ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Смирнова Ирина Юрьевна

Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, задаваемые в терминах преобразования Фурье

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет».

Научный руководитель: **Карапетянц Алексей Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону

Официальные оппоненты: **Бережной Евгений Иванович**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова», г. Ярославль

Солдатов Александр Павлович
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет МЭИ»,
г. Москва

Защита состоится « 23 » сентября 2025 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21ж, и на сайте ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу https://hub.sfedu.ru/diss/show/1345950/ .

Автореферат разослан «____» ________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кряквин В. Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Классические весовые (гильбертовы) пространства аналитических функций в диске и на полуплоскости, со специальным выбором веса, степенным образом растущим или зануляющимся при приближении к границе, получили особое внимание в связи с различными задачами теории функций комплексного переменного и теории операторов. Операторы Теплица и алгебры операторов Теплица также широко изучены в таких пространствах.

В работах Н.Л.Василевского, С.М.Грудского и А.Н.Карапетянца [1] [2] [3] [4] [5] (см. также книгу [6]) было проведено исследование специальных классов операторов Теплица в таких пространствах. Эти работы были связаны с тремя типами гиперболической геометрии в диске и соответствующими системами координат - эллиптической, параболической и гиперболической. Первая описывается с точностью до автоморфизма диска полярными координатами в единичном диске, а вторая и третья - после конформного отображения на полуплоскость (для простоты восприятия) - преобразуются в декартовы и полярные координаты на полуплоскости соответственно. Помимо построения общей теории впервые было продемонстрировано существование неограниченных символов, порождающих ограниченные и даже компактные, а также принадлежащие классам Шаттена, операторы Теплица. Было изучено поведение спектра при изменении параметра веса к бесконечности и был сформулирован аналог принципа соответствия: для хороших (непрерывных, например) символов предел спектральных множеств совпадает с образом символа. В этой связи отмечены неоторые интересные аналоги с принципом соответствия Березина в теории вторичного квантования. Для разрывных символов также были получены интересные результаты.

[1] Василевский, Н. Л. Динамика свойств теплицевых операторов на весовых пространствах Бергмана / Н. Л. Василевский, С. М. Грудский, А. Н. Карапетянц // Сиб. электрон. матем. изв. – 2006. – № 3. – С. 362–383.

[2] Grudsky, S.M. Dynamics of properties of Toeplitz operators with radial symbols / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski// Integral Equations Operator Theory. – 2004. – Т. 50, № 2. – С. 217 – 253.

[3] Grudsky, S.M. Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half plane: hyperbolic case / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski// Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). – 2004. – Т. 10, № 1. – С. 119 – 138.

[4] Grudsky, S.M. Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski// J. Operator Theory. – 2003. – Т. 49, № 2. – С. 325–346.

[5] Grudsky, S.M. Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half plane: parabolic case / S.M.Grudsky, A.N.Karapetyants, N.L.Vasilevski// J. Operator Theory. – 2004. – Т. 52, № 1. – С. 185 – 214.

[6] Vasilevski, N. Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space / N. Vasilevski. – Birkhäuser, Series: Operator Theory: Advances and Applications, 2008. – Vol. 185. – 417 pp.

Естественное продолжение данной тематики - исследование более общих пространств, в том числе со смешанной нормой и теплицевых операторов в этих пространствах.

В недавних работах А.Н.Карапетянца и С.Г.Самко предложен подход, при котором смешанная норма определяется в терминах преобразования Фурье (Меллина). То есть, образ Фурье по одной из переменных принадлежит пространству функций с интегральной смешанной нормой, связанной с одним из типов координатной сетки. Это - существенное отличие от большинства работ, имеющихся в настоящий момент по пространствам аналитических функций со смешанной нормой (см. книгу [7] и ссылки в этой книге), в которых изначально сама функция, а не образ Фурье, измеряется в интегральной (смешанной) норме.

Эти два подхода введения смешанной нормы приводят к существенно различным обобщениям классических пространств типа Бергмана-Джрбашяна [8] [9], каждый имеет свои преимущества. Но такое определение в образах Фурье приводит к абсолютно новым и интересным пространствам аналитических функций.

Работы А.Н.Карапетянца и С.Г.Самко относятся к случаю смешанной нормы в единичном диске, связанной с полярными координатами (эллиптический случай). В ряде статей [10] [11] [12] [13] [14], [1] были рассмотрены различные нормы, включая норму переменного пространства Лебега, Морри, Орлича, различные комбинации таких норм, и были показаны различные новые и интересные эффекты, возникающие из такого разнообразия норм.

Эллиптический случай имеет определенное преимущество в виде разложе-

[7] Jevtić, M. Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-Type Spaces / M.Jevtić, D. Vukotić, M. Arsenović. – Springer, RSME Springer Series Book 2, 2016. — 339 pp.

[8] Bergman, S. The kernel function and conformal mapping (second, revised edition) / S. Bergman. – Providence, RI.: AMS, Mathematical Surveys and Monographs 5, 1970. – 120 pp.

[9] Djrbashian, A.E. Topics in the theory of A^p_α spaces / A.E. Djrbashian, F.A. Shamoian. – Leipzig: B.G. Teubner, Teubner-Texte zur Mathematik, 1988. – 199 p.

[10] Karapetyants, A.N. On mixed norm Bergman–Orlicz–Morrey spaces / A.N.Karapetyants, S.G.Samko // Georgian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 25, № 2. – P. 271–282.

[11] Karapetyants A. Mixed norm spaces of analytic functions as spaces of generalized fractional derivatives of functions in Hardy type spaces / A. Karapetyants, S. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2017. – № 5. – P. 1106-1130.

[12] Karapetyants A. Mixed norm Bergman - Morrey type spaces on the unit disc / A. Karapetyants, S. Samko // Math. Notes. – 2016. – Vol. 100, № 1. – P. 38–48.

[13] Karapetyants, A. Mixed norm variable exponent Bergman space on the unit disc / A. Karapetyants, S. Samko // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, № 8. – P. 1090-1106.

[14] Karapetyants, A. On mixed norm holomorphic grand and small spaces / A. Karapetyants // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – Vol. 67, № 3. – P. 633–641.

ния аналитической функции в ряд Тейлора, сходящийся во всех точках диска. Именно благодаря этому можно однозначно и явно характеризовать аналитические функции из таких новых пространств, определенных в терминах коэффициентов Фурье.

До недавнего времени такое исследование не представлялось возможным в случае полуплоскости и смешанной нормы, связанной с декартовыми или полярными координатами. Основной вопрос состоит в том, как конструктивно описать аналитические функции в верхней полуплоскости, преобразования Фурье которых принадлежат некоторым пространствам со смешанной нормой. Недавно эта задача была решена в общем виде в работе [15] Ж.Г.Аветисяна и А.Н.Карапетянца, что открыло путь к изучению широкого класса функциональных пространств со смешанной нормой на верхней полуплоскости, по аналогии со случаем единичного диска.

