МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Дроботов Юрий Евгеньевич

ПОТЕНЦИАЛЫ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ И ОБОБЩЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЁЛЬДЕРОВОСТИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону
2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» и в Региональном научно-образовательном математическом центре «Северо-Кавказский центр математических исследований» Владикаказского научного центра Российской академии наук.

Научный руководитель: **Вакулов Борис Григорьевич**
кандидат физико-математических наук,
доцент, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону

Официальные оппоненты: **Ляхов Лев Николаевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГАОУ ВО «Ворожеский федеральный университет», г. Воронеж

Пасенчук Александр Эдуардович
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет» (Новочеркасский политехнический институт) им. М. И. Платова», г. Новочеркасск

Защита состоится 23 сентября 2025 г. в 17:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю.А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21ж, и на сайте ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу: `https://hub.sfedu.ru/diss/show/1345214/`

Автореферат разослан «_____» __________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук
Кряквин В. Д.

Общая характеристика работы

В диссертации рассматриваются потенциалы Рисса, операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в контексте риссова дробного интегродифференцирования на сфере, а также дробного анализа на метрических пространствах с мерой. Основную цель составляет исследование преобразований операторами гладкостных свойств вещественнозначных функций в терминах степенно-весовых обобщенных пространств Гёльдера.

Актуальность темы исследования. Как известно, потенциал Рисса и гиперсингулярный интеграл рассматриваются как реализация основных операций риссова дробного интегродифференцирования функций многих вещественных переменных. Так, через гиперсингулярный интеграл выражается риссово дифференцирование, что позволяет концептуализировать понятие дробной степени оператора Лапласа[1], распространив определение Маршо дробной производной на многомерный случай[2,3]. Этот подход, основанный на преобразовании Фурье, имеет место на различных однородных пространствах и служит, например, построению риссова дробного интегродифференцирования на сфере[4].

Отрицательные дробные степени оператора Лапласа получают реализацию через свертку с риссовым ядром — потенциал Рисса, что может быть показано в образах Фурье. Таким образом, потенциалы и гиперсингулярные интегралы предполагаются взаимнообратными операторами, и это на-

[1]**Samko**, **S. G.** Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Marichev, O. I. Kilbas. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1993. – 976 p.

[2]**Самко**, **С. Г.** О пространствах риссовых потенциалов / С. Г. Самко // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* – 1976. – Т. 40, № 5. – С. 1143—1172.

[3]**Самко**, **С. Г.** Обобщенные потенциалы Рисса и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение / С. Г. Самко // *Доклады АН СССР.* – 1977. – Т. 232, № 3. – С. 528—531.

[4]**Самко**, **С. Г.** Сферические потенциалы, сферическое риссово дифференцирование и их приложения / С. Г. Самко // *Известия вузов. Математика.* – 1977.– № 2. – С. 135—139.

ходит подтверждение на определенной совокупности функциональных пространств. В задачи настоящего исследования входит доказать новые обращения для операторов более общего вида на функциях, удовлетворяющих обобщенному условию Гёльдера.

Объем академических источников, в числе которых присутствуют и фундаментальные произведения[5] с подробным обзором современной литературы, сведетельствует в пользу значительного интереса к аппарату дробного анализа со стороны теоретической физики и междисциплинарного математического моделирования. Формализация гладкости через фундаментальные обобщения классической терминологии выступает для них как существенный отдел качественной теории интегральных уравнений, в рамках которого характеризуется корректность актуальных задач. Риссовы ядра, обобщающие ядра классической теории[6], — например, ньютоново и логарифмическое ядра, ядра Грина, связанные с областями многомерных пространств, — позволяют, таким образом, задействовать фундаментальные результаты при работе в области дробной динамики, обобщающей постановку классических задач. Наконец, отметим, что всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с характеристикой специального вида[7], что позволяет применять результаты рассматриваемой теории в широком круге задач математической физики [7, 8, 9, 14]. Таким образом, настоящее исследование, поскольку оно развивает аппарат дробного анализа в пространствах обобщенной гладкости, представляется актуальным для современной математики и ее приложений.

[5]**Tarasov, V. E.** Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. – Berlin: Springer, 2010. – 450 p.

[6]**Ландкоф, Н. С.** Основы современной теории потенциала / Н. С. Ландкоф. – Москва: Наука, 1966. – 516 с.

[7]**Samko, S. G.** Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Marichev, O. I. Kilbas. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1993. – 976 p.

