ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Смирнова Ирина Юрьевна

Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, задаваемые в терминах преобразования Фурье

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
доцент Карапетянц А. Н.

Ростов-на-Дону — 2025

Содержание

1 Введение

В диссертационной работе вводятся и изучаются весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, определенные в терминах преобразования Фурье (Меллина) в трех случаях (постановках). Эти три случая фактически характеризуются тремя типами гиперболической геометрии в единичном диске и связанными с ними системами координат - эллиптической, параболической и гиперболической. Первая описывается с точностью до автоморфизма диска полярными координатами в единичном диске, а вторая и третья - после конформного отображения на полуплоскость (для простоты восприятия) - преобразуются в декартовы и полярные координаты на полуплоскости, соответственно. Таким образом, рассматриваются пространства на единичном диске со смешанной нормой, связанной с полярными координатами, и на верхней полуплоскости со смешанной нормой, связанной с декартовыми и также с полярными координатами. Учитывая указанную выше мотивацию, эти три случая будем описывать как эллиптический, параболический и гиперболический. В указанных пространствах со смешанной нормой рассматриваются оператор Бергмана, а также операторы Теплица со специальными символами, также связанными с соответствующей геометрией.

Пространства аналитических p - интегрируемых функций на единичном диске или полуплоскости получили широкое распространение в анализе, и результаты, касающиеся функциональных свойств этих пространств и действия некоторых операторов в этих пространствах, в настоящее время являются классическими и составляют существенную часть ряда учебников по теории функций и теории операторов в комплексном анализе. В частности, операторы с каноническими ядрами, теплицевы операторы, алгебры таких операторов в пространствах аналитических функций широко изучаются в рамках современной теории функций и теории операторов. Не претендуя на полный обзор, мы ссылаемся на книги [10, 11, 12, 36, 38, 39].

Весовые классические пространства аналитических функций в диске и на полуплоскости, со специальным выбором веса, согласованным с геометрией пространства, также получили особое внимание в связи с изучением специальных классов операторов Теплица в таких пространствах, см. цикл статей [1, 17, 18, 19, 20] и книгу [36].

Остановимся подробнее на этих исследованиях, поскольку они послужили мотивацией к исследованиям в данной диссертационной работе. В серии статей [1, 17, 18, 19, 20] была построена общая теория некоторых классов операторов Теплица со специальными (в общем случае неограниченными) символами в (весовых) гильбертовых пространствах аналитических функций (типа Бергмана), связанных с тремя типами гиперболической геометрии в единичном диске (эллиптическим, параболическим и гиперболическим типами геометрии). Разработанные методы и подходы эффективно работают в случае «плохого» поведения символа оператора Теплица (неограниченность, осцилляция при приближении к границе). Эти подходы основаны на изучении структурных свойств соответствующих функциональных пространств и на специальной характеризации функций из этих пространств. Авторы использовали переход к образам Фурье для конструктивного описания подкласса аналитических функций, а также для характеристики спектра соответствующего оператора Теплица в каждом из трех упомянутых ранее случаев. Повторим, что это эффективно работает исключительно в случае гильбертова пространства, когда переход к образам Фурье обоснован равенством Парсеваля. Наиболее полно эта теория и некоторые дальнейшие аспекты отражены в книге [36]. Данные исследования относятся к случаю не смешанной (весовой) L^2 нормы. Собственно, сама идея связать геометрию пространства и различные системы координат с исследованием определенных классов операторов Теплица была предложена Н.Василевским, и им, вместе с соавторами и учениками, был решен целый ряд фундаментальных задач в данном контексте, см. подробнее книгу [36].

Одним из дальнейших обобщений теории аналитических функций в диске и на полуплоскости является рассмотрение (весовой) смешанной нормы. Прежде всего, в литературе изучается интегральная смешанная норма, мы ссылаемся на книгу [21] и некоторые более ранние статьи [15, 16] (см. также саму книгу [21] для дополнительных ссылок и исторического обзора).

Использование смешанной нормы при определении пространств функций обусловлено тем, что зачастую имеется необходимость характеризовать поведение функций с использованием различных норм по различным координатным направлениям в диске или полуплоскости.

С точки зрения теории функций комплексного переменного, введение смешанной нормы более чем оправдано тем, что часто возникает необходимость "измерить"поведение аналитической функции только при приближении к границе, скажем, в ортогональном направлении, а также измерить это поведение по некоторой специальной норме (которая может отличаться от нормы, используемой в другом направлении).

В современном анализе развивается также подход введения смешанной нормы так, что измеряются не сами функции, а их образы Фурье по одной из переменных, которая, фактически, «отвечает» за аналитичность. Наиболее прозрачно эта ситуация проявляется в единичном диске. Он был реализован в ряде статей [22, 23, 24, 25, 28, 29], и были рассмотрены различные нормы, включая норму переменного пространства Лебега, Морри, Орлича, различные комбинации таких норм, и были показаны различные эффекты, возникающие из такого разнообразия норм - см. более подробную информацию в указанных выше статьях.

Таким образом, в отличие от большинства работ, имеющихся в настоящий момент по пространствам аналитических функций со смешанной нормой (см. книгу [21] и ссылки в этой книге), здесь используется подход, при котором смешанная норма берется от образа Фурье аналитической функции. То есть, пространства функций определяются в терминах принадлежности образа (Фурье) некоторому пространству со смешанной нормой.

Этот подход не является новым в литературе, но применительно к пространствам аналитических функций он начал развиваться сравнительно недавно - в работах [6, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 34, 35]. Преимущество такого подхода в первую очередь в том, что он позволяет формулировать и доказывать критерии принадлежности аналитической функции соответствующему пространству в конструктивных терминах. Здесь мы имеем в виду, в первую очередь, представления типа Пэли-Винера. Он также позволяет эффективно исследовать операторы Теплица со специальными символами в рамках таких новых пространств и фактически развивать и обобщать результаты, полученные ранее для случая гильбертовых пространств. Обратим внимание, что развитие общей теории, разработанной в [27, 30], также представляет интерес в этой новой постановке.

Ситуация единичного диска имеет определенное преимущество в виде разложения аналитической функции в ряд Тейлора, сходящийся во всех точках диска. Именно благодаря этому можно однозначно и явно характеризовать аналитические функции из таких новых пространств, определенных в терминах коэффициентов Фурье, см. вышеупомянутые ссылки для более подробной информации.

До недавнего времени такое исследование не представлялось возможным в случае полуплоскости и смешанной нормы, связанной с декартовыми или полярными координатами. Основной вопрос состоит в том, как конструктивно описать аналитические функции в верхней полуплоскости, преобразования Фурье которых берутся из некоторых пространств со смешанной нормой. Недавно эта задача была решена в общем виде в [8], что открыло путь к изучению широкого класса функциональных пространств со смешанной нормой на верхней полуплоскости, по аналогии со случаем единичного диска.

Результаты во всех трех случаях представлены согласно одной схеме, однако эллиптический случай все-таки отличается от двух других. В этом случае мы не опираемся на общую теорию из работы [8]. Определение нового пространства со смешанной нормой дается, как и в двух других случаях, в терминах обобщенных функций, но фактически напрямую, используя технику гармонического анализа и анализа Фурье периодических функций. Это значительно упрощает изложение, однако для этого нам необходимо требовать некоторое дополнительное условие, которое тем не менее не влияет на основной объект изучения в диссертации в эллиптическом случае- подробнее см. замечание 2.1. Результаты диссертационной работы представлены в [6, 9, 28, 31, 34, 35].

Перейдем к изложению результатов диссертации по главам.

В первой главе диссертации рассматривается модельная ситуация эллиптической геометрии - полярные координаты в диске и, согласно этой системе координат, вводится смешанная норма в классе измеримых на диске функций (распределений). Именно, обобщенные коэффициенты Фурье $f_n = f_n(r)$ функции f (распределения) предполагаются принадлежащими некоторому (общему) банахову пространству X на интервале $(0,1)$ (как функции аргумента r) при каждом n и далее ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^q_{X(I)}$ предполагается сходящимся. Таким образом, определяется пространство со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, где норма (смешанная норма) вводится как

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^q_{X(I)}\right)^{\frac{1}{q}}, \ \ 1 \leqslant q < \infty.$$

Подпространство аналитических функций $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ состоит только из тех функций $f \in \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, которые аналитичны в $\mathbb{D}$.

Мотивация данного определения, равно как и аналогичных определений в двух других главах, состоит в том, что в случае гильбертова пространства $L^2(\mathbb{D})$ благодаря равенству Парсеваля мы имеем тождество

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^2_{L^2(I,2rdr)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в случае $X(I) = L^2(I, 2rdr)$ и $q = 2$ пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, естественно, совпадает с $L^2(\mathbb{D})$ и соответствующее аналитическое подпространство $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ есть классическое пространство Бергмана $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, изученное, как уже было отмечено, в работах многих авторов.

Случай единичного диска и полярных координат обладает преимуществом по сравнению с двумя другими в виде наличия разложения аналитической функции в ряд Тейлора, сходящийся в диске. Это позволяет однозначно охарактеризовать коэффициенты Фурье для аналитических функций и конструктивно описать пространство $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$.

Указанное выше также позволяет решить ряд задач методами классического гармонического анализа и изучить пространства в наиболее общей постановке.

Фактически, первая глава состоит из двух частей. В первой части мы доказываем общие факты в случае, когда $X(I)$ - произвольное банахово пространство, являющееся подпространством $L^1_\lambda(I),\ \lambda > -1$ (пространство измеримых по Лебегу функций интегрируемых с весом $(1-r^2)^\lambda$ на интервале $I = (0,\,1)$), а во второй мы детально рассматриваем ситуацию весового лебегова пространства $X(I) = L^p_\lambda(I),\ 1 \leqslant\ p < \infty$. Эта схема в той или иной мере повторяется в двух других главах.

Итак, перечислим некоторые основные результаты первой главы. В случае, когда $X(I)$ - произвольное банахово подпространство $L^1_\lambda(I)$, упомянем прежде всего следующее достаточное условие ограниченности проектора Бергмана :

Теорема 1.1 *(Теорема 2.7) Пусть* $1 \leqslant q < \infty,\ \lambda > -1$ *и* $X(I) \subseteq L^1_\lambda(I)$. *Пусть имеет место условие*

$$n^{\lambda+1}\left|\int_0^1 t^n g(t)(1-t)^\lambda dt\right| \|r^n\|_{X(I)} \leqslant C\|g\|_{X(I)}, \quad n\to\infty,\ g\in X(I). \tag{1.1}$$

Тогда оператор $B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}}$ *ограничен как проектор из* $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ *на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$.

Отметим также, что в безвесовом случае этот результат доказан в [24]. Однако весовой случай также позволяет получить более общие результаты, как, например, теорема 2.10.

Для функции $a = a(r)$ (здесь $r = |z|$) рассмотрим оператор Теплица, не обязательно ограниченный, но формально определенный следующим образом:

$$T_a^{(\lambda)} f(z) = B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} a f(z), \;\; z \in \mathbb{D}.$$

Удается установить критерий ограниченности и компактности оператора Теплица с радиальным символом в $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$:

Теорема 1.2 *(Теорема 2.13) Пусть* $1 \leqslant q < \infty, \;\; \lambda > -1$. *Функция* $a \in L^1_\lambda(I)$. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Оператор* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ *если и только если последовательность*

   $$\gamma_{a,\lambda}(n) = \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)} \int_0^1 \tau^{2n} a(\tau) \; (1-\tau^2)^\lambda 2\tau \; d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

   ограничена.

2. *Оператор* $T_a^{(\lambda)}$ *компактен на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ *если и только если*

   $$\gamma_{a,\lambda}(n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

3. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество* $\{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma = \gamma_{a,\lambda}(n), \; n \in \mathbb{Z}_+\}$ *и его существенный спектр совпадает с замыканием этого множества:*

   $$\operatorname{ess-sp} T_a^{(\lambda)} = \overline{\{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma = \gamma_{a,\lambda}(n), \; n \in \mathbb{Z}_+\}}.$$

Далее, во второй части первой главы рассматривается конкретный случай $X(I) = L^p_\lambda(I)$ и соответствующие весовые пространства со смешанной нормой. Для упрощения обозначений мы пишем $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$ вместо символа $\mathcal{L}^{q;L^p_\lambda(I)}_\lambda(\mathbb{D})$. То же самое касается и $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$. Здесь $1 \leqslant p, q < \infty, \;\; \lambda > -1$.

В серии теорем 2.16, 2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.22 получена характеризация функций из $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ в различных терминах, включая эквивалентные нормы, вложение в пространство типа Харди (и наоборот) и в пространство Флетта со смешанной (интегральной) нормой, и также само пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ описано как образ при действии оператора дробного дифференцирования от другого пространства. Приведем в качестве примера два из указанных выше результатов.

Символом $H^p(\mathbb{D})$ обозначаем класс Харди, а символом $\hookrightarrow$ - непрерывное вложение. Справедлив следующий результат типа Харди - Литтлвуда:

Теорема 1.3 *(Теорема 2.17) Пусть* $1 \leqslant p < \infty, \ \lambda > -1.$

1. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant 2$. *Тогда* $H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D}), \ \ q(1 + \frac{1+\lambda}{p}) \geqslant 2;$
2. *Пусть* $2 \leqslant q < \infty$. *Тогда* $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H^q(\mathbb{D}), \ \ q(1 + \frac{1+\lambda}{p}) \leqslant 2.$

Для дальнейшего исследования мы будем использовать производную (или композицию) по Адамару. В интегральной форме этот оператор записывается в виде:

$$D_{\alpha}g(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{g(u)}{\left(1 - \frac{z}{u}\right)^{1+\alpha}} \frac{du}{u}, \quad |z| < r < 1, \quad \alpha \geq 0,$$

$\Gamma(x)$ обозначает Гамма-функцию.

Получаем следующий результат о представлении функции из $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ в виде дробной производной от аналитической функции с коэффициентами Тейлора, образующими последовательность в l^q_+.

Теорема 1.4 *(Теорема 2.20) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Каждая аналитическая функция* $f \in \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ *имеет вид*

$$f = D_{\frac{\lambda+1}{p}} h$$

с некоторой аналитической функцией $h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} h_n z^n$, *такой, что* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l^q_+$.

Случай $q = 2$ представляет особый интерес, а именно:

$$\mathcal{A}^{2,p}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{\frac{\lambda+1}{p}}(H^2(\mathbb{D})).$$

В заключение заметим, что из уже упомянутой теоремы 2.22 о вложении в пространство Флетта со смешанной нормой следует, что по крайней мере для $1 \leqslant q \leqslant 2$ функции в наших пространствах регулярны в том смысле, что они имеют конечную смешанную норму типа Лебега.

Отметим, что в диссертационной работе особое внимание уделяется построению явного вида изометрических изоморфизмов, характеризующих функции из рассматриваемых пространств в терминах типа Пэли-Винера. В первой главе соответствущий результат (теорема Пэли-Винера) имеет вид:

Теорема 1.5 *(Теорема 2.33) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Изометрический изоморфизм*

$$R^{-1}_\lambda = U^{-1}_\lambda R_0 : l^q_+ \longrightarrow \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$$

определяется соотношением

$$R^{-1}_\lambda : \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n d_{\lambda,p}(n) z^n.$$

Обратный изоморфизм $R_\lambda : \quad \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) \longrightarrow l^q_+$ *имеет вид*

$$R_\lambda : \varphi(z) \longrightarrow \left\{ d^{p-1}_{\lambda,p}(n) \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \overline{z}^{\,n} \, |z|^{n(p-2)} \mathrm{dA}_\lambda(z) \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\pi} \, d^{p-1}_{\lambda,p}(n) \int_0^1 \int_{\mathbb{T}} \varphi(rt) t^{-n} r^{n(p-1)+1} \nu_\lambda(r) d\sigma(t) dr \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}.$$

Здесь $\mathrm{dA}_\lambda(z)$, $d_{\lambda,p}(n)$ *и* $\nu_\lambda(r)$ *определяются формулами (2.2), (2.18) и (2.20) соответственно.*

Во второй главе диссертации рассматривается ситуация, когда образ Фурье аналитической функции по первой переменной принадлежит пространству функций со смешанной нормой, определенной в соответствии с декартовыми координатами на полуплоскости.

Символом $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}_+$.

Пусть $X(\mathbb{R}_+)$ — комплексное банахово пространство распределений на $\mathbb{R}_+$, равномерно вложенное в пространство распределений $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)'$.

Определим нормированное пространство

$$L^{q;X}(\Pi) = \left\{\varphi = \varphi(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(\mathbb{R}_+)) \;\middle|\; \|\varphi(x,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}_+)} \in L^q(\mathbb{R})\right\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q;X}(\Pi)} = \|\|\varphi\|_{X(\mathbb{R}_+)}\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Мы интерпретируем $\varphi \in L^{q;X}(\Pi)$ как распределения $\varphi(x,y)$ на Π (см. ниже), такие, что отображение $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ есть $\mathbb{R} \to X(\mathbb{R}_+)$, а отображение $x \mapsto \|\varphi(x,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}_+)}$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R})$.

Более того, по лемме 5 из [8] мы имеем непрерывное вложение

$$L^{q;X}(\Pi) \hookrightarrow \mathcal{D}_t(\Pi)'$$

в пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Pi)'$, которые являются "умеренными"по первой переменной. Точнее,

$$\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mathbin{\widehat{\otimes}} C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$$

является тензорным произведением двух ядерных пространств: пространства функций Шварца на $\mathbb{R}$ и пространства тестовых функций на $\mathbb{R}_+$. Проще говоря, $\mathcal{D}_t(\Pi)$ — это пространство гладких функций, которые быстро убывают по переменной x и имеют компактный носитель по переменной y. Соответственно, $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ — это двойственное пространство распределений, которые умеренны по переменной x.

Пространство со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, введем как пространство распределений $f \in \mathcal{D}_t(\Pi)'$ таких, что (обобщенное) преобразование Фурье по первой переменной $\widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, y)$, рассматриваемое как отображение $\xi \mapsto \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, \cdot)$, является локально интегрируемой по Бохнеру функцией

$$\widehat{f}_{x\to\xi} : \mathbb{R} \to X(\mathbb{R}_+),$$

и следующая норма конечна:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, \cdot) \right\|^q_{X(\mathbb{R}_+)} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{x\to\xi} \right\|_{L^{q;X}(\Pi)}. \end{aligned}$$

Другими словами,

$$\mathcal{L}^{q;X}(\Pi) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Pi)' \middle| \quad \widehat{f}_{x\to\xi} \in L^{q;X}(\Pi) \right\}.$$

Следующая общая теорема является ключевой и дает понимание природы введенных пространств.

Теорема 1.6 *(Теорема 3.1) Пусть* $1 \leqslant q < \infty$. *Пространство* $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$ *является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в* $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ *и изометрически изоморфным* $L^{q;X}(\Pi)$ *посредством преобразования Фурье по первой переменной:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} F \otimes I : \mathcal{L}^{q;X}(\Pi) \to L^{q;X}(\Pi).$$

Теперь перейдем к конкретной ситуации, когда

$$X(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda + 1)(2y)^\lambda dy), \;\; 1 \leqslant p < \infty, \;\; \lambda > -1.$$

При указанном выборе $X(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать

$$\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathcal{L}^{q;X}(\Pi), \quad L^{q,p}_\lambda(\Pi) = L^{q;X}(\Pi),$$

в смысле определений, данных выше. Таким образом,

$$L^{q,p}_\lambda(\Pi) \quad = \Big\{\varphi = \varphi(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx)\Big|$$

$$\|\varphi(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)} \in L^q(\mathbb{R})\Big\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)}\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Мы интерпретируем $\varphi \in L^{q,p}_\lambda(\Pi)$ как распределения $\varphi(x,y)$ на Π задаваемые отображениями $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$, действующими между

$$\mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy),$$

и такими, что отображения

$$x \mapsto \|\varphi(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)}$$

принадлежат $L^q(\mathbb{R})$.

Пространство аналитических функций со смешанной нормой

$$\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathrm{Hol}(\Pi) \cap \mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$$

фактически является основным объектом нашего исследования во второй главе. В этой определенной ситуации результаты статьи [8] конкретизируются , а также формулируются и доказываются более точные утверждения.

Прежде всего, отметим следующий результат:

Теорема 1.7 *(Теорема 3.2) Пусть* $1 \leqslant p,q < \infty$, $\lambda > -1$. *Нормированное подпространство аналитических функций* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi) \subset \mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *является полным.*

Введем оператор

$$U_{1,\lambda} : \mathcal{L}^{q,p}_{\lambda}(\Pi) \longrightarrow L^{q,p}_{\lambda}(\Pi),\ 1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1,$$

действующий посредством преобразования Фурье по первой переменной по правилу:

$$U_{1,\lambda} f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, y).$$

Пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ определим как замыкание подпространства пространства функций $\varphi = \varphi(x,y)$, $\varphi \in L^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$, для которых справедливо

$$U_{1,\lambda} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} U^{-1}_{1,\lambda} \varphi = \frac{i}{2} \left(x + \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi = 0$$

в слабом смысле (в смысле $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ -распределений). Оказывается, что $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ изометрически совпадает с нашим исходным пространством $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$, таким образом, получаем следующую характеризацию функций из пространства $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$:

Теорема 1.8 *(Теорема 3.4) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$. *Сужение изометрического изоморфизма* $U_{1,\lambda}$ *на пространство* $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *является изометрическим изоморфизмом между* $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *и* $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$, *то есть*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)} = \|U_{1,\lambda} f\|_{L^{q,p}_{\lambda}(\Pi)}.$$

В теореме 3.5 установлен изометрический изоморфизм пространства $\mathcal{L}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ на пространство $L^{q,p}(\Pi)$, при котором проектор Бергмана эквивалентен оператору $\chi_+ I \otimes P_0$, где P_0 одномерный проектор пространства $L^p(\mathbb{R}_+, dy)$ на $L^p_0(\mathbb{R}_+, dy)$ (одномерное подпространство $L^p(\mathbb{R}_+, dy)$, порожденное элементом $\ell_{0,p}(y) = e^{-\frac{y}{p}}$.)

Далее мы устанавливаем изометрический изоморфизм между $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ и $L^q(\mathbb{R}_+)$ с помощью некоторых явных операторов типа

Фурье. Этот результат является аналогом (обобщением) теоремы Пэли-Винера для нашей ситуации.

Теорема 1.9 *(Теорема 3.10) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Изометрический изоморфизм*

$$R_\lambda^{-1} : L^q(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$$

определяется равенством

$$(R_\lambda^{-1}\varphi)(z) = \frac{p^{\frac{\lambda+1}{p}}}{\sqrt{2}\sqrt[p]{2^\lambda \Gamma(\lambda+2)}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \varphi(\xi)\xi^{\frac{\lambda+1}{p}} e^{i\xi z} d\xi, \qquad (1.2)$$

где $\Gamma(x)$ *обозначает Гамма-функцию.*

Обратный изоморфизм

$$R_\lambda : \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+)$$

имеет вид:

$$(R_\lambda f)(x) = \chi_+(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\, \theta_{\lambda,p}^{p-1}(x) \int\limits_{\Pi} f(\omega)e^{-ix\overline{\omega}}e^{-x(p-2)\operatorname{Re}\omega} d\nu_\lambda(\omega)$$

$$= \chi_+(x)\frac{\lambda+1}{\sqrt{2}}\, \theta_{\lambda,p}^{p-1}(x) \ \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} f(\xi+i\eta)e^{-ix(\xi-i\eta)}e^{-x(p-2)\xi}\frac{1}{\pi}(2\eta)^\lambda d\eta d\xi, \qquad (1.3)$$

где $\theta_{\lambda,p}(x)$ *задается формулой (3.8),* $d\nu_\lambda(\omega) = \frac{(\lambda+1)}{\pi}(2\eta)^\lambda d\eta d\xi$.

Как следствие, получим описание норм функций из пространства $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$:

Теорема 1.10 *(Теорема 3.11) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, $f \in \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$. *Тогда*

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)} = \|R_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}.$$

Наконец, мы применяем полученные результаты к изучению операторов Теплица с символами, зависящими от вертикальной переменной в $\mathcal{A}_{\lambda}^{q,p}(\Pi)$. Это иллюстрирует удобство и важность нашего подхода.