Вклад диссертационной работы относится ко всем трем случаям, и основным объектом исследования является пространство со смешанной нормой, в которой преобразование Фурье функции (дискретное, в эллиптическом случае) принадлежит весовому пространству типа Лебега, с выбором веса как указано ранее в классическом случае. Таким образом, данное исследование в эллиптическом случае - это продолжение предыдущих на весовой случай, а в параболическом и гиперболическом - это абсолютно новое исследование. В целом, развиваются подходы и методы в новых, ранее не изученных ситуациях, что и обуславливает актуальность данного исследования.

Цели и задачи работы. Вводятся и изучаются весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, определенные в терминах преобразования Фурье (Меллина) в трех случаях, которые как было отмечено ранее, фактически характеризуются тремя типами гиперболической геометрии в единичном диске и связанными с ними системами координат - эллиптической, параболической и гиперболической. Соответственно, рассматриваются пространства на единичном диске со смешанной нормой, связанной с полярными координатами, и на верхней полуплоскости со смешанной нормой, связанной с декартовыми и также с полярными координатами. В указанных пространствах со смешанной нормой рассматриваются оператор Бергмана, а также операторы Теплица со

[15] Avetisyan, Z. Mixed - Fourier - norm spaces and holomorphic functions / Z.Avetisyan, A.Karapetyants // Режим доступа: https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.15379 (дата обращения 15.04.2025).

специальными символами, также связанными с соответствующей геометрией.

Основные задачи исследования описываются следующим образом. Ввести весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой в каждом из трех случаев. Выбирается стандартный степенной вес, зануляющийся или растущий при приближении к границе, что позволит в дальнейшем формулировать и решать задачи в контексте изменения параметра веса, как в классическом случае. Описать полученные пространства аналитических функций в различных терминах, в том числе сформулировать критерии принадлежности новым введенным пространствам. В каждом из трех случаев построить в явном виде операторы типа Фурье, обеспечивающие равенства типа Пэли Винера. На основе и в качестве приложения этих результатов, исследовать вопросы ограниченности (а в эллиптическом случае - и компактности) операторов Теплица, со специальными символами, также связанными с геометрией границы области.

Научная новизна. Весовые пространства аналитических функций со смешанной Фурье - нормой на единичном диске и верхней полуплоскости рассматриваются впервые, также как и операторы Теплица в этих пространствах. В эллиптическом случае мы обобщаем результаты, полученные ранее для безвесового случая. В параболическом и гиперболическом случае такие исследования являются новыми даже в безвесовой постановке. Для определения самих пространств в эллиптическом случае мы обобщаем результаты упомянутых ранее работ А.Н.Карапетянца и С.Г.Самко. В параболическом случае мы используем определения в работе Ж.Г.Аветисяна и А.Н.Карапетянца, однако эти определения уточняются и переформулируются в каждом конкретном случае.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории пространств аналитических функций со смешанной нормой, операторов типа Теплица и алгебр таких операторов в таких весовых пространствах. Представляется интересным, например, дальнейшее развитие теории в параболическом и гиперболическом случаях с использованием различных норм типа переменного пространства Лебега, Морри, Орлича и других, как это сделано в эллиптическом случае. Другие вопросы, такие как интерполяционные теоремы, приближения функций, связь с пространствами дробных производных и иные классические вопросы также могут быть рассмотрены в данной новой постановке.

Методология и методы исследования. Применяются методы функционального анализа, теории функций и теории операторов, в том числе анализ Фурье, элементы спектральной теории, интегральные преобразования, классические факты и утверждения из теории вещественного и комплексного переменного. Подходы исследования в первую очередь основаны на изучении структурных свойств соответствующих функциональных пространств и на специальной характеризации функций из этих пространств. Переход к образам Фурье эффективно используется для конструктивного описания подкласса аналитических функций, а также для характеристики операторов Теплица в этих пространствах. Используются также понятия дробного интегро - дифференцирования аналитических функций, применяется теория обобщенных функций.

Основные положения, выносимые на защиту.

Получена характеризация функции из исследуемых пространств аналитических функций со смешанной Фурье - нормой в различных терминах: теоремы вложения, эквивалентные нормы, представление функции как образ от оператора дробного дифференцирования, изометрический изоморфизм между пространствами.

Получены теоремы типа Пэли - Винера, явно построены изометрические изоморфизмы (операторы типа Фурье-Лапласа), осуществляющие представления аналитических функций в терминах Пэли-Винера.

Исследованы операторы Теплица со специальными символами, получены представления спектрального типа и сформулированы критерии ограниченности, а в эллиптическом случае и компактности этих операторов в новых пространствах функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью доказательств и применением известных методов исследования.

Все представленные в диссертационной работе результаты опубликованы в ведущих рецензируемых журналах.

Результаты диссертационной работы докладывались в разные годы на научных конференциях, в том числе на международной конференции "VI Российско-Армянская конференция по математическому анализу, математической физике и аналитической механике."11-16 сентября 2016, г.Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет и Донской государственный технический университет (стендовый доклад), на международной конференции "Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа."22-27 августа 2021, г.Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет (секционный доклад), на международной конференции "Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа."25-30 августа 2024, г.Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет (секционный доклад), на международной конференции "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа."11-14 марта 2025, г.Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН, Кабардино-Балкарская Республика, Россия (доклад).

Диссертация выполнена при частичной поддержке научного гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект РФФИ № 18-01-00094-а (соискатель - исполнитель проекта), а также при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ в рамках проектов Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2022-893, Соглашение № 075-02-2023-924, Соглашение № 075-02-2024-1427 и Соглашение № 075-02-2025-1720).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 6 работ: 4 статьи по теме диссертации опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных WoS, Скопус и РИНЦ и 2 тезиса в сборниках научных конференций. Статьи [1, 2, 3, 4] входят в перечень научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций, защищаемых в диссертационном совете ЮФУ801.01.02.

Из совместных работ в диссертацию, в качестве результатов выносимых на защиту, вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Именно, в статьях [1, 2, 3] соискателю принадлежат результаты по описанию пространств со смешанной нормой и изометрическим изоморфизмам, результаты типа Пэли-Винера, результаты об ограниченности и компактности операторов Теплица, и также об ограниченности проектора Бергмана в эллиптическом случае. Статья [4] являются обзорной. В совместных статьях научному руководителю принадлежит постановка вопроса и общее руководство научной работой, а решение поставленных задач принадлежит соискателю. В статье [3] первому автору принадлежит определение пространств в общей постановке (абстрактная схема), что не выносится на защиту.

По-видимому, стоит отметить что еще две статьи [16] [17] приняты в ведущих международных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, приложения и списка литературы. Объем работы составляет 118 страниц, библиография- 39 источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Начнем с изложения результатов первой главы диссертации, посвященной пространствам со смешанной нормой в эллиптическом случае.

