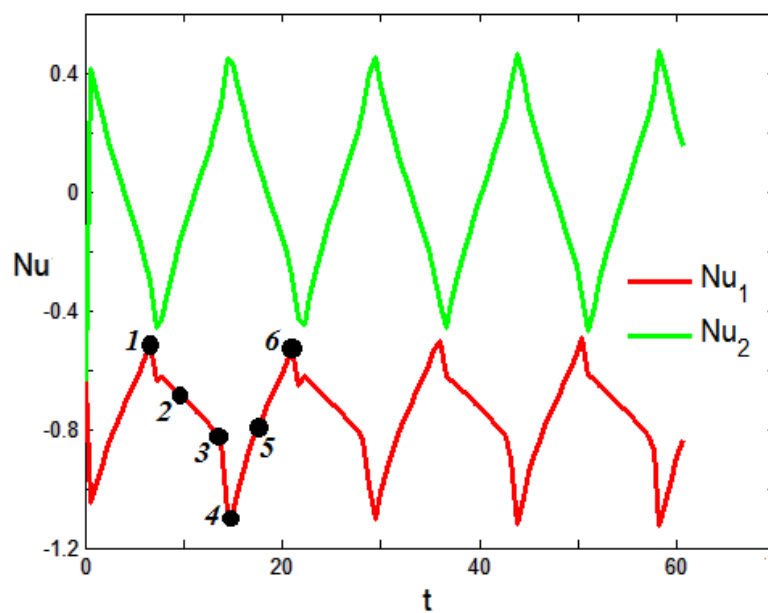
**Рис. 36.** Колебательный режим  $R = 2, H = 1$ :

а)  $t = 5$ , б)  $t = 10$ , в)  $t = 15$ , г)  $t = 20$

Аналогичные результаты получаются для первого варианта введения функции тока. Например, для цилиндра  $R = 2, H = 1$  колебательные режимы возникают при  $\lambda \geq 80$ . На рис. 38 отмечены точки, для которых на рис. 37 даны соответствующие этим моментам времени линии тока.



**Рис. 37.** Колебательный режим при  $\lambda = 90$



**Рис. 38.** Изменение чисел Нуссельта от времени

Из рис. 37 видно, что режим напоминает комбинации собственных функций, отвечающих первым двум критическим значениям числа Рэлея.

### **Выводы по ГЛАВЕ 3**

В главе 3 проанализировано возникновение конвекции в горизонтальном и вертикальном цилиндрах. Проведены расчёты критических значений числа Рэлея, представлены соответствующие им собственные функции. Численно исследованы ответвляющиеся от механического равновесия конвективные движения.

На основе модели Дарси-Буссинеска исследована спектральная задача для вычисления критических значений числа Рэлея на неравномерной сетке. Рассмотрен случай неоднородного нагрева круговой области по границе.

Приведены результаты исследования осесимметричной задачи для вертикального сплошного цилиндра. Рассчитаны критические значения числа Рэлея с учётом двух вариантов введения функции тока. Найдены стационарные и колебательные конвективные режимы для узкого и широкого цилиндров.

Глава основана на результатах работ [115, 116, 117].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации проведён анализ математических моделей, описывающих термогравитационную конвекцию в пористой среде с учётом сингулярных точек (полюса и осевой линии). На основе модели Дарси и приближения Буссинеска изучаются двумерные по пространству конвективные течения теплопроводной несжимаемой жидкости при подогреве снизу. Выписаны системы уравнений в естественных переменных и сформулированы начально-краевые задачи относительно девиации температуры и функции тока.

Для исследования рассматриваемых задач фильтрационной конвекции предложены методы дискретизации на основе интегро-интерполяционного метода с использованием схемы смещённых сеток и неравномерного распределения узлов по радиальной и азимутальной координатам. Проанализировано возникновение конвекции, проведены расчёты критических значений числа Рэлея, численно исследованы ответвляющиеся от механического равновесия конвективные режимы. Для задачи конвекции в горизонтальном бесконечно длинном цилиндре установлена косимметрия системы уравнений в дифференциальной и конечно-разностной формах. Получена мультстабильность конвективных движений жидкости, насыщающей пористую среду.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

1. Развита аналитический метод анализа возникновения фильтрационной конвекции в случае горизонтального бесконечно длинного цилиндра.
2. Проведено сравнение моделей конвекции, основанных на различных вариантах введения функции тока, для осесимметричной задачи в случае пористого вертикального цилиндра.
3. Разработаны конечно-разностные схемы для задач фильтрационной конвекции в цилиндрических координатах со специальной аппроксимацией около осевой линии.