Для $d\nu_\lambda$ - измеримой функции $a = a(z)$ на Π рассмотрим оператор Теплица, не обязательно ограниченный, но формально определенный на $\mathcal{A}_{\lambda}^{q,p}(\Pi)$ следующим образом:

$$T_a^{(\lambda)} f = B_{\Pi}^{(\lambda)} a f.$$

Обозначим через $L^1_{\exp}(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy)$ класс функций $a = a(y)$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие:

$$a(y) e^{-\varepsilon y} \in L^1(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy).$$

Пусть функция $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(x)$ задается равенством:

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty a\left(t/p\right) e^{-tx}\, t^\lambda dt, \ x \in \mathbb{R}_+, \tag{1.4}$$

а символ оператора Теплица $a = a(y)$ принадлежит $L^1_{\exp}(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy)$.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.11 *(Теорема 3.14) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \ \lambda > -1$. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *с символом* $a = a(y)$, *действующий в* $\mathcal{A}_{\lambda}^{q,p}(\Pi)$, *посредством изометрических изоморфизмов* $R_\lambda, \ R_\lambda^{-1}$ *эквивалентен оператору умножения*

$$\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1},$$

действующему в $L^q(\mathbb{R}_+)$. *Функция* $\gamma_{a,\lambda}(x)$ *задается равенством (1.4), а операторы* $R_\lambda, \ R_\lambda^{-1}$ *имеют вид (1.3), (1.2) соответственно.*

Теорема 1.12 *(Теорема 3.15) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, *функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *определяется равенством (1.4). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен на* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *если и только если функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *ограничена.*

2. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество*

$$\operatorname{sp} T_a^{(\lambda)} = \overline{\operatorname{Range} \gamma_{a,\lambda}}.$$

Конечно, можно двигаться дальше в этом направлении, изучая алгебры таких операторов Теплица и другие свойства операторов и пространств $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$, аналогичные классической ситуации, см., например, [20].

В третьей главе диссертации приводятся результаты исследования в третьем случае (полярные координаты на полуплоскости). Естественно, учитывая геометрию, мы используем преобразование Меллина, которое в конечном счете пересчитывается в терминах Фурье, если говорить об общем подходе, развитом в работе [8]. Именно благодаря этой работе и появилась возможность строго обосновать определение таких новых функциональных пространств - подробнее в разделе 4.2 .

Пусть $\Gamma = \mathbb{R} \times (0, \pi) \subset \mathbb{C}$ — (открытая) горизонтальная полоса в комплексной плоскости, заданная точками $\tau = \eta + \imath\theta$, где $\eta \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, \pi)$. Отображение

$$\exp : \tau \longmapsto \exp(\tau) = e^{\eta + \imath\theta} = re^{\imath\theta} = z \in \Pi$$

является биголоморфизмом.

Для каждого $\lambda > -1$ введем линейную биекцию

$$\mathrm{T}_\lambda : C(\Pi) \to C(\Gamma),$$

полагая

$$(\mathrm{T}_\lambda f)(\tau) = e^{(\frac{\lambda}{2}+1)\tau} f(e^\tau), \quad \forall \tau \in \Gamma, \quad \forall f \in C(\Pi).$$

Очевидно, T_λ дает биекцию между голоморфными функциями,

$$\mathrm{T}_\lambda : \mathrm{Hol}(\Pi) \to \mathrm{Hol}(\Gamma).$$

Биекция T_λ связывает преобразование Меллина с преобразованием Фурье:

$$((M \otimes I) f)(\xi, \theta) = e^{-\imath\theta(1+\frac{\lambda}{2})}((\mathrm{F} \otimes I)\, \mathrm{T}_\lambda f)(\xi, \theta),$$

$$\forall (\xi, \theta) \in \Gamma, \quad \forall f \in C_c(\Pi),$$

где $\mathrm{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ - преобразование Фурье, $C_c(\Pi)$ - множество всех непрерывных функций с компактным носителем на Π.

Символом $C_c^\infty(0, \pi)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $(0, \pi)$.

Пусть $X(0, \pi)$ — комплексное банахово пространство распределений на $(0, \pi)$, равномерно вложенное в пространство распределений $C_c^\infty(0, \pi)'$.

Рассмотрим сначала нормированное пространство

$$L^{q;X}(\Gamma) = \left\{ \varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(0, \pi)) \middle| \quad \|\varphi(\xi, \cdot)\|_{X(0,\pi)} \in L^q(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q;X}(\Gamma)} = \| \|\varphi\|_{X(0,\pi)} \|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Мы будем интерпретировать $\varphi \in L^{q;X}(\Gamma)$ как распределения $\varphi(\xi, \theta)$ на Γ (см. ниже), такие, что отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi, \cdot)$ есть $\mathbb{R} \to X(0, \pi)$, а отображение $\xi \mapsto \|\varphi(\xi, \cdot)\|_{X(0,\pi)}$ принадлежит $L^q(\mathbb{R})$.

Более того, по лемме 5 из [8] имеем непрерывное вложение

$$L^{q;X}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}_t(\Gamma)'$$

в пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$, которые умерены по первой переменной. Точнее,

$$\mathcal{D}_t(\Gamma) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \,\widehat{\otimes}\, C_c^\infty(0,\pi)$$

— тензорное произведение двух ядерных пространств: пространства функций Шварца на $\mathbb{R}$ и пространства тестовых функций на $(0,\pi)$. Проще говоря, $\mathcal{D}_t(\Gamma)$ — это пространство гладких функций, которые быстро убывают по переменной ξ и имеют компактный носитель по переменной θ. Соответственно, $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ — это двойственное пространство распределений, которые умеренны по переменной ξ.

На верхней полуплоскости Π мы будем использовать тестовое функциональное пространство

$$\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathrm{T}_\lambda^{-1}\, \mathcal{D}_t(\Gamma)$$

с индуцированной локально выпуклой топологией и его двойственное пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Pi)'$. Показывается, что

$$(M \otimes I)\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathcal{D}_t(\Gamma),$$

$$(M \otimes I)\mathcal{D}_t(\Pi)' = \mathcal{D}_t(\Gamma)'. \tag{1.5}$$

Введем пространство со смешанной нормой $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, как пространство распределений $f \in \mathcal{D}_t(\Pi)'$, таких что (обобщенное, то есть в смысле распределений) преобразование Меллина по первой переменной $\widetilde{f}_{r\to\xi} = (M \otimes I)f$, рассматриваемое как отображение $\xi \mapsto \widetilde{f}_{r\to\xi}(\xi,\cdot)$, является локально интегрируемой по Бохнеру функцией

$$\widetilde{f}_{r\to\xi} : \mathbb{R} \to X(0,\pi),$$

и следующая норма конечна:

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widetilde{f}_{r\to\xi}(\xi,\cdot) \right\|^q_{X(0,\pi)} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widetilde{f}_{r\to\xi} \right\|_{L^{q;X}(\Gamma)}.$$

Другими словами,

$$\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Pi)' \middle| \quad \widetilde{f}_{r\to\xi} \in L^{q;X}(\Gamma) \right\},$$

подробности см. в [8].

Аналогичным образом рассмотрим пространство

$$\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Gamma)' \middle| \quad \widehat{f}_{\eta\to\xi} \in L^{q,X}(\Gamma) \right\},$$

где $\widehat{f}_{\eta\to\xi} = (\mathrm{F} \otimes I) f$ — преобразование Фурье по первой переменной, с нормой

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)} = \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{\eta\to\xi} \right\|_{L^{q;X}(\Gamma)}.$$

Теорема 1.13 *(Теорема 4.1) Пусть* $1 \leqslant q < \infty$. *Пространство* $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$ *является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в* $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ *и изометрически изоморфным* $L^{q;X}(\Gamma)$ *посредством преобразования Меллина по первой переменной:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} M \otimes I : \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi) \to L^{q;X}(\Gamma).$$

Пространство $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)$ *является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в* $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ *и изометрически изоморфным* $L^{q;X}(\Gamma)$ *посредством преобразования Фурье по первой переменной:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{F} \otimes I : \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma) \to L^{q;X}(\Gamma).$$

Более того,

$$\mathrm{T}_\lambda : \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi) \to \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)$$

является изометрическим изоморфизмом нормированных векторных пространств.

Теперь обратимся к конкретному случаю, выбрав

$$X(0,\pi) = L^p((0,\pi), 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),\ \ 1 \leqslant p < \infty,\ \ \lambda > -1.$$

При указанном выборе $X(0,\pi)$ будем обозначать

$$\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi), \quad L^{q,p}_\lambda(\Gamma) = L^{q;X}(\Gamma),$$

в смысле определений, приведенных выше.

Следовательно,

$$L^{q,p}_\lambda(\Gamma) = L^q(\mathbb{R}, L^p((0,\pi), 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),\ d\xi)$$

с нормой:

$$\| f \|_{L^{q,p}_\lambda(\Gamma)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\pi |f(\xi,\theta)|^p \, 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть

$$\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathrm{Hol}(\Pi) \cap \dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$$

будет множеством тех элементов $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, которые являются аналитическими на Π.

Теорема 1.14 *(Теорема 4.2) Пусть* $1 \leqslant p,q < \infty,\ \lambda > -1$. *Нормированное подпространство* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi) \subset \dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *является полным.*

Оператор $U_{1,\lambda}$ определим на функциях из $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ как результат сопоставления

$$U_{1,\lambda} : f(r,\theta) \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(M_{r\to\xi} \otimes I \right) f \right)(\xi,\theta) \in L^{q,p}_\lambda(\Gamma),$$

где $M_{r\to\xi}$ - преобразование Меллина (4.1), действующее по переменной r. Так что по определению

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)} = \|U_{1,\lambda}f\|_{L^{q,p}_{\lambda}(\Gamma)}.$$

Пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$ определим как замыкание функций $\varphi = \varphi(\xi,\theta)$ из $L^{q,p}_{\lambda}(\Gamma)$, для которых справедливо равенство

$$\left(\left(i\xi - \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\right) I + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi(\xi,\theta) = 0.$$

в слабом смысле (в смысле $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ распределений). Таким образом,

$$\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma) = \{\varphi(\xi,\theta) = f(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} : f(\xi)\in L^q(\mathbb{R})\},$$

где

$$\vartheta_{\lambda,p}(\xi) = \frac{\left|\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}+\frac{p\xi i}{2}\right)\right|^{\frac{1}{p}}}{\sqrt[p]{\pi\Gamma(\lambda+2)}}\, e^{\frac{\pi\xi}{2}},$$

$\Gamma(x)$ обозначает Гамма-функцию.

Теорема 1.15 *(Теорема 4.4) Пусть* $1\leqslant p,q<\infty,\ \lambda>-1$. *Сужение изометрического изоморфизма* $U_{1,\lambda}$ *на пространство* $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *является изометрическим изоморфизмом между* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *и* $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$, *то есть*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)} = \|U_{1,\lambda}f\|_{L^{q,p}_{\lambda}(\Gamma)}.$$

И в этом случае получаем теорему типа Пэли-Винера:

Теорема 1.16 *(Теорема 4.7) Пусть* $1\leqslant p,q<\infty,\ \lambda>-1$. *Изометрический изоморфизм*

$$R^{-1}_{\lambda} : L^q(\mathbb{R}) \longrightarrow \dot{\mathcal{A}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$$

определяется равенством

$$(R^{-1}_{\lambda}f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\mathbb{R}} z^{i\xi-(1+\frac{\lambda}{2})}\vartheta_{\lambda,p}(\xi)f(\xi)d\xi.$$

Обратный изоморфизм:

$$R_\lambda : \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$$

определяется равенством:

$$(R_\lambda\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi)\int\limits_{\Pi}(\overline{z})^{-i\xi-(1+\frac{\lambda}{2})}\varphi(z)e^{-(p-2)\xi\arg z}d\mu_\lambda(z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi)\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi\left(\int\limits_{\mathbb{R}} r^{-i\xi+\frac{\lambda}{2}}\; e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}\varphi(re^{i\theta})\frac{1}{\pi}dr\right)\;2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta,$$

где $z = re^{i\theta},\; d\mu_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}(\lambda+1)r2^\lambda\sin^\lambda\theta drd\theta.$

Как следствие, получаем описание норм функций из класса $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Теорема 1.17 *(Теорема 4.8) Пусть* $1 \leqslant p,q < \infty,\ \lambda > -1,\ f \in \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$. *Тогда*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}_\lambda^{q,p}(\Pi)} = \|R_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}.$$

Наконец, переходим к изучению теплицевых операторов с символами, зависящими от $\theta = \arg z$ в $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Для $d\nu_\lambda$ - измеримой функции $a = a(z)$ рассмотрим оператор Теплица, не обязательно ограниченный, но формально определённый на $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ следующим образом:

$$T_a^{(\lambda)}f = B_\Pi^{(\lambda)}f.$$

Пусть функция $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(\xi)$ задается равенством:

$$\gamma_{a,\lambda}(\xi) = 2^\lambda\,(\lambda+1)\,\vartheta_{\lambda,p}^p(\xi)\int_0^\pi a(\theta)\,e^{-p\theta\xi}\sin^\lambda\theta\,d\theta, \tag{1.6}$$

где функция $\vartheta_{\lambda,p}$ имеет вид (4.10), а символ оператора Теплица $a = a(\theta)$ принадлежит $L^1((0,\,\pi),\,\sin^\lambda\theta d\theta)$.

Имеет место следующее спектральное представление для оператора Теплица.

Теорема 1.18 *(Теорема 4.10) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *с символом* $a = a(\theta)$, *действующий в* $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$, *эквивалентен посредством изометрического изоморфизма оператору умножения:*

$$\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1},$$

действующему в $L^q(\mathbb{R})$. *Функция* $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(\xi)$ *задается равенством (4.21), операторы* $R_\lambda, R_\lambda^{-1}$ *имеют вид (4.19), (4.20).*

Как следствие, получаем критерий ограниченности

Теорема 1.19 *(Теорема 4.11) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$, *функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *определяется равенством (4.21). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен в* $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *если и только функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *ограничена.*

2. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество*

$$sp\; T_a^{(\lambda)} = \overline{\mathrm{Range}\,\gamma_{a,\lambda}}.$$

Доклады на конференциях и участие в научных проектах

Результаты диссертационной работы докладывались в разные годы на научных конференциях, в том числе на международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VII 24-28 апреля 2017, г.Ростов-на-Дону, ДГТУ, на международной конференции "Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа 22-27 августа 2021, г.Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет (секционный доклад), на международной конференции "Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа 25-30 августа 2024, г.Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет (секционный доклад), на международной научной конференции "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа 11-14 марта 2025, г.Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН, Кабардино-Балкарская Республика, Россия (доклад).

Диссертация выполнена при частичной поддержке научного гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект РФФИ № 18-01-00094-а (соискатель - исполнитель проекта), а также при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ в рамках проектов Министерства образования и науки РФ (Соглашение № 075-02-2022-893, Соглашение № 075-02-2023-924, Соглашение № 075-02-2024-1427 и Соглашение № 075-02-2025-1720).

2 Глава 1
Весовые пространства со смешанной нормой на единичном диске

2.1 Краткое содержание и предварительные сведения

Модельная ситуация эллиптической геометрии в единичном диске - полярные координаты в диске и, согласно этой системе координат, вводится смешанная норма в классе измеримых на диске функций (распределений).

В этой главе диссертации вводится и рассматривается пространство со смешанной нормой в единичном диске, определенное в терминах дискретного преобразования Фурье и его подпространство аналитических функций, что на самом деле и есть основной объект исследования. Как уже было отмечено, благодаря однозначной характеризации аналитических в единичном диске функций посредством сходящихся в диске рядов (Тейлора) можно однозначно выделить (охарактеризовать) подкласс аналитических функций внутри общего пространства со смешанной нормой.

Упомянутая выше особенность эллиптического случая позволяет нам не прибегать напрямую к общим фактам из статьи [8], и привести определение пространств, используя результаты работы [24]. Тем не менее, нам нужно распространить результаты этой работы на более общий весовой случай, и, чтобы не загружать изложение, мы вынесли ряд технических обобщений в приложение - см. раздел 5.2.

Мотивация данного определения (см. ниже определение 2.1), равно как и аналогичных определений в двух других главах диссертации, состоит в том, что в случае гильбертова пространства

$L^2(\mathbb{D})$, благодаря равенству Парсеваля, мы имеем тождество

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^2_{L^2(I,2rdr)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в случае $X(I) = L^2(I, 2rdr)$ и $q = 2$ пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, естественно, совпадает с $L^2(\mathbb{D})$ и соответствующее аналитическое подпространство $\mathcal{A}^{2;X}(\mathbb{D})$ есть классическое пространство Бергмана - Джрбашяна $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, изученное в работах многих авторов (см. [36, 38, 39]). Нам кажется важным подробнее остановиться на технике в классическом случае, и мы отразили это в разделе 5.1 в приложении к диссертации.

Замечание 2.1 *Как было отмечено во введении, определение нового пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ дается фактически напрямую, используя технику гармонического анализа. Однако для этого нам необходимо требовать $X(I) \subseteq L^1_\lambda(I),\ \lambda > -1$, в то время как результаты указанной работы [8] позволили бы нам предполагать большую общность: $X(I)$ - нормированное пространство. Тем не менее, наша основная задача - изучение случая весового пространства Лебега $X(I) = L^p_\lambda(I),\ \lambda > -1$, ввиду чего выбранная нами общность оправдана.*

В этой главе диссертации используются обозначения, определенные во введении, а также следующие.

Пусть Ω - область в $\mathbb{C}$. Мы будем отождествлять $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ полагая $z = (x, y) = x + iy$. Пусть $\mathbb{D}$ - единичный диск в $\mathbb{C}$, $\mathbb{T}$ - единичная окружность, $I = (0, 1)$. Символом $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначаем класс бесконечно дифференцируемых в Ω функций с компактным носителем.

Положим $l^2 = l^2_+ \otimes l^2_-$, где l^2_+, l^2_-- подпространства (двумерного) l^2, состоящие из последовательностей $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, для которых

$c_n = 0$, при $n \in \mathbb{Z}_-$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ соответственно (при этом будем предполагать, что пространство $\mathbb{Z}_+$ содержит $\{0\}$).

Обозначим через p_+ и p_- ортогональные проекторы пространства l^2 на l^2_+ и l^2_- соответственно. Введем характеристические функции $\chi_\pm$ множеств $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-$:

$$\chi_\pm = \{\chi_\pm(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty,$$

где $\chi_\pm(n) = 1$, для $n \in \mathbb{Z}_\pm$ и $\chi_\pm(n) = 0$, для $n \in \mathbb{Z}_\mp$.

Соответственно,

$$p_\pm = \chi_\pm I. \tag{2.1}$$

Пусть

$$\mathrm{dA}(z) = \frac{1}{\pi} dxdy, \qquad z = x + iy,$$

$$\mathrm{dA}_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda \mathrm{dA}(z) \tag{2.2}$$

$$= \frac{(\lambda+1)}{\pi}(1-|z|^2)^\lambda dxdy = \frac{(\lambda+1)}{\pi}(1-r^2)^\lambda r dr d\sigma(t),$$

где

$$\lambda > -1, \quad z = rt, \quad r = |z|, \quad t = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{T}, \quad d\sigma(t) = \frac{dt}{it}.$$

Как обычно, через $L^p_\lambda(\mathbb{D})$, $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda > -1$ обозначаем пространство измеримых на $\mathbb{D}$ функций (классов эквивалентностей), для которых следующая норма конечна

$$\|f\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \mathrm{dA}_\lambda(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Также будем использовать

$$L^p_\lambda(I) = \{\varphi : \|\varphi\|_{L^p_\lambda(I)} = \left(\int_I |\varphi(r)|^p (\lambda+1)(1-r^2)^\lambda 2r dr\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Дискретное преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}, d\sigma(t)) \longrightarrow l^2 \equiv l^2(\mathbb{Z})$$

определяется следующим образом:

$$\mathcal{F} : f(t) \longrightarrow \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)t^{-n}d\sigma(t), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $d\sigma(t) = \frac{dt}{it}$ - дифференциал длины дуги окружности.

Обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}^{-1} : l^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{T}, d\sigma(t))$$

осуществляется следующим образом

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n.$$

2.2 Весовые пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ и $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ - общая схема

Пусть

$$X = X(I)$$

обозначает банахово пространство функций, заданных на интервале $I = (0,1)$, содержащее все простые функции, и такое, что

$$X(I) \subseteq L^1_\lambda(I), \quad \lambda > -1, \tag{2.3}$$

при этом $\|\cdot\|_{X(I)}$ обозначает норму в этом пространстве. Здесь, если не оговорено противное, параметр λ считается фиксированным числом. В общей схеме мы не будем отмечать в символе X фактическую зависимость от λ, выраженную в (2.3).

Пусть задана функция $f(z) = f(r, e^{i\alpha})$ на $\mathbb{D}$ или, более общо, распределение на $\mathbb{D}$. Символами f_n будем обозначать соответствующие коэффициенты Фурье, понимаемые, вообще говоря, в смысле распределений (см. Приложение).

Определение 2.1 *Введем пространство со смешанной нормой*

$$\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D}), \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

как пространство всех распределений f на $\mathbb{D}$ для которых коэффициенты Фурье f_n являются регулярными функциями $f_n \in X(I)$, и следующие нормы конечны:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^q_{X(I)}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.4}$$

Теорема 2.2 *Пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, $1 \leqslant q < \infty$, является полным.*

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность $\{f^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, где $f^k \in \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{Z}$ последовательность коэффициентов Фурье $\{f^k_n\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, также фундаментальна в $X(I)$ и сходится в $X(I)$ к некоторому элементу $f_n \in X(I)$. Из неравенства

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\|f^k_n\|_{X(I)} - \|f^m_n\|_{X(I)}\right|^q \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f^k_n - f^m_n\|^q_{X(I)}$$

следует, что числовая последовательность элементов

$$\{\|f^k_n\|_{X(I)}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

фундаментальна в l^q, $1 \leqslant q < \infty$, и, следовательно, сходится к некоторой числовой последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^q$. Очевидно, $a_n = \|f_n\|_{X(I)}$, и поэтому распределение

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(r)e^{in\alpha}$$

является пределом последовательности $\{f^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, где $f^k \in \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, и обобщенные коэффициенты Фурье этого распределения совпадают с f_n, согласно теореме 5.2. Поэтому, $f \in \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ и пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ полно. $\square$

Определение 2.2 *Определим аналитическое пространство со смешанной нормой*

$$\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D}), \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

как пространство функций из $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, *которые аналитичны в* $\mathbb{D}$.

Следовательно, норма функции $f \in \mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ задается соотношением

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|f_n\|^q_{X(I)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Замечание 2.3 *Из определения пространства* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, *следует, что коэффициенты Фурье* $f_n = f_n(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, *функции* f *в пространстве* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ *могут быть представлены как*

$$f_n(r) = \begin{cases} a_n\|r^n\|^{-1}_{X(I)} r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l^q_+, \quad |a_n| = \|f_n\|_{X(I)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

кроме того,

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})} = \|\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\|_{l^q_+}.$$

Доказательство. Действительно, для аналитической функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n$ и для каждого r, $0 < r < 1$, имеем

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a'_k r^k e^{ik\alpha}\right) e^{-in\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a'_k r^k \int_0^{2\pi} e^{ik\alpha} e^{-in\alpha} d\alpha \\ &= \begin{cases} a'_n r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-, \end{cases} \end{aligned}$$

и обозначая $a'_n = a_n \|r^n\|^{-1}_{X(I)}$ получим требуемое. $\square$

Очевидно, что мультипликаторы $\|r^n\|^{-1}_{X(I)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ из (2.5) характеризуют функции в $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$. Их поведение, когда $n \to \infty$, является ключевым моментом во всем исследовании. Такое поведение зависит только от выбора пространства $X(I)$. Таким образом, чтобы охарактеризовать введенное пространство в каждом конкретном случае $X(I)$, мы должны изучить асимптотическое поведение чисел $\|r^n\|^{-1}_{X(I)}$. Это довольно сложный вопрос для пространств функций со специальной нормой, таких как, например, норма пространства Лебега переменного порядка, норма Морри пространства и т. д.