Рассмотрим модельную ситуацию эллиптической геометрии - полярные координаты в диске. Согласно этой системе координат вводится смешанная норма в классе измеримых на диске функций (распределений). Именно, обобщенные коэффициенты Фурье $f_n = f_n(r)$ функции f (распределения) предполагаются принадлежащими некоторому (общему) банахову пространству X на интервале $I = (0, 1)$ (как функции аргумента r) при каждом n и далее ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^q_{X(I)}$ предполагается сходящимся; при этом $\|\cdot\|_{X(I)}$ обозначает норму в пространстве X. Уточним, что здесь $X = X(I)$ обозначает банахово пространство функций, заданных на интервале I, содержащее все простые функции, и такое, что

$$X(I) \subseteq L^1_\lambda(I), \quad \lambda > -1. \tag{1}$$

Здесь $L^1_\lambda(I)$ обозначает пространство Лебега функций интегрируемых с весом $(1-r^2)^\lambda$ на интервале $I = (0,\, 1)$.

Таким образом, определяется пространство со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, где норма (смешанная норма) вводится как $\|f\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^q_{X(I)}\right)^{\frac{1}{q}}$, $1 \leqslant q < \infty$. Подпространство аналитических функций $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ состоит только из тех функций $f \in \mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, которые аналитичны в $\mathbb{D}$.

Мотивация данного определения, равно как и аналогичных определений в двух других главах, состоит в том, что в случае гильбертова пространства $L^2(\mathbb{D})$, благодаря равенству Парсеваля, имеем $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{D})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^2_{L^2(I,2rdr)}$.

[16] Karapetyants, A. N. Paley — Wiener type theorems for spaces of analytic functions with mixed Fourier norm / A. N. Karapetyants, I. Yu. Smirnova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025.

[17] Смирнова, И. Ю. Весовые пространства аналитических функций на верхней полуплоскости со смешанной нормой, определенные в терминах преобразования Меллина и операторы Теплица / И. Ю. Смирнова // Математические заметки. — 2025. — Т. 118, № 3.

Таким образом, в случае $X(I) = L^2(I, 2rdr)$ и $q = 2$ пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ совпадает с $L^2(\mathbb{D})$ и соответствующее аналитическое подпространство $\mathcal{A}^{2;X}(\mathbb{D})$ есть классическое пространство Бергмана - Джрбашяна $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, изученное в работах многих авторов (см. [18] [19] [20] для ссылок).

Случай единичного диска и полярных координат обладает преимуществом по сравнению с двумя другими в виде наличия разложения аналитической функции в ряд Тейлора, сходящийся в диске. Это позволяет решить ряд задач методами классического гармонического анализа и изучить пространства в наиболее общей постановке. Эта особенность эллиптического случая позволяет не прибегать напрямую к общим фактам из статьи [21], и привести определение пространств, используя результаты работы [22].

Как было отмечено, определение нового пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ дается фактически напрямую, используя технику гармонического анализа. Однако для этого необходимо требовать $X(I) \subseteq L^1_\lambda(I),\ \lambda > -1$, в то время как результаты работы [23] позволили бы предполагать большую общность: $X(I)$ - нормированное пространство. Тем не менее, основная задача здесь - изучение случая весового пространства Лебега $X(I) = L^p_\lambda(I),\ \lambda > -1$, ввиду чего выбранная общность оправдана.

Фактически, последующее изложение в этом разделе состоит из двух частей. В первой части приводятся общие факты в случае, когда $X(I)$ - произвольное банахово пространство, являющееся подпространством $L^1_\lambda(I)$, $\lambda > -1$, а во второй мы детально рассматриваем ситуацию весового лебегова пространства $X(I) = L^p_\lambda(I),\ 1 \leqslant\ p < \infty$, $\lambda > -1$. Эта схема в той или иной мере повторяется в последующих двух разделах.

Обратимся к описанию общего случая: пространства $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, случай $X(I) \subseteq L^1_\lambda(I)$. Прежде всего, отметим следующий результат.

[18] Vasilevski, N. Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space / N. Vasilevski. – Birkhäuser, Series: Operator Theory: Advances and Applications, 2008. – Vol. 185. – 417 pp.

[19] Zhu, K. Operator theory in function spaces. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics / K. Zhu. – New York: Marcel Dekker, 1990. – 254 pp.

[20] Zhu, K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate texts in Mathematics / K. Zhu. – Springer, 2004. – 268 pp.

[21] Avetisyan, Z. Mixed - Fourier - norm spaces and holomorphic functions / Z.Avetisyan, A.Karapetyants // Режим доступа: https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.15379 (дата обращения 15.04.2025).

[22] Karapetyants A. Mixed norm spaces of analytic functions as spaces of generalized fractional derivatives of functions in Hardy type spaces / A. Karapetyants, S. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2017. – № 5. – P. 1106-1130.

[23] Avetisyan, Z. Mixed - Fourier - norm spaces and holomorphic functions / Z.Avetisyan, A.Karapetyants // Режим доступа: https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.15379 (дата обращения 15.04.2025).

Теорема 1 *(Теорема 2.2) Пространство $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$, $1 \leqslant q < \infty$, является полным.*

Из определения пространства $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, следует, что коэффициенты Фурье $f_n = f_n(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, функции f в пространстве $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ могут быть представлены как

$$f_n(r) = \begin{cases} a_n \|r^n\|_{X(I)}^{-1} r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-, \end{cases} \tag{2}$$

где $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l_+^q$, $|a_n| = \|f_n\|_{X(I)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, кроме того, $\|f\|_{\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})} = \|\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\|_{l_+^q}$.

Важным общим результатом является следующее достаточное условие (на само пространство X) ограниченности проектора Бергмана.

Теорема 2 *(Теорема 2.7) Пусть $1 \leqslant q < \infty$, $\lambda > -1$ и $X(I) \subseteq L_\lambda^1(I)$. Пусть имеет место условие*

$$n^{\lambda+1} \left| \int_0^1 t^n g(t)(1-t)^\lambda dt \right| \|r^n\|_{X(I)} \quad \leqslant C\|g\|_{X(I)}, \ n \to \infty, \ g \in X(I). \tag{3}$$

Тогда оператор $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$ ограничен как проектор из $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$.

Следствие 3 *Пусть $1 \leqslant q < \infty$ и пусть условие (3) выполнено. Тогда пространство $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$.*

Отметим, что в безвесовом случае теорема 2 доказана в [24]. Однако весовой случай также позволяет получить более общие результаты, как, например, следующая теорема 4. Предположим, что существует $\gamma > 0$ такое, что выполняется

$$\frac{\|r^n\|_{X(I)}}{\|r^{n+j}\|_{X(I)}} \leqslant C\left(\frac{j}{n}\right)^\gamma, \quad n, \ n+j \to \infty. \tag{4}$$

Теорема 4 *(Теорема 2.10) Пусть $-1 < \lambda < \lambda_0$ и пространство $X(I) \subseteq L_\lambda^1(I)$ таково, что условие (4) справедливо с $0 \leqslant \gamma < \lambda + 1$. Если оператор $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda_0)}$ ограничен как проектор из $\mathcal{L}^{q;X}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, то же самое справедливо и для оператора $B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)}$.*

[24] Karapetyants A. Mixed norm spaces of analytic functions as spaces of generalized fractional derivatives of functions in Hardy type spaces / A. Karapetyants, S. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2017. – № 5. – P. 1106-1130.