4. Реализована численная схема решения уравнений конвекции Дарси-Буссинеска для случая неравномерного распределения узлов сетки в горизонтальном пористом цилиндре.

5. Изучены стационарные и колебательные режимы фильтрационной конвекции при росте числа Рэлея и неоднородном нагреве на границе.

6. Исследована мультистабильность конвективных движений в пористой среде, заполняющей горизонтальный цилиндр.

7. Разработан программный комплекс для вычислительного эксперимента по моделированию фильтрационной конвекции в горизонтальных и вертикальных цилиндрах.

Автор выражает большую признательность д.ф.-м.н. Цибулину В.Г. за научное руководство и поддержку. Отдельную благодарность за помощь и внимание к работе заслуживают преподаватели и сотрудники Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, а также Физического факультета ЮФУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абделхафиз М.А., Цибулин В.Г. Влияние анизотропии на конвекцию теплопроводной жидкости в пористой среде и косимметрия задачи Дарси // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2017. № 1, С. 53-61.
2. Абделхафиз М.А., Цибулин В.Г. Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017. Т. 57. № 10. С. 1734-1747.
3. Ананьев П.А., Волков П.К. Естественная конвекция в вертикальном канале и цилиндре при нагреве снизу // Математическое моделирование, 2004. Т. 16, № 11. С. 89-100.
4. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
5. Баклановская В.Ф. Исследование метода сеток для двумерных уравнений типа Навье-Стокса с неотрицательной вязкостью. II // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984. Т. 24. № 12. С.1827-1841.
6. Бессонов О.А., Брайловская В.А. Пространственная модель тепловой конвекции в зазоре между горизонтальными коаксиальными цилиндрами с анизотропным пористым заполнением // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2001. № 1. С. 145-155.
7. Блинков Ю.А., Малых М.Д., Севастьянов Л.А. О дифференциальных приближениях разностных схем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2021. Т. 21. № 4. С. 472-488.
8. Брайловская В.А., Петражицкий Г.Б., Полежаев В.И. Естественная конвекция и перенос тепла в пористых прослойках между горизонтальными коаксиальными цилиндрами // Прикладная механика и техническая физика, 1978. Т. 19. Вып. 6. С. 90-96.

9. Брацун Д.А., Зюзгин А.В., Половинкин К.В., Путин Г.Ф. Об активном управлении равновесием жидкости в термосифоне // Письма в Журнал технической физики, 2008. Т. 34. № 15. С. 36-42.
10. Брацун Д.А., Любимов Д.В., Теплов В.С. Трехмерные конвективные движения в пористом цилиндре конечной длины // Гидродинамика, 1998. № 11. С. 58-77.
11. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
12. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Любимов Д.В. Об устойчивости стационарной конвективной фильтрации смеси в вертикальном пористом слое // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1980. № 1. С. 150-157.
13. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
14. Глухов А.Ф., Любимов Д.В., Путин Г.Ф. Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Доклады АН СССР, 1978. Т. 238. № 3. С. 549-551.
15. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия // Гидродинамика, 1999. Вып. 12. С. 45-61.
16. Говорухин В.Н. О воздействии внутренних источников тепла на конвективные движения в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физика, 2014. Т. 55. Вып. 2. № 234. С. 43-52.
17. Говорухин В.Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Доклады РАН, 1998. Т. 363. № 6. С. 772-774.
18. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. – М.: Мир, 1997. 208 с.
19. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. 624 с.

20. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г., Тяглов М.Ю. Мультистабильность и эффекты памяти в динамической системе с косимметричным потенциалом // Известия ВУзов. Прикладная нелинейная динамика, 2020. Т. 28. № 3. С. 259-273.
21. Гончаров М.М., Оглезнев А.А., Кондрашов А.Н. Ориентационные эффекты конвекции в полости между частично нагретыми цилиндрами различной формы // Вестник Пермского университета. Физика, 2019. № 2. С. 16-23.
22. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло и массопереноса на границе раздела // Известия Алтайского государственного университета, 2012. Вып. 1-2. № 73. С. 12-18.
23. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. 430 с.
24. Долгих Т.Ф., Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Нахождение стационарных решений задачи о конвекции Рэлея-Бенара-Кармана // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, 2015. Вып. 4. № 188. С. 44-48.
25. Загвозкин Т.Н. Адвективное вымывание локализованных конвективных структур в пористой среде // Вычислительная механика сплошных сред, 2017. Т. 10. № 4. С. 399-405.
26. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. 512 с.
27. Кантур О.Ю., Цибулин В.Г. Спектрально-разностный метод расчета конвективных движений жидкости в пористой среде и сохранение косимметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002. Т. 42. № 6. С. 913-923.
28. Клименко Л.С., Кольцова И.А. Уточнение модели концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси и слабой закупорки // Вестник Пермского университета. Физика, 2023. № 4. С. 35-44.
29. Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Образование конвективных валов на фоне продольного сквозного потока в активной неоднородной пористой среде со

слабой закупоркой // Вычислительная механика сплошных сред, 2024. Т. 17. № 1. С. 98-110.

30. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. – М.: Физматлит, 1963. 584 с.
31. Куракин Л.Г., Юдович В.И. О бифуркациях равновесий при разрушении ко-симметрии динамической системы // Сибирский математический журнал, 2004. Т. 45. № 2. С. 356-374.
32. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. 736 с.
33. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2003. 840 с.
34. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
35. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физика, 1975. Т. 16. Вып. 2. С. 131-137.
36. Моисеенко Б.Д., Фрязинов И.В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в переменных Эйлера // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1981. Т. 21. № 5. С. 1180-1191.
37. Немцев А.Д., Цибулин В.Г. Численное исследование первого перехода в трехмерной задаче фильтрационной конвекции // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2007. № 4. С. 144-150.
38. Немцев А.Д., Цибулин В.Г. Численный метод исследования конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Вестник Южного научного центра РАН, 2009. Т. 5. № 4. С. 23-26.
39. Пережогин П.А., Дымников В.П. Равновесные состояния конечномерных аппроксимаций уравнений двумерной идеальной жидкости // Нелинейная динамика, 2017. Т. 13. № 1. С. 55-79.

40. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969. Т. 9. № 4. С. 953-958.
41. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. 618 с.
42. Садилов Е.С. Конвекция в ячейке Хеле-Шоу с твердым включением при наличии малого вертикального градиента температуры на боковых границах // Вестник Пермского университета. Физика, 2012. Вып. 4. № 22. С. 169-173.
43. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. 656 с.
44. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
45. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1979. 552 с.
46. Сидорякина В.В. Построение разностных схем второго порядка точности для задач диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в прибрежных морских системах // Computational Mathematics and Information Technologies,- 2024. Т. 8. № 3. С. 43-59.
47. Сираев Р.Р., Якушин В.И. Конвекция в горизонтальном цилиндрическом слое насыщенной пористой среды Бринкмана // Конвективные течения, 2007. № 3. С. 043-052.
48. Соболева Е.Б. Численное моделирование фильтрационных концентрационно-конвективных течений с контрастом вязкости // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2022. Т. 62. № 11. С. 1927-1939.
49. Сулейманов С.С., Куриленко А.К., Лебедев К.А. Влияние конвективного слагаемого в уравнении Нернста-Планка на характеристики переноса ионов в заряженном капилляре синтетической мембраны // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2009. Т. 6. № 2. С. 56-64.
50. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Литвинов В. Н. Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях // Математическое моделирование, 2023. Т. 35. № 3. С. 35-58.

51. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле // Компьютерные исследования и моделирование, 2019. Т. 11. Вып. 5. С. 833-848.
52. Толстых А.И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2015. 350 с.
53. Трофимова А.В., Цибулин В.Г. Конвективные движения в пористом кольцевом секторе // Прикладная механика и техническая физика, 2011. Т. 52. Вып. 3. С. 116-125.
54. Трофимова А.В., Цибулин В.Г. Фильтрационная конвекция в кольцевой области и ответвление семейства стационарных режимов // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2014. № 4. С. 73-83.
55. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. – М.: Наука, 1964. 816 с.
56. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: Учебник. Ч. 2. – СПб.: Лань, 2008. 464 с.
57. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Специальные функции в задачах математической физики. – СПб.: Университет ИТМО, 2012. 71 с.
58. Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г., Гасилов В.А. Явная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности // Математическое моделирование, 2022. Т. 34. № 12. С. 3-19.
59. Шеремет М.А. Нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2010. Вып. 2. № 10. С. 102-111.
60. Шеремет М.А. Пространственные режимы сопряженной естественной конвекции в вертикальном цилиндре в условиях теплообмена с внешней средой // Вычислительная механика сплошных сред, 2010. Т. 3. № 4. С. 112-123.
61. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки, 1991. Т. 49. Вып 5. С. 142-148.
62. Юдович В.И. Математические модели естественных наук. СПб.: Лань, 2011. 336 с.