Замечание 2.4 *Наша главная цель - изучение пространства аналитических функций Бергмана $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$. Пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ играет только фоновую роль: пространство $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ будет получено из $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ через проекцию Бергмана. В определении пространства $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ ввиду свойства проекции Бергмана члены ряда с отрицательными индексами n можно заменить, например, на $\|f_n\|_{Y(I)}$ с произвольным банаховым пространством $Y(I)$. Полученное подпространство аналитических функций $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ будет одинаковым независимо от того, какой тип нормы используется для отрицательных n. Теорема 2.2 также остается верной при таких изменениях, если пространство $Y(I)$ полно. Для простоты изложения мы оставим определение пространства $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, как указано в (2.4).*

2.3 Теоремы об ограниченности весового проектора Бергмана - общая схема

Пусть

$$\mathcal{S}_0^X(\mathbb{D}) \subset \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$$

обозначает множество функций вида

$$f(z) = f(r, e^{i\alpha}) = \sum_{n=-N}^{N} f_n(r) e^{in\alpha}, \quad f_n \in X(I), \quad z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D},$$

где $N \in \mathbb{Z}_+$ - произвольно.

Поскольку

$$X(I) \subseteq L^1_\lambda(I) \Rightarrow \mathcal{S}_0^X(\mathbb{D}) \subset L^1_\lambda(\mathbb{D}), \ \ \lambda > -1,$$

следовательно, весовой проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ определен на функциях такого типа как интегральный оператор

$$\begin{aligned}
(B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f)(z) &= \int_{\mathbb{D}} K_\lambda(z, w) f(w) \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z\overline{w})}{(1 - w)^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D},
\end{aligned}$$

где обозначено ядро оператора Бергмана

$$\begin{aligned}
K_\lambda(z, w) &= \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e_{n,\lambda}(z) \overline{e_{n,\lambda}(w)}, \qquad z, w \in \mathbb{D}
\end{aligned}$$

и $\{e_{n,\lambda}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ - ортонормированный базис в $L^2_\lambda(\mathbb{D})$:

$$e_{n,\lambda}(z) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda + 1) B(n + 1, \lambda + 1)}} \, z^n, \ \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.6}$$

Приведенные выше равенства проверяются на основе известного разложения:

$$(1 - z\overline{w})^{-2-\lambda} = (\lambda + 1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} B^{-1}(n + 1, \lambda + 1)(z\overline{w})^n, \ \ |zw| < 1.$$

Замечание 2.5 *Очевидно, что $\mathcal{S}_0^X(\mathbb{D})$ является плотным множеством в*

$$\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D}), \qquad 1 \leqslant q < \infty.$$

Проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ на $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ понимается как непрерывное продолжение с этого плотного множества (подробнее см. доказательство теоремы 2.7).

Для $g \in X(I)$ обозначим:

$$\gamma_n^\lambda(g) = \frac{1}{B(n+1, \lambda+1)} \int_0^1 \tau^n g(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau. \tag{2.7}$$

Лемма 2.6 *Для функции $f \in L_\lambda^1(\mathbb{D})$ пусть $f_n = f_n(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, обозначают коэффициенты Фурье. Тогда коэффициенты Фурье функции $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f$ имеют вид:*

$$\left(B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f\right)_n (r) = \begin{cases} \gamma_n^\lambda(f_n) r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ \quad 0, & n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Доказательство. Зафиксируем ортонормированный базис в $L_\lambda^2(\mathbb{D})$, определенный в (2.6), и для функции $f \in L_\lambda^1(\mathbb{D})$ рассмотрим

$$\begin{aligned}
(B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f)(z) &= \int_{\mathbb{D}} K_\lambda(z,w) f(w) \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} e_{n,\lambda}(z) \overline{e_{n,\lambda}(w)} f(w) \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} e_{n,\lambda}(z) \int_{\mathbb{D}} \overline{e_{n,\lambda}(w)} f(w) \mathrm{dA}_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Запишем

$$f(w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\tau) e^{im\alpha}, \quad |w| = \tau, \ \alpha = \arg w,$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \overline{e_{n,\lambda}(w)} f(w) \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \overline{e_{n,\lambda}(w)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m(\tau) t^m \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\lambda+1}{\sqrt{(\lambda+1)B(n+1,\lambda+1)}} \\
&\times \int_I \tau^n f_m(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} e^{im\alpha} d\alpha \\
&= \frac{\lambda+1}{\sqrt{(\lambda+1)B(n+1,\lambda+1)}} \int_I \tau^n f_n(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau.
\end{aligned}$$

Поэтому, полагая $z = rt$, $|z| = r$, мы получим

$$\begin{aligned}
(B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f)(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} e_{n,\lambda}(z) \frac{\lambda+1}{\sqrt{(\lambda+1)B(n+1,\lambda+1)}} \\
&\times \int_I \tau^n f_n(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} t^n\, r^n \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)} \int_I \tau^n f_n(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau.
\end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты Фурье функции $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f$ для $n \in \mathbb{Z}_+$ имеют указанный в формулировке леммы вид. $\square$

Результаты, приведенные выше, позволяют нам сформулировать следующее условие на пространство $X(I) (\subseteq L^1_\lambda(I))$, обеспечивающее ограниченность соответствующей проекции Бергмана как проекции из $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$.

Теорема 2.7 *Пусть* $1 \leqslant q < \infty$, $\lambda > -1$ *и имеет место условие*

$$n^{\lambda+1} \left| \int_0^1 t^n g(t)(1-t)^\lambda dt \right| \|r^n\|_{X(I)} \leqslant C\|g\|_{X(I)}, \quad n \to \infty,\ g \in X(I). \tag{2.8}$$

Тогда оператор $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ *ограничен как проектор из* $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ *на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$.

Доказательство. Поскольку

$$X(I) \subseteq L^1_\lambda(I) \Rightarrow \mathcal{S}^X_0(\mathbb{D}) \subset L^1_\lambda(\mathbb{D}),$$

то с учетом леммы 2.6 мы получаем следующее выражение для коэффициентов Фурье $(B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} f)_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$ в пространстве $X(I)$, когда $f \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$:

$$\|(B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} f)_n\|_{X(I)} = \left|\gamma^\lambda_n(f_n)\right| \|r^n\|_{X(I)},\ \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

γ^λ_n определено в (2.7).

Поэтому, для $f \in \mathcal{S}^X_0(\mathbb{D})$ мы получим

$$\begin{aligned}
\|B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} f\|^q_{\mathcal{L}^{q,X}(\mathbb{D})} &= \sum_{n=-N}^{N} \| \left(B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} f\right)_n \|^q_{X(I)} = \sum_{n=-N}^{N} \left|\gamma^\lambda_n(f_n)\right|^q \|r^n\|^q_{X(I)} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{B^q(n+1, \lambda+1)} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \tau^n f_n(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau\right)^q \|r^n\|^q_{X(I)} \\
&\leqslant (4C)^q \sum_{n=-N}^{N} \|f_n\|^q_{X(I)} = (4C)^q \|f\|^q_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})},
\end{aligned}$$

где константа C взята из (2.8) и, следовательно, не зависит от f. Завершение доказательства этой теоремы теперь вытекает из теоремы Банаха-Штейнгхауса. □

Следствие 2.8 *Пусть $1 \leqslant q < \infty$ и пусть условие (2.8) выполнено. Тогда пространство $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Возьмем некоторую последовательность функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с элементами $f_n \in \mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D}),\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Согласно теореме 2.2, пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ полное, тогда $\exists f \in \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D}) : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})} = 0$. Покажем, что $f \in \mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, то есть выполняется условие $f = B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f$. Действительно, для $n \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства:

$$
\begin{aligned}
f - f_n &= f - B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f + B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f_n - B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f \\
&= f - B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f + B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} (f - f_n).
\end{aligned}
$$

В силу теоремы 2.7 оператор $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ ограничен и выполняется:

$$
\|B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} (f - f_n)\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})} \leqslant C \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})} \to 0,\ n \to \infty.
$$

Следовательно, $f - B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} f = 0$. Что и требовалось доказать. □

Для доказательства следующего результата мы будем использовать следующее условие: предположим, что существует $\gamma > 0$ такое, что выполняется

$$
\frac{\|r^n\|_{X(I)}}{\|r^{n+j}\|_{X(I)}} \leqslant C \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma}, \quad n,\ n + j \to \infty. \tag{2.9}
$$

Нам понадобится также асимптотика отношения гамма-функций:

$$
\frac{\Gamma(z + a)}{\Gamma(z + b)} = z^{a-b} \sum_{m=0}^{N} \frac{C_m}{z^m} + z^{a-b} O\left(z^{-N-1}\right), \quad |z| \to \infty, \tag{2.10}
$$

если $|\arg(z+a)| < \pi$, $C_0 = 1$, и коэффициенты C_m, $m = 1, 2, \ldots, N$, обобщенные полиномы Бернулли

$$
C_m = \frac{(-1)^m \Gamma(b - a + m)}{m! \Gamma(b - a)} B_m^{a-b+1}(a),
$$

см. [37] и [7], стр. 17.

Лемма 2.9 *Пусть $-1 < \lambda < \lambda_0$ и пространство $X(I) \subseteq L^1_\lambda(I)$ таково, что условие (2.9) выполнено с $0 \leqslant \gamma < \lambda + 1$. Если условие (2.8) выполнено с λ_0, то оно также выполнено с λ.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \lambda - \lambda_0$. Используем разложение

$$(1-r)^\sigma = -\frac{\sin \pi\sigma}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} B(j-\sigma, 1+\sigma) r^j$$

чтобы получить

$$\begin{aligned}
\gamma_n^\lambda(g) &= \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)} \int_0^1 \tau^n g(\tau)(1-\tau^2)^\sigma (1-\tau^2)^{\lambda_0} 2\tau d\tau \\
&= \frac{\sin \pi|\sigma|}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(j-\sigma,1+\sigma)}{B(n+1,\lambda+1)} \int_0^1 \tau^{n+j} g(\tau)(1-\tau^2)^{\lambda_0} 2\tau d\tau \\
&= \frac{\sin \pi|\sigma|}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(j-\sigma,1+\sigma) B(n+j+1,\lambda_0+1)}{B(n+1,\lambda+1)} \gamma_{n+j}^{\lambda_0}(g) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} C_j(n,\lambda,\lambda_0) \gamma_{n+j}^{\lambda_0}(g),
\end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
C_j(n,\lambda,\lambda_0) &:= \frac{\sin \pi|\sigma|}{\pi} \frac{B(j-\sigma,1+\sigma) B(n+j+1,\lambda_0+1)}{B(n+1,\lambda+1)} \\
&\simeq \frac{(n+1)^{\lambda+1}}{(j-\sigma)^{1+\sigma}(n+j+1)^{\lambda_0+1}}, \quad n, j \to \infty,
\end{aligned}$$

ввиду (2.10). Таким образом, поскольку

$$|\gamma_{n+j}^{\lambda_0}(g)| \, \|r^{n+j}\|_{X(I)} \leqslant C\|g\|_{X(I)}, \ n+j \to \infty, \ g \in X(I),$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
\left|\gamma_n^\lambda(g)\right| \|r^n\|_{X(I)} &\leqslant C\|g\|_{X(I)} \sum_{j=0}^{\infty} C_j(n,\lambda,\lambda_0) \|r^{n+j}\|_{X(I)}^{-1} \|r^n\|_{X(I)} \\
&\leqslant C\|g\|_{X(I)} (n+1)^{\lambda+1} \\
&\times \int_0^\infty \frac{\left(\frac{s+1}{n}\right)^\gamma ds}{(s+1)^{1+\sigma}(n+s+1)^{\lambda_0+1}} \\
&\leqslant C_1\|g\|_{X(I)} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\lambda-\lambda_0-\gamma}(y+1)^{\lambda_0+1}} \\
&\leqslant C\|g\|_{X(I)}.
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы. $\square$

Как следствие, получаем следующий результат.

Теорема 2.10 *Пусть $-1 < \lambda < \lambda_0$ и пространство $X(I) \subseteq L^1_\lambda(I)$ таково, что условие (2.9) справедливо с $0 \leqslant \gamma < \lambda + 1$. Если оператор $B^{(\lambda_0)}_{\mathbb{D}}$ ограничен как проектор из $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, то же самое справедливо и для оператора $B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}}$.*

Доказательство. Следует из леммы 2.9 ввиду теоремы 2.7. $\square$

2.4 Операторы Теплица с радиальными символами на $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ - общая схема

Для функции $a = a(|z|) \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$ рассмотрим оператор Теплица $T^{(\lambda)}_a$, который определен на мономах в $\mathbb{D}$ следующим образом:

$$T^{(\lambda)}_a f(z) = B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} a f(z).$$

Общее определение оператора Теплица в виде несобственного интеграла дается в теореме 2.15.

Для упрощения обозначений всюду ниже будем писать

$$\gamma_{a,\lambda}(n) = \gamma^\lambda_n(at^n).$$

Теорема 2.11 *Для аналитической в $\mathbb{D}$ функции*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

коэффициенты Фурье образа оператора Теплица $T^{(\lambda)}_a$ имеют вид:

$$\left(T^{(\lambda)}_a f\right)_n (r) = \begin{cases} \gamma^\lambda_n(af_n)r^n, & n \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$$

или, иначе,

$$\left(T^{(\lambda)}_a f\right)_n (r) = \begin{cases} \gamma_{a,\lambda}(n)c_n r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-, \end{cases}$$

где

$$\{c_n \|r^n\|_{X(I)}\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l^q_+$$

и для $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\gamma_{a,\lambda}(n) = \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)} \int_0^1 \tau^{2n} a(\tau)\ (1-\tau^2)^\lambda 2\tau\ d\tau. \qquad (2.11)$$

Доказательство. Действительно, для $f(z) = z^n$ имеем

$$\begin{aligned}
T_a^{(\lambda)} z^n &= B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} a(|z|) z^n = \int_{\mathbb{D}} \frac{a(|w|)w^n}{(1-z\overline{w})^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} e_{m,\lambda}(z) \int_{\mathbb{D}} w^n \overline{e_{m,\lambda}(w)} a(|w|) \mathrm{dA}_\lambda(w) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(\lambda+1)B(n+1,\lambda+1)} \\
&\quad \times \int_I \tau^n \tau^m a(\tau)(\lambda+1)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} e^{im\alpha} d\alpha \\
&= z^n \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)} \int_0^1 \tau^{2n} a(\tau)(1-\tau^2)^\lambda 2\tau d\tau \\
&= z^n \gamma_{a,\lambda}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Перемена порядка интегрирования и суммирования в приведенных выше формулах обосновывается за счет абсолютной и равномерной сходимости ряда для функции $w \to (1-z\overline{w})^{-2-\lambda}$ в $\mathbb{D}$ при каждом фиксированном $z \in \mathbb{D}$. Теорема доказана. $\square$

Как следствие, получаем следующие важные результаты.

Пусть последовательность $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ такая, что элементы $\gamma_{a,\lambda}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+$ определяются равенством (2.11).

Теорема 2.12 *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *с радиальным символом на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ *посредством изометрических изоморфизмов эквивалентен оператору умножения на последовательность* $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$*, действующему в пространстве последовательностей* l^q_+.

Теорема 2.13 *Имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ *если и только если последовательность* $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *ограничена.*

2. *Оператор* $T_a^{(\lambda)}$ *компактен на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ *если и только если*

$$\gamma_{a,\lambda}(n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

3. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество* $\{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma = \gamma_{a,\lambda}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ *и его существенный спектр совпадает с замыканием этого множества:* $\text{ess-sp}\, T_a^{(\lambda)} = \overline{\{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma = \gamma_{a,\lambda}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+\}}$.

Доказательство. Доказательство следует из теорем 2.11, 2.12 с учетом замечания 2.3 и определения нормы в $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, а также с учетом классических результатов об ограниченности и компактности операторов умножения в l_+^q (см, например, [21]). $\square$

Замечание 2.14 *Известно много достаточных, а в некоторых случаях необходимых условий ограниченности и стремления к нулю последовательности* $\{\gamma_{a,\lambda}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. *Эти условия были получены (см., например, [18]) в терминах поведения некоторых средних символа* a *при* $r \to 1$. *Есть также много примеров "плохо"ведущих осциллирующих и неограниченных символов, которые порождают ограниченные и даже компактные операторы. Мы сошлемся на книгу [36], см. также имеющиеся там ссылки в отношении недавнего прогресса в развитии теории теплицевых операторов со специальными нестандартными символами на классических весовых пространствах Бергмана на единичном круге и* *полуплоскости. Обратим внимание на то, что в контексте наших пространств $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ условия ограниченности и компактности не зависят от выбора пространства $X(I)$. Мы предполагаем уделить больше внимания изучению теплицевых операторов со специальными символами в изучаемых нами пространствах в дальнейших исследованиях.*

Можно также придать смысл интегральному представлению операторов Теплица с радиальными символами $a = a(|z|) \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$ на единичном диске в терминах интегралов, сходящихся в несобственном смысле, причем в данном контексте функция f - абсолютно произвольная аналитическая функция в диске. Следующая теорема доказана в [30], мы ее приводим с несколько упрощеным доказательством для полноты изложения.

Теорема 2.15 *Оператор Теплица $T_a^{(\lambda)}$ с радиальным символом $a = a(|z|) \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$, применённый к аналитической в $\mathbb{D}$ функции*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

определяется интегральной формулой

$$\begin{aligned}(T_a^{(\lambda)} f)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{a(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w) \qquad (2.12)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{a(w) f(z\overline{w})}{(1 - w)^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w), \qquad z \in \mathbb{D},\end{aligned}$$

где каждый из приведённых выше интегралов понимается, вообще говоря, в несобственном смысле, например:

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{a(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w) = \lim_{r \to 1} \int_{|w|<r} \frac{a(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\lambda}} \mathrm{dA}_\lambda(w).$$

Кроме того, образ оператора $T_a^{(\lambda)}$ на аналитических функциях даётся рядом, сходящимся в $\mathbb{D}$:

$$(T_a^{(\lambda)} f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{a,\lambda}(n) c_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{2.13}$$

где $\gamma_{a,\lambda}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+$ определяются по формуле (2.11).

Доказательство. Доказательство проводится непосредственными вычислениями с учетом результатов предыдущих параграфов. Заметим только, что интеграл

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{w}^m a(|w|)\mathrm{dA}_\lambda(w) &= \lim_{r\to 1}\int_{|w|<r} f(w)\overline{w}^m a(|w|)\mathrm{dA}_\lambda(w)\\ &= \lim_{r\to 1}\int_{|w|<r}\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \overline{w}^m a(|w|)\mathrm{dA}_\lambda(w)\\ &= c_m 2(\lambda+1)\int_0^1 t^{2m+1}(1-t^2)^\lambda a(t)dt\end{aligned}$$

существует как несобственный для всех f аналитических в диске $\mathbb{D}$ при условии $a \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$. Ввиду сходимости в $\mathbb{D}$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и, следовательно, его абсолютной и равномерной сходимости на любом компакте в $\mathbb{D}$, вынесение знака суммы из-под интеграла законно. $\square$

2.5 Весовые пространства со смешанной нормой $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$.

Начиная с этого раздела, если не оговорено противное, мы будем рассматривать

$$X(I) = L^p_\lambda(I), \quad -1 < \lambda < \infty.$$

Соответственно, в таком случае, для упрощения записи мы будем обозначать

$$\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathcal{L}^{q;L^p_\lambda(I)}(\mathbb{D}),$$

$$\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathcal{A}^{q;L^p_\lambda(I)}(\mathbb{D}).$$

Часть результатов может быть распространена на случай общего X, но мы не будем на этом останавливаться.

2.5.1 Описание функций из $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$.

Теорема 2.16 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Для аналитической в* $\mathbb{D}$ *функции*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n \in \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D},$$

норма $\|f\|_{\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})}$ *эквивалентна*

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})} \eqsim \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{|c_n|}{n^{\frac{\lambda+1}{p}}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Согласно замечанию 2.3, коэффициенты Фурье $f_n = f_n(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, функции f в пространстве $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$ могут быть представлены как

$$f_n(r) = \begin{cases} a_n \|r^n\|^{-1}_{L^p_\lambda(I)} r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-, \end{cases} \tag{2.14}$$

где

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l^q_+, \quad |a_n| = \|f_n\|_{L^p_\lambda(I)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

кроме того,

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})} = \|\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\|_{l^q_+}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|r^n\|^p_{L^p_\lambda(I)} &= (\lambda+1)\int_0^1 r^{np}(1-r^2)^\lambda 2r dr \\ &= (\lambda+1)B(\frac{np}{2}+1, \lambda+1) \simeq n^{-\lambda-1}, \;\; n \to \infty \end{aligned}$$

ввиду (2.10). Теорема доказана. $\square$

Для функции φ на единичном диске $\mathbb{D}$, и для $0 \leqslant r < 1$, запишем

$$\mathcal{M}_p(\varphi;r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(r,e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$
$$\mathcal{M}_p(\varphi;r) = \text{ess-sup}_{\,\theta\in[0,2\pi)}|\varphi(r,e^{i\theta})|, \quad p = \infty.$$

Напомним, что класс аналитических в $\mathbb{D}$ функций f, для которых

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} \equiv \lim_{r\to 1}\mathcal{M}_p(f;r) < \infty, \quad 0 < p \leqslant \infty,$$

называется классом Харди (обозначается $H^p(\mathbb{D})$).

Из теоремы Харди-Литтлвуда (см. [12], стр. 76) мы имеем непрерывные вложения:

Теорема 2.17 *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda > -1$.

1. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant 2$. *Тогда*
$$H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D}), \qquad q(1+\frac{1+\lambda}{p}) \geqslant 2;$$

2. *Пусть* $2 \leqslant q < \infty$. *Тогда*
$$\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H^q(\mathbb{D}), \qquad q(1+\frac{1+\lambda}{p}) \leqslant 2.$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 2.16 с учетом теоремы Харди-Литтлвуда (см. [12], стр. 76). $\square$

Мы будем использовать понятие производной или композиции по Адамару.

Пусть функции

$$b(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k z^k, \quad g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n z^n$$

аналитичны в $\mathbb{D}$. Рассмотрим выражение

$$\mathcal{D}(b,g)(z) = b \circ g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} b_n g_n z^n,$$

известное как композиция по Адамару функций b и g. Это общее понятие включает, в частности, операцию дробного интегро-дифференцирования. Оно обобщает дробное дифференцирование аналитической функции g если $b_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и дробное интегрирование аналитической функции g если $b_n \to 0$, при $n \to \infty$.

Для аналитической в $\mathbb{D}$ функции g имеем

$$\mathcal{D}(b,g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=r} b\left(\frac{z}{u}\right) g(u)\frac{du}{u},\ |z| < r < 1,$$

см., например, книги [7], [32].

В нашей ситуации, исходя из структуры нормы в пространстве $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, естественно использовать оператор дробного интегродифференцирования по Адамару вида

$$\mathcal{D}_X g(z) \ = \ \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|r^n\|^{-1}_{X(I)} g_n z^n,$$

где

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n z^n.$$

В случае конкретного выбора $X(I) = L^p_\lambda(I)$ имеем асимптотику

$$\|r^n\|_{L^p_\lambda(I)} \simeq n^{-\frac{\lambda+1}{p}}, \quad n \to \infty,$$

так что приведенный выше оператор эквивалентен (с точностью до умножения коэффициентов Тейлора на ограниченную и отграниченную от нуля последовательность) оператору типа Адамара вида

$$\mathcal{D}_\alpha g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} n^\alpha g_n z^n, \tag{2.15}$$

и также оператору (типа Адамара, но в интегральной форме) вида

$$D_\alpha g(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{g(u)}{\left(1-\frac{z}{u}\right)^{1+\alpha}} \frac{du}{u},$$

где $\alpha = \frac{\lambda+1}{p}$.