Теперь перейдем к описанию ограниченности и компактности операторов Теплица с радиальными символами в $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$. Для функции $a = a(|z|)$ рассмотрим оператор Теплица с символом a формально определяемый: $T_a^{(\lambda)} f = B_{\mathbb{D}}^{(\lambda)} af$.

Теорема 5 *(Теорема 2.13) Пусть* $1 \leqslant q < \infty$, $\lambda > -1$, $a = a(r) \in L_\lambda^1(I)$. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Оператор* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D}) \iff$ *последовательность* $\gamma_{a,\lambda}(n) = \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)} \int_0^1 \tau^{2n} a(\tau)\ (1-\tau^2)^\lambda 2\tau\ d\tau$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *ограничена. Здесь* $B(\alpha, \beta)$ *обозначает бета-функцию Эйлера.*
2. *Оператор* $T_a^{(\lambda)}$ *компактен на* $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D}) \iff \gamma_{a,\lambda}(n) \to 0$, $n \to +\infty$.
3. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество* $\{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma = \gamma_{a,\lambda}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ *и его существенный спектр совпадает с замыканием этого множества:* $\overline{\{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma = \gamma_{a,\lambda}(n),\ n \in \mathbb{Z}_+\}}$.

Теперь обратимся к случаю весовых пространств, когда $X(I) = L_\lambda^p(I)$. Для упрощения обозначений мы пишем $\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$ вместо символа $\mathcal{L}_\lambda^{q;L_\lambda^p(I)}(\mathbb{D})$. То же самое касается и $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$ $(1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1)$.

Получена характеризация функций из $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$ в различных терминах, включая эквивалентные нормы, вложение в пространство типа Харди (и наоборот) и в пространство Флетта со смешанной (интегральной) нормой (см. [25] по поводу пространств Флетта), и также само пространство $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D})$ описано как образ при действии оператора дробного дифференцирования. Приведем два из указанных выше результатов. Символ $H^p(\mathbb{D})$ обозначает класс Харди, а $\hookrightarrow$ - непрерывное вложение. Справедлив следующий результат типа Харди - Литтлвуда:

Теорема 6 *(Теорема 2.17) Пусть* $1 \leqslant p < \infty,\ \lambda > -1$.

1. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant 2$. *Тогда* $H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D}),\ \ q(1 + \frac{1+\lambda}{p}) \geqslant 2$;
2. *Пусть* $2 \leqslant q < \infty$. *Тогда* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H^q(\mathbb{D}),\ \ q(1 + \frac{1+\lambda}{p}) \leqslant 2$.

Ниже будем использовать производную (или композицию) по Адамару. В интегральной форме этот оператор записывается в виде:

$$D_\alpha g(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{g(u)}{\left(1 - \frac{z}{u}\right)^{1+\alpha}} \frac{du}{u}, \quad |z| < r < 1, \quad \alpha \geq 0,$$

[25] Flett, T.M. The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities / T.M. Flett // J. Math. Anal. Appl. – 1972. – Vol. 38, No 3. – P. 746–765.

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма функция Эйлера. Имеем следующий результат о представлении функции из $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ в виде дробной производной от аналитической функции с коэффициентами Тейлора, образующими l^q_+ последовательность.

Теорема 7 *(Теорема 2.20) Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. Каждая аналитическая функция $f \in \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ имеет вид $f = D_{\frac{\lambda+1}{p}} h$ с некоторой аналитической функцией $h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} h_n z^n$, такой, что $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in l^q_+$.*

Замечание 8 *Пространства аналитических функций с коэффициентами Тейлора, образующими последовательность в l^q_+, вводились и изучались в работах С.А.Виноградова, см. например* [26] *(обозначались l^q_A). Таким образом, мы имеем: $\mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{\frac{\lambda+1}{p}}(l^q_A)$.*

Замечание 9 *Случай $q = 2$ представляет особый интерес, а именно: $\mathcal{A}^{2,p}_{\lambda}(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{\frac{\lambda+1}{p}}(H^2(\mathbb{D}))$.*

Заметим, что из вложения в пространство Флетта со смешанной нормой следует, что по крайней мере для $1 \leqslant q \leqslant 2$ функции в наших пространствах регулярны в том смысле, что имеют конечную смешанную норму типа Лебега.

В контексте исследований особое внимание уделяется построению явного вида изометрических изоморфизмов, характеризующих функции из рассматриваемых пространств в терминах типа Пэли-Винера:

Теорема 10 *(Теорема 2.33) Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. Изометрический изоморфизм $R^{-1}_{\lambda} : l^q_+ \to \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D})$ определяется соотношением*

$$R^{-1}_{\lambda} : \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n d_{\lambda,p}(n) z^n.$$

Обратный изоморфизм $R_{\lambda}: \quad \mathcal{A}^{q,p}_{\lambda}(\mathbb{D}) \to l^q_+$ имеет вид

$$R_{\lambda} : \varphi(z) \longrightarrow \left\{ d^{p-1}_{\lambda,p}(n) \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \overline{z}^{\,n} \, |z|^{n(p-2)} \mathrm{dA}_{\lambda}(z) \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+},$$

где $\mathrm{dA}_{\lambda}(z) = \frac{(\lambda+1)}{\pi}(1-r^2)^{\lambda} r dr d\sigma(t)$, $d_{\lambda,p}(n) = \left((\lambda+1)\mathrm{B}\left(\frac{np+2}{2}, \lambda+1\right)\right)^{-\frac{1}{p}}$.

[26] Виноградов, С.А. Мультипликативные свойства степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p. / С.А. Виноградов // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 6. – С. 1301–1306.

Перейдем к изложению результатов второй главы диссертации: пространства со смешанной нормой в параболическом случае. То есть, образ Фурье аналитической функции по первой переменной принадлежит пространству функций со смешанной нормой, определённой в соответствии с декартовыми координатами на полуплоскости.