Цели работы заключаются в следующем: (1) исследование ограниченности оператора типа риссова потенциала со степенно-логарифмическим ядром на функциях из L^p в пространстве обобщенной гёльдеровости на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а также на компактифицированном подпространстве $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ при наличии степенных весов, (2) доказательство теорем о действии оператора типа риссова потенциала со степенно-логарифмическим ядром в пространствах обобщенной гёльдеровости со степенными весами на $\mathbb{S}^{n-1}$ и $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$, (3) исследование ограниченности операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов на абстрактном метрическом пространстве с мерой при отображении в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом.

Методы исследования. В диссертации применяются методы классического анализа и современной теории операторов, а также некоторые отношения и понятия, характерные для геометрии метрических пространств. В том числе используются числовые и функциональные неравенства, следствия из формулы Каталана, спектральный анализ операторов сферической свертки, асимптотическое описание мультипликаторов Фурье–Лапласа, теоремы о действии операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов в пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости.

Научная новизна. Теоремы, доказанные в предпосылках риссова дробного интегродифференцирования, дополняют известные, предполагая потенциалы Рисса частными реализациями рассматриваемого оператора. Теоремы об ограниченности потенциала и гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой в степенно-весовом случае являются новыми и существенно дополняющими известные достижения в этой области.

Основные положения, выносимые на защиту, составляют (1) теоремы о действии оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром в степенно-весовых пространствах обобщенной гёльдеровости на сфере, (2) теорема о действии $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ на функциях из $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$, (3) аналогичные теоремы о действии оператора $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta_\Pi}$ типа риссова потенциала на компактифицированном подпространстве, (4) оценки типа Зигмунда и теоремы о действии потенциала Рисса и гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой в степенно-весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит фундаментально-теоретический характер. Основные результаты принадлежат тематике квалифицированной гладкости в контексте интегральных операторов дробного анализа. Проблема изменения гладкостных свойств функций рассматривается в широком классе сферических потенциалов со степенно-логарифмическим ядром, а также интегральных операторов, связанных с ними стереографической проекцией. Результаты второй и третьей глав представляют ценность для развития дробного анализа на метрических пространствах с мерой как самостоятельной математической дисциплины. Практическая значимость полученных результатов обусловлена приложениями в области качественной теории интегральных уравнений.

Достоверность изложенных результатов подтверждается строгим характером доказательства основных теорем и вспомогательных утверждений, а также их обоснованностью и непротиворечивостью в контексте общей теории операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: (1) 5-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Российский университет дружбы народов, Москва), посвящённая 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева, в 2018 г., (2) региональная школа-конференция молодых ученых «XV Владикавказская молодёжная математическая школа» (г. Владикавказ) в 2020 г., (3) международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) в 2016, 2020 и 2021 гг., (4) международная конференция «Комплексный анализ и смежные проблемы» (Казанский федеральный университет, г. Казань) в 2022 г.; (5) международная научная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis» (г. Ростов-на-Дону) в 2018, 2021–2024 гг., (6) международная научная конференция «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» в 2015 г. (г. Азов, Россия), 2020 г. (г. Китакюсю, Япония), 2022 г. (пос. Дивноморское, Россия) и, в рамках пленарного доклада, в 2024 г. (г. Сурабая, Индонезия). Основные результаты диссертации оформлены и апробированы во время выполнения следующих научно-исследовательских проектов: (1) грант Южного федерального университета № ВнГр/2020-04-ИМ, (2) индивидуальный грант в рамках программы Министерства науки и высшего образования РФ по содействию занятости выпускников 2020 года на научно-исследовательских позициях в вузах и научных организациях, (3) международный научно-исследовательский проект «Операторы гармонического анализа в нестандартных пространствах функций и их приложения» (проект РФФИ № 20-51-46003).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследования опубликованы в рецензируемых научных изданиях: статьи [1, 4, 2, 3] опубликованы в журналах, включенных в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Статьи [4, 2, 3] опубликованы в журналах, индексируемых в международной реферативной базе научных публикаций Scopus; журналы, в которых опубликованы [2, 3], входят также в число изданий, индексируемых Web of Science; главы в коллективных монографиях [18, 19, 20, 21] представлены в Scopus как отдельные публикации. Монография [14] индексируется Scopus; главы в коллективных монографиях [17, 19, 15] индексируются как отдельные публикации в базе РИНЦ и международных базах данных о научных публикациях, исключая Scopus и Web of Science. Работы, опубликованные в материалах научных конференций, индексируются как отдельные публикации в базе РИНЦ.