Подробнее - в теоремах, приведенных ниже.

Теорема 2.18 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Каждая функция* $f \in \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$ *имеет вид*

$$f = \mathcal{D}_{\frac{\lambda+1}{p}} g$$

с некоторой аналитической функцией

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n z^n,$$

такой, что $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^q$.

Доказательство. Для любой аналитической функции $f \in \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$ имеют место равенства:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} (n+1)^{\frac{\lambda+1}{p}} (n+1)^{-\frac{\lambda+1}{p}} f_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} n^{\frac{\lambda+1}{p}} g_n z^n,$$

где $g_n = (n+1)^{-\frac{\lambda+1}{p}} f_n$, $f_n \in L_\lambda^p(I)$. В силу теоремы 2.16 последовательность $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^q$. $\square$

Замечание 2.19 *Пространства аналитических функций с коэффициентами Тейлора, образующими последовательность в* l_+^q, *вводились и изучались в работах С.А.Виноградова, см. например [2] (обозначались* l_A^q*). Таким образом, мы имеем:*

$$\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{\frac{\lambda+1}{p}}(l_A^q).$$

Теорема 2.20 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Каждая аналитическая функция* $f \in \mathcal{A}_{\lambda}^{q,p}(\mathbb{D})$ *имеет вид*

$$f = D_{\frac{\lambda+1}{p}} h$$

с некоторой аналитической функцией

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_n z^n,$$

такой, что $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in l_+^q$, *где*

$$D_\alpha h(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{h(u)}{\left(1 - \frac{z}{u}\right)^{1+\alpha}} \frac{du}{u}, \quad |z| < r < 1, \ \alpha \geqslant 0.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся ассимптотической формулой

$$n^\alpha \simeq \Gamma(1+\alpha)(-1)^n \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ n \end{pmatrix}, \ n \to \infty,$$

и из предыдущей теоремы будем иметь (считаем, что $\alpha = \frac{\lambda+1}{2}$):

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(1+\alpha)(-1)^n \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ n \end{pmatrix} h_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(1+\alpha)(-1)^n \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ n \end{pmatrix} \frac{z^n}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{h(u)}{u^{n+1}} du \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{h(u)}{\left(1 - \frac{z}{u}\right)^{1+\alpha}} \frac{du}{u}, \quad |z| < r < 1, \quad \alpha \geqslant 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$h_n = \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)(-1)^n \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ n \end{pmatrix}} g_n$$

- коэффициенты Тейлора некоторой аналитической в диске функции $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} h_n z^n$ (заметим, что $h_n \approx g_n$, $n \to \infty$). $\square$

Случай $q = 2$ представляет особый интерес. Опираясь на замечание 2.3 для случая $q = 2$, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2.21 *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda > -1$. *Пространство* $\mathcal{A}^{2,p}_\lambda(\mathbb{D})$ *совпадает с образом оператора* $\mathcal{D}_X$ *примененного к* $H^2(\mathbb{D})$:

$$\mathcal{A}^{2,p}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_X(H^2(\mathbb{D})),$$

где $\mathcal{D}_X$ *- любой из операторов* $\mathcal{D}_{\frac{\lambda+1}{p}}$ *или* $D_{\frac{\lambda+1}{p}}$.

Следуя [14] рассмотрим пространство со смешанной нормой $H(s,t,\gamma)$, $s > 0$, $t > 0$, $\gamma > 0$ измеримых на $\mathbb{D}$ функций с нормой

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H(s,t,\gamma)} &= \left\{ \int_I (1-r)^{t\gamma-1} \mathcal{M}^t_s(f;r)\, dr \right\}^{\frac{1}{t}}, \quad 0 < t < \infty, \\
\|f\|_{H(s,\infty,\gamma)} &= \sup_I \left\{ (1-r)^\gamma \mathcal{M}_s(f;r) \right\}, \quad t = \infty,
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{M}_s(f;r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r,e^{i\theta})|^s d\theta \right\}^{\frac{1}{s}}.$$

Информация о таких пространствах, включая теоремы вложения, может быть найдена в [21].

Следующий результат показывает, что по крайней мере для $1 \leqslant q \leqslant 2$ функции в наших пространствах регулярны в том смысле, что они имеют конечную смешанную норму типа Лебега.

Теорема 2.22 *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, $\lambda > -1$. *Тогда выполняются следующие непрерывные вложения:*

$$\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) \hookrightarrow H(s,t,\frac{1}{2} - \frac{1}{s} + \frac{1+\lambda}{p}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{D}),$$

при условии

$$\frac{1+\lambda}{p} < \frac{1}{2} + \frac{1}{s}, \quad 2 < s \leqslant \infty, \quad 2 \leqslant t \leqslant \infty.$$

Доказательство. Ввиду непрерывного вложения пространств $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{2,p}(\mathbb{D})$ достаточно доказать теорему для $q = 2$.

В соответствии с результатами Флетта (см [14], теорема B и теорема 6), для функции $f \in H^2(\mathbb{D})$ при условии

$$2 < s \leqslant \infty, \quad 2 \leqslant t \leqslant \infty, \quad \alpha > 0$$

имеем оценку

$$\|\mathcal{D}_\alpha f\|_{H(s,t,\frac{1}{2}-\frac{1}{s}+\alpha)} \leqslant C\|f\|_{H^2(\mathbb{D})},$$

где оператор $\mathcal{D}_\alpha$ определяется формулой (2.15), а постоянная C не зависит от f. Эта оценка вместе с теоремой 2.21 влечет вложение

$$\mathcal{A}_\lambda^{2,p}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H(s,t,\frac{1}{2}-\frac{1}{s}+\frac{1+\lambda}{p}).$$

Для доказательства

$$H(s,t,\frac{1}{2}-\frac{1}{s}+\frac{1+\lambda}{p}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{D})$$

необходимо последовательно использовать неравенство Гельдера при следующем условии на s :

$$\frac{1+\lambda}{p} < \frac{1}{2}+\frac{1}{s}, \quad 2 < s \leqslant \infty.$$

Теорема доказана. □

2.5.2 Ограниченность весового проектора Бергмана

Теорема 2.23 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Тогда условие (2.8) справедливо с* $X(I) = L_\lambda^p(I)$.

Доказательство. Ввиду неравенства Гельдера

$$\begin{aligned}
&n^{\lambda+1}\left|\int_0^1 t^n g(t)(1-t^2)^\lambda dt\right| \|r^n\|_{L_\lambda^p(I)} \\
&\leqslant n^{\lambda+1}\|g\|_{L_\lambda^p(I)}\|r^n\|_{L_\lambda^{p'}(I)}\|r^n\|_{L_\lambda^p(I)} \\
&\leqslant C\|g\|_{L_\lambda^p(I)}, \ \ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали

$$n^{\lambda+1}\|r^n\|_{L^{p'}_\lambda(I)}\|r^n\|_{L^p_\lambda(I)} \approx 1, \quad n \to \infty$$

согласно асимптотике (2.10). $\square$

В качестве непосредственного следствия теоремы 2.7 получаем следующий результат, который, фактически, означает, что в случае $X(I) = L^p_\lambda(I)$ (при указанных ниже значениях параметров) ограниченность весового проектора Бергмана имеет место автоматически, без дополнительных условий.

Теорема 2.24 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор* $B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}}$ *ограничен как проектор из* $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$ *на* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$.

Следствие 2.25 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Тогда пространство* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$ *является замкнутым подпространством пространства* $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$.

2.6 Описание пространства аналитических функций $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$: теорема типа Пэли-Винера.

2.6.1 Пространство последовательностей со смешанной нормой $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}$

Здесь мы введем пространство последовательностей со смешанной нормой $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}$, которое нам понадобится для построения операторов, осуществляющих изоморфизм $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$.

Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$. Определим пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}$ как замкнутое подпространство в $l^q_+(L^p_\lambda(I))$, порожденное последовательностями $\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, компоненты которых дифференцируемы как функции от r и удовлетворяют уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r}\right) c_n(r) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Замечание 2.26 *Введем оператор на* $L^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})$

$$U_{1,\lambda} \;=\; \mathcal{F}\otimes I, \tag{2.17}$$

где $\mathcal{F}-$ *дискретное преобразование Фурье, действующее по переменной* t. *Этот оператор является унитарным на* $L^2_\lambda(\mathbb{D})$, *то есть как оператор*

$$U_{1,\lambda} \;=\; \mathcal{F}\otimes I:\;\; L^2(\mathbb{T}, L^2_\lambda(I)) \longrightarrow l^2(L^2_\lambda(I)).$$

Отметим что $\mathcal{A}^{2,2}_{1,\lambda} = U_{1,\lambda}(\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D}))$, *это и является мотивацией для определения более общих пространств и для их дальнейшего исследования.*

Обозначим

$$\begin{aligned} d_{\lambda,p}(n) \;&=\; \|z^n\|^{-1}_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} = \left(2(\lambda+1)\int_0^1 r^{np+1}(1-r^2)^\lambda dr\right)^{-\frac{1}{p}} \\ &=\; \left((\lambda+1)\mathrm{B}\left(\frac{np+2}{2},\lambda+1\right)\right)^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь $\mathrm{B}(x,y)$ обозначает бета-функцию Эйлера.

Теорема 2.27 *Пусть* $1 \leqslant p,q < \infty,\; \lambda > -1$. *Пространство*

$$\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}\; (\subset l^q_+(L^p_\lambda(I)))$$

совпадает с пространством последовательностей, элементы которых имеют вид:

$$c_n(r) = \begin{cases} d_{\lambda,p}(n)c_n r^n, & n\in\mathbb{Z}_+, \\ 0, & n\in\mathbb{Z}_-, \end{cases}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\in l^q_+$, *при этом*

$$\begin{aligned} \|\; \{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}\;\|_{l^q(L^p_\lambda(I))} \;&=\; \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mid c_n\mid^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &=\; \|\;\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\;\|_{l^q_+}\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Уравнения (2.16) имеют общие решения $c_n(r) = C_n r^n$ для $n \in \mathbb{Z}_+$. С учетом формулы 3.251 из [3], будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\| \{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} \|_{l^q(L^p_\lambda(I))} = \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left| \int_0^1 \left| d_{\lambda,p}(n) c_n r^n \right|^p (\lambda+1)(1-r^2)^\lambda 2r dr \right|^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |c_n|^q \left| d^p_{\lambda,p}(n) \int_0^1 r^{np+1}(\lambda+1)(1-r^2)^\lambda 2dr \right|^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |c_n|^q \left| d^p_{\lambda,p}(n)(\lambda+1) \mathrm{B}\left(\frac{np+2}{2}, \lambda+1\right) \right|^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \| \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \|_{l^q_+} .
\end{aligned}
$$

Теорема доказана. □

Будем использовать $L^p(I)$ для обозначения безвесового пространства $L^p_\lambda(I)$ с $\lambda = 0$.

Лемма 2.28 *Для каждого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *существует унитарный оператор*

$$u_{n,\lambda} : L^p_\lambda(I) \longrightarrow L^p(I),$$

действующий следующим образом:

$$(u_{n,\lambda}\varphi)(r) = d^{-1}_{\lambda,p}(n)\beta^{-n}_{n,\lambda}(r)\varphi(\beta_{n,\lambda}(r)), \quad r \in [0,1],$$

где функция $\tau = \beta_{n,\lambda}(r)$ *на отрезке* $[0,1]$ *является обратной к функции* $r = \psi_{n,\lambda}(\tau)$ *вида*

$$\psi_{n,\lambda}(\tau) = d^{\frac{p}{2}}_{\lambda,p}(n) \left(2\int_0^\tau \rho^{np+1}\nu_\lambda(\rho)d\rho \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \in [0,1], \qquad (2.19)$$

где

$$\nu_\lambda(r) = (\lambda+1)(1-r^2)^\lambda, \quad \lambda > -1. \qquad (2.20)$$

Доказательство. Покажем, что действительно $\psi_{n,\lambda}(\tau)$ имеет такой вид. Пусть

$$(u_{n,\lambda}\varphi)(r) = \alpha_{n,\lambda}(r)\varphi(\beta_{n,\lambda}(r)),$$

где функция $\alpha_{n,\lambda}(r)$ будет выбрана позднее из условия унитарности оператора. Осуществляя замену $r = \psi_{n,\lambda}(\tau)$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, предполагая, что $\psi_{n,\lambda}(\tau)$ дифференцируемая и возрастает на $(0,1)$ и $\psi_{n,\lambda}(0) = 0,\ \psi_{n,\lambda}(1) = 1$, запишем:

$$\|(u_{n,\lambda}\varphi)\|_{L^p(I)} = \left(\int_0^1 \left|(u_{n,\lambda}\varphi)(r)\right|^p 2r dr\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left|\alpha_{n,\lambda}(\psi_{n,\lambda}(\tau))\right|^p |\varphi(\tau)|^p \, 2\psi'_{n,\lambda}(\tau)\psi_{n,\lambda}(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, требование унитарности оператора влечет соотношение:

$$(\alpha_{n,\lambda}(\psi_{n,\lambda}(\tau)))^p \psi'_{n,\lambda}(\tau)\psi_{n,\lambda}(\tau) = \nu_\lambda(\tau)\tau,\ \tau \in (0,1), \tag{2.21}$$

где $\nu_\lambda(\tau)$ задается формулой (2.20).

С другой стороны,

$$u_{n,\lambda}(d_{\lambda,p}(n)r^n) = 1$$

или

$$d_{\lambda,p}(n)\alpha_{n,\lambda}(r)\beta^n_{n,\lambda}(r) = 1.$$

Полагая в последнем соотношении $r = \psi_{n,\lambda}(\tau)$, будем иметь:

$$\alpha_{n,\lambda}(\psi_{n,\lambda}(\tau)) = d^{-1}_{\lambda,p}(n)\tau^{-n}. \tag{2.22}$$

Сравнивая равенства (2.21) и (2.22), получим:

$$d^{-p}_{\lambda,p}(n)\tau^{-np}\psi'_{n,\lambda}(\tau)\psi_{n,\lambda}(\tau) = \nu_\lambda(\tau)\tau$$

или

$$\psi'_{n,\lambda}(\tau)\psi_{n,\lambda}(\tau) = d^p_{\lambda,p}(n)\tau^{np+1}\nu_\lambda(\tau).$$

Откуда интегрируя, получаем

$$\int_0^\tau \psi'_{n,\lambda}(\rho)\psi_{n,\lambda}(\rho)d\rho = d^p_{\lambda,p}(n)\int_0^\tau \rho^{np+1}\nu_\lambda(\rho)d\rho.$$

Из последнего соотношения следует (2.19). □

Следствие 2.29 *Обратный оператор*

$$u^{-1}_{n,\lambda} = u^*_{n,\lambda} : L^p(I) \longrightarrow L^p_\lambda(I),\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

действует по правилу:

$$(u^{-1}_{n,\lambda}\varphi)(r) = d_{\lambda,p}(n)r^n\varphi(\psi_{n,\lambda}(r)).$$

Пусть L^p_0 обозначает одномерное подпространство $L^p(I)$, порожденное элементом $\ell_{0,p}(r) = 1\ \ (= 1(r))$ и $\|\ell_{0,p}(r)\|_{L^p(I)} = 1$.

Обозначим через P_0 одномерный проектор $L^p(I)$ на L^p_0, действующий по правилу:

$$(P_0\varphi)(r) = \ell_{0,p}(r)\int_0^1 \varphi(\rho)2\rho d\rho.$$

Далее, определим унитарный оператор

$$U_{2,\lambda} : l^q(L^p_\lambda(I)) \longrightarrow l^q(L^p(I))$$

по правилу

$$U_{2,\lambda} : \{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{(u_{|n|,\lambda}c_n)(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{2.23}$$

Теорема 2.30 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$. *Унитарный оператор* $U_{2,\lambda}$ *осуществляет изометрический изоморфизм пространства*

$$l^q_+(L^p_\lambda(I))$$

на $l_+^q(L^p(I))$ *при котором пространство* $\mathcal{A}_{1,\lambda}^{q,p}$ *отображается на* $l_+^q \otimes L_0^p$:

$$U_{2,\lambda} : \mathcal{A}_{1,\lambda}^{q,p} \longrightarrow l_+^q \otimes L_0^p,$$

где L_0^p*-одномерное подпространство* $L^p(I)$, *порожденное элементом* $\ell_{0,p}(r) = 1$.

Доказательство. Непосредственные вычисления с использованием теоремы 2.27 и леммы 2.28 показывают, что пространство $\mathcal{A}_{2,\lambda}^{q,p} = U_{2,\lambda}(\mathcal{A}_{1,\lambda}^{q,p})$ совпадает с пространством последовательностей $\{d_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таких, что при $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} d_n(r) \quad &= u_{n,\lambda}c_n(r) = u_{n,\lambda}d_{\lambda,p}(n)c_n r^n = \\ &= d_{\lambda,p}^{-1}(n)\beta_{n,\lambda}^{-n}(r)d_{\lambda,p}(n)c_n\beta_{n,\lambda}^n(r) = c_n, \end{aligned}$$

при этом $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^q$. Следовательно, $\mathcal{A}_{2,\lambda}^{q,p} = l_+^q \otimes L_0^p$. □

Отметим в данной связи, что в классическом случае пространства Бергмана, в котором $p = q = 2$, получим теорему 5.1.

Введем изометрическое вложение

$$R_0 : l_+^q \longrightarrow l^q(L^p(I))$$

следующим образом:

$$R_0 : \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \longrightarrow \ell_{0,p}(r)\{\chi_+(n)c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Образ пространства R_0 совпадает с пространством $\mathcal{A}_{2,\lambda}^{q,p} = l_+^q \otimes L_0^p$. Обратный оператор

$$R_0^{-1} : l^q(L^p(I)) \longrightarrow l_+^q$$

действует по правилу:

$$R_0^{-1} : \{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\chi_+(n)\int_0^1 c_n(\rho)2\rho d\rho\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Лемма 2.31 *Имеют место равенства:*

$$\begin{aligned} R_0^{-1}R_0 &= I : l_+^q \longrightarrow l_+^q, \\ R_0R_0^{-1} &= B_p : l^q(L^p(I)) \longrightarrow \mathcal{A}_{2,\lambda}^{q,p} = l_+^q \otimes L_0^p, \end{aligned}$$

где $B_p = p_+ \otimes P_0$.

Доказательство. Для доказательства первого равенства заметим, что для $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^q$ справедливо

$$\begin{aligned} R_0^{-1}R_0\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} &= R_0^{-1}\ell_{0,p}(r)\{\chi_+(n)c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \\ &= \left\{\chi_+(n)\int_0^1 \chi_+(n)c_n 2\rho d\rho\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \left\{\chi_+(n)2c_n\int_0^1 \rho d\rho\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \{\chi_+(n)c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^q. \end{aligned}$$

При доказательстве второго равенства для каждой последовательности

$$\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^q(L^p(I))$$

запишем

$$\begin{aligned} R_0R_0^{-1}\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} &= R_0\left\{\chi_+(n)\int_0^1 c_n(\rho)2\rho d\rho\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \ell_{0,p}(r)\left\{\chi_+(n)\int_0^1 c_n(\rho)2\rho d\rho\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

где

$$\left\{\chi_+(n)\int_0^1 c_n(\rho)2\rho d\rho\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^q.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 c_n(\rho)2\rho d\rho\right| &\le \left(\int_0^1 |c_n(\rho)|^p 2\rho d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 2\rho d\rho\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|c_n\|_{L^p(I)}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. $\square$

2.6.2 Теорема типа Пэли-Винера.

Зададим оператор

$$U_\lambda : L^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) \longrightarrow l^q(L^p(I)),$$

действующий по правилу

$$U_\lambda = U_{2,\lambda} U_{1,\lambda},$$

где операторы $U_{1,\lambda}$ и $U_{2,\lambda}$ определяются по правилу (2.17) и (2.23) соответственно.

На основании теоремы 2.30 оператор

$$R_\lambda = R_0^{-1} U_\lambda,$$

определенный следующим образом

$$R_\lambda \Big|_{\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D})} : \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) \longrightarrow l^q_+,$$

является изометрическим изоморфизмом.

Обратный оператор

$$R_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} R_0,$$

$$R_\lambda^{-1} : l^q_+ \longrightarrow \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}),$$

также является изометрическим изоморфизмом.

Замечание 2.32 *Имеют место равенства:*

$$\begin{aligned} R_\lambda R_\lambda^{-1} &= I : l^q_+ \longrightarrow l^q_+, \\ R_\lambda^{-1} R_\lambda &= B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} : L^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления с использованием леммы 2.31 дают:

$$\begin{aligned} R_\lambda R_\lambda^{-1} &= R_0^{-1} U_\lambda U_\lambda^{-1} R_0 = R_0^{-1} R_0 = I, \\ R_\lambda^{-1} R_\lambda &= U_\lambda^{-1} R_0 R_0^{-1} U_\lambda = U_\lambda^{-1} B_p U_\lambda = U_\lambda^{-1}(p_+ \otimes P_0) U_\lambda = B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}}. \end{aligned}$$

□

Теорема 2.33 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Изометрический изоморфизм*

$$R_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} R_0 : \quad l_+^q \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$$

определяется соотношением

$$R_\lambda^{-1} : \quad \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n d_{\lambda,p}(n) z^n.$$

Обратный изоморфизм $R_\lambda : \quad \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D}) \longrightarrow l_+^q$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} R_\lambda : \varphi(z) &\longrightarrow \left\{ d_{\lambda,p}^{p-1}(n) \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \overline{z}^{\,n} \, |z|^{n(p-2)} \mathrm{dA}_\lambda(z) \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \\ &= \left\{ \frac{1}{\pi} \, d_{\lambda,p}^{p-1}(n) \int_0^1 \int_{\mathbb{T}} \varphi(rt) t^{-n} r^{n(p-1)+1} \nu_\lambda(r) d\sigma(t) dr \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь $d_{\lambda,p}$ *и* ν_λ *определяются формулами (2.18) и (2.20) соответственно.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^2$. Тогда

$$\begin{aligned} R_\lambda^{-1} \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} &= U_\lambda^{-1} R_0 \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \\ &= U_\lambda^{-1} \ell_{0,p}(r) \left\{ \chi_+(n) c_n \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= U_{1,\lambda}^{-1} U_{2,\lambda}^{-1} \ell_{0,p}(r) \left\{ \chi_+(n) c_n \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= U_{1,\lambda}^{-1} \left\{ c_n \, \chi_+(n) d_{\lambda,p}(n) r^n \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n \, d_{\lambda,p}(n) r^n t^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n d_{\lambda,p}(n) \, z^n, \quad z = rt. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь R_λ. Пусть $\varphi(rt) \in \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$, тогда имеют место равенства:

$$
\begin{aligned}
&R_\lambda\varphi(rt) = R_0^{-1}U_\lambda\varphi(rt) = R_0^{-1}U_{2,\lambda}U_{1,\lambda}\varphi(rt)\\
&= R_0^{-1}U_{2,\lambda}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\varphi(rt)t^{-n}d\sigma(t)\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\\
&= R_0^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\,d_{\lambda,p}^{-1}(n)\beta_{n,\lambda}^{-n}(r)\int_{\mathbb{T}}\varphi(\beta_{n,\lambda}(r)t)t^{-n}d\sigma(t)\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\\
&= \left\{\frac{1}{2\pi}\,\int_0^1 d_{\lambda,p}^{-1}(n)\beta_{n,\lambda}^{-n}(\rho)\int_{\mathbb{T}}\varphi(\beta_{n,\lambda}(\rho)t)t^{-n}d\sigma(t)2\rho d\rho\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}.
\end{aligned}
$$

В последнем выражении произведем замену переменных

$$\tau = \beta_{n,\lambda}(\rho), \quad \rho = \psi_{n,\lambda}(\tau),$$

предполагая, что $\psi_{n,\lambda}(\tau)$ дифференцируемая и возрастает на $(0,1)$ и $\psi_{n,\lambda}(0) = 0,\ \psi_{n,\lambda}(1) = 1$. Тогда будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&R_\lambda\varphi(rt) = \frac{1}{\pi}\times\\
&\times\left\{\int_0^1 d_{\lambda,p}^{-1}(n)\tau^{-n}\int_{\mathbb{T}}\varphi(\tau t)t^{-n}d\sigma(t)\psi_{n,\lambda}(\tau)\psi_{n,\lambda}^{'}(\tau)d\tau\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\\
&= \left\{\frac{1}{\pi}d_{\lambda,p}^{p-1}(n)\int_0^1\int_{\mathbb{T}}\varphi(\tau t)(\tau t)^{-n}\tau^{np+1}\nu_\lambda(\tau)d\sigma(t)d\tau\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\\
&= \left\{d_{\lambda,p}^{p-1}(n)\int_{\mathbb{D}}\varphi(z)\overline{z}^{\,n}\,|z|^{n(p-2)}dA_\lambda(z)\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}.
\end{aligned}
$$

Здесь $z = \tau t,\ \overline{z} = \tau t^{-1},\ |z| = \tau,\ \mathrm{dA}_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\,\tau\nu_\lambda(\tau)d\tau\, d\sigma(t).$ $\square$

Как следствие, получим конструктивную характеризацию функций из $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$:

Теорема 2.34 *Пусть* $1 \leqslant p,q < \infty,\ \lambda > -1,\ f \in \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$. *Тогда*

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})} = \|R_\lambda f\|_{l_+^q}.$$

Замечание 2.35 *Как уже было отмечено во введении, в контексте единичного диска в работах [22, 23, 24, 25, 28, 29] рассмотрены различные пространства* $X = X(I)$ *, включая пространство Лебега переменного порядка* $p = p(r)$*, Морри, Орлича, Орлича-Морри, и пр. Этот вопрос сам по себе интересен, так как выбор конкретного пространства* X *может существенно менять характеристики пространства аналитических функций* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$*. Например, интересно, что если* $X = L^{p(\cdot)}(I)$ *- пространство Лебега переменного порядка и* $p(r) \to \infty$ *при* $r \to 1 - 0$ *с определенной оценкой снизу на рост, то соответствующее пространство* $\mathcal{A}^{2;X}(\mathbb{D})$ *совпадает с классическим пространством Харди на единичном диске (подробности - в работе [23]). Что может являться аналогом теоремы Пэли - Винера это хороший открытый вопрос в этом и других случаях.*

3 Глава 2
Весовые пространства на верхней полуплоскости со смешанной нормой, связанной с декартовыми координатами

3.1 Краткое содержание и предварительные сведения

В разделе 3.1 собраны предварительные сведения и обозначения. В разделе 3.2 приводится общее определение пространства со смешанной нормой, основанное на результатах работы [9], но применительно к нашей ситуации. Основные результаты содержатся в разделах 3.3, 3.4, 3.5. В разделе 3.3 вводятся весовые пространства со смешанной нормой $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ с весом, привязанным к границе - это основной объект нашего исследования и приводится характеризация функций из этих пространств. В разделе 3.4 формулируется и доказывается теорема типа Пэли-Винера, которая связывает функции из $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ с функциями из $L^q(\mathbb{R}_+)$ посредством некоторых операторов типа Фурье, осуществляющих изометрический изоморфизм между указанными пространствами. Наконец, указанный факт позволяет в разделе 3.5 сформулировать и доказать критерий ограниченности оператора Теплица с символом, зависящим от вертикальной переменной на пространствах $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Преобразование Фурье $F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ определяется на функциях из $L^1(\mathbb{R})$ равенством

$$(Ff)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} f(x)dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

и далее обычным образом продолжается до изоморфизма в $L^2(\mathbb{R})$ непрерывным продолжением с плотного подмножества $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$).

Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$(F^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(u)du, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Пусть Π обозначает (открытую) верхнюю полуплоскость в комплексном пространстве $\mathbb{C}$. Мы отождествляем $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, записывая $z = x + iy$, $z \in \Pi$, $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, с соответствующим пониманием интегралов, мер и т. д. в дальнейшем.

Обозначим через $L^2_\lambda(\Pi)$, $\lambda > -1$, пространство измеримых на верхней полуплоскости Π функций f, для которых норма

$$\|f\|_{L^2_\lambda(\Pi)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} |f(x,y)|^2 (\lambda+1)(2y)^\lambda dy \frac{1}{\pi}\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

конечна.

Весовое пространство Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$ является замкнутым подпространством весового пространства $L^2_\lambda(\Pi)$, состоящим из аналитических в Π функций (см. [12, 38, 39]).

Ортогональный (весовой) проектор Бергмана $B^{(\lambda)}_\Pi$ пространства $L^2_\lambda(\Pi)$ на $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$ имеет вид

$$B^{(\lambda)}_\Pi f(z) = \int_\Pi f(w) K_\lambda(z,w) d\nu_\lambda(w), \tag{3.1}$$

где

$$d\nu_\lambda(w) = \frac{1}{\pi}(\lambda+1)(2y)^\lambda dxdy, \quad w = x + iy \in \Pi,$$

а функция

$$K_\lambda(z,w) = -i^\lambda \frac{1}{(z-\overline{w})^{2+\lambda}}$$

есть весовое ядро Бергмана для $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$.

Несмотря на то, что проектор Бергмана изначально определен на $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$, приведенное выше интегральное представление для $B^{(\lambda)}_\Pi$ определяет $B^{(\lambda)}_\Pi f$ для более широкого класса функций (см. указанные выше книги).

3.2 Общее определение пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$.

Символом $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}_+$.

Пусть $X(\mathbb{R}_+)$ — комплексное банахово пространство распределений на $\mathbb{R}_+$, равномерно вложенное в пространство распределений $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)'$, т. е. имеет место неравенство:

$$|v(h)| \leq \wp(h) \cdot \|v\|_{X(\mathbb{R}_+)},$$

где $\forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\forall v \in X(\mathbb{R}_+) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}_+)'$, $\wp$ — любая непрерывная функция, $\wp : C_c^\infty(\mathbb{R}_+) \to [0, +\infty)$. Заметим, что это условие легко выполняется для пространств локально интегрируемых по Лебегу функций благодаря неравенству Гёльдера.

Предположим, что норма $\| \cdot \|_{X(\mathbb{R}_+)}$ определена таким образом, что отображение

$$\xi \, (\in \mathbb{R}) \mapsto \frac{\Phi_\xi}{\|\Phi_\xi\|_{X(\mathbb{R}_+)}} \; (\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)'), \tag{3.2}$$

где

$$\Phi_\xi(y) = e^{-\xi y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+,$$

почти всюду равно измеримой по Бохнеру функции, действующей $\mathbb{R} \to X(\mathbb{R}_+)$. Например, для $X(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+)$ с $1 \leq p < +\infty$ указанное выше отображение является явно вычислимой непрерывной функцией (с соглашением, что $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Рассмотрим сначала нормированное пространство

$$L^{q;X}(\Pi) = \left\{ \varphi = \varphi(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(\mathbb{R}_+)) \,\middle|\, \|\varphi(x,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}_+)} \in L^q(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q;X}(\Pi)} = \|\|\varphi\|_{X(\mathbb{R}_+)}\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Мы будем интерпретировать $\varphi \in L^{q;X}(\Pi)$ как распределения $\varphi(x,y)$ на Π (см. ниже), такие, что отображение $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ есть $\mathbb{R} \to$

$X(\mathbb{R}_+)$, а отображение $x \mapsto \|\varphi(x, \cdot)\|_{X(\mathbb{R}_+)}$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R})$.

То, что

$$L^{q;X}(\Pi) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(\mathbb{R}_+))$$

является векторным подпространством и $\| \cdot \|_{L^{q;X}(\Pi)}$ действительно является нормой, следует из леммы 4 в [8]. Более того, по лемме 5 в [8] мы имеем непрерывное вложение

$$L^{q;X}(\Pi) \hookrightarrow \mathcal{D}_t(\Pi)' \tag{3.3}$$

в пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Pi)'$, которые являются "умеренными"по первой переменной. Точнее,

$$\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mathbin{\widehat{\otimes}} C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$$

является тензорным произведением двух ядерных пространств: пространства функций Шварца на $\mathbb{R}$ и пространства тестовых функций на $\mathbb{R}_+$. Проще говоря, $\mathcal{D}_t(\Pi)$ является пространством гладких функций, которые быстро затухают по переменной x и имеют компактный носитель по переменной y. Соответственно, $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ является двойственным пространством распределений, которые "умеренные"по переменной x.

Введем смешанное нормированное пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, как пространство распределений $f \in \mathcal{D}_t(\Pi)'$ таких, что (обобщенное) преобразование Фурье по первой переменной $\widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, y)$, рассматриваемое как отображение $\xi \mapsto \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, \cdot)$, является локально интегрируемой по Бохнеру функцией

$$\widehat{f}_{x\to\xi} : \mathbb{R} \to X(\mathbb{R}_+),$$

и следующая норма конечна:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widehat{f}_{x\to\xi}(\xi,\cdot)\right\|^q_{X(\mathbb{R}_+)} d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.4}$$
$$= \left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widehat{f}_{x\to\xi}\right\|_{L^{q;X}(\Pi)}.$$

Другими словами,

$$\mathcal{L}^{q;X}(\Pi) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Pi)' \,\middle|\, \widehat{f}_{x\to\xi} \in L^{q;X}(\Pi) \right\},$$

см. [8] для более детального пояснения.

Теорема 3.1 *Пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$ является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ и изометрически изоморфным $L^{q;X}(\Pi)$ посредством преобразования Фурье по первой переменной:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}F \otimes I : \mathcal{L}^{q;X}(\Pi) \to L^{q;X}(\Pi).$$

Доказательство. Действительно, то, что это изометрия, ясно из (3.4), а сюръективность следует из (3.3). □

Отметим, что множитель $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ в определении выше имеет исключительно техническую задачу и предназначен для того, чтобы наши результаты совпадали с классическими в случае $q = 2$ и $X(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+)$.

3.3 Пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, $L^{q,p}_\lambda(\Pi)$, $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ и $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$

Теперь перейдем к конкретной ситуации, когда

$$X_\lambda(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), \;\; 1 \leqslant p < \infty, \;\; \lambda > -1.$$

Обозначим

$$\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathcal{L}^{q;X}(\Pi), \quad L^{q,p}_\lambda(\Pi) = L^{q;X}(\Pi), \quad 1 \le q < \infty,$$

в смысле определений, данных в разделе 3.2. Таким образом,

$$L_\lambda^{q,p}(\Pi) \quad = \left\{ \varphi = \varphi(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx) \right| \\ \left. \|\varphi(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)} \in L^q(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\|\varphi\|_{L_\lambda^{q,p}(\Pi)} = \|\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)}\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Мы интерпретируем $\varphi \in L_\lambda^{q,p}(\Pi)$ как распределения $\varphi(x,y)$ на Π задаваемые отображениями $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ действующими между $\mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$, и такими, что отображения $x \mapsto \|\varphi(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)}$ принадлежат пространству $L^q(\mathbb{R})$.

Заметим, что условия, наложенные в разделе 3.2 на пространство $X(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяются при $X_\lambda(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$. В частности, отображение $\mathbb{R} \mapsto L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$ из формулы (3.2) примет вид:

$$\xi \mapsto \begin{cases} \dfrac{\xi^{\frac{\lambda+1}{p}}\Phi_\xi}{\|\Phi_1\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)}}, & \text{если } \xi > 0 \\ 0, & \text{если } \xi \le 0 \end{cases}$$

или, иначе,

$$\xi \mapsto \begin{cases} \left(\frac{p^{\lambda+1}}{2^\lambda \Gamma(\lambda+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \xi^{\frac{\lambda+1}{p}}\Phi_\xi, & \text{если } \xi > 0 \\ 0, & \text{если } \xi \le 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

и является непрерывным.

Итак, выбор пространства $X_\lambda(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$ является обоснованным, и все заключения в разделе 3.2 справедливы для пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Пусть

$$\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) = \mathrm{Hol}(\Pi) \cap \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$$

обозначает множество тех элементов (функций) из $\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$, которые аналитичны в Π.

Теорема 3.2 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Нормированное подпространство* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \subset \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *является полным.*

Доказательство. Заметим, что $L^q(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (19)-(22) в [8], а отображение

$$\xi(\in \mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} \frac{\xi^{\frac{\lambda+1}{p}}}{\|\Phi_1\|_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)}}, & \text{если } \xi > 0 \\ 0, & \text{если } \xi \leq 0 \end{cases}$$

локально ограничено.

Таким образом, по предложению 5 из [8], весовое пространство

$$\Xi(\hat{G}, \rho) = L^q(\mathbb{R}, \varrho),$$

заданное весом

$$\varrho(\xi) = \|\Phi_\xi\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)} = \begin{cases} \xi^{-\frac{\lambda+1}{p}q} \left(\frac{2^\lambda \Gamma(\lambda+2)}{p^{\lambda+1}}\right)^{\frac{q}{p}}, & \text{если} \quad \xi > 0 \\ +\infty, & \text{если} \quad \xi \leq 0 \end{cases}$$

является полным (конечно, полнота весовых пространств Лебега известна независимо). Заметим, что вес ϱ не является почти всюду конечным и принимает значения в $[0, +\infty]$. Следует понимать, что элементы $L^q(\mathbb{R}, \varrho)$ почти всюду равны нулю на $(-\infty, 0)$.

Более того, по предложению 6 из [8], преобразование Фурье по первой переменной

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} F \otimes I : \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \to \Xi(\hat{G}, \rho) = L^q(\mathbb{R}, \varrho)$$

является изометрическим изоморфизмом. Поэтому, как отмечено в замечании 8 из [8], пространство $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ является полным. $\square$

Введем оператор

$$U_{1,\lambda} : \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L_\lambda^{q,p}(\Pi),$$

действующий посредством преобразования Фурье по первой переменной по правилу:

$$U_{1,\lambda} f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, y). \tag{3.6}$$

Так что по определению

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|U_{1,\lambda} f\|_{L^{q,p}_\lambda(\Pi)}.$$

Заметим, что (см. теорему 3.1) определенный таким образом оператор $U_{1,\lambda}$ является изометрическим изоморфизмом между нормированными векторными пространствами $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ и $L^{q,p}_\lambda(\Pi)$.

Заметим, что при $p = q = 2$, оператор $U_{1,\lambda}$ - является унитарным как оператор

$$U_{1,\lambda} : L^2_\lambda(\Pi) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx).$$

Пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ определим как замыкание подпространства пространства функций $\varphi = \varphi(x,y)$, $\varphi \in L^{q,p}_\lambda(\Pi)$, для которых справедливо

$$U_{1,\lambda} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} U^{-1}_{1,\lambda} \varphi = \frac{i}{2} \left(x + \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi = 0 \tag{3.7}$$

в слабом смысле (в смысле $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ -распределений).

Замечание 3.3 *Заметим, что*

$$\mathcal{A}^{2,2}_\lambda(\Pi) = \mathcal{A}^2_\lambda(\Pi), \quad \mathcal{A}^{2,2}_{1,\lambda}(\Pi) = U_{1,\lambda}(\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)).$$

Легко проверить, что функции φ, удовлетворяющие (3.7), имеют вид

$$\varphi(z) = \varphi(x,y) = \psi(x) e^{-xy},$$

где $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (см. лемма 9 из [8]). Заметим, что функция φ должна принадлежать пространству

$$L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx),$$

поэтому $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ определяется как замыкание в пространстве функций из $L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx)$ вида

$$\varphi(x,y) = \chi_+(x)\theta_{\lambda,p}(x)f(x)e^{-xy}, \quad f \in L^q(\mathbb{R}),$$

где χ_+ - характеристическая функция полуоси $\mathbb{R}_+$, и

$$\theta_{\lambda,p}(x) = \left(\int_{\mathbb{R}_+} 2^\lambda(\lambda+1)\, e^{-pxy}y^\lambda dy\right)^{-\frac{1}{p}} = \left(\frac{p^{\lambda+1}x^{\lambda+1}}{2^\lambda\Gamma(\lambda+2)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.8)$$

для $x \geq 0$. Причем,

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}.$$

Действительно, несложные вычисления дают

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\|_{\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left|\chi_+(x)\theta_{\lambda,p}(x)f(x)e^{-xy}\right|^p (\lambda+1)(2y)^\lambda dy\right)^{\frac{q}{p}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^q \left(\frac{p^{\lambda+1}x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-pxy}y^\lambda dy\right)^{\frac{q}{p}} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}$$

Описав таким образом пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ мы наконец заметим, что оно изометрически совпадает с нашим исходным пространством $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$. Именно, справедлив следующий результат:

Теорема 3.4 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор* $U_{1,\lambda}$ *вида (3.6) осуществляет изометрический изоморфизм пространств* $\mathcal{L}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *и* $L^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$, *а его сужение на пространтсво* $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *является изометрическим изоморфизмом между* $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *и* $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$, *то есть*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)} = \|U_{1,\lambda}f\|_{L^{q,p}_{\lambda}(\Pi)}.$$

Доказательство. Следствие 4 в [8] описывает изоморфизм между $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ и весовым пространством $\Xi(\hat{G}, \rho) = L^q(\mathbb{R}, \varrho)$. Тогда утверждение немедленно следует из предложения 6 в [8] (см. доказательство леммы 3.2 выше). $\square$

3.4 Теорема типа Пэли-Винера

Введем оператор

$$U_{2,\lambda} : L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, dy), dx)$$

следующим образом:

$$(U_{2,\lambda}\varphi)(x,y) = \frac{1}{\theta_{\lambda,p}(|\ x\ |)}\ e^{-\frac{y}{p}+|x|\beta_\lambda(|x|,y)}\varphi(x, \beta_\lambda(|\ x\ |, y)), \tag{3.9}$$

где для любого фиксированного $x > 0$ функция $y \to \beta_\lambda(x,y)$ является обратной к функции

$$\psi_\lambda(x,t) = \ln\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1, pxt)}\right), \tag{3.10}$$

то есть

$$\beta_\lambda(x, \psi_\lambda(x,t)) = t, \quad x > 0.$$

Здесь $\Gamma(a,b)$ - неполная гамма-функция (см., например [3]).

Покажем, что действительно $\psi_\lambda(x,t)$ имеет такой вид. Пусть $x > 0$, положим

$$(U_{2,\lambda}\varphi)(x,y) = \alpha_\lambda(x,y)\varphi(x, \beta_\lambda(x,y)),$$

где функция $\alpha_\lambda(x,y)$ будет выбрана позднее из условия совпадения норм:

$$\|U_{2,\lambda}\varphi\|_{L^q(\mathbb{R},L^p(\mathbb{R}_+,dy),dx)} = \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R},L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy),dx)}.$$

Другими словами, потребуем, чтобы

$$\alpha_\lambda^p(x, \psi_\lambda(x,t))\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_\lambda(x,t) = (\lambda+1)(2t)^\lambda.$$

Но с другой стороны,

$$U_{2,\lambda}\theta_{\lambda,p}(x)e^{-xy}=e^{-\frac{y}{p}}.$$

Следовательно,

$$\alpha_\lambda(x,y)\theta_{\lambda,p}(x)e^{-x\beta_\lambda(x,y)}=e^{-\frac{y}{p}},$$
$$\alpha_\lambda(x,\psi_\lambda(x,t))=\theta^{-1}_{\lambda,p}(x)e^{xt-\frac{\psi_\lambda(x,t)}{p}}.$$

Отсюда,

$$\frac{1}{\theta^p_{\lambda,p}(x)}e^{pxt-\psi_\lambda(x,t)}\frac{\partial}{\partial t}\psi_\lambda(x,t)=(\lambda+1)(2t)^\lambda.$$

Преобразовывая последнее равенство и далее интегрируя его, будем иметь

$$\int_t^\infty e^{-\psi_\lambda(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_\lambda(x,\tau)d\tau=\theta^p_{\lambda,p}(x)(\lambda+1)\int_t^\infty(2\tau)^\lambda e^{-px\tau}d\tau,$$

откуда получаем нужное:

$$e^{-\psi_\lambda(x,t)}=\frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int_t^\infty e^{-p\tau x}(p\tau)^\lambda d(p\tau)=\frac{\Gamma(\lambda+1,pxt)}{\Gamma(\lambda+1)}. \quad (3.11)$$

Обратный оператор

$$U^{-1}_{2,\lambda}:L^q(\mathbb{R},L^p(\mathbb{R}_+,dy),dx)\longrightarrow L^q(\mathbb{R},L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy),dx)$$

действует по правилу:

$$(U^{-1}_{2,\lambda}\varphi)(x,y)=\theta_{\lambda,p}(|x|)e^{\frac{1}{p}\psi_\lambda(|x|,y)-|x|y}\varphi(x,\psi_\lambda(|x|,y)).$$

Для любой функции $f\in L^q(\mathbb{R})$ имеем

$$U_{2,\lambda}:\chi_+(x)\theta_{\lambda,p}(x)f(x)e^{-xy}\longrightarrow\chi_+(x)f(x)e^{-\frac{y}{p}}.$$

Пусть $L^p_0(\mathbb{R}_+,dy)$ - одномерное подпространство $L^p(\mathbb{R}_+,dy)$, порожденное элементом $\ell_{0,p}(y)=e^{-\frac{y}{p}}$. Следовательно, образ

$$\mathcal{A}^{q,p}_{2,\lambda}(\Pi)=U_{2,\lambda}(\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi))$$

определяется как замыкание в $L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, dy), dx)$ функций вида

$$\psi(x,y) = \chi_+(x) f(x) e^{-\frac{y}{p}}, \quad f(x) \in L^q(\mathbb{R})$$

и совпадает с пространством $L^q(\mathbb{R}_+, L_0^p(\mathbb{R}_+, dy), dx)$.

Обозначим через P_0 одномерный проектор пространства $L^p(\mathbb{R}_+, dy)$ на $L_0^p(\mathbb{R}_+, dy)$:

$$(P_0\psi)(y) = \ell_{0,p}(y) \int_{\mathbb{R}_+} \psi(v) e^{-\frac{v}{p}} dv.$$

На основании вышесказанного имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор* $U_{2,\lambda}$ *осуществляет изометрический изоморфизм пространства*

$$L_\lambda^{q,p}(\Pi) = L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), dx)$$

на

$$L^{q,p}(\Pi) = L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, dy), dx),$$

при котором пространство $\mathcal{A}_{1,\lambda}^{q,p}(\Pi)$ *отображается на*

$$L^q(\mathbb{R}_+, L_0^p(\mathbb{R}_+, dy), dx).$$

Введем оператор

$$U_\lambda : \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^{q,p}(\Pi),$$

действующий по правилу

$$U_\lambda = U_{2,\lambda} U_{1,\lambda}. \tag{3.12}$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 3.6 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор* U_λ *вида (3.12) осуществляет изометрический изоморфизм пространства* $\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *на* $L^{q,p}(\Pi)$, *при котором*

1. *Пространство Бергмана* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *отображается на*

$$L^q(\mathbb{R}_+, L_0^p(\mathbb{R}_+, dy), dx).$$

2. *Проектор Бергмана* $B_\Pi^{(\lambda)}$ *эквивалентен проектору* $\chi_+ I \otimes P_0$, *то есть* U_λ *связывает проекторы:* $U_\lambda B_\Pi^{(\lambda)} = (\chi_+ I \otimes P_0)\, U_\lambda$.

Эквивалентность операторов (проекторов) в приведенной выше теореме и также всюду ниже понимается как взаимно однозначное соответствие между этими операторами посредством изометрического изоморфизма U_λ.

Заметим, что в частном случае $p = q = 2$ известен следующий результат (см. [20] и также [36]).

Теорема 3.7 *Унитарный оператор* U_λ *вида (3.12) осуществляет изометрический изоморфизм пространства* $L_\lambda^2(\Pi)$ *на пространство* $L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}_+, dy), dx)$, *при котором*

1. *Пространство Бергмана* $\mathcal{A}_\lambda^2(\Pi)$ *отображается на*

$$L^2(\mathbb{R}_+, L_0^2(\mathbb{R}_+, dy), dx),$$

2. *Проектор Бергмана* $B_\Pi^{(\lambda)}$ *унитарно эквивалентен проектору* $\chi_+ I \otimes P_0$.