63. Юдович В.И. О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Доклады академии наук, 2004. Т. 398. № 1. С. 57-61.
64. Arakawa A. Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow. Part I // Journal of Computational Physics, 1966. Vol. 1. Iss. 1. P. 119-143.
65. Arakawa A., Lamb V.R. Computational Design of the Basic Dynamical Processes of the UCLA General Circulation Model // Methods in Computational Physics, 1977. Vol. 17. P. 173-265.
66. Barletta A. A Proof that Convection in a Porous Vertical Slab May Be Unstable // Journal of Fluid Mechanics, 2015. Vol. 770. P. 273-288.
67. Barletta A. Routes to Absolute Instability in Porous Media. – Cham: Springer, 2019. 283 p.
68. Barletta A., Celli M. Instability of Parallel Buoyant Flow in a Vertical Porous Layer with an Internal Heat Source // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2017. Vol. 111. P. 1063-1070.
69. Barletta A., Rees D.A.S., Pulvirenti B. Buoyant Flow Instability Induced by a Uniform Internal Heat Source in a Vertical Annular Porous Layer // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2022. V. 194. P. 122935.
70. Baytas A.C., Pop I. Natural Convection in a Trapezoidal Enclosure Filled with a Porous Medium // International Journal of Engineering Science, 2001. Vol. 39. Iss. 2. P. 125-134.
71. Bratsun D.A., Lyubimov D.V., Roux B. Co-symmetry Breakdown in Problems of Thermal Convection in Porous Medium // Physica D: Nonlinear Phenomena, 1995. Vol. 82. Iss. 4. P. 398-417.
72. Das M.K., Uddin M.J., Beg T.A., Beg O.A., Leonard H.J. Blowing and Multiple Slip Effects on Bio-nano-convection Flow in Porous Media within the Gap of a Rotating Cone-disc System // Chinese Journal of Physics, 2025. Vol. 95. P. 685-713.
73. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal Vibrational Convection. – London: John Wiley & Sons, 1998. 358p.

74. Govorukhin V.N., Shevchenko I.V. Multiple Equilibria, Bifurcations and Selection Scenarios in Cosymmetric Problem of Thermal Convection in Porous Medium // *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2017. Vol. 361. P. 42-58.
75. Govorukhin V.N., Sumbatyan M.A., Tsybulin V.G. Multistability of Convective Flows in a Porous Enclosure // *Advanced Structured Materials*, 2023. Vol. 170. P. 305-320.
76. Govorukhin V.N., Tsybulin V.G. Dynamics of a Mechanical System with Curve of Equilibria: Cosymmetry and Multistability // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2022. Vol. 32. No. 16. P. 2230037.
77. Govorukhin V.N., Tsybulin V.G. Multistability, Scattering and Selection of Equilibria in the Mechanical System with Constraint // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021. Vol. 95. P. 105602.
78. Hamtiaux V., Ruyer P., Bartosiewicz Y. Natural Convection through and over a Heating Porous Medium: Towards High Fidelity Simulations of Nuclear Spent Fuel Pools // *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2025. Vol. 112. P.109724.
79. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface // *Physics of Fluids*, 1965. Vol. 8. Iss. 12. P. 2182-2189.
80. Haugen K.B., Tyvand P.A. Onset of Thermal Convection in a Vertical Porous Cylinder with a Partly Conducting and Partly Penetrative Cylinder Wall // *Transport in Porous Media*, 2011. Vol. 86. P. 229-241.
81. <https://start.engee.com/>.
82. Karasozen B., Nemtsev A.D., Tsybulin V.G. Staggered Grids for Three-dimensional Convection of a Multicomponent Fluid in a Porous Medium // *Computers & Mathematics with Applications*, 2012. Vol. 64. Iss. 6. P. 1740-1751.
83. Karasozen B., Trofimova A.V., Tsybulin V.G. Natural Convection in Porous Annular Domains: Mimetic Scheme and Family of Steady States // *Journal of Computational Physics*, 2012. Vol. 231. Iss. 7. P. 2995-3005.