Личный вклад соискателя. Статьи [1, 4, 2, 3], а также главы [18, 19, 20, 21] опубликованы в соавторстве с научным руководителем: Б. Г. Вакулову принадлежат постановка задач, указание метода исследования и общее руководство, соискателю — проведение исследования, оформление и обоснование результатов, включая доказательство основных теорем. В [14] соискателю принадлежит описание некоторых задач математической физики и методов их исследования в контексте результатов диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 142 страницы. Библиография — 98 наименований.

Основное содержание работы

Во **Введении** приводится материал, поясняющий содержание настоящего исследования, актуальность и новизну выбранной темы, а также литературный обзор, контектуализирующий результаты. **Предварительные сведения** включают необходимые определения и основные факты, а также во Введении приводится краткий **Обзор основных результатов**.

Глава 1 посвящена развитию классического аппарата риссова дробного интегродифференцирования на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ многомерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Основным **объектом исследования** в первой главе выступает оператор типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром:

$$I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) = c(n,\alpha) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|\,x-\sigma\,|^{n-1-\alpha}} \ln^{\nu} \frac{r}{|\,x-\sigma\,|} \,\mathrm{d}\,\sigma,$$
$$n \geq 3, \quad r,\, \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \nu \geq 0,$$

где $c(n,\alpha)$ играет роль нормировочной постоянной. В дальнейшем будем распоряжаться как комплексными, так и вещественными значениями параметра α, считая, что приводимые ограничения вполне ясно указывают контекст.

Параграф 1.1 содержит основные сведения спектральной теории операторов сферической свертки, классу которых принадлежат операторы типа потенциала на сфере. Спектр оператора сферической свертки A в разложении по ортнормированной системе сферических гармоник называется мультипликатором Фурье–Лапласа: общий член последовательности собственных значений обозначается в данной работе через $\mathcal{M}\langle A\rangle$.

Анализ мультипликаторов, применяемый в рамках **параграфа 1.2**, позволяет сформулировать ожидаемый вид оператора, обратного $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, который, как и в классической теории, содержит гиперсингулярный интеграл

$$D^{\alpha} f(x) = c(n,-\alpha) \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon}(x)} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|\,x-y\,|^{\,n-1+\alpha}}\, \mathrm{d}\,\sigma, \;\; x\in\mathbb{S}^{n-1},$$

$$\mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon}(x) := \left\{\, \sigma\in\mathbb{S}^{n-1} : \,|\,x-\sigma\,| > \varepsilon \,\right\}, \quad 0<\operatorname{Re}\alpha<2,$$

где нормировочная постоянная $c(n,\alpha)$ имеет известное выражение[8]. Таким образом, в **параграфе 1.2** обоснован следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. *Оператор, обратный* $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, *есть*

$$\left(I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1} = \left[c(n,\alpha)\,\mathrm{I} + D^{\,\alpha}\right] A,$$

где используется нормировочная постоянная

$$c(n,\alpha) = 2^{\,(n-1-\alpha)/2}/a\,(n,\alpha)\,,$$

$$a\,(n,\alpha) = -2^{\,\frac{\alpha+n-1}{2}}\pi^{\,\frac{n-3}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\,(\alpha-n+1)\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n+3}{2}\right),$$

а мультипликатор оператора A *имеет следующий вид:*

$$\mathcal{M}\langle A\rangle = -2^{\,\frac{n+\alpha}{2}}\,\pi^{\,\frac{n}{2}} \binom{m+n-3}{m} \frac{(n-1)_m}{m\,(n/2)_m} \left(m+\frac{n-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{B}^{-1}\left(\frac{n}{2},m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n-\alpha+2}{2}\right)\left\{1+\ln\frac{2}{r}\cdot\left[\psi\left(\frac{\alpha-n+2}{2}\right)+\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\psi\left(\frac{\alpha-n+2}{2}-m\right)-\psi\left(\frac{\alpha+n}{2}+m\right)\right]\right\}.$$

Параграф 1.3 первой главы приводит новые теоремы о действии по-

[8]**Самко**, **С. Г.** Гиперсингулярные интегралы и их приложения / С. Г. Самко. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1984. – 208 с.

