ОТЗЫВ
официального оппонента Бережного Евгения Ивановича
на диссертацию Смирновой Ирины Юрьевны

Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, задаваемые в терминах преобразования Фурье,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация Смирновой Ирины Юрьевны посвящена актуальным вопросам гармонического анализа и состоит из введения и трех глав.

В середине 70-х годов известный шведско-эстонский математик Петри продемонстрировал новый подход к пространствам Бесова, основанный на построении ретрактов, связанных с разбиением единицы и преобразованием Фурье. Фактически этот прием позволил избавиться от трудностей, порожденных гладкостью, и показал, что вместо изучения пространств Бесова в классическом определении, можно изучать пространства Лебега со специальным весом, в которых достаточно богатая геометрия. Далее с помощью обратного преобразования Фурье соответствующие факты из геометрии пространства Лебега со специальным весом можно попробовать перенести на пространства Бесова. В дальнейшем плодотворная идея Петри нашла свое воплощение при исследовании практически любых пространств гладких функций.

Второй подход, реализованный при исследовании пространств гладких функций, наиболее ярко продемонстрирован в теории вейвлет(всплесков). Там просто пространства определяются в терминах преобразования Фурье. Конечно, сразу же возникает достаточно трудная задача об описании получившихся пространств не в терминах преобразования Фурье, а с помощью аппарата теории приближений. Тем не менее с помощью теории вейвлет (всплесков) удалось решить ряд старых задач теории приближений и геометрии банаховых пространств.

В предлагаемой диссертации обсуждается второй подход в контексте пространств аналитических функций. А именно, в работе описывается серия пространств аналитических функций, норма в которых определяется через вариант преобразования Лапласа.

В диссертации предложены три типа пространств аналитических функций с разными областями определения: пространства аналитических функций, определенных на диске, пространства аналитических функций, определенных в верхней полуплоскости в декартовой системе координат, и пространства аналитических функций, определенных в в верхней полуплоскости в полярной системе координат. Для каждого случая на пространствах аналитических функций вводится норма через вариант преобразования Лапласа. В каждом из случаев предлагается конструкция оператора, устанавливающего изоморфизм между вводимыми пространствами и дискретными или непрерывными пространствами Лебега со смешанной нормой.

Насколько полезны такие пространства, покажет только время и те задачи, которые можно решить с помощью вводимых пространств.

Первая глава "Весовые пространства со смешанной нормой на единичном диске"является основной, и ее структура является модельной для исследований из двух других глав.

Ключевую роль в основных конструкциях работы играет проектор Бергмана. В первой главе это отражено в Теореме 2.7, в которой приведены достаточные условия ограниченности проектора Бергмана из пространства Лебега со смешанной нормой на подпространство этого пространства, состоящего из аналитических функций. И хотя этот результат в случае обычных пространств Лебега хорошо известен, рассмотрение пространств со смешанной нормой потребовало привлечения новых идей и соображений. Отметим и Теорему 2.10, в которой описана зависимость свойств проектора Бергмана от параметра. Эта теорема полезна при рассмотрении не одного пространства функций, а набора пространств и операторов, действующих в них.

В качестве приложения основных конструкций рассматриваются операторы Теплица с символами, зависящими от угловой переменной, в пространствах $A^{q,X}(D)$. Показано, что использование проектора между пространствами $A^{q,X}(D)$ и $L^{q,X}(D)$, позволяет заменить исследование оператора Теплица в пространстве $A^{q,X}(D)$ на исследование оператора умножения в пространстве l^q. Здесь же приведены условия компактности оператора Теплица и описан его спектр.

Далее более детально рассматривается случай, когда пространство со смешанной нормой строится из двух пространств Лебега. Полученные в этом случае для пространств $A^{q,p}_\lambda(D)$ результаты богаче результатов для общих пространств $A^{q,X}(D)$. Для пространств $A^{q,p}_\lambda(D)$ получена характеризация функций из $A^{q,p}_\lambda(D)$ в различных терминах, включая эквивалентные нормы, описаны точные вложения рассматриваемых пространств в пространство типа Харди (и наоборот) и в пространство Флетта со смешанной (интегральной) нормой. Кроме того, само пространство $A^{q,p}_\lambda(D)$ описано как образ при действии оператора дробного дифференцирования по Адамару пространства аналитических функций с коэффициентами из l^q. Второй основной результат первой главы представлен в Теореме 2.33, показывающей, что построенное в работе пространство со смешанной нормой $A^{q,p}_\lambda(D)$ есть ретракт пространства $l^q(R)$. Кроме того, представлена явная конструкция операторов, осуществляющих ретракт.