Осуществим изометрическое вложение

$$R_0 : L^q(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L^{q,p}(\Pi)$$

по правилу

$$(R_0 f)(x, y) = \chi_+(x) f(x) \ell_{0,p}(y), \quad y > 0,$$

где $\ell_{0,p}(y) = e^{-\frac{y}{p}}$, а функция $f(x)$ продолжается нулем при $x < 0$. Образ R_0 очевидно совпадает с пространством $L^q(\mathbb{R}_+, dx) \otimes L_0^p(\mathbb{R}_+, dy)$.

Обратный оператор

$$R_0^{-1} : L^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+)$$

действует по формуле

$$(R_0^{-1}\varphi)(x) = \chi_+(x) \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x,\eta)\ell_{0,p}^{p-1}(\eta)d\eta.$$

Лемма 3.8 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$. *Имеют место равенства:*

$$\begin{aligned} R_0^{-1}R_0 &= I : L^q(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+), \\ R_0R_0^{-1} &= B_p : L^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+, L_0^p(\mathbb{R}_+, dy), dx) \end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, для $f(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ при $x > 0$ выполняется:

$$\begin{aligned} (R_0^{-1}R_0f)(x,y) &= R_0^{-1}\chi_+(x)f(x)e^{-\frac{y}{p}} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \chi_+(x)f(x)\, e^{-\frac{\eta}{p}}\, \ell_{0,p}^{p-1}(\eta)d\eta \\ &= \chi_+(x)f(x) \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{\eta}{p}}\, e^{-\frac{\eta(p-1)}{p}} d\eta \\ &= \chi_+(x)f(x) \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\eta}d\eta = \chi_+(x)f(x) = f(x). \end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(x,y) \in L^{q,p}(\Pi)$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} R_0R_0^{-1}f(x,y) &= R_0\chi_+(x) \int_{\mathbb{R}_+} f(x,\eta)e^{-\frac{\eta(p-1)}{p}} d\eta \\ &= \chi_+(x)\ell_{0,p}(y) \int_{\mathbb{R}_+} f(x,\eta)\, e^{-\frac{\eta(p-1)}{p}} d\eta = (B_pf)(x,y). \end{aligned}$$

Сходимость записанных выше интегралов очевидна при $p = 1$, а при $p > 1$ обосновывается при помощи неравенства Гельдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(x,\eta)e^{-\frac{\eta(p-1)}{p}} d\eta \right| &\le \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x,\eta)|^p\, d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\eta}d\eta \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \| f(x,\cdot) \|_{L^p(\mathbb{R}_+,d\eta)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{aligned}$$

$\square$

Оператор

$$R_\lambda = R_0^{-1} U_\lambda$$

отображает пространство $\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ на $L^q(\mathbb{R}_+)$, и сужение

$$R_\lambda \Big|_{\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)} : \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+)$$

является изометрическим изоморфизмом.

Обратный оператор

$$R_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} R_0,$$

$$R_\lambda^{-1} : L^q(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \subset \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)$$

является изометрическим изоморфизмом пространства $L^q(\mathbb{R}_+)$ на $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Замечание 3.9 *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} R_\lambda R_\lambda^{-1} &= I : L^q(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+), \\ R_\lambda^{-1} R_\lambda &= B_\Pi^{(\lambda)} : \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi). \end{aligned}$$

Приведем интегральные представления для операторов $R_\lambda, R_\lambda^{-1}$.

Теорема 3.10 *(Теорема Пэли-Винера). Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$. *Изометрический изоморфизм*

$$R_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} R_0 : L^q(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$$

определяется равенством

$$(R_\lambda^{-1}\varphi)(z) = \frac{p^{\frac{\lambda+1}{p}}}{\sqrt{2}\sqrt[p]{2^\lambda \Gamma(\lambda+2)}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \varphi(\xi) \xi^{\frac{\lambda+1}{p}} e^{i\xi z} d\xi, \quad \varphi \in L^q(\mathbb{R}_+), \tag{3.13}$$

$\Gamma(x)$ *обозначает Гамма-функцию. Обратный изоморфизм*

$$R_\lambda = R_0^{-1} U_\lambda : \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}_+)$$

имеет вид:

$$(R_\lambda f)(x) = \chi_+(x) \frac{1}{\sqrt{2}}\, \theta_{\lambda,p}^{p-1}(x) \int\limits_{\Pi} f(\omega) e^{-ix\overline{\omega}} e^{-x(p-2)\operatorname{Re}\omega} d\nu_\lambda(\omega) \quad (3.14)$$

$$= \chi_+(x) \frac{\lambda+1}{\sqrt{2}\pi}\, \theta_{\lambda,p}^{p-1}(x) \ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} f(\xi+i\eta) e^{-ix(\xi-i\eta)} e^{-x(p-2)\xi} (2\eta)^\lambda d\eta d\xi,$$

где $\theta_{\lambda,p}$ *имеет вид(3.8),* $d\nu_\lambda(\omega) = \frac{1}{\pi}(\lambda+1)(2\eta)^\lambda d\xi d\eta$.

Доказательство. Покажем сначала, что для любой функции $\varphi(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ интеграл (3.13) сходится абсолютно и определяет аналитическую на Π функцию. Действительно, с учетом неравенства Гельдера, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \left| \varphi(\xi) \xi^{\frac{\lambda+1}{p}} e^{i\xi z} \right| d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\xi)|\, \xi^{\frac{\lambda+1}{p}} e^{-y\xi} d\xi \le$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-q'y\xi} \xi^{q'\frac{\lambda+1}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\xi)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Аналитичность функции в правой части (3.13) вытекает из того, что формально продифференцированный интеграл в (3.13) остается абсолютно сходящимся равномерно по z в некоторой окрестности каждой точки z.

Далее, имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
R_\lambda^{-1}\varphi(x) \quad &= U_\lambda^{-1}R_0\varphi(x) = U_{1,\lambda}^{-1}U_{2,\lambda}^{-1}R_0\varphi(x)\\
&= U_{1,\lambda}^{-1}U_{2,\lambda}^{-1}\chi_+(x)\varphi(x)e^{-\frac{y}{p}}\\
&= U_{1,\lambda}^{-1}\theta_{\lambda,p}(x)e^{-\frac{\psi_\lambda(|x|,y)}{p}-|x|y}\chi_+(x)\varphi(x)e^{\frac{\psi_\lambda(|x|,y)}{p}}\\
&= U_{1,\lambda}^{-1}\theta_{\lambda,p}(x)e^{-|x|y}\chi_+(x)\varphi(x)\\
&= \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_{\lambda,p}(\xi)e^{-|\xi|y}\chi_+(\xi)\varphi(\xi)e^{ix\xi}d\xi\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{\frac{p^{\lambda+1}}{2^\lambda}\xi^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)}\right)^{\frac{1}{p}}e^{-\xi y}\varphi(\xi)e^{ix\xi}d\xi\\
&= \frac{p^{\frac{\lambda+1}{p}}}{\sqrt{2}\sqrt[p]{2^\lambda\Gamma(\lambda+2)}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\xi^{\frac{\lambda+1}{p}}\varphi(\xi)e^{i\xi z}d\xi,\quad z = x+iy.
\end{aligned}$$

Пусть $f(x+iy)\in\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$, тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&R_\lambda f(x+iy) = R_0^{-1}U_\lambda f(x+iy) = R_0^{-1}U_{2,\lambda}U_{1,\lambda}f(x+iy)\\
= \ &R_0^{-1}U_{2,\lambda}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(\xi+iy)e^{-ix\xi}d\xi\\
= \ &R_0^{-1}\frac{1}{\theta_{\lambda,p}(|x|)}\,e^{-\frac{y}{p}+|x|\beta_\lambda(|x|,y)}\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(\xi+i\beta_\lambda(|x|,y))e^{-ix\xi}d\xi\\
= \ &\frac{\chi_+(x)}{\theta_{\lambda,p}(|x|)}\\
\times \ &\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left(e^{-\frac{y}{p}+|x|\beta_\lambda(|x|,y)}\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(\xi+i\beta_\lambda(|x|,y))e^{-ix\xi}d\xi\right)e^{-y\frac{p-1}{p}}dy.
\end{aligned}$$

В последнем выражении произведем замену переменных $y=\psi_\lambda(|x|,\eta)$, где функция ψ определяется формулой (3.10), будем иметь:

$$
\begin{aligned}
R_\lambda f(x+iy) &= \frac{\chi_+(x)}{\sqrt{2}\pi\theta_{\lambda,p}(x)} \\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left(e^{-\frac{\psi_\lambda(x,\eta)}{p}+x\eta} e^{-\psi_\lambda(x,\eta)\frac{p-1}{p}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta)e^{-ix\xi}d\xi \right) \frac{\partial}{\partial\eta}\psi_\lambda(x,\eta)d\eta \\
&= \frac{\chi_+(x)}{\theta_{\lambda,p}(x)} \frac{\theta^p_{\lambda,p}(x)}{\sqrt{2}\pi} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{x\eta}e^{-px\eta}(\lambda+1)(2\eta)^\lambda \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta)e^{-ix\xi}d\xi d\eta \\
&= \chi_+(x)\frac{\theta^{p-1}_{\lambda,p}(x)}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta)e^{-ix\xi}e^{x\eta-px\eta}\frac{1}{\pi}(\lambda+1)(2\eta)^\lambda d\xi d\eta \\
&= \chi_+(x)\frac{\theta^{p-1}_{\lambda,p}(x)}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta)e^{-ix(\xi-i\eta)}e^{-x\eta(p-2)}d\nu_\lambda(\xi,\eta) \\
&= \chi_+(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\,\theta^{p-1}_{\lambda,p}(x) \int\limits_{\Pi} f(\omega)e^{-ix\overline{\omega}}e^{-x(p-2)\operatorname{Re}\omega}d\nu_\lambda(\omega),
\end{aligned}
$$

где $\omega=\xi+i\eta,\;\; d\nu_\lambda(\omega)=\frac{1}{\pi}(\lambda+1)(2\eta)^\lambda d\xi d\eta.$ $\square$

Как следствие, приведем описание функций из класса $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$.

Теорема 3.11 *Пусть* $1\leqslant p,q<\infty,\ \lambda>-1,\ f\in\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$. *Тогда*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|R_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}.$$

Замечание 3.12 *Заметим, что в определении оператора* R_λ *из (3.14) присутствует множитель (вес)* $x^{\frac{\lambda+1}{q}}$*, см. определение функции* $\theta_{\lambda,p}$*. Он определяется из соотношения (4.11) ввиду выбора конкретного пространства* $X(\mathbb{R}_+)=L^p(\mathbb{R}_+,(\lambda+1)(2y)^\lambda dy)$*. Выбрав иное пространство (например, Морри, Орлича и пр.), естественно, получим другой вес, в том числе новые пространства функций* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *по свойствам, существено отличающиеся друг от друга. Это вопрос для последующих исследований.*

Замечание 3.13 *Рассмотрим определение оператора R_λ^{-1} из (3.13) в случае $p = q = 2$. Положим $\psi(\xi) = \varphi(\xi)\xi^{\frac{\lambda+1}{2}}$. Тогда, очевидно, $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+, \xi^{-\lambda-1}d\xi)$ и мы получаем изометрический изоморфизм пространств $L^2(\mathbb{R}_+, \xi^{-\lambda-1}d\xi)$ и $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$, определяемый равенством*

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\lambda+2)}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi(\xi) e^{i\xi z} d\xi, \ z \in \Pi.$$

Фактически, это - классическая теорема Пэли-Винера для пространства Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$, см. например [13].

Доказательство. Действительно, положив

$$F_1(z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \varphi(\xi) e^{i\xi z} d\xi, \ z \in \Pi, \ \varphi(\xi) \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

на основании теоремы 1 из [13] будем иметь равенства:

$$\begin{aligned}
\|F\|^2_{\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)} &= \frac{(\lambda+1)2^\lambda}{\pi\Gamma(\lambda+2)} \|F_1\|^2_{\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)} = \frac{(\lambda+1)2^\lambda}{\pi\Gamma(\lambda+2)} ||\psi||^2_{L^2{}_{\lambda+1}(\mathbb{R}_+)} \\
&= \frac{(\lambda+1)2^\lambda}{\pi\Gamma(\lambda+2)} \frac{2\pi\Gamma(\lambda+1)}{2^{\lambda+1}} \|\psi(\xi)\xi^{-\frac{\lambda+1}{2}}||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\
&= \|\psi(\xi)\xi^{-\frac{\lambda+1}{2}}||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|\psi(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, \xi^{-\lambda-1}d\xi)}.
\end{aligned}$$

Последнее и доказывает данное утверждение. □

3.5 Теплицевы операторы с символами, зависящими от $y = \operatorname{Im} z$ в $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$.

Для $d\nu_\lambda$ - измеримой функции $a = a(z)$ на Π рассмотрим оператор Теплица, не обязательно ограниченный, но формально определенный на $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ следующим образом:

$$T_a^{(\lambda)} f = B_\Pi^{(\lambda)} a f.$$

Обозначим через $L^1_{\exp}(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy)$ класс функций $a = a(y)$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие:

$$a(y)e^{-\varepsilon y} \in L^1(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy).$$

Пусть функция $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(x)$ задается равенством:

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty a\,(t/p)\, e^{-tx}\, t^\lambda dt,\ x \in \mathbb{R}_+, \tag{3.15}$$

а символ оператора Теплица $a = a(y)$ принадлежит $L^1_{\exp}(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy)$. Всюду в дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Теорема 3.14 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *с символом* $a = a(y)$, *действующий в* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, *посредством изометрических изоморфизмов* R_λ, R_λ^{-1} *эквивалентен оператору умножения*

$$\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1},$$

действующему в $L^q(\mathbb{R}_+)$. *Функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *задается равенством (3.15), а операторы* R_λ, R_λ^{-1} *имеют вид (3.13), (3.14).*

Доказательство. Непосредственые вычисления дают:

$$\begin{aligned}
R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1} &= R_\lambda a(y) R_\lambda^{-1} = R_0^{-1} U_{2,\lambda} U_{1,\lambda} a(y) U_{1,\lambda}^{-1} U_{2,\lambda}^{-1} R_0 \\
&= R_0^{-1} U_{2,\lambda} F a(y) F^{-1} U_{2,\lambda}^{-1} R_0 = R_0^{-1} U_{2,\lambda} a(y) U_{2,\lambda}^{-1} R_0 \\
&= R_0^{-1} a(\beta_\lambda(|x|, y)) R_0.
\end{aligned}$$

Далее, для любой функции $\varphi(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
R_0^{-1} a(\beta_\lambda(|x|, y)) R_0 \varphi(x) &= R_0^{-1} \chi_+(x)\ a(\beta_\lambda(|x|, y)) e^{-\frac{y}{p}} \varphi(x) \\
&= \chi_+(x) \int_{\mathbb{R}_+} a(\beta_\lambda(|x|, y)) e^{-\frac{y}{p}} \varphi(x) e^{-\frac{(p-1)y}{p}} dy \\
&= \chi_+(x) \varphi(x) \int_{\mathbb{R}_+} a(\beta_\lambda(|x|, y)) e^{-y} dy.
\end{aligned}$$

В последнем интеграле произведем замену переменных

$$y = \psi_\lambda(x, \tau),\ \beta_\lambda(|x|, \psi_\lambda(x, \tau)) = \tau,$$

где функция ψ определяется формулой (3.10). Тогда с учетом равенства (3.11) получим:

$$\begin{aligned}
&R_0^{-1} a(\beta_\lambda(|x|, y)) R_0 \varphi(x) \\
&= -\chi_+(x)\varphi(x) \int_{\mathbb{R}_+} a(\tau) d \left[\frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_\tau^\infty e^{-p\zeta x} (p\zeta)^\lambda d(p\zeta) \right] \\
&= \chi_+(x)\varphi(x) \frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(\tau) e^{-p\tau x} (p\tau)^\lambda d(p\tau) \\
&= \chi_+(x)\varphi(x) \frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(t/p) e^{-tx} t^\lambda dt = \gamma_{a,\lambda}(x)\varphi(x),
\end{aligned}$$

где $t = p\zeta$. □

Как следствие, получаем следующий критерий ограниченности оператора $T_a^{(\lambda)}$ с символом $a = a(y)$ на пространстве $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Теорема 3.15 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, *функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *определяется равенством (3.15). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен на* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *если и только если соответствующая функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *ограничена.*
2. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество*

$$\operatorname{sp} T_a^{(\lambda)} = \overline{\operatorname{Range} \gamma_{a,\lambda}}.$$

Замечание 3.16 *Представления типа Пэли - Винера используются в самых различных общих и частных задачах теории операторов. Например, в работе [26], благодаря явному виду для спектра оператора Теплица* T_a *с вертикальным символом, полученного при помощи соответствующей теоремы Пэли-Винера, классическая задача нахождения символа с такого, что* $T_c = T_a T_b$ *для* *заданных символов a, b сводится к решению интегрального уравнения дробного порядка.*

4 Глава 3 Весовые пространства на верхней полуплоскости со смешанной нормой, связанной с полярными координатами

4.1 Краткое содержание и предварительные сведения

В разделе 4.1 собраны предварительные сведения и обозначения. В разделе 4.2 приводится общее определение пространства со смешанной нормой, основанное на результатах работы [8], но применительно к нашей ситуации. Именно, используя связь между преобразованиями Фурье и Меллина, мы сводим общее определение к более естественному в нашем случае, которое использует преобразование Меллина. Основные результаты работы содержатся в разделах 4.3, 4.4, 4.5. В разделе 4.3 вводятся весовые пространства со смешанной нормой $\dot{\mathcal{A}}_{\lambda}^{q,p}(\Pi)$ с весом, привязанным к границе - это основной объект нашего исследования и приводится характеризация функций из этих пространств. В разделе 4.4 формулируется и доказывается теорема типа Пэли-Винера, которая связывает функции из $\dot{\mathcal{A}}_{\lambda}^{q,p}(\Pi)$ с функциями из $L^q(\mathbb{R})$ посредством некоторых операторов типа Фурье (Меллина) осуществляющих изометрический изоморфизм между указанными пространствами. Наконец, указанный факт позволяет в разделе 4.5 сформулировать и доказать критерий ограниченности оператора Теплица с символом, зависящим от угловой переменной на пространствах $\dot{\mathcal{A}}_{\lambda}^{q,p}(\Pi)$

Пусть $\lambda > -1$. Преобразование Меллина

$$M : L^2(\mathbb{R}_+, r^{\lambda+1}dr) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

определяется следующим образом:

$$(M\psi)(\xi) = \widetilde{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} r^{-i\xi+\frac{\lambda}{2}} \psi(r) dr, \tag{4.1}$$

обратное преобразование

$$M^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+, r^{\lambda+1}dr)$$

задается равенством:

$$(M^{-1}\psi)(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r^{i\xi - \frac{\lambda}{2} - 1} \psi(\xi) d\xi. \tag{4.2}$$

Здесь, как и прежде, Π обозначает (открытую) верхнюю полуплоскость в комплексном пространстве $\mathbb{C}$. Мы отождествляем $\Pi = \mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$, записывая $z = re^{\imath\theta}$, $z \in \Pi$, $r \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и $\theta \in (0, \pi)$, с соответствующим пониманием интегралов, мер и т. д. в дальнейшем.

Ортогональный (весовой) проектор Бергмана $B_{\Pi}^{(\lambda)}$ пространства $L^2_\lambda(\Pi)$ на $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$, равно как и сами пространства $L^2_\lambda(\Pi)$ и $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$, определены ранее, см. (3.1).

4.2 Общее определение пространства аналитических функций со смешанной нормой

Общая теория пространств со смешанной нормой Фурье была разработана в [8]. Однако в этой работе наши смешанные нормы основаны на преобразовании Меллина по радиальной переменной $r \in \mathbb{R}_+$. Чтобы воспользоваться общими фактами, установленными в [8], нам понадобится использовать известную связь между преобразованием Меллина над $\mathbb{R}_+$ и преобразованием Фурье над $\mathbb{R}$, а также перевести постановку нашей задачи на язык преобразования Фурье. Это будет главной целью настоящего раздела.

Пусть $\Gamma = \mathbb{R} \times (0, \pi) \subset \mathbb{C}$ — (открытая) горизонтальная полоса в комплексной плоскости, заданная точками $\tau = \eta + \imath\theta$, где $\eta \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, \pi)$. Отображение $\exp : \Gamma \to \Pi$, определяемое соотношением

$$\tau(\in \Gamma) \longmapsto \exp(\tau) = e^{\eta + \imath\theta} = re^{\imath\theta} = z \in \Pi$$

является биголоморфизмом, который будет использоваться для переноса распределений и голоморфных функций между нашей исходной (адаптированной по Меллину) областью Π и целевой (адаптированной по Фурье) областью Γ. Часто мы будем записывать это отображение как $(\eta, \theta) \mapsto (r, \theta) = (e^{\eta}, \theta)$.

Для каждого $\lambda > -1$ введем линейную биекцию $\mathrm{T}_\lambda : C(\Pi) \to C(\Gamma)$, полагая

$$\mathrm{T}_\lambda f(\tau) = e^{(\frac{\lambda}{2}+1)\tau} f(e^{\tau}), \quad \forall \tau \in \Gamma, \quad \forall f \in C(\Pi).$$

Очевидно, T_λ дает биекцию между голоморфными функциями,

$$\mathrm{T}_\lambda : \mathrm{Hol}(\Pi) \to \mathrm{Hol}(\Gamma). \tag{4.3}$$

Более того, можно проверить напрямую, что для $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|\mathrm{T}_\lambda f(\cdot, \theta)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f(\cdot, \theta)\|_{L^p(\mathbb{R}_+, r^{(\frac{\lambda}{2}+1)p-1} dr)},$$
$$\forall \theta \in (0, \pi), \quad \forall f \in C_c(\Pi),$$

где $C_c(\Pi)$ обозначает множество всех непрерывных функций с компактным носителем на области Π.

Важность T_λ заключается в том, что он связывает преобразование Меллина с преобразованием Фурье. Точнее, у нас есть следующее свойство, которое можно проверить напрямую:

$$((M \otimes I) f)(\xi, \theta) = (e^{-\imath\theta(1+\frac{\lambda}{2})} (\mathrm{F} \otimes I) \, \mathrm{T}_\lambda f)(\xi, \theta), \tag{4.4}$$
$$\forall (\xi, \theta) \in \Gamma, \quad \forall f \in C_c(\Pi),$$

где $\mathrm{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ это преобразование Фурье, заданное формулой

$$(\mathrm{F}\, \psi)(\xi) = \widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\eta) e^{-\imath\eta\xi} d\eta, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Символом $C_c^\infty(0,\pi)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $(0,\pi)$.

Пусть $X(0,\pi)$ — комплексное банахово пространство распределений на $(0,\pi)$, равномерно вложенное в пространство распределений $C_c^\infty(0,\pi)'$, то есть

$$|v(h)| \le \wp(h)\cdot \|v\|_{X(0,\pi)},$$

$$\forall h\in C_c^\infty(0,\pi),\quad \forall v\in X(0,\pi)\subset C_c^\infty(0,\pi)',$$

где $\wp$ — любая непрерывная функция $C_c^\infty(0,\pi)\to[0,+\infty)$. Отметим, что это условие легко выполняется для пространств локально интегрируемых по Лебегу функций благодаря неравенству Гельдера.

Предположим, что норма $\|\cdot\|_{X(0,\pi)}$ такова, что отображение

$$\xi(\in\mathbb{R})\mapsto \frac{\Phi_\xi}{\|\Phi_\xi\|_{X(0,\pi)}}\in C_c^\infty(0,\pi)', \tag{4.5}$$
$$\Phi_\xi(\theta)=e^{-\xi\theta},\quad \forall\theta\in(0,\pi),\quad \forall\xi\in\mathbb{R},$$

почти всюду равно измеримой по Бохнеру функции, действующей $\mathbb{R}\to X(0,\pi)$ (с соглашением, что $\frac{1}{+\infty}=0$). Например, для пространства $X_\lambda(0,\pi)=L^p((0,\pi),\ (\lambda+1)2^\lambda\sin^\lambda\theta d\theta)$ с $1\leqslant p<\infty$, $\lambda>-1$, указанное выше отображение является явно вычислимой непрерывной функцией.