Начнем с определения пространства $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$, где X — комплексное банахово пространство распределений на $\mathbb{R}_+$. Символом $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}_+$. Пусть $X(\mathbb{R}_+)$ — комплексное банахово пространство распределений на $\mathbb{R}_+$, равномерно вложенное в пространство распределений $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)'$. Определим нормированное пространство

$$L^{q;X}(\Pi) = \left\{\varphi = \varphi(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(\mathbb{R}_+)) \;\middle|\; \|\varphi(x,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}_+)} \in L^q(\mathbb{R})\right\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q;X}(\Pi)} = \|\|\varphi\|_{X(\mathbb{R}_+)}\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Интерпретируем $\varphi \in L^{q;X}(\Pi)$ как распределения $\varphi(x,y)$ на Π такие, что отображение $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ есть $\mathbb{R} \to X(\mathbb{R}_+)$, а отображение $x \mapsto \|\varphi(x,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}_+)}$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R})$. Более того, по лемме 5 из [27] мы имеем непрерывное вложение $L^{q;X}(\Pi) \hookrightarrow \mathcal{D}_t(\Pi)'$ в пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Pi)'$, которые являются "умеренными"по первой переменной. Проще говоря, $\mathcal{D}_t(\Pi)$ — это пространство гладких функций, которые быстро убывают по переменной x и имеют компактный носитель по переменной y. Соответственно, $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ — это двойственное пространство распределений, которые умеренны по переменной x.

Пространство со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, введем как пространство распределений $f \in \mathcal{D}_t(\Pi)'$ таких, что (обобщенное) преобразование Фурье по первой переменной $\widehat{f}_{x\to\xi}(\xi,y)$, рассматриваемое как отображение $\xi \mapsto \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi,\cdot)$, является локально интегрируемой по Бохнеру функцией $\widehat{f}_{x\to\xi} : \mathbb{R} \to X(\mathbb{R}_+)$, и следующая норма конечна:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widehat{f}_{x\to\xi}(\xi,\cdot)\right\|^q_{X(\mathbb{R}_+)} d\xi\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widehat{f}_{x\to\xi}\right\|_{L^{q;X}(\Pi)}.$$

Другими словами, $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi) = \left\{ f \in \mathcal{D}_t(\Pi)' \middle| \; \widehat{f}_{x\to\xi} \in L^{q;X}(\Pi)\right\}$. Следующая общая теорема дает понимание природы введенных пространств.

[27]Avetisyan, Z. Mixed - Fourier - norm spaces and holomorphic functions / Z.Avetisyan, A.Karapetyants // Режим доступа: https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.15379 (дата обращения 15.04.2025).

Теорема 11 *(Теорема 3.1) Пусть* $1 \leqslant q < \infty$*. Пространство* $\mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$ *является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в* $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ *и изометрически изоморфным* $L^{q;X}(\Pi)$ *посредством преобразования Фурье по первой переменной:* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}F \otimes I : \mathcal{L}^{q;X}(\Pi) \to L^{q;X}(\Pi)$.

Обратимся теперь к случаю

$$X(\mathbb{R}_+) = L^p_\lambda(\mathbb{R}_+) \equiv L^p(\mathbb{R}_+, (\lambda+1)(2y)^\lambda dy), \ \ 1 \leqslant p < \infty, \ \ \lambda > -1.$$

При указанном выборе $X(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathcal{L}^{q;X}(\Pi)$, $L^{q,p}_\lambda(\Pi) = L^{q;X}(\Pi)$, в смысле определений, данных выше. Таким образом $(1 \leq q < \infty)$,

$$\begin{aligned} L^{q,p}_\lambda(\Pi) \quad &= \Big\{ \varphi = \varphi(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, L^p_\lambda(\mathbb{R}_+), dx) \Big| \\ &\qquad \|\varphi(x,\cdot)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{R}_+)} \in L^q(\mathbb{R}) \Big\}, \ \ \|\varphi\|_{L^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|\|\varphi\|_{L^p_\lambda(\mathbb{R}_+)}\|_{L^q(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Интерпретируем $\varphi \in L^{q,p}_\lambda(\Pi)$ как распределения $\varphi(x,y)$ на Π задаваемые отображениями $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ действующими между $\mathbb{R} \to L^p_\lambda(\mathbb{R}_+)$, и такими, что отображения $x \mapsto \|\varphi(x,\cdot)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{R}_+)}$ принадлежат $L^q(\mathbb{R})$. Пространство аналитических функций со смешанной нормой $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathrm{Hol}(\Pi) \cap \mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ является основным объектом нашего исследования в этом разделе. Прежде всего, отметим:

Теорема 12 *(Теорема 3.2) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \ \lambda > -1$*. Нормированное подпространство аналитических функций* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi) \subset \mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *является полным.*

Введем оператор $U_{1,\lambda} : \mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi) \to L^{q,p}_\lambda(\Pi)$, $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, действующий посредством преобразования Фурье по первой переменной по правилу: $U_{1,\lambda} f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{f}_{x\to\xi}(\xi, y)$. Пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ определим как замыкание подпространства пространства функций $\varphi = \varphi(x,y)$, $\varphi \in L^{q,p}_\lambda(\Pi)$, для которых справедливо $U_{1,\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U^{-1}_{1,\lambda} \varphi = \frac{i}{2}\left(x + \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0$ в слабом смысле (в смысле $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ -распределений). Оказывается, что $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ изометрически совпадает с нашим исходным пространством $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$:

Теорема 13 *(Теорема 3.4) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \ \lambda > -1$*. Оператор* $U_{1,\lambda}$ *осуществляет изометрический изоморфизм пространств* $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *и* $L^{q,p}_\lambda(\Pi)$*, а его сужение на пространтсво* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *является изометрическим изоморфизмом между* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *и* $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$*, то есть* $\|f\|_{\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|U_{1,\lambda} f\|_{L^{q,p}_\lambda(\Pi)}$.

Введем оператор $U_{2,\lambda} : L^q(\mathbb{R}, L^p_\lambda(\mathbb{R}_+), dx) \to L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+), dx)$ следующим образом: $(U_{2,\lambda}\varphi)(x,y) = \frac{1}{\theta_{\lambda,p}(|x|)}\ e^{-\frac{y}{p}+|x|\beta_\lambda(|x|,y)}\varphi(x, \beta_\lambda(|\ x\ |, y))$, где для любого фиксированного $x > 0$ функция $y \to \beta_\lambda(x,y)$ является обратной к функции $\psi_\lambda(x,t) = \ln\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1,pxt)}\right)$, то есть $\beta_\lambda(x, \psi_\lambda(x,t)) = t$, $x > 0$. Здесь $\Gamma(a,b)$ - неполная гамма-функция. Для любой $f \in L^q(\mathbb{R})$ имеем $U_{2,\lambda} : \chi_+(x)\theta_{\lambda,p}(x)f(x)e^{-xy} \to \chi_+(x)f(x)e^{-\frac{y}{p}}$.