тенциалов со степенно-логарифмическим ядром в пространствах обобщенной гёльдеровости на сфере:

Определение 1. Пусть $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$ — пространство непрерывных функций. Обобщенным пространством Гёльдера называется

$$H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) := \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1}) : \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{S}^{n-1}: \\ d(x,y) \le t}} |\, f(x) - f(y)\,| \le c\,\omega(t), \quad c, t > 0 \right\}.$$

Функцию $\omega(t)$, $t > 0$, называют характеристикой пространства $H^{\omega}(\Omega)$.

В **разделе 1.3.1**, посвященном исследованию квалифицированной гладкости сферических потенциалов $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, с использованием Теоремы 1 доказывается следующая теорема о действии, сформулированная в терминах функционального класса Бари–Стечкина Φ_{β}:

Теорема 2. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. *Если* $\omega \in \Phi^{0}_{1-\operatorname{Re}\alpha}$, *то оператор* $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ *ограничен из* $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ *в* $H^{\omega_{\alpha,\nu}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, *где*

$$\omega_{\alpha,\nu}(t) = t^{\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(t)\,\ln^{\nu}\frac{r}{t}, \;\; r > 2.$$

При $\nu = 1$ *имеет место следующий изоморфизм обобщенных пространств Гёльдера:* $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right) = H^{\omega_{\alpha,1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$.

Теорема 3. *Пусть весовая функция имеет вид*

$$w_{\{a_j\}}(x) = \prod_{j=1}^{s} |\, x - a_k\,|^{r_j}, \;\; x, a_j \in \mathbb{S}^{n-1}, \;\; j = \overline{1,s}, \;\; s \in \mathbb{N}.$$

Оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ *ограничен, а для* $\nu \in \{0,1\}$ *— является изоморфизмом при отображении из* $H^{\omega}_{w_{\{a_j\}}}(\mathbb{S}^{n-1}, w_{\{a_j\}})$ *в* $H^{\omega_{\alpha,\nu}}_{w_{\{a_j\}}}(\mathbb{S}^{n-1}, w_{\{a_j\}})$, *если:*

- *при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < r_j < n$, $j = \overline{1,s}$, *характеристика* $\omega \in \Phi^0_{\min\{1,\,r_j\}-\operatorname{Re}\alpha}$;
- *при* $n \le \mu_j < n - \operatorname{Re}\alpha + 1$, $j = \overline{1,s}$, *справедливо, что* $\omega \in \Phi^{\max\{r_j\}-n+1}_{1-\operatorname{Re}\alpha}$.

В **разделе 1.3.2** доказывается теорема об ограниченности операторов типа потенциала на функциях из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$:

Теорема 4. *Пусть* $\nu \ge 0$ *и выполнено условие*

$$\alpha > \frac{n-1}{p}, \;\; 1 \le p \le \infty.$$

Оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ *ограничен из* $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ *в* $H^{\omega_{\alpha,\nu}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, *где*

$$\omega_{\alpha,\nu}(t) = t^{\alpha-(n-1)/p} \ln^{\nu}\frac{m}{t}, \;\; m \ge r > 2.$$

Наконец, **параграф 1.4** первой главы посвящен распространению полученных ранее результатов на случай операторов $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}$, связанных с $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ стереографическим проектированием сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ на компактифицированное пространство $\mathbb{R}^{n-1}$, обозначаемое через $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$.

В **Главах 2 и 3** диссертации исследуются задачи теории пространств обобщенной переменной гёльдеровости. Пусть $X = (X, d, \mu)$ — некоторое пространство с метрикой $d(x,\sigma)$ и мерой $\mu(\sigma)$, $\Omega \subset X$, $0 < \operatorname{diam}(\Omega) < \infty$, Ω — открытое. Пусть также предполагается, что все открытые шары $B(x,h)$ с центром в $x \in X$ и радиуса $h > 0$ измеримы мерой μ, а также удовлетворяют следующему условию роста:

$$\forall x \in X: \;\; \mu\left[B(x,h)\right] \le K\,h^N \;\;\text{при}\;\; h \to 0, \quad K, N > 0, \tag{1}$$

в котором постоянная K не зависит от $x \in \Omega$. Кроме того предполагается, что сферы $S(x,h)$ удовлетворяют условию $\mu\left[S(x,h)\right] = 0$.