84. Karasozen B., Tsybulin V.G. Cosymmetry Preserving Finite-difference Methods for Convection Equations in a Porous Medium // *Applied Numerical Mathematics*, 2005. Vol. 55. Iss. 1. P. 69-82.
85. Karasozen B., Tsybulin V.G. Mimetic Discretization of Two-dimensional Darcy Convection // *Computer Physics Communication*, 2005. Vol. 167. Iss. 3. P. 203-213.
86. Li D., Li K., Liao W. A Combined Compact Finite-difference Scheme for Solving the Acoustic Wave Equation in Heterogeneous Media // *Numerical Methods Partial Differential Equations*, 2023. Vol. 39. Iss. 6. P. 4062-4086.
87. Manneville P. Rayleigh-Benard Convection: Thirty Years of Experimental. Theoretical and Modeling Work // *Springer Tracts in Modern Physics*, 2006. Vol. 207. P. 41-65.
88. Maryshev B., Lyubimova T., Lyubimov D. Two-dimensional Thermal Convection in Porous Enclosure Subjected to the Horizontal Seepage and Gravity Modulation // *Physics of Fluids*, 2013. Vol. 25. Iss. 8. P. 084105.
89. Merkin J.H., Lok Y.Y., Pop I. Limiting Behaviours of Unsteady Mixed Convection Flow Past a Vertical Flat Plate in a Porous Medium // *Chinese Journal of Physics*, 2024. Vol. 90. P.192-198.
90. Morinishi Y., Lund T.S., Vasilyev O.V., Moin P. Fully Conservative Higher Order Finite-difference Schemes for Incompressible Flow // *Journal of Computational Physics*, 1998. V. 143. Iss. 1. P. 90-124.
91. Naveen S.B., Shankar B.M., Shivakumara I.S. Finite Darcy-Prandtl Number and Maximum Density Effects on Gill's Stability Problem // *Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020. Vol. 142. Iss. 10. P. 102601.
92. Nield D.A. Notes on Convection in a Porous Medium: (i) an Effective Rayleigh Number for an Anisotropic Layer, (ii) the Malkus Hypothesis and Wavenumber Selection // *Transport in Porous Media*, 1997. Vol. 27. P. 135-142.
93. Nield D.A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. – Cham: Springer, 2017. 988 p.

94. Ostrach S. Natural Convection in Enclosures // *Advances in Heat Transfer*, 1972. Vol. 8. P. 161-227.
95. Ouyang Y., Basir F., Naganthran K., Pop I. Effects of Discharge Concentration and Convective Boundary Conditions on Unsteady Hybrid Nanofluid Flow in a Porous Medium // *Case Studies in Thermal Engineering*, 2024. Vol. 58. P. 104374.
96. Paoli M., Yerragolam G.S., Lohse D., Verzicco R. AFiD-Darcy: a Finite-difference Solver for Numerical Simulations of Convective Porous Media Flows // *Computer Physics Communications*, 2025. Vol. 312. P. 109579.
97. Patel S., Patel H.R. Magneto-hydrodynamics Bio-convection Flow at Casson Fluid Stagnation Point in Porous Medium: Cross-diffusion Effect and Heat Production // *Propulsion and Power Research*, 2024. Vol. 13. Iss. 3. P. 445-457.
98. Rees D.A.S. The Effect of Local Thermal Nonequilibrium on the Stability of Convection in a Vertical Porous Channel // *Transport in Porous Media*, 2011. Vol. 87. P. 459-464.
99. Rionero S. Absence of Subcritical Instabilities and Global Nonlinear Stability for Porous Ternary Diffusive-convective Fluid Mixtures // *Physics of Fluids*, 2012. Vol. 24. Iss. 10. P. 104101.
100. Roknian A.A., Scotti A., Fumagalli A. Free Convection in Fractured Porous Media: a Numerical Study // *Advances in Water Resources*, 2025. Vol. 202. P. 104988.
101. Sgreva N.R., Metivier C., Teixeira A., Le T.D., Leclerc S. Experimental Velocity and Temperature Measurements for Natural Convection in a Highly Porous Medium // *International Journal of Thermal Sciences*, 2024. Vol. 205. P. 109257.
102. Shankar B.M., Shivakumara I.S., Naveen S.B. Impact of Thermal Non-equilibrium on the Stability of Natural Convection in an Oldroyd-B Fluid-Saturated Vertical Porous Layer with Internal Heat Sources // *Transport in Porous Media*, 2020. Vol. 133. P. 437-458.