Для того, чтобы получить результаты первой главы Смирновой И.Ю. пришлось изрядно потрудится и вычленить те свойства пространств $A^{q,X}(D)$ и $A^{q,p}_\lambda(D)$, которые позволили ей получить эти результаты.

Во второй и третьей главах рассматриваются задачи, аналогичные задачам из первой главы, для пространств функций, определенных в верхней полуплоскости в декартовой системе координат, и пространства аналитических функций, определенных в в верхней полуплоскости в полярной системе координат. Изменение области определения пространств функций потребовало рассмотрения различных вариантов преобразования Лапласа. Далее основным методом исследования является редукция решения возникающих в главах два и три задач к способу их решения в первой главе. В результате исследований удалось построить линейные изометрии между пространствами аналитических функций и пространством Лебега L^q (Теорема 3.10 для параболического случая и Теорема 4.7 для гиперболического случая), и описать свойства оператора Теплица (Теоремы 3.14 и 3.15 в параболическом случае и Теоремы 4.10 и 4.11 в гиперболическом случае).

Рассмотрение параболического и гиперболического случаев повлекло за собой применение некоторых новых соображений в доказательстве основных результатов второй и третьей глав и потребовало преодолеть существенные математические трудности.

Результаты этих глав работы также представляют несомненный интерес.

Замечания

Недостатком работы являются некоторые стилистические погрешности и небрежности. Например, фраза "теорема типа Пэли – Винера"вполне допустима в живой разговорной речи, но в тексте, наверное, лучше написать "теорема типа теоремы Пэли – Винера"и т.п.

Стоит отметить также отсутствие описания зависимостей констант от параметров. Например, неплохо бы описать зависимость оценок норм проекторов Бергмана от параметров, участвующих в формулировках соответствующих теорем. Отметим, однако, что задачи такого сорта иногда являются очень сложными и могут представлять предмет самостоятельного исследования.

Формула 3.10. Неплохо бы объяснить, почему функция, определенная этой формулой имеет обратную.

Аналоги теоремы 2.13 об операторах Теплица во второй и третьей главах не содержат утверждений о компактности этих операторов. В самой теореме 2.13 условия компактности оператора Теплица есть. Неплохо бы прокомментировать эту ситуацию.

В работе конструируются пространства, использующие пространства Лебега с индексом $q \in [1, \infty)$. Неплохо бы включить и случай $q = \infty$.

Стоит отметить и замечания 2.35, 3.12, 4.9, 4.12. Там есть погрешности, связанные с русским языком, но не это главное. Содержание этих замечаний свидетельствует о понимании автором места полученных им результатов в теории пространств аналитических функций и возможного вектора развития исследований, связанных с теорией введенных пространств.

Заключение

Диссертация Смирновой Ирины Юрьевны написана ясно, логически связно. Все доказательства в работе приведены полностью, а отмеченные недостатки не портят благоприятного впечатления от работы. В целом диссертация Смирновой Ирины Юрьевны является научно-квалификационной работой, в которой содержится ряд новых результатов и методов, представляющих научный интерес. Предлагаемое исследование является вкладом в развитие гармонического анализа пространств аналитических функций со смешанной нормой.

Результаты диссертации опубликованы в шести работах. Четыре работы в журналах, индексируемых в базах данных Перечень ВАК, Scopus, Web of Science. Две работы представляют тезисы докладов конференций.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации и основным положениям диссертации соответствует.

С результатами работы целесообразно ознакомить сотрудников МИ им. Стеклова РАН, ПОМИ им. Стеклова РАН, Московского, Санкт-Петербургского, Новосибирского, Красноярского, Уфимского, Воронежского, Ярославского университетов.

Считаю, что диссертационное исследование Смирновой Ирины Юрьевны "Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, задаваемые в терминах преобразования Фурье"на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение научной задачи об описании и свойствах пространств аналитических функций, норма в которых вводится в терминах варианта преобразования Лапласа, имеющей важное значение для гармонического анализа.

Работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, предъявляемым Южным федеральным университетом, в том числе, критериям п. 2.1 Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Южный федеральный университет", утвержденного ученым советом ЮФУ, а автор работы, Смирнова Ирина Юрьевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова,
доктор физ. - мат. наук, профессор
Бережной Евгений Иванович 3 сентября 2025 г.

Специальность, по которой официальным
оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 – математический анализ

Контактные данные:
Тлф: 89159747785
e-mail: ber uniyar.ac.ru

Адрес места работы:
150 000, г. Ярославль, ул. Советская, 14
ФГБОУ ВО "Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова"
Тлф: 89159747785
e-mail: ber uniyar.ac.ru

Подпись Е.И. Бережного удостоверяю

Заместитель начальника управления
директор центра кадровой политики
Л.Н. Куфирина