В диссертации предложено следующее

Определение 2. Пусть выбрано число $l\ :\ 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$. Функцию $M(x,h)$, $x \in \Omega$, $0 < h \le l$, будем называть локальным модулем непрерывности, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

(2.1) $\forall x \in \Omega: \quad M(x,0) = 0$;

(2.2) $M(x,h)$ является неубывающей функцией от h равномерно по x;

(2.3) $M(x,h)$ полуддитивна по h, т.е.

$$\forall x \in \Omega: \ M(x, h_1 + h_2) \le M(x,h_1) + M(x,h_2);$$

(2.4) $M(x,h)$ есть непрерывная по h функция для всякого $x \in \Omega$.

Пусть $W_l = W_l(\Omega)$ — класс функций $\omega(x,h)$, определенных на $\Omega \times (0,l]$, непрерывных, почти возрастающих по h, всюду положительных при $h > 0$ и имеющих нуль пределом при $h \to 0$. Общее определение пространств обобщенной переменной гёльдеровости вводится следующим образом:

Определение 3. Пусть $\omega \in W_l(\Omega)$, $M_f(x,h)$ — локальный модуль непрерывности, ассоциированный с $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Будем называть

$$\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega) := \{\, f \in \mathcal{C}(\Omega) :\ M_f(x,h) \le c\,\omega(x,h) \,\}, \ \ 0 < c < \infty,$$

пространством переменной обобщенной гёльдеровости на Ω, а функцию ω — характеристикой этого пространства.

Определение 4. Пусть весовая функция имеет вид

$$w_a(x) = [\, d(a,x)\,]^{\gamma}, \ \ 0 < \operatorname{Re}\gamma < 1 + N. \tag{2}$$

Функциональное пространство

$$\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) := \Big\{ f \in \mathcal{C}(\Omega) : \, w_a f \in \mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega), \quad (w_a f)(0) = 0 \Big\}$$

есть степенно-весовое пространство обобщенной переменной гёльдеровости.

$\mathcal{H}$–пространства могут быть определены в терминах модуля субметрии

$$\omega_f(x,h) := \sup_{\sigma \in \Omega \cap B[x,h]} |\, f(x) - f(\sigma) \,|, \ \ x \in \Omega, \ \ h > 0, \tag{3}$$

где $B[x,h]$ — замкнутый шар в пространстве X. Условимся обозначать через $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ и $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ пространства $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ соответственно, если последние определены в терминах минимальной мажоранты модуля субметрии (3) из класса локальных модулей непрерывности.

Всюду далее положим ограничение $0 \le \operatorname{Re}\alpha < 1$, а также условимся обозначать $f_w(x) := f(x)\, w(x)$, имея в виду, как правило, степенной вес (2).

Глава 2 диссертации посвящена исследованию степенно-весовой обобщенной переменной гёльдеровости потенциала Рисса

$$I^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma)}{[d(x,\sigma)]^{\nu-\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma, \ \ x \in \Omega, \tag{4}$$

Будем предполагать, что выполнено так называемое «условие аннигиляции»,

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{[\, d(x,\sigma) \,]^{N-\alpha}} - \frac{1}{[\, d(y,\sigma) \,]^{N-\alpha}} \right) \mathrm{d}\,\sigma \equiv 0, \ \ x, y \in \Omega, \tag{5}$$

обеспечивающее возможность рассматривать гёльдеровость оператора (4) на тождественно постоянных функциях.

Действие потенциала (4) в безвесовом случае описано ранее[9,10], так что дальнейший интерес представляет исследование оператора

$$\mathcal{I}_\Omega^\alpha \varphi(x) := \int\limits_\Omega \frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)} \frac{\varphi(\sigma)}{[d(x,\sigma)]^{N-\alpha}}\, \mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

который связан с (4) известным выражением.

В **параграфе 2.1** доказывается следующая оценка типа Зигмунда:

Теорема 5. *Пусть*

$$\begin{gathered} x, y \in \Omega: \quad d(x,y) \le h \le l/k, \\ 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega), \quad k > 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathcal{I}_\Omega^\alpha f_w(x) - \mathcal{I}_\Omega^\alpha f_w(y)\,| \le c\, h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,x,y\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha}}\, \mathrm{d}\,t,$$

$$0 < c < \infty, \quad \gamma_0 = \min(1, \operatorname{Re}\gamma).$$

Формулировка Теоремы 5 дана в терминах произвольного локального модуля непрерывности, отвечающего Определению 2. На ее основе в **параграфе 2.2** доказываются следующие результаты, сформулированные в терминах функциональных классов Φ_β Зигмунда–Бари–Стечкина (с тождественно постоянным показателем β):

---

[9]**Вакулов, Б. Г.** Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гёльдера переменного порядка на однородных пространствах / Б. Г. Вакулов, Н. Г. Самко, С. Г. Самко // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск.* – 2009.– – С. 40—45.