- 103.** Sharifi M., Rasouli N. A Comprehensive Review of Double Diffusive Convection: Effects of Flow Geometries, External Forces, and Porous Media // *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2025. Vol. 160. P. 108380.
- 104.** Slim A.C. Solutal-convection Regimes in a Two-dimensional Porous Medium // *Journal of Fluid Mechanics*, 2014. Vol. 741. P. 461-491.
- 105.** Slim A.C., Bandi M.M., Miller J.C., Mahadevan L. Dissolution-driven Convection in a Hele-Shaw Cell // *Physics of Fluids*, 2013. Vol. 25. Iss. 2. P. 024101.
- 106.** Soboleva E.B. A Method for Numerical Simulation of Haline Convective Flows in Porous Media as Applied to Geology // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019. Vol. 59. P. 1893-1903.
- 107.** Storesletten L. Natural Convection in a Horizontal Porous Layer with Anisotropic Thermal Diffusivity // *Transport in Porous Media*, 1993. Vol. 12. P. 19-29.
- 108.** Trevisan O.V., Bejan A. Combined Heat and Mass Transfer by Natural Convection in a Porous Media // *Advances in Heat Transfer*, 1990. Vol. 20. P. 315-352.
- 109.** Tsybulin V.G., Karasozen B. Destruction of the Family of Steady States in the Planar Problem of Darcy Convection // *Physics Letters A*, 2008. Vol. 372. Iss. 35. P. 5639-5643.
- 110.** Tyvand P.A., Storesletten L. Degenerate Onset of Convection in Vertical Porous Cylinders // *Journal of Engineering Mathematics*, 2018. Vol. 113. P. 165-181.
- 111.** Xuan Z., Fang W., Lu Y., Yang C., Tao W. Significance of the Natural Convection to the Heat Transfer of Porous Media: a Pore-scale Study // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024. Vol. 222. P. 125163.
- 112.** Yang X., Qin Y., Li Y., Li J. Analysis of a New Time Filter Algorithm for the Convection Problem of Superposition of Incompressible Flow and Porous Media Flow // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2025. Vol. 145. P. 108684.
- 113.** Yudovich V.I. Secondary Cycle of Equilibria in a System with Cosymmetry, its Creation by Bifurcation and Impossibility of Symmetric Treatment of It // *Chaos*, 1995. Vol. 5. Iss. 2. P. 402-411.

114. Zuo H., Yin Y., Yang Z., Deng S., Li H., Liu H. High-order Models for Convection-diffusion-reaction Transport in Multiscale Porous Media // Chemical Engineering Science, 2024. Vol. 286. P. 119663.

### **Список публикаций автора по теме работы**

#### **Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК, Scopus, Web of Science, RSCI:**

115. Коханов П.В., Цибулин В.Г. Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2023. Т. 20. № 4. С. 37-44.
116. Коханов П.В., Цибулин В.Г. Моделирование фильтрационной конвекции в полярных координатах на неравномерной сетке // Математическое моделирование, 2025. Т. 37. № 3. С. 127-143.
117. Kokhanov P.V., Tsybulin V.G. Modeling of Convective Flows in a Porous Circular Enclosure // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials, 2025. Vol. 223. P. 337-348.
118. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025660956 Российская Федерация. Программная реализация расчета конвекции в пористом цилиндре, № 2025619783, заявл. 22.04.2025, опубл. 28.04.2025 / В.Г. Цибулин, П.В. Коханов, заявитель ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

#### **В сборниках трудов конференций:**

119. Коханов П.В. Конечно-разностная схема на неравномерной сетке для задачи фильтрационной конвекции в круговой области // В сб.: Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Материалы XXXI научной конференции. ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2024. С. 254-257.