Рассмотрим сначала нормированное пространство

$$L^{q;X}(\Gamma)=\left\{\varphi=\varphi(\xi,\,\theta)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R},X(0,\pi))\Big|\quad \|\varphi(\xi,\,\cdot)\|_{X(0,\pi)}\in L^q(\mathbb{R})\right\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q;X}(\Gamma)}=\|\|\varphi(\cdot)\|_{X(0,\pi)}\|_{L^q(\mathbb{R})},\quad 1\le q<\infty.$$

Мы будем интерпретировать $\varphi\in L^{q;X}(\Gamma)$ как распределения $\varphi(\xi,\theta)$ на Γ (см. ниже), такие, что отображение $\xi\mapsto\varphi(\xi,\cdot)$ есть $\mathbb{R}\to X(0,\pi)$, а отображение $\xi\mapsto\|\varphi(\xi,\cdot)\|_{X(0,\pi)}$ принадлежит $L^q(\mathbb{R})$.

То, что
$$L^{q;X}(\Gamma) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(0,\pi))$$
является векторным подпространством и $\|\cdot\|_{L^{q;X}(\Gamma)}$ действительно является нормой, следует из леммы 4 в [8]. Более того, по лемме 5 из [8] имеем непрерывное вложение
$$L^{q;X}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}_t(\Gamma)' \tag{4.6}$$
в пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$, которые умерены по первой переменной. Точнее,
$$\mathcal{D}_t(\Gamma) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \,\widehat{\otimes}\, C_c^\infty(0,\pi)$$
— тензорное произведение двух ядерных пространств: пространства функций Шварца на $\mathbb{R}$ и пространства тестовых функций на $(0,\pi)$. Проще говоря, $\mathcal{D}_t(\Gamma)$ — это пространство гладких функций, которые быстро убывают по переменной ξ и имеют компактный носитель по переменной θ. Соответственно, $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ — это двойственное пространство распределений, которые умеренны по переменной ξ. На верхней полуплоскости Π мы будем использовать тестовое функциональное пространство
$$\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathrm{T}_\lambda^{-1}\,\mathcal{D}_t(\Gamma)$$
с индуцированной локально выпуклой топологией и его двойственное пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Pi)'$.

Можно непосредственно проверить, что следующая коммутативная диаграмма истинна в смысле непрерывных вложений топологических векторных пространств.

$$\begin{tikzcd}
C_c^\infty(\Pi) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{T}_\lambda"] & \mathcal{D}_t(\Pi) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{T}_\lambda"] & L^2(\Pi, r^{\lambda+1}drd\theta) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{T}_\lambda"] & \mathcal{D}_t(\Pi)' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{T}_\lambda"] & C_c^\infty(\Pi)' \arrow[d, "\mathrm{T}_\lambda"] \\
C_c^\infty(\Gamma) \arrow[r, hook] & \mathcal{D}_t(\Gamma) \arrow[r, hook] & L^2(\Gamma, d\eta d\theta) \arrow[r, hook] & \mathcal{D}_t(\Gamma)' \arrow[r, hook] & C_c^\infty(\Gamma)'
\end{tikzcd}$$

На приведенной выше диаграмме T_λ всюду биективен. Из свойства (4.4) следует, что

$$(M \otimes I)\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathcal{D}_t(\Gamma),$$

$$(M \otimes I)\mathcal{D}_t(\Pi)' = \mathcal{D}_t(\Gamma)'. \tag{4.7}$$

Введем пространство со смешанной нормой $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, как пространство распределений $f \in \mathcal{D}_t(\Pi)'$, таких что (обобщенное, то есть в смысле распределений) преобразование Меллина по первой переменной $\widetilde{f}_{r\to\xi} = (M \otimes I)f$, рассматриваемое как отображение $\xi \mapsto \widetilde{f}_{r\to\xi}(\xi,\cdot)$, является локально интегрируемой по Бохнеру функцией

$$\widetilde{f}_{r\to\xi} : \mathbb{R} \to X(0,\pi),$$

и следующая норма конечна:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widetilde{f}_{r\to\xi}(\xi,\cdot) \right\|^q_{X(0,\pi)} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widetilde{f}_{r\to\xi} \right\|_{L^{q;X}(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Другими словами,

$$\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Pi)' \middle| \quad \widetilde{f}_{r\to\xi} \in L^{q;X}(\Gamma) \right\},$$

подробности см. в [8].

Аналогичным образом рассмотрим пространство

$$\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Gamma)' \middle| \quad \widehat{f}_{\eta\to\xi} \in L^{q;X}(\Gamma) \right\},$$

где $\widehat{f}_{\eta\to\xi} = (\mathrm{F} \otimes I)f$ — преобразование Фурье по первой переменной, с нормой

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)} = \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{\eta\to\xi} \right\|_{L^{q;X}(\Gamma)}. \tag{4.9}$$

Теорема 4.1 *Пространство* $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$ *является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в* $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ *и изометрически изоморфным* $L^{q;X}(\Gamma)$ *посредством преобразования Меллина по первой переменной:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}M \otimes I : \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi) \to L^{q;X}(\Gamma).$$

Пространство $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)$ *является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в* $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ *и изометрически изоморфным* $L^{q;X}(\Gamma)$ *посредством преобразования Фурье по первой переменной:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{F} \otimes I : \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma) \to L^{q;X}(\Gamma).$$

Более того,

$$\mathrm{T}_\lambda : \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi) \to \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)$$

является изометрическим изоморфизмом нормированных векторных пространств.

Доказательство. Действительно, то, что приведенные выше отображения являются изометриями, ясно из (4.8) и (4.9), а сюръективность следует из (4.6) и (4.7). $\square$

4.3 Пространства со смешанной нормой $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)$, $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ и $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$

Теперь перейдем к конкретной ситуации, когда

$$X_\lambda((0,\pi)) = L^p((0,\pi), 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),\ \ 1 \leqslant p < \infty,\ \ \ \lambda > -1,$$

и обозначим

$$\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi),\quad L^{q,p}_\lambda(\Gamma) = L^{q;X}(\Gamma),\ 1 \leqslant q < \infty,$$

в смысле определений в разделе 4.2. Следовательно,

$$L^{q,p}_\lambda(\Gamma)=L^q(\mathbb{R},L^p((0,\pi),2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),\ d\xi)$$

с нормой:

$$\| \, f \, \|_{L^{q,p}_\lambda(\Gamma)}=\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\pi |f(\xi,\theta)|^p\, 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Определим функцию $\vartheta_{\lambda,p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ следующим образом

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\lambda,p}(\xi) &= \|\Phi_\xi\|^{-1}_{L^p((0,\pi),\ 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta)}\\
&= \left(2^\lambda(\lambda+1)\int\limits_0^\pi e^{-p\,\xi\theta}\ \sin^\lambda\theta d\theta\right)^{-\frac{1}{p}}\\
&= \frac{\left|\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}+\frac{p\xi i}{2}\right)\right|^{\frac{1}{p}}}{\sqrt[p]{\pi\Gamma(\lambda+2)}}\,e^{\frac{\pi\xi}{2}}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Обратим внимание, что условия, наложенные в разделе 4.2 на пространство $X(0,\pi)$, удовлетворяются для $X_\lambda(0,\pi)$. В частности, отображение из формулы (4.5) примет вид

$$\xi(\in\mathbb{R})\mapsto\vartheta_{\lambda,p}(\xi)\Phi_\xi\in L^p((0,\pi),\ 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta), \qquad (4.11)$$

и является непрерывным.

Таким образом, выбор $X(0,\pi)=X_\lambda(0,\pi)$ является законным, и все выводы, сделанные в разделе 4.2, справедливы для пространства со смешанной Фурье - нормой $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$.

Пусть

$$\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)=\mathrm{Hol}(\Pi)\cap\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$$

будет множеством тех элементов $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, которые являются аналитическими на Π.

Теорема 4.2 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \quad \lambda > -1$. *Нормированное подпространство* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi) \subset \dot{\mathcal{L}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ *является полным.*

Доказательство. Отметим, что $L^q(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (19)-(22) в [8], а отображение $\frac{1}{\rho} = \vartheta_{\lambda,p}$ из (4.10) локально ограничено. Таким образом, по предложению 5 в [8], весовое пространство

$$\Xi(\hat{G}, \rho) = L^q(\mathbb{R}, \varrho),$$

заданное весом

$$\varrho(\xi) = \|\Phi_\xi\|^q_{L^p((0,\pi),\ 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta)} = \frac{1}{\vartheta^q_{\lambda,p}(\xi)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

является полным (конечно, полнота весовых пространств Лебега известна независимо).

Обозначим

$$\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Gamma) = \mathrm{Hol}(\Gamma) \cap \mathcal{L}^{q,p}_{\lambda}(\Gamma).$$

Используя (4.3) и теорему 4.1, мы имеем, что

$$\mathrm{T}_\lambda : \dot{\mathcal{A}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi) \to \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Gamma) \tag{4.12}$$

является изометрическим изоморфизмом нормированных векторных пространств. Более того, по предложению 6 из [8], преобразование Фурье по первой переменной

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{F} \otimes I : \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Gamma) \to \Xi(\hat{G}, \rho) = L^q(\mathbb{R}, \varrho)$$

является изометрическим изоморфизмом. Поэтому, как отмечено в замечании 8 в [8], пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\Gamma)$ полно. Тогда, по (4.12), нормированное пространство $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_{\lambda}(\Pi)$ также полно. $\square$

Оператор $U_{1,\lambda}$ определим на функциях из $\dot{\mathcal{L}}^{q;p}_{\lambda}(\Pi)$ как результат сопоставления

$$U_{1,\lambda} : f(r,\theta) \longrightarrow \left(\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} M_{r\to\xi} \otimes I \right) f \right)(\xi,\theta) \in L^{q,p}_{\lambda}(\Gamma), \tag{4.13}$$

где $M_{r\to\xi}$ - преобразование Меллина (4.1), действующее по переменной r. Так что по определению

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}_{\lambda}^{q;p}(\Pi)} = \|U_{1,\lambda}f\|_{L_{\lambda}^{q,p}(\Gamma)}.$$

Заметим, что $U_{1,\lambda}$ - унитарный оператор, как оператор :

$$U_{1,\lambda} : L_{\lambda}^{2}(\Pi) \longrightarrow L^{2}(\mathbb{R}, L^{2}((0,\pi), 2^{\lambda}(\lambda+1)\sin^{\lambda}\theta d\theta), d\xi).$$

Переписывая уравнение $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ \varphi = 0$ в полярных координатах, получим

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi(r,\theta) = 0.$$

Легко видеть,что

$$U_{1,\lambda}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)U_{1,\lambda}^{-1} = \left(i\xi - \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\right)I + i\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Пространство $\mathcal{A}_{1,\lambda}^{q,p}(\Gamma)$ определим как замыкание функций $\varphi = \varphi(\xi,\theta)$ из $L_{\lambda}^{q,p}(\Gamma)$, для которых справедливо

$$\left(\left(i\xi - \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\right)I + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi(\xi,\theta) = 0. \qquad (4.14)$$

в слабом смысле (в смысле $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ распределений).

Замечание 4.3 *Заметим, что*

$$\mathcal{A}_{\lambda}^{2,2}(\Pi) = \mathcal{A}_{\lambda}^{2}(\Pi),$$

$$\mathcal{A}_{1,\lambda}^{2,2}(\Pi) = U_{1,\lambda}(\mathcal{A}_{\lambda}^{2}(\Pi)).$$

Общее решение уравнения (4.14) принадлежит пространству

$$L^{q}(\mathbb{R}, L^{p}((0,\pi), 2^{\lambda}(\lambda+1)\sin^{\lambda}\theta d\theta), d\xi)$$

и имеет вид

$$\varphi(\xi,\theta) = f(\xi)\ \vartheta_{\lambda,p}(\xi)\ e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}, \qquad f(\xi) \in L^{q}(\mathbb{R}),$$

где $\vartheta_{\lambda,p}$ из формулы (4.10) и

$$\|\varphi(\xi,\theta)\|_{L^q(\mathbb{R},L^p((0,\pi),\ 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),d\xi)} = \|f(\xi)\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Действительно, используя формулу 3.892 из [3], получим:

$$\|\varphi(\xi,\theta)\|_{L^q(\mathbb{R},L^p((0,\pi),2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),d\xi)} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\pi |\varphi(\xi,\theta)|^p\, 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^q\, \vartheta^q_{\lambda,p}(\xi) \left(\int_0^\pi \left|e^{-p(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}\right| 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^q\, \vartheta^q_{\lambda,p}(\xi) \left(\int_0^\pi e^{-p\xi\theta} 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^q\, \vartheta^q_{\lambda,p}(\xi) \left[\left(\int_0^\pi e^{-p\xi\theta} 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-q} d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\left(\int_0^\pi e^{i(p\xi i)\theta} 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{2^\lambda(\lambda+1)\pi e^{ip\xi i\frac{\pi}{2}}}{2^\lambda(\lambda+1)\mathrm{B}\left(\frac{\lambda+1+p\xi i+1}{2}, \frac{\lambda+2-p\xi i}{2}\right)}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{\pi e^{-\frac{p\pi\xi}{2}}}{\mathrm{B}\left(\frac{\lambda+2+p\xi i}{2}, \frac{\lambda+2-p\xi i}{2}\right)}\right)^{-\frac{1}{p}} = \frac{\left|\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}+\frac{p\xi i}{2}\right)\right|^{\frac{1}{p}}}{\sqrt[p]{\pi}(\Gamma(\lambda+2))^{\frac{1}{p}}}\, e^{\frac{\pi\xi}{2}} = \vartheta_{\lambda,p}(\xi).$$

Заметим, что согласно асимптотической формуле для Γ - функции (см. [3], формула 8.328):

$$|\Gamma(u+iv)| = O\left(\sqrt{2\pi}|v|^{u-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|v|}\right),$$

функция $\vartheta_{\lambda,p}(\xi)$ имеет следующее поведение при $|\xi|\to\infty$:

$$\begin{aligned}
|\vartheta_{\lambda,p}(\xi)| &= |\xi|^{\frac{\lambda+1}{2}}+o(1), \qquad \xi\to+\infty, &(4.15)\\
|\vartheta_{\lambda,p}(\xi)| &= |\xi|^{\frac{\lambda+1}{2}}e^{-\pi|\xi|}+o(1), \;\; \xi\to-\infty. &(4.16)
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)=\{\varphi(\xi,\theta)=f(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}:f(\xi)\in L^q(\mathbb{R})\}.$$

Приведенный ниже результат является следствием из общей теории, представленной в работе [8].

Теорема 4.4 *Пусть* $1\leqslant p,q<\infty,\quad \lambda>-1$. *Оператор* $U_{1,\lambda}$, *определяемый (4.13), осуществляет изометрический изоморфизм пространств* $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *и* $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)$, *а его сужение на пространство* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *является изометрическим изоморфизмом между* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *и* $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$, *то есть*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)}=\|U_{1,\lambda}f\|_{L^{q,p}_\lambda(\Gamma)}.$$

Доказательство. Сохраним конструкции из доказательства теоремы 4.2 выше. По следствию 4 и предложению 6 из [8],

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{F}\otimes I:\mathcal{A}^{p,q}_\lambda(\Gamma)\to\Big\{f\Big|\quad f(\xi,\theta)=h(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-\xi\theta},\quad h\in L^q(\mathbb{R})\Big\}$$

является изометрическим изоморфизмом, причем правая часть берется в норме $\|f\|_{L^q(\mathbb{R},\varrho)}=\|h\|_{L^q(\mathbb{R})}$. Теперь с помощью (4.4) и (4.12) находим изометрический изоморфизм

$$U_{1,\lambda}:\dot{\mathcal{A}}^{q,p}(\Pi)\to\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$$

$$=\left\{f\,\middle|\quad f(\xi,\theta)=h(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-\xi\theta-\imath\theta(1+\frac{\lambda}{2})},\quad h\in L^q(\mathbb{R})\right\},$$

что и требовалось. □

4.4 Теорема типа Пэли-Винера

Пусть $1 \leqslant p, q < \infty, \quad \lambda > -1$. Оператор

$$R_{0,\lambda} : L^q(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}, L^p((0,\pi), 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta), d\xi)$$

осуществляет изометрическое вложение по правилу:

$$(R_{0,\lambda}f)(\xi,\theta) = f(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}. \tag{4.17}$$

Образ $R_{0,\lambda}$ совпадает с $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$. Обратный оператор

$$R^{-1}_{0,\lambda} : L^q(\mathbb{R}, L^p((0,\pi), 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta), d\xi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$$

задается формулой:

$$\begin{aligned}(R^{-1}_{0,\lambda}\psi)\xi) = \quad & \vartheta^{p-1}_{\lambda,p}(\xi)2^\lambda(\lambda+1)\times \\ & \times\int_0^\pi \psi(\xi,\theta)e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}e^{-(p-2)\xi\theta}\sin^\lambda\theta d\theta.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Лемма 4.5 *Пусть $1 \leqslant p, q < \infty, \quad \lambda > -1$. Имеют место равенства:*

$$\begin{aligned}&R^{-1}_{0,\lambda}R_{0,\lambda} = I : L^q(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}),\\ &R_{0,\lambda}R^{-1}_{0,\lambda} = B_{p,\lambda},\end{aligned}$$

при этом оператор $B_{p,\lambda} = U_{1,\lambda}B^{(\lambda)}_{\Pi}U^{-1}_{1,\lambda}$, где $U_{1,\lambda}$ определяется (4.13), является проектором пространства $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)$ на $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$.

Доказательство. Действительно, для $f \in L^q(\mathbb{R})$ выполняется:

$$\begin{aligned}&R^{-1}_{0,\lambda}R_{0,\lambda}f(\xi) = R^{-1}_{0,\lambda}f(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}\\ &= \vartheta^{p-1}_{\lambda,p}(\xi)2^\lambda(\lambda+1)\times\\ &\times\int_0^\pi f(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}e^{-(p-2)\xi\theta}\sin^\lambda\theta d\theta\\ &= f(\xi)\vartheta^p_{\lambda,p}(\xi)\int_0^\pi e^{-p\xi\theta}2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\\ &= f(\xi)\vartheta^p_{\lambda,p}(\xi)\vartheta^{-p}_{\lambda,p}(\xi) = f(\xi).\end{aligned}$$

С другой стороны, для любой

$$\psi(\xi,\theta) \in L^q(\mathbb{R}_+, L^p((0,\pi), 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta), d\xi)$$

выполняются равенства:

$$\begin{aligned}
&R_{0,\lambda}R_{0,\lambda}^{-1}\psi(\xi,\theta) = R_{0,\lambda}\vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi)2^\lambda(\lambda+1)\times \\
&\times\int_0^\pi \psi(\xi,\theta)e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}e^{-(p-2)\xi\theta}\sin^\lambda\theta d\theta \\
&= \vartheta_{\lambda,p}^{p}(\xi)2^\lambda(\lambda+1)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}\times \\
&\times\int_0^\pi \psi(\xi,\theta)e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}e^{-(p-2)\xi\theta}\sin^\lambda\theta d\theta = (B_{p,\lambda}\psi)(\xi,\theta).
\end{aligned}$$

Сходимость записанного выше интеграла при $p=1$ очевидна. Используя неравенство Гельдера, покажем сходимость при $p>1$.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\pi \psi(\xi,\theta)e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta}e^{-(p-2)\xi\theta}2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right| \\
&\leq \int_0^\pi \left|\psi(\xi,\theta)e^{-(p-1)\xi\theta}2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta\right| d\theta \\
&\leq \left(\int_0^\pi |\psi(\xi,\theta)|^p\, 2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\times \\
&\times\left(\int_0^\pi e^{-p'(p-1)\xi\theta}2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= C_{p,p'}\parallel \psi(\xi,\cdot)\|_{L^p((0,\pi),2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta)},
\end{aligned}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, а $C_{p,p'}$ - постоянная. Последнее и завершает доказательство леммы. □

Оператор

$$R_\lambda = R_{0,\lambda}^{-1}U_{1,\lambda}$$

отображает пространство $\dot{\mathcal{L}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ на $L^q(\mathbb{R})$, и его сужение

$$R_\lambda\Big|_{\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)} : \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$$

является изометрическим изоморфизмом.

Обратный оператор

$$R_\lambda^{-1} = U_{1,\lambda}^{-1} R_{0,\lambda} : L^q(\mathbb{R}) \longrightarrow \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi) \subset \dot{\mathcal{L}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$$

является изометрическим изоморфизмом $L^q(\mathbb{R})$ на $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Замечание 4.6 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \quad \lambda > -1$. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} R_\lambda R_\lambda^{-1} &= I : L^q(\mathbb{R}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}); \\ R_\lambda^{-1} R_\lambda &= B_\Pi^{(\lambda)} : \dot{\mathcal{L}}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi). \end{aligned}$$

Теорема 4.7 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \quad \lambda > -1$. *Изометрический изоморфизм*

$$R_\lambda^{-1} = U_{1,\lambda}^{-1} R_{0,\lambda} : \ L^q(\mathbb{R}) \longrightarrow \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi),$$

определяется равенством

$$(R_\lambda^{-1} f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} z^{i\xi - (1+\frac{\lambda}{2})} \vartheta_{\lambda,p}(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{4.19}$$

Обратный изоморфизм: $R_\lambda : \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$ *определяется следующим равенством:*

$$\begin{aligned} (R_\lambda \varphi)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi) \int\limits_{\Pi} (\overline{z})^{-i\xi-(1+\frac{\lambda}{2})} \varphi(z) e^{-(p-2)\xi \arg z} d\mu_\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi) \times \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\times \int\limits_0^\pi \left(\int\limits_{\mathbb{R}} r^{-i\xi+\frac{\lambda}{2}} \ e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} \varphi(re^{i\theta}) \frac{1}{\pi} dr \right) \ 2^\lambda (\lambda+1) \sin^\lambda(\theta) d\theta,$$

где $\vartheta_{\lambda,p}$ *вида (4.10),* $d\mu_\lambda(z) = \frac{1}{\pi} r 2^\lambda (\lambda+1) \sin^\lambda \theta dr d\theta, \ z = re^{i\theta}$.

Доказательство. Пусть $f \in L^q(\mathbb{R})$, тогда полагая $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, оценим интеграл в правой части (4.19):

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} r^{i\xi - (1+\frac{\lambda}{2})} e^{-\theta\xi - i\theta(1+\frac{\lambda}{2})} \vartheta_{\lambda,p}(\xi) f(\xi) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^{-(1+\frac{\lambda}{2})}}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\theta\xi} |\vartheta_{\lambda,p}(\xi)||f(\xi)| d\xi \leqslant C \frac{r^{-(1+\frac{\lambda}{2})}}{\sqrt{2}} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}_-} |\xi|^{\frac{(\lambda+1)q'}{2}} e^{-q'(\pi+\theta)|\xi|} d\xi + \int_{\mathbb{R}_+} |\xi|^{\frac{(\lambda+1)q'}{2}} e^{-q'\theta|\xi|} d\xi \right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера и соотношениями (4.15), (4.16). Таким образом, при каждом $z \in \Pi$ интеграл в правой части соотношения (4.19) абсолютно сходится и определяет аналитическую в Π функцию. Последнее, как и выше в параболическом случае, вытекает из того, что формально продифференцированный интеграл (4.19) остается абсолютно сходящимся равномерно по z в некоторой окрестности каждой точки $z \in \Pi$.

В силу формул (4.2), (4.17) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R_\lambda^{-1} f(\xi) &= U_{1,\lambda}^{-1} R_{0,\lambda} f(\xi) = U_{1,\lambda}^{-1} f(\xi) \vartheta_{\lambda,p}(\xi) e^{-(\xi + (1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} r^{i\xi - \frac{\lambda}{2} - 1} f(\xi) \vartheta_{\lambda,p}(\xi) e^{-(\xi + (1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} z^{i\xi - (1+\frac{\lambda}{2})} \vartheta_{\lambda,p}(\xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где $z = r\, e^{i\theta}$, а функция $\vartheta_{\lambda,p} = \vartheta_{\lambda,p}(\xi)$ имеет вид (4.10).