Пусть $L^p_0(\mathbb{R}_+, dy)$ - одномерное подпространство $L^p(\mathbb{R}_+, dy)$, порожденное $\ell_{0,p}(y) = e^{-\frac{y}{p}}$. Следовательно, образ $\mathcal{A}^{q,p}_{2,\lambda}(\Pi) = U_{2,\lambda}(\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi))$ определяется как замыкание в $L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, dy), dx)$ функций вида $\psi(x,y) = \chi_+(x)f(x)e^{-\frac{y}{p}}$, $f(x) \in L^q(\mathbb{R})$, и совпадает с пространством $L^q(\mathbb{R}_+, L^p_0(\mathbb{R}_+, dy), dx)$. Обозначим через P_0 одномерный проектор пространства $L^p(\mathbb{R}_+, dy)$ на $L^p_0(\mathbb{R}_+, dy) : (P_0\psi)(y) = \ell_{0,p}(y)\int_{\mathbb{R}_+}\psi(v)e^{-\frac{v}{p}}dv$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 14 *(Теорема 3.5) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор* $U_{2,\lambda}$ *- есть изометрический изоморфизм пространства* $L^{q,p}_\lambda(\Pi) = L^q(\mathbb{R}, L^p_\lambda(\mathbb{R}_+), dx)$ *на* $L^{q,p}(\Pi) = L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}_+, dy), dx)$, *при котором пространство* $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Pi)$ *отображается на* $L^q(\mathbb{R}_+, (L^p_0, dy), dx)$.

Введем оператор $U_\lambda : \mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi) \to L^{q,p}(\Pi)$, действующий по правилу $U_\lambda = U_{2,\lambda}U_{1,\lambda}$.

Теорема 15 *(Теорема 3.6) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty,\ \lambda > -1$. *Оператор* U_λ *- есть изометрический изоморфизм пространства* $\mathcal{L}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *на* $L^{q,p}(\Pi)$, *так, что*

1. *Пространство Бергмана* $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *отображается на* $L^q(\mathbb{R}_+, (L^p_0, dy), dx)$.
2. *Проектор Бергмана* $B^{(\lambda)}_\Pi$ *эквивалентен проектору* $\chi_+ I \otimes P_0$, *то есть* U_λ *связывает проекторы:* $U_\lambda B^{(\lambda)}_\Pi = (\chi_+ I \otimes P_0)\, U_\lambda$.

Далее мы устанавливаем изометрический изоморфизм между $\mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ и $L^q(\mathbb{R}_+)$ с помощью некоторых явных операторов типа Фурье. Этот результат является аналогом (обобщением) теоремы Пэли-Винера для нашей ситуации (см.[28] для случая $\mathcal{A}^p_\lambda(\mathbb{D})$).

Теорема 16 *(Теорема 3.10) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty, \lambda > -1$. *Изометрический изоморфизм* $R^{-1}_\lambda : L^q(\mathbb{R}_+) \to \mathcal{A}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *определяется равенством*

$$(R^{-1}_\lambda\varphi)(z) = \frac{p^{\frac{\lambda+1}{p}}}{\sqrt{2}\sqrt[p]{2^\lambda\Gamma(\lambda+2)}}\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(\xi)\xi^{\frac{\lambda+1}{p}}e^{i\xi z}d\xi. \tag{5}$$

[28]Duren, P. A Paley–Wiener theorem for Bergman spaces with application to invariant subspaces / P. Duren, E. A. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez // Bulletin of the London Mathematical Society. – 2007. – Vol. 39, № 3. – P. 459-466. – https://doi.org/10.1112/blms/bdm026.

Обратный изоморфизм $R_\lambda : \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi) \to L^q(\mathbb{R}_+)$ *имеет вид:*

$$(R_\lambda f)(x) = \chi_+(x) \frac{1}{\sqrt{2}}\, \theta_{\lambda,p}^{p-1}(x) \int\limits_{\Pi} f(\omega) e^{-ix\overline{\omega}} e^{-x(p-2)\operatorname{Re}\omega} d\nu_\lambda(\omega), \qquad (6)$$

где $\theta_{\lambda,p}(x) = \left(\frac{p^{\lambda+1}x^{\lambda+1}}{2^\lambda \Gamma(\lambda+2)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $d\nu_\lambda(\omega) = \frac{(\lambda+1)}{\pi}(2\eta)^\lambda d\eta d\xi$.

Как следствие, получим описание норм функций из пространства $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$:

Теорема 17 *(Теорема 3.11) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, $f \in \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$. *Тогда* $\|f\|_{\mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi)} = \|R_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}$.

Замечание 18 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Имеют место равенства* $R_\lambda R_\lambda^{-1} = I : L^q(\mathbb{R}_+) \to L^q(\mathbb{R}_+)$, $R_\lambda^{-1} R_\lambda = B_\Pi^{(\lambda)} : \mathcal{L}_\lambda^{q,p}(\Pi) \to \mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$.

Наконец, мы применяем полученные результаты к изучению операторов Теплица с символами, зависящими от вертикальной переменной в $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$. Для функции $a = a(y)$ (здесь $y = Imz$) рассмотрим оператор Теплица, не обязательно ограниченный, но формально определенный следующим образом: $T_a^{(\lambda)} f = B_\Pi^{(\lambda)} af$. Считаем, что $a = a(y)$ таково, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется: $a(y)e^{-\varepsilon y} \in L^1(\mathbb{R}_+, y^\lambda dy)$. Пусть функция $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(x)$ задается равенством:

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{x^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty a\left(t/p\right) e^{-tx}\, t^\lambda dt,\ x \in \mathbb{R}_+. \qquad (7)$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 19 *(Теорема 3.14) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *с символом* $a = a(y)$, *действующий в* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$, *посредством изометрических изоморфизмов* R_λ, R_λ^{-1} *эквивалентен оператору умножения* $\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T_a^{(\lambda)} R_\lambda^{-1}$, *действующему в* $L^q(\mathbb{R}_+)$. *Функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *задается равенством (7), а операторы* R_λ, R_λ^{-1} *имеют вид (6), (5) соответственно.*

Теорема 20 *(Теорема 3.15) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, *функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *определяется равенством (7). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *ограничен на* $\mathcal{A}_\lambda^{q,p}(\Pi)$ *если и только если функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *ограничена.*

2. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T_a^{(\lambda)}$ *является множество* $\operatorname{sp} T_a^{(\lambda)} = \overline{\operatorname{Range} \gamma_{a,\lambda}}$.