[10]**Samko, N.** Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic / N. Samko, S. Samko, B. Vakulov // *Journal of Function Spaces and Applications.* – 2010. – Vol. 8, № 3. – P. 215–244.

Теорема 6. *Если характеристика ω такова, что*

$$\omega \in \Phi_{\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha}\left(\Omega \times [0, \operatorname{diam}(\Omega)]\right), \tag{8}$$

$$\forall h \in [0, \operatorname{diam}(\Omega)] : \quad \sup_{x\in\Omega} \frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \leq c_\omega, \;\; 0 < c_\omega < \infty, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} c_\omega^{(1)}\, \omega\left(y, d(x,y)\right) \leq \omega\left(x, d(x,y)\right) \leq c_\omega^{(2)}\, \omega\left(y, d(x,y)\right), \\ x, y \in \Omega, \;\; 0 < c_\omega^{(1)}, c_\omega^{(2)} < \infty. \end{gathered} \tag{10}$$

то следующий интегральный оператор ограничен:

$$\mathcal{I}_\Omega^\alpha : \mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) \to H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a),$$

$$\omega_\alpha(x,h) := h^{\operatorname{Re}\alpha}\, \omega(x,h), \;\; x \in \Omega, \;\; h \in [0, \operatorname{diam}(\Omega)]\,. \tag{11}$$

Теорема 7. *В условиях* (8), (9) *и* (10), *потенциал Рисса* (4) *ограничен из* $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *в* $H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *с характеристикой* (11).

Глава 3 посвящена исследованию действия гиперсингулярных интегралов на метрических пространствах с мерой в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом (2). Пусть вновь имеют место соглашения относительно пространства (X, d, μ), включая условие (1), и дано множество Ω. Гиперсингулярным интегралом здесь называется интегральный оператор

$$D^\alpha f(x) := \int\limits_\Omega \frac{f(\sigma) - f(x)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{N+\alpha}}\, \mathrm{d}\,\sigma, \;\; x \in \Omega, \tag{12}$$

где интегрирование осуществляется по мере $\mu(\sigma)$ в следующем смысле:

$$\int\limits_\Omega \varphi(x,\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma = \lim_{h\to+0} \int\limits_{\Omega\setminus B[x,h]} \varphi(x,\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Будем рассматривать следующий оператор, известным образом связанный с гиперсингулярным интегралом (12):

$$\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) := \int_{\Omega} \frac{w_a(x) - w_a(\sigma)}{w_a(\sigma)} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{\big[d(x,\sigma)\big]^{N+\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma. \tag{13}$$

Доказанные результаты сформулируем здесь в общем виде:

Теорема 8. *Пусть имеет место предпосылка* (7) *и задан степенной вес* (2)*, а под* $M(f,x,h)$ *подразумевается локальный модуль непрерывности в смысле Определения 2. Справедлива следующая оценка типа Зигмунда:*

$$|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y)\,| \leq c \left\{ \sum_{z\in\{a,x,y\}} \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}} \,\mathrm{d}\,t \, + \right.$$

$$\left. + \, h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M(f_w, z, t)}{t^{\,1+\gamma_0+\mathrm{Re}\,\alpha}} \,\mathrm{d}\,t \right\}.$$

Теорема 8 применяется затем в параграфе 3.2 для доказательства следующих теорем о действии гиперсингулярных интегралов (12) и (13):

Теорема 9. *Пусть имеют место обозначения Теоремы 6. Если характеристика* $\omega \in \Phi^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}_{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}$ *и удовлетворяет условиям* (10), (9)*, то оператор* $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$*, введенный выражением* (13)*, ограничен из* $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}_0(\Omega, w_a)$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}_0(\Omega, w_a)$*, где подразумеваются характеристика* (11) *и степенной вес* (2)*.*

Теорема 10. *Пусть выполнены условия Теоремы 9. Тогда оператор* $D^{\,\alpha}$*, введенный выражением* (12)*, ограничен из* $H^{\omega(\cdot)}_0\,(\Omega, w_a)$ *в* $H^{\omega\,-\alpha(\cdot)}_0\,(\Omega, w_a)$ *с характеристикой* (11) *и степенным весом* (2)*.*

Заключение диссертации резюмирует полученные результаты, а также описывает перспективы их дальнейшего обобщения и развития. В частности, очерчены возможные применения теоремы типа Соболева из Главы I для развития связей с теорией гранд-пространств Лебега. Результаты Глав 2 и 3 предлагается рассматривать в контексте пространств обобщенной переменной гёльдеровости, определяемых в терминах произвольного локального модуля непрерывности.