- 120.** Коханов П.В. Мультистабильные решения задачи фильтрационной конвекции в круговой области // В сб.: International Scientific Conference St. Petersburg Youth Meeting on Probability and Mathematical Physics. СПбГУ, Санкт-Петербург, 2024. С. 10-11.
- 121.** Коханов П.В. Конечно-разностная схема расчета конвекции в вертикальном пористом цилиндре // В сб.: Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО-2025). ФТИ КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, 2025. С. 360-365.
- 122.** Коханов П.В. Разностная схема для расчета конвекции в вертикальном пористом цилиндре // В сб.: Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Материалы XXXII научной конференции. ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2025. С. 232-236.
- 123.** Коханов П.В. Метод конечных разностей для расчета конвекции в пористом цилиндре // В сб.: XXI Всероссийская ежегодная молодежная научная конференция с международным участием «Наука Юга России: достижения и перспективы». ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, 2025. С. 286.
- 124.** Коханов П.В., Цибулин В.Г. Расчет конвективных движений в пористом цилиндре // В сб.: Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. ЮФУ, ДГТУ, Дивноморское, 2025. С. 58.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1. Сертификат о регистрации программного комплекса «CONV\_REGIMES»

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
№ 2025660956

**Программная реализация расчета конвекции в пористом цилиндре**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет» (RU)*

Авторы: *Цибулин Вячеслав Георгиевич (RU), Коханов Павел Владимирович (RU)*

Заявка № 2025619783  
Дата поступления 22 апреля 2025 г.  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 28 апреля 2025 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности  
Ю.С. Зубов



**Приложение 2.** Аппроксимация системы уравнений конвекции на неравномерной сетке в естественных переменных

Уравнение несжимаемости:

$$\frac{1}{r_j - r_{j-1}} [r_j U_j^{i-1/2} - r_{j-1} U_{j-1}^{i-1/2}] + \frac{1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} [V_{j-1/2}^i - V_{j-1/2}^{i-1}] \approx 0.$$

Уравнение для радиальной компоненты скорости:

$$\frac{1}{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}} [P_{j+1/2}^{i-1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}] + U_j^{i-1/2} - \lambda \sin \varphi_{i-1/2} \left[ \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1/2})\theta_j^i + (\varphi_{i-1/2} - \varphi_{i-1})\theta_j^{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \right] \approx 0.$$

Уравнение для азимутальной компоненты скорости:

$$\frac{1}{r_{j-1/2}(\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2})} [P_{j-1/2}^{i+1/2} - P_{j-1/2}^{i-1/2}] + V_{j-1/2}^i - \lambda \cos \varphi_i \left[ \frac{(r_j - r_{j-1/2})\theta_j^i + (r_{j-1/2} - r_{j-1})\theta_{j-1}^i}{r_j - r_{j-1}} \right] \approx 0.$$

Уравнение теплопроводности:

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_j^i = [\Delta \theta + G(U, V) - J(\theta, U, V)]_j^i,$$

где оператор Лапласа, сила Архимеда и конвективное слагаемое аппроксимируются следующим образом:

$$[\Delta \theta]_j^i = \frac{r_{j+1/2} \frac{\theta_{j+1}^i - \theta_j^i}{r_{j+1} - r_j} - r_{j-1/2} \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{r_j - r_{j-1}}}{r_j(r_{j+1/2} - r_{j-1/2})} + \frac{\frac{\theta_j^{i+1} - \theta_j^i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} - \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}}{r_j^2(\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2})},$$

$$[G(U, V)]_j^i = \sin \varphi_i \frac{(\varphi_{i+1/2} - \varphi_i)U_j^{i+1/2} + (\varphi_i - \varphi_{i-1/2})U_j^{i-1/2}}{\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}} + \cos \varphi_i \frac{(r_{j+1/2} - r_j)V_{j+1/2}^i + (r_j - r_{j-1/2})V_{j-1/2}^i}{r_{j+1/2} + r_{j-1/2}},$$

$$\begin{aligned}
[U(\theta, U, V)]_j^i = & \left[ \frac{(\varphi_{i+1/2} - \varphi_i)U_j^{i+1/2} + (\varphi_i - \varphi_{i-1/2})U_j^{i-1/2} (r_{j+1/2} - r_j) \frac{\theta_{j+1}^i - \theta_j^i}{r_{j+1} - r_j} - (r_j - r_{j-1/2}) \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{r_j - r_{j-1}}}{\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}} \right. \\
& \left. + \frac{(r_{j+1/2} - r_j)V_{j+1/2}^i + (r_j - r_{j-1/2})V_{j-1/2}^i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_i) \frac{\theta_j^{i+1} - \theta_j^i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} - (\varphi_i - \varphi_{i-1/2}) \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}}{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}} \right].
\end{aligned}$$