Перейдем к изложению результатов третьей главы: пространства со смешанной нормой в гиперболическом случае. Здесь приводятся результаты исследования в третьем случае (полярные координаты на полуплоскости). Естественно, учитывая геометрию, мы используем преобразование Меллина, которое в конечном счете пересчитывается в терминах Фурье, если говорить об общем подходе, развитом в работе [29]. Начнем с определения пространства $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$, где X — комплексное банахово пространство распределений на $(0,\pi)$. Пусть $\Gamma = \mathbb{R} \times (0,\pi) \subset \mathbb{C}$ — (открытая) горизонтальная полоса в комплексной плоскости, заданная точками $\tau = \eta + \imath\theta$, где $\eta \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,\pi)$. Отображение $\exp : \tau \mapsto \exp(\tau) = e^{\eta+\imath\theta} = re^{\imath\theta} = z \in \Pi$ является биголоморфизмом. Для каждого $\lambda > -1$ введем линейную биекцию $\mathrm{T}_\lambda : C(\Pi) \to C(\Gamma)$, полагая $(\mathrm{T}_\lambda f)(\tau) = e^{(\frac{\lambda}{2}+1)\tau} f(e^\tau)$, $\forall\tau \in \Gamma$, $\forall f \in C(\Pi)$. Очевидно, T_λ дает биекцию между T_λ : $\mathrm{Hol}(\Pi) \to \mathrm{Hol}(\Gamma)$. Биекция T_λ связывает преобразование Меллина с преобразованием Фурье: $((M \otimes I)f)(\xi,\theta) = e^{-\imath\theta(1+\frac{\lambda}{2})}((\mathrm{F} \otimes I)\,\mathrm{T}_\lambda f)(\xi,\theta)$, $\forall(\xi,\theta) \in \Gamma$, $\forall f \in C_c(\Pi)$, где $\mathrm{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ - преобразование Фурье, $C_c(\Pi)$ - множество всех непрерывных функций с компактным носителем на Π. Символом $C_c^\infty(0,\pi)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $(0,\pi)$. Пусть $X(0,\pi)$ — комплексное банахово пространство распределений на $(0,\pi)$, равномерно вложенное в пространство распределений $C_c^\infty(0,\pi)'$.

Рассмотрим сначала нормированное пространство

$$L^{q;X}(\Gamma) = \left\{\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, X(0,\pi)) \middle| \quad \|\varphi(\xi,\cdot)\|_{X(0,\pi)} \in L^q(\mathbb{R})\right\},$$

$$\|\varphi\|_{L^{q;X}(\Gamma)} = \|\|\varphi\|_{X(0,\pi)}\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Мы будем интерпретировать $\varphi \in L^{q;X}(\Gamma)$ как распределения $\varphi(\xi,\theta)$ на Γ такие, что отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi,\cdot)$ есть $\mathbb{R} \to X(0,\pi)$, а отображение $\xi \mapsto \|\varphi(\xi,\cdot)\|_{X(0,\pi)}$ принадлежит $L^q(\mathbb{R})$. Более того, имеем непрерывное вложение $L^{q;X}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}_t(\Gamma)'$ в пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$, которые умерены по первой переменной. Проще говоря, $\mathcal{D}_t(\Gamma)$ — это пространство гладких функций, которые быстро убывают по переменной ξ и имеют компактный носитель по переменной θ. Соответственно, $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ — это двойственное пространство распределений, которые умеренны по переменной ξ.

На верхней полуплоскости Π мы будем использовать тестовое функциональное пространство $\mathcal{D}_t(\Pi) = \mathrm{T}_\lambda^{-1}\,\mathcal{D}_t(\Gamma)$ с индуцированной локально выпуклой

[29] Avetisyan, Z. Mixed - Fourier - norm spaces and holomorphic functions / Z.Avetisyan, A.Karapetyants // Режим доступа: https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.15379 (дата обращения 15.04.2025).

топологией и его двойственное пространство распределений $\mathcal{D}_t(\Pi)'$. Показывается, что $(M\otimes I)\mathcal{D}_t(\Pi)=\mathcal{D}_t(\Gamma)$, $(M\otimes I)\mathcal{D}_t(\Pi)'=\mathcal{D}_t(\Gamma)'$.

Введем пространство со смешанной нормой $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$, $1\leqslant q<\infty$, как пространство распределений $f\in\mathcal{D}_t(\Pi)'$, таких что (обобщенное, т. е. в смысле распределений) преобразование Меллина по первой переменной $\widetilde{f}_{r\to\xi}=(M\otimes I)f$, рассматриваемое как отображение $\xi\mapsto\widetilde{f}_{r\to\xi}(\xi,\cdot)$, является локально интегрируемой по Бохнеру функцией $\widetilde{f}_{r\to\xi}:\mathbb{R}\to X(0,\pi)$, и следующая норма конечна:

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)}=\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{f}_{r\to\xi}(\xi,\cdot)\right\|^q_{X(0,\pi)}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}=\left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{f}_{r\to\xi}\right\|_{L^{q;X}(\Gamma)}.$$

Другими словами, $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)=\left\{f\in\mathcal{D}_t(\Pi)'\Big|\quad\widetilde{f}_{r\to\xi}\in L^{q;X}(\Gamma)\right\}$. Аналогичным образом определим пространство $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)=\left\{f\in\mathcal{D}_t(\Gamma)'\Big|\quad\widehat{f}_{\eta\to\xi}\in L^{q,X}(\Gamma)\right\}$, где $\widehat{f}_{\eta\to\xi}=(\mathrm{F}\otimes I)f$ — преобразование Фурье по первой переменной, с нормой

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)}=\left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widehat{f}_{\eta\to\xi}\right\|_{L^{q;X}(\Gamma)}.$$

Теорема 21 *(Теорема 4.1) Пусть $1\leqslant q<\infty$. Пространство $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$ является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в $\mathcal{D}_t(\Pi)'$ и изометрически изоморфным $L^{q;X}(\Gamma)$ посредством преобразования Меллина по первой переменной: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}M\otimes I:\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)\to L^{q;X}(\Gamma)$. Пространство $\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)$ является нормированным векторным пространством, непрерывно вложенным в $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ и изометрически изоморфным $L^{q;X}(\Gamma)$ посредством преобразования Фурье по первой переменной: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{F}\otimes I:\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)\to L^{q;X}(\Gamma)$. Более того, $\mathrm{T}_\lambda:\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)\to\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Gamma)$ является изометрическим изоморфизмом нормированных векторных пространств.*

Обратимся теперь к случаю

$$X(0,\pi)=L^p_\lambda(0,\pi)\equiv L^p((0,\pi),2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta),\ \ 1\leqslant p<\infty,\ \lambda>-1.$$

При указанном выборе $X(0,\pi)$ будем обозначать $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)=\dot{\mathcal{L}}^{q;X}(\Pi)$, $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)=L^{q;X}(\Gamma)$, в смысле определений, приведенных выше. Следовательно, $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)=L^q(\mathbb{R},L^p_\lambda(0,\pi),d\xi)$ с нормой:

$$\|\ f\ \|_{L^{q,p}_\lambda(\Gamma)}=\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\pi|f(\xi,\theta)|^p\,2^\lambda(\lambda+1)\sin^\lambda\theta d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi) = \mathrm{Hol}(\Pi) \cap \dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ будет множеством тех элементов $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, которые являются аналитическими на Π.