Заключение

В диссертации «Потенциалы и гиперсингулярные интегралы в весовых пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости на метрических пространствах с мерой» получены следующие основные результаты:

1. Исследован мультипликатор оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ и построено обращение потенциала Рисса с логарифмическим ядром ($\nu = 1$) на сфере.
2. Доказаны теоремы о действии $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ и $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}$ в безвесовых и степенно-весовых пространствах обобщенной гёльдеровости, включая изоморфизмы для потенциала с логарифмическим ядром.
3. Доказана теорема об ограниченности $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ и $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}$ при действии из $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ в пространство обобщенной гёльдеровости.
4. Получены оценки типа Зигмунда для интегрального оператора $\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}$, связанного с потенциалом Рисса на метрическом пространстве с мерой.
5. Построена оценка типа Зигмунда для интегрального оператора $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$ на метрическом пространстве с мерой, связанного с изучением гиперсингулярного интеграла.
6. Доказаны теоремы об ограниченности в потенциала Рисса и гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой в степенно-весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях из Перечня ВАК

[1] **Дроботов**, **Ю. Е.** Гладкостные свойства оператора типа потенциала Рисса с логарифмической характеристикой / Ю. Е. Дроботов, Б. Г. Вакулов // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.* – 2022.– № 1(213). – С. 4—11. – DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-4-1.

Статьи в научных изданиях из Scopus, Web of Science, RSCI

[2] **Вакулов**, **Б. Г.** Оператор типа потенциала переменного порядка по $\dot{\mathbb{R}}^n$ в весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости / Б. Г. Вакулов, Ю. Е. Дроботов // *Сибирские электронные математические известия.* – 2017. – Т. 14. – С. 647—656. – DOI: 10.17377/semi.2017.14.056. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p647-656.pdf (дата обращения 24.06.2025).

[3] **Дроботов**, **Ю. Е.** К исследованию весовой обобщенной гельдеровости гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой / Ю. Е. Дроботов, Б. Г. Вакулов // *Сибирские электронные математические известия.* – 2024. – Т. 21, № 2. – С. 1347—1369. – DOI: 10.33048/semi.2024.21.085. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v21/n2/p1347-1369.pdf (дата обращения 24.06.2025).

[4] **Drobotov**, **Y. E.** Hypersingular integrals in power-weighted variable generalized Hölder spaces over metric measure spaces / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2025. – Vol. 278, № 2. – P. 168–187. – DOI: 10.1007/s10958-024-07162-5.

Публикации в сборниках трудов конференций

[5] **Дроботов**, **Ю. Е.** Потенциал Рисса переменного порядка с суммируемой плотностью в пространствах обобщенной гёльдеровости / Ю. Е. Дроботов // *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования : тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой*

95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева, Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2018. – С. 55—56.

[6] **Дроботов**, **Ю. Е.** К исследованию условий ограниченности потенциала Рисса переменного порядка в пространствах обобщенной и переменной гёльдеровости со специальными весами / Ю. Е. Дроботов, Б. Г. Вакулов // *Межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов им. Е.В. Арменского: материалы конференции* – Москва: МИЭМ НИУ ВШЭ, 2016. – С. 17—18.– Режим доступа: https://www.hse.ru/data/2016/03/04/1125807985/MIEM-HSE-2016.pdf (дата обращения 24.06.2025)

[7] **Drobotov**, **Y. E.** On the conditioning of the Poisson type equation on a sphere and some remarkable outcomes / Y. E. Drobotov, D. S. Baraeva, B. G. Vakulov // *2023 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2023), Surabaya, Indonesia, October 3–8, 2023 : Abstracts & Schedule / Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya, Southern Federal University, National Kaohsiung University of Science and Technology ; I. A. Parinov, E. P. Putri, S.-H. Chang (eds.).* – Rostov-on-Don – Taganrog; Southern Federal University Press, 2023. – P. 97–98.