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть функция $\varphi(r, \theta) \in \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$, тогда на основании формул (4.1) и (4.18) справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&(R_\lambda\, \varphi)(\xi) = (R_{0,\lambda}^{-1} U_{1,\lambda}\, \varphi(r,\theta))(\xi) = (R_{0,\lambda}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} M_r\, \varphi(r,\theta))(\xi) \\
&= \vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi) 2^\lambda (\lambda+1) \times \\
&\times \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} r^{-i\xi+\frac{\lambda}{2}}\, \varphi(re^{i\theta}) dr \right) e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} e^{-(p-2)\xi\theta} \sin^\lambda \theta d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi) \times \\
&\times \int\limits_0^\pi \left(\int\limits_{\mathbb{R}} r^{-i\xi+\frac{\lambda}{2}}\, e^{-(\xi-(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} \varphi(re^{i\theta}) \frac{1}{\pi} dr \right)\, 2^\lambda (\lambda+1) \sin^\lambda(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vartheta_{\lambda,p}^{p-1}(\xi) \int\limits_\Pi (\overline{z})^{-i\xi-(1+\frac{\lambda}{2})} \varphi(z) e^{-(p-2)\xi \arg z} d\mu_\lambda(z),
\end{aligned}
$$

где $z = re^{i\theta},\ d\mu_\lambda(z) = \frac{1}{\pi} r 2^\lambda (\lambda+1) \sin^\lambda \theta dr d\theta.$ $\square$

Как следствие, приведем описание функций из класса $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Теорема 4.8 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1,\ f \in \dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi).$ *Тогда*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}_\lambda^{q,p}(\Pi)} = \|R_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}.$$

Замечание 4.9 *Как уже было отмечено, автору неизвестны другие результаты типа Пэли - Винера в такой постановке. Хотя, конечно, пересчитывая оператор Меллина в терминах оператора Фурье, в целом, получим аналог с предыдущим случаем. По - видимому, исследование пространств и операторов в такой постановке - хороший открытый и далеко не изученный вопрос.*

4.5 Теплицевы операторы с символами, зависящими от $\theta = \arg z$ в $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Для $d\nu_\lambda$ - измеримой функции $a = a(z)$ рассмотрим оператор Теплица, не обязательно ограниченный, но формально определённый на $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ следующим образом:

$$T_a^{(\lambda)} f = B_\Pi^{(\lambda)} a f.$$

Пусть функция $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(\xi)$ задается равенством:

$$\gamma_{a,\lambda}(\xi) = 2^\lambda\,(\lambda+1)\,\vartheta^p_{\lambda,p}(\xi)\int_0^\pi a(\theta)\,e^{-p\theta\xi}\sin^\lambda\theta\,d\theta, \qquad (4.21)$$

где функция $\vartheta_{\lambda,p}$ имеет вид (4.10), а символ оператора Теплица $a = a(\theta)$ принадлежит $L^1((0,\ \pi), \sin^\lambda\theta d\theta)$. Всюду в дальнейшем будем считать это условие выполненным.

Имеет место следующее спектральное представление для оператора Теплица.

Теорема 4.10 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *с символом* $a = a(\theta)$, *действующий в* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, *эквивалентен посредством изометрического изоморфизма оператору умножения:*

$$\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1},$$

действующему в $L^q(\mathbb{R})$. *Функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *задается равенством (4.21), операторы* $R_\lambda, R_\lambda^{-1}$ *имеют вид (4.19), (4.20).*

Доказательство. Пусть $f \in L^q(\mathbb{R})$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1} f(\xi) &= R_{0,\lambda}^{-1} U_{1,\lambda} a(\theta) U_{1,\lambda}^{-1} R_{0,\lambda} f(\xi) \\
&= R_{0,\lambda}^{-1} a(\theta) R_{0,\lambda} f(\xi) = R_{0,\lambda}^{-1} a(\theta) f(\xi) \vartheta_{\lambda,p}(\xi) e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} \\
&= 2^\lambda\,(\lambda+1)\,\vartheta^p_{\lambda,p}(\xi) f(\xi)\int_0^\pi a(\theta)\,e^{-p\,\theta\,\xi}\sin^\lambda\theta\,d\theta.
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 4.11 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$, *функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *определяется равенством (4.21). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен в* $\dot{\mathcal{A}}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *если и только функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *ограничена.*

2. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество*

$$sp\, T_a^{(\lambda)} = \overline{\mathrm{Range}\,\gamma_{a,\lambda}}.$$

Замечание 4.12 *По-видимому, рассмотренный в данной главе диссертации гиперболический случай имеет существенный потенциал в контесте дальнейшего исследования. В отличие от декартовых кординат на полуплоскости, работы по операторам Теплица в констексте полярных координат на полуплоскости ограничиваются статьями приведенным в списке литературы. Автор диссертации также предполагает дальнейшее исследование в данном направлении.*

Список литературы

[1] Василевский, Н. Л. Динамика свойств теплицевых операторов на весовых пространствах Бергмана / Н. Л. Василевский, С. М. Грудский, А. Н. Карапетянц // Сиб. электрон. матем. изв. – 2006. – № 3. – С. 362–383.

[2] Виноградов, С.А. Мультипликативные свойства степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p. / С.А. Виноградов // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 6. – С. 1301–1306.

[3] Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 5-е изд. – М.: Физматгиз, 1971. – 1108 с.

[4] Джрбашян, М.М. О каноническом представлении функций, мероморфных в единичном круге / М.М.Джрбашян // Доклады АН Арм. ССР. – 1945. – Т.3, № 1. – С. 3 – 9.

[5] Джрбашян, М.М. О проблеме представимости аналитических функций / М.М.Джрбашян // Сообщ. Института матем. и мех. АН Арм. ССР. – 1948. – Т. 2. – С. 3-40.

[6] Карапетянц, А. Н. Характеризация весовых пространств аналитических функций со смешанной нормой, определенных в терминах условий на коэффициенты Фурье/ А. Н. Карапетянц, И. Ю. Смирнова // Известия вузов. Математика. — 2022. — № 1. — С. 57–64.

[7] Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[8] Avetisyan, Z. Mixed - Fourier - norm spaces and holomorphic functions / Z.Avetisyan, A.Karapetyants // Режим доступа: https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.15379 (дата обращения 15.04.2025).

[9] Avetisyan, Z. Mixed Fourier norm spaces of analytic functions on the upper half-plane and Toeplitz operators / Z. Avetisyan, A. Karapetyants, I. Smirnova // Mathematical Notes. – 2025. – Vol. 117, no. 3. – P. 345–356.

[10] Bergman, S. The kernel function and conformal mapping (second, revised edition) / S. Bergman. – Providence, RI.: AMS, Mathematical Surveys and Monographs 5, 1970. – 120 pp.

[11] Djrbashian, A.E. Topics in the theory of A^p_α spaces / A.E. Djrbashian, F.A. Shamoian. – Leipzig: B.G. Teubner, Teubner-Texte zur Mathematik, 1988. – 199 p.

[12] Duren, P. Bergman Spaces / P. Duren, A. Schuster. – American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, 2004. –Vol. 100. – 318 pp.

[13] Duren, P. A Paley–Wiener theorem for Bergman spaces with application to invariant subspaces / P. Duren, E. A. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez // Bulletin of the London Mathematical Society. – 2007. – Vol. 39, № 3. – P. 459-466.

[14] Flett, T.M. The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities / T.M. Flett // J. Math. Anal. Appl. – 1972. – Vol. 38, No 3. – P. 746–765.

[15] Gadbois, S. Mixed norm generalizations of Bergman spaces and duality / S. Gadbois // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – Vol. 104, no. 4. – P. 1171-1180.

[16] Gu, D. Bergman projections and duality in weighted mixed norm spaces of analytic functions / D.Gu // Michigan Math. J. – 1992. – T. 39. – C. 71 – 84.

[17] Grudsky, S.M. Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski // J. Operator Theory. – 2003. – T. 49, № 2. – C. 325–346.

[18] Grudsky, S.M. Dynamics of properties of Toeplitz operators with radial symbols / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski // Integral Equations Operator Theory. – 2004. – T. 50, № 2. – C. 217 – 253.

[19] Grudsky, S.M. Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half plane: hyperbolic case / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). – 2004. – T. 10, № 1. – C. 119 – 138.

[20] Grudsky, S.M. Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half plane: parabolic case / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski // J. Operator Theory. – 2004. – T. 52, № 1. – C. 185 – 214.

[21] Jevtić, M. Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-Type Spaces / M. Jevtić, D. Vukotić, M. Arsenović. – Springer, RSME Springer Series Book 2, 2016. – 339 pp.

[22] Karapetyants A. Mixed norm Bergman - Morrey type spaces on the unit disc / A. Karapetyants, S. Samko // Math. Notes. – 2016. – Vol. 100, № 1. – P. 38–48.

[23] Karapetyants, A. Mixed norm variable exponent Bergman space on the unit disc / A. Karapetyants, S. Samko // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, № 8. – P. 1090-1106.

[24] Karapetyants A. Mixed norm spaces of analytic functions as spaces of generalized fractional derivatives of functions in Hardy type spaces / A. Karapetyants, S. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2017. – № 5. – P. 1106-1130.

[25] Karapetyants, A.N. On mixed norm Bergman–Orlicz–Morrey spaces / A.N.Karapetyants, S.G.Samko // Georgian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 25, № 2. – P. 271–282. – DOI: https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0027.

[26] Karapetyants, A. Fractional Integrodifferentiation and Toeplitz Operators with Vertical Symbols / A. Karapetyants, I. Louhichi // Birkhäuser, Operator Theory: Advances and Applications. – 2020. – Vol. 279.

[27] Karapetyants, A. Toeplitz Operators with Radial Symbols on Weighted Holomorphic Orlicz Space / A. Karapetyants, J. Taskinen // Birkhäuser, Operator Theory: Advances and Applications. – 2020. – Vol. 279.

[28] Karapetyants, A. Weighted holomorphic mixed norm spaces in the unit disc defined in terms of Fourier coefficients/ A. Karapetyants, I. Smirnova // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – Vol. 67, № 7. – P. 1543–1553.

[29] Karapetyants, A. On mixed norm holomorphic grand and small spaces / A. Karapetyants // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – Vol. 67, № 3. – P. 633–641. – https://doi.org/10.1080/17476933.2021.1947260.

[30] Karapetyants, A. Toeplitz Operators with Radial Symbols on General Analytic Function Spaces / A. Karapetyants, J. Taskinen

// Complex Analysis and Operator Theory. – 2022. – Vol. 16, № 8. – P. 16. – https://doi.org/10.1007/s11785-022- 01294-9.

[31] Karapetyants, A. N. Weighted spaces of analytic functions with mixed-Fourier-norm and Toeplitz operators: a survey of recent advances / A. N. Karapetyants, I. Yu. Smirnova // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2025.

[32] Kiryakova, V.S. Generalized Fractional Calculus and Applications / V. S. Kiryakova. – Longman, Pitman Research Notes in Mathematics, 1994. – Vol. 301. – 388 pp.

[33] Lueking, D. Representation and duality in weighted spaces of analytic functions / D. Lueking // Indiana Univ. Math. J. 34. – 1985. – P. 319-336.

[34] Smirnova, I. Yu. On a Class of Mixed Norm Bergman Type Space / coefficients / I. Yu. Smirnova // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII Ростов-на-Дону, 24–28 апреля 2017 года. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2017. – С. 54.

[35] Smirnova, I. Yu. Weighted mixed norm holomorphic spaces defined in terms of Fourier coefficients / I. Yu. Smirnova // Tenth International Scientific Conference "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – X OTHA-2021, Rostov-on-Don, [22-27 August], 2021 : Book of Abstracts. – Rostov-on-Don, 2021. – С. 57.

[36] Vasilevski, N. Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space / N. Vasilevski. – Birkhäuser, Series: Operator Theory: Advances and Applications, 2008. – Vol. 185. – 417 pp.

[37] Yudell, L. Luke. The Special Functions and Their Approximations/ L. Luke.Yudell. – New York and London: Academic Press, 1969. – 348 pp.

[38] Zhu, K. Operator theory in function spaces. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics / K. Zhu. – New York: Marcel Dekker, 1990. – 254 pp.

[39] Zhu, K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate texts in Mathematics / K. Zhu. – Springer, 2004. – 268 pp.

5 Приложение

5.1 Представление классического пространства Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$. Эллиптический случай.

Здесь мы приводим некоторые основы классической теории, связанной с представлением гильбертова пространства $L^2_\lambda(\mathbb{D})$ и его замкнутого подпространства - пространства Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ в случае выбора в диске полярной системы координат (эллиптический случай). Это прояснит нашу мотивацию и схему определения новых пространств в терминах образов Фурье во всех трех случаях. Два остальных случая - параболический и гиперболический - осуществляются по аналогичной схеме с заменой дискретного преобразования Фурье на непрерывное преобразование Фурье (параболический случай) и преобразование Меллина (гиперболический случай). Результаты ниже взяты из [18].

Пусть $f(z) = f(rt)$ на $\mathbb{D}$, имеем

$$\|f\|_{L^2_\lambda(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{T}} \left| \int_0^1 |f(rt)|^2 \nu_\lambda(r) 2r dr \right| \frac{1}{\pi} \ d\sigma(t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $d\sigma(t) = \frac{dt}{it}$ -дифференциал единичной окружности, а функция ν_λ определяется по формуле (2.20).

Весовое классическое пространство Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ является замкнутым подпространством пространства $L^2_\lambda(\mathbb{D})$, состоящим из аналитических в $\mathbb{D}$ функций.

Полагая $t = e^{i\alpha}$, имеем $d\sigma(t) = d\alpha$ и

$$\begin{aligned} L^2_\lambda(\mathbb{D}) \ = \ & L^2(\mathbb{T}, L^2_\lambda(I)) = \\ & L^2(\mathbb{T}, L^2([0,1], \nu_\lambda(r)2rdr), \frac{1}{\pi} d\sigma(t)) = \\ & L^2([0,2\pi], L^2([0,1], \nu_\lambda(r)2rdr), \frac{1}{\pi} d\alpha). \end{aligned}$$

Соответственно, оператор $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{e^{i\alpha}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Введем унитарный на $L^2_\lambda(\mathbb{D})$ оператор

$$U_{1,\lambda} = \mathcal{F} \otimes I : L^2(\mathbb{T}, L^2_\lambda(I)) \longrightarrow l^2(L^2_\lambda(I)),$$

где $\mathcal{F}$– дискретное преобразование Фурье, действующее по переменной из множества $\mathbb{T}$. Образ оператора $U_{1,\lambda}$ представляет собой пространство, состоящее из последовательностей, компоненты которых принадлежат $L^2_\lambda(I)$. Действие оператора

$$U_{1,\lambda}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}U^{-1}_{1,\lambda} = (\mathcal{F} \otimes I)\ \ \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)(\mathcal{F} \otimes I)^{-1}$$

на пространстве $l^2(L^2_\lambda(I))$ осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} &\to \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r)t^n \\
&\to \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right) c_n(r)t^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r}\right) c_n(r)t^n \\
&\to \{d_k(r)\}_{k\in\mathbb{Z}} \\
&\equiv \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r}\right) c_n(r)t^n t^{-k}\frac{dt}{it}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \\
&= \left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2i}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r}\right) c_n(r)\int_{\mathbb{T}} t^{n-k}dt\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{T}} t^{n-k+1}\frac{dt}{it} = \begin{cases} 2\pi, & n-k+1 = 0, \\ 0, & n-k+1 \neq 0, \end{cases}$$

то

$$\{d_k(r)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n}{r}\right)c_n(r)2\pi\right\}_{n=k-1\in\mathbb{Z}}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{k-1}{r}\right)c_{k-1}(r)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Отсюда имеем:

$$U_{1,\lambda}\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)U_{1,\lambda}^{-1}\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n}{r}\right)c_n(r)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Известна следующая теорема (оператор $U_{2,\lambda}$ введен в разделе 2.6.1).

Теорема 5.1 *(см. [18]). Пусть $\lambda \in (-1,+\infty)$. Унитарный оператор $U_\lambda = U_{2,\lambda}U_{1,\lambda}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L^2_\lambda(\mathbb{D})$ на $l^2(L^2([0,1],2rdr))$ при котором*

1. *пространство Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ отображается на $L^2_0 \otimes l^2_+$:*

$$U_\lambda : \mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D}) \longrightarrow l^2_+ \otimes L^p_0,$$

   где L^2_0-одномерное подпространсво $L^2([0,1],2rdr)$, порожденное элементом $\ell_{0,2}(r) = 1$.

2. *проектор Бергмана $B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}}$ унитарно эквивалентен проектору $p_+ \otimes P_0$:*

$$U_\lambda B^{(\lambda)}_{\mathbb{D}} U_\lambda^{-1} = p_+ \otimes P_0,$$

   где P_0-одномерный проектор $L^2([0,1],2rdr)$ на L^2_0.

5.2 Об обобщенных коэффициентах Фурье

Результаты, представлненные в данном разделе для безвесового случая $\lambda = 0$ приведены в [24] (см. также [28]). Здесь мы приводим обобщение на весовой случай $\lambda > -1$ для полноты изложения.

Для функции

$$f(z) = f(r, e^{i\alpha}) \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$$

коэффициенты Фурье, определяемые равенством

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r, e^{i\alpha})e^{-in\alpha}d\alpha, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

существуют для почти всех $r \in I = (0, 1)$.

Теория рядов Фурье 2π - периодических функций, т.е., анализ Фурье на единичном круге, хорошо известен. Для наших целей нам понадобится понятие коэффициента Фурье распределения f на $\mathbb{D}$, который мы будем определять, естественно, в смысле обобщённых функций. Этот коэффициент рассматривается как распределение (обобщенная функция) на интервале I.

Мы не будем останавливаться на общей теории распределений и обобщенного преобразования Фурье в полном объеме и скорее ограничимся необходимыми для наших целей фактами.

Введем пространство пробных функций $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbb{D})$ как множество функций

$$\omega = \omega(r, e^{i\alpha}) \in C^\infty(\mathbb{D})$$

таких, что

$$\Lambda_{m_1,m_2}(\omega) = \sup_{r,\alpha}\left|\partial_r^{m_1}\partial_\alpha^{m_2}\omega(r, e^{i\alpha})\right| < \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество $\mathfrak{S}$ является линейным топологическим пространством с топологией, заданной счетным набором полунорм $\Lambda_{m_1,m_2}(\cdot)$. Для любого $\gamma > 0$ коэффициенты Фурье функции $\omega \in \mathfrak{S}$ удовлетворяют оценкам

$$\sup_{r\in I}|\omega_n(r)| \leqslant C|n|^{-\gamma} \tag{5.1}$$

с постоянной $C > 0$ зависящей только от ω и γ.

Введем пространство $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(\mathbb{D})$ как множество всех линейных непрерывных функционалов (распределений) на $\mathfrak{S}$. Через $(f, \omega)_\lambda$, $f \in \mathfrak{S}'$, $\omega \in \mathfrak{S}$ обозначим значение функционала f на тестовой функции ω выбранной так, что для функции $f \in L^1_\lambda(\mathbb{D})$

билинейная форма будет совпадать с интегралом

$$\begin{aligned}(f,\omega)_\lambda &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\,\overline{\omega(z)}\,\mathrm{dA}_\lambda(z)\\ &= (\lambda+1)\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,e^{i\alpha})\,\overline{\omega(r,e^{i\alpha})}\,d\alpha\right)(1-r^2)^\lambda 2rdr.\end{aligned}$$

Пусть теперь $\sigma=\sigma(I)$ будет множеством тестовых функций $v\in C^\infty(I)$, таких, что

$$\lambda_m(v)=\sup_{r\in I}\left|v^{(m)}(r)\right|<\infty,\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Таким образом, пространство тестовых функций σ является линейным топологическим пространством с топологией, определяемой счетным множеством полунорм $\lambda_m(\cdot)$.

Через $\sigma'=\sigma'(I)$ мы обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов (распределений) на σ. Аналогично вышесказанному, $\langle g,v\rangle_\lambda$ будет представлять соответствующую билинейную форму в случае «регулярных» функционалов g :

$$\langle g,v\rangle_\lambda=(\lambda+1)\int_0^1 g(r)\,\overline{v(r)}\,(1-r^2)^\lambda 2rdr.$$

Фиксируя распределение $f\in\mathfrak{S}'$, мы определяем его обобщенный коэффициент Фурье $f_n\in\sigma'$ по правилу

$$\langle f_n,v\rangle_\lambda=(f,ve^{in\alpha})_\lambda,\ v\in\sigma,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Функция $ve^{in\alpha}$ принадлежит $\mathfrak{S}$, поэтому правая часть этого равенства корректно определена для любого $f\in\mathfrak{S}'$. Если $f\in L^1_\lambda(\mathbb{D})$, тогда равенство (5.2) справедливо в обычном смысле, когда обе стороны заменены соответствующими интегралами. Этот факт обосновывает определение (5.2).

Теорема 5.2 *Пусть* $f_n\in L^1_\lambda(I),\ n\in\mathbb{Z},\ \ \lambda>-1$, *и предположим, что*

$$\|f_n\|_{L^1_\lambda(I)}\leqslant C|n|^\gamma$$

для некоторого $\gamma \geqslant 0$ и абсолютной постоянной $C > 0$. Тогда ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(r)e^{in\alpha}$$

сходится к распределению f в $\mathfrak{S}'$. Обобщенные коэффициенты Фурье f - это элементы f_n, то есть обобщенное разложение f в ряд Фурье единственно.

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathfrak{S}$. Ввиду (5.1) имеем (возьмем $\gamma+2$ вместо γ в этой формуле):

$$\begin{aligned}
\left|(f_n(r)e^{in\alpha}, \omega)_\lambda\right| &= (\lambda+1)\left|\int_I f_n(r)(1-r^2)^\lambda 2rdr\right. \\
&\times \left.\int_0^{2\pi} e^{in\alpha}\,\overline{\omega(r, e^{i\alpha})}\,\frac{d\alpha}{2\pi}\right| \\
&= (\lambda+1)\left|\int_I f_n(r)\,\overline{\omega_n(r)}\,(1-r^2)^\lambda 2rdr\right| \\
&\leqslant C|n|^\gamma |n|^{-\gamma-2} = C|n|^{-2}, \quad n \neq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, предел

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{N} f_n(r)e^{in\alpha}, \omega\right)_\lambda = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\big(f_n(r)e^{in\alpha}, \omega\big)_\lambda \tag{5.3}$$

существует для любого $\omega \in \mathfrak{S}$, и таким образом определяет распределение f из $\mathfrak{S}'$.

Покажем, что f_n является обобщенным коэффициентом Фурье для f. Действительно, пусть

$$\omega(r, e^{i\alpha}) = v(r)e^{il\alpha} \in \mathfrak{S}$$

для некоторого фиксированного $l \in \mathbb{Z}$. Ввиду ортогональности и

(5.3) мы получим:

$$\begin{aligned}
(f,\omega)_\lambda &= \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f_n(r)e^{in\alpha},\omega\right)_\lambda \\
&= \lim_{N\to\infty}(\lambda+1)\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} f_n(r)e^{in\alpha}\overline{v(r)e^{il\alpha}}\right) \\
&\times\ (1-r^2)^\lambda 2rdr \\
&= (\lambda+1)\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_l(r)e^{il\alpha}\overline{v(r)e^{il\alpha}}\right)(1-r^2)^\lambda 2rdr \\
&= (\lambda+1)\int_0^1 f_l(r)\ \overline{v(r)}\ (1-r^2)^\lambda 2rdr = \langle f_l, v\rangle_\lambda.
\end{aligned}$$

Совпадение в смысле распределений n-го коэффициента Фурье функции f с f_n теперь очевидно. □