Теорема 22 *(Теорема 4.2) Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. Нормированное подпространство $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi) \subset \dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ является полным.*

Оператор $U_{1,\lambda}$ определим на $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ как результат сопоставления

$$U_{1,\lambda} : f(r,\theta) \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(M_{r\to\xi} \otimes I\right) f\right)(\xi,\theta) \in L^{q,p}_\lambda(\Gamma), \tag{8}$$

где $M_{r\to\xi}$ - преобразование Меллина, действующее по переменной r. Так что по определению $\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|U_{1,\lambda} f\|_{L^{q,p}_\lambda(\Gamma)}$. Пространство $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$ определим как замыкание функций $\varphi = \varphi(\xi,\theta)$ из $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)$, для которых справедливо равенство $\left(\left(i\xi - \left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\right) I + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi(\xi,\theta) = 0$ в смысле $\mathcal{D}_t(\Gamma)'$ распределений. Таким образом, $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma) = \{\varphi(\xi,\theta) = f(\xi)\vartheta_{\lambda,p}(\xi)e^{-(\xi+(1+\frac{\lambda}{2})i)\theta} : f(\xi) \in L^q(\mathbb{R})\}$, где

$$\vartheta_{\lambda,p}(\xi) = \frac{\left|\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2} + \frac{p\xi i}{2}\right)\right|^{\frac{1}{p}}}{\sqrt[p]{\pi\Gamma(\lambda+2)}}\, e^{\frac{\pi\xi}{2}}. \tag{9}$$

Теорема 23 *(Теорема 4.4) Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. Оператор $U_{1,\lambda}$, определяемый (8), осуществляет изометрический изоморфизм пространств $\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ и $L^{q,p}_\lambda(\Gamma)$, а его сужение на пространство $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ является изометрическим изоморфизмом между $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ и $\mathcal{A}^{q,p}_{1,\lambda}(\Gamma)$, то есть $\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|U_{1,\lambda} f\|_{L^{q,p}_\lambda(\Gamma)}$.*

И в этом случае получаем теорему типа Пэли-Винера:

Теорема 24 *(Теорема 4.7) Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. Изометрический изоморфизм $R^{-1}_\lambda : L^q(\mathbb{R}) \to \dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ определяется равенством*

$$(R^{-1}_\lambda f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} z^{i\xi-(1+\frac{\lambda}{2})}\vartheta_{\lambda,p}(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{10}$$

Обратный изоморфизм: $R_\lambda : \dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$ определяется равенством:

$$(R_\lambda\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vartheta^{p-1}_{\lambda,p}(\xi)\int\limits_{\Pi}(\overline{z})^{-i\xi-(1+\frac{\lambda}{2})}\varphi(z)e^{-(p-2)\xi\arg z}d\mu_\lambda(z),$$

где $z = re^{i\theta}$, $\vartheta_{\lambda,p}$ имеет вид (9), $d\mu_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}(\lambda+1)r2^\lambda\sin^\lambda\theta drd\theta$.

Как следствие, получаем описание норм функций из класса $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$.

Теорема 25 *(Теорема 4.8) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, $f \in \dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$. *Тогда* $\|f\|_{\dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi)} = \|R_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}$.

Замечание 26 *Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Имеют место равенства* $R_\lambda R_\lambda^{-1} = I : L^q(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$, $R_\lambda^{-1} R_\lambda = B^{(\lambda)}_\Pi : \dot{\mathcal{L}}^{q,p}_\lambda(\Pi) \to \dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$.

Наконец, переходим к изучению теплицевых операторов с символами, зависящими от $\theta = \arg z$ в $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$. Для функции $a = a(\theta)$ рассмотрим оператор Теплица формально определенный следующим образом: $T^{(\lambda)}_a f = B^{(\lambda)}_\Pi a f$. Пусть функция $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(\xi)$ задается равенством:

$$\gamma_{a,\lambda}(\xi) = 2^\lambda\, (\lambda + 1)\, \vartheta^p_{\lambda,p}(\xi) \int_0^\pi a(\theta)\, e^{-p\theta\xi} \sin^\lambda \theta\, d\theta, \tag{11}$$

где $\vartheta_{\lambda,p}$ имеет вид (9), а символ оператора Теплица $a = a(\theta)$ принадлежит $L^1((0, \pi), \sin^\lambda \theta d\theta)$. Имеем следующие утверждения:

Теорема 27 *(Теорема 4.10) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$. *Оператор Теплица* $T^{(\lambda)}_a$ *с символом* $a = a(\theta)$, *действующий в* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$, *эквивалентен посредством изометрического изоморфизма оператору умножения:* $\gamma_{a,\lambda} I = R_\lambda T^{(\lambda)}_a R^{-1}_\lambda$, *действующему в* $L^q(\mathbb{R})$. *Функция* $\gamma_{a,\lambda} = \gamma_{a,\lambda}(\xi)$ *задается равенством (11), операторы* $R_\lambda, R^{-1}_\lambda$ *имеют вид (10), (11).*

Как следствие, получаем критерий ограниченности:

Теорема 28 *(Теорема 4.11) Пусть* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\lambda > -1$, *функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *определяется равенством (11). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Оператор Теплица* $T^{(\lambda)}_a$ *ограничен в* $\dot{\mathcal{A}}^{q,p}_\lambda(\Pi)$ *если и только функция* $\gamma_{a,\lambda}$ *ограничена.*

2. *Спектром ограниченного оператора Теплица* $T^{(\lambda)}_a$ *является множество* $sp\ T^{(\lambda)}_a = \overline{\mathrm{Range}\, \gamma_{a,\lambda}}$.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК, Scopus, Web of Science, RSCI:

1. Karapetyants, A. Weighted holomorphic mixed norm spaces in the unit disc defined in terms of Fourier coefficients/ A. Karapetyants, I. Smirnova // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – Vol. 67, № 7. – P. 1543 - 1553.

2. Карапетянц, А. Н. Характеризация весовых пространств аналитических функций со смешанной нормой, определенных в терминах условий на коэффициенты Фурье/ А. Н. Карапетянц, И. Ю. Смирнова // Известия вузов. Математика. — 2022. — № 1. — С. 57 - 64.

3. Avetisyan, Z. Mixed Fourier norm spaces of analytic functions on the upper half-plane and Toeplitz operators / Z. Avetisyan, A. Karapetyants, I. Smirnova // Mathematical Notes. – 2025. – Vol. 117, no. 3. – P. 345 - 356.

4. Karapetyants, A. N. Weighted spaces of analytic functions with mixed-Fourier-norm and Toeplitz operators: a survey of recent advances / A. N. Karapetyants, I. Yu. Smirnova // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. – 2025. – Vol. 31, No 2. – Art. No 70.

Публикации в сборниках трудов конференций:

5. Smirnova, I. Yu. On a Class of Mixed Norm Bergman Type Space / coefficients / I. Yu. Smirnova // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII Ростов-на-Дону, 24–28 апреля 2017 года. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2017. – С. 54.

6. Smirnova, I. Yu. Weighted mixed norm holomorphic spaces defined in terms of Fourier coefficients / I. Yu. Smirnova // Tenth International Scientific Conference "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – X OTHA-2021, Rostov-on-Don, [22-27 August], 2021 : Book of Abstracts. – Rostov-on-Don, 2021. – С. 57.