[8] **Drobotov**, **Y. E.** On particles distribution in mean field models evaluated through hypersingular integrals / Y. E. Drobotov, A. S. Piskunov, B. G. Vakulov // *2023 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2023), Surabaya, Indonesia, October 3–8, 2023 : Abstracts & Schedule / Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya, Southern Federal University, National Kaohsiung University of Science and Technology ; I. A. Parinov, E. P. Putri, S.-H. Chang (eds.).* – Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press, 2023. – P. 98–99.

[9] **Drobotov**, **Y. E.** The Riesz potential type operator with power-logarithmic kernel in mathematical modelling / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *2020 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2020), Kitakyushu, Japan, March 26–29, 2021 : Abstracts & Schedule / Kyushu Institute of Technology, Southern Federal University, National Kaohsiung University of Science and Technology, Korea Maritime and Ocean University ; I. A. Parinov, Y.-H. Kim, N.-*

A. Noda, S.-H. Chang (eds.). – Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press, 2021. – P. 92–93.

[10] **Drobotov**, **Y. E.** Hypersingular integrals on sets of metrical spaces and their smoothness properties / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *10th Anniversary International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2021-2022)* – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2022. – P. 322–323.

[11] **Drobotov**, **Y. E.** On smoothness of the Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *10th Anniversary International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2021-2022), Divnomorsk, Russia, 23-27 May, 2022 : Abstracts & Schedule / Don State Technical University, Southern Federal University, National Kaohsiung University of Science and Technology ; I. A. Parinov, A. N. Soloviev, S.-H. Chang (eds.).* – Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press, 2022. – p. 98.

[12] **Drobotov**, **Y. E.** The solvability of integral equations of the first kind with mild singularity kernels / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *2023 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2023), Surabaya, Indonesia, October 3–8, 2023 : Abstracts & Schedule / Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya, Southern Federal University, National Kaohsiung University of Science and Technology ; I. A. Parinov, E. P. Putri, S.-H. Chang (eds.).* – Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press, 2023. – P. 99–100.

[13] **Vakulov**, **B. G.** On smoothness of the solution of an integral equation with the spatial Riesz potential type operator / B. G. Vakulov, Y. E. Drobotov, G. S. Kostetskaya // *2020 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2020), Kitakyushu, Japan, March 26–29, 2021 : Abstracts & Schedule / Kyushu Institute of Technology, Southern Federal University, National Kaohsiung University of Science and Technology, Korea Maritime and Ocean University; I. A. Parinov, Y.-H. Kim, N.-A. Noda, S.-H. Chang (eds.).* – Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press, 2021. – P. 283–284.

Монографии

[14] **Parinov**, **I. A.** Advanced Ferroelectric and Piezoelectric Materials : with improved properties and their applications / I. A. Parinov, S. V. Zubkov, A. S. Skaliukh, V. A. Chebanenko, A. V. Cherpakov, Y. E. Drobotov. – Singapore; Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2024. – XXV, 285 p. – URL: https://doi.org/10.1142/13622 (data access 24.06.2025).

Иные публикации

[15] **Drobotov**, **Y. E.** An integral equation of the first kind with a negative power of the Laplacian / Y. E. Drobotov // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, 2021 – 2022 : Proceedings of the 10th anniversary International Conference on "Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications." / I. A. Parinov, S.-H. Chang, A. N. Soloviev (eds.).* – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2023. – Ch. 17. – P. 145–150. – (Series: Materials Science and Technologies). – DOI: `10.52305/QLWW2709`

.[16] **Drobotov**, **Y. E.** On hypersingular integrals over metric measure spaces in generalized Hölder spaces with power weights / Y. E. Drobotov // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications – 2023 / I. A. Parinov, S.-H. Chang, E. P. Putri (eds.).* – Hauppauge NY, USA: Nova Science Publishers, Inc., 2024. – Ch. 6. – C. 51—59. – (Materials Science and Technologies). – (Physics Research and Technology). – DOI: `10.52305/QBBT0335`

.[17] **Drobotov**, **Y. E.** On multipliers of spherical convolution operators with power-logarithmic kernels / Y. E. Drobotov, T. M. Andreeva // *Proceedings of the 2020 International Conference on "Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications" / I. A. Parinov, S.-H. Chang, Y.-H. Kim, N.-A. Noda (eds.).* – New York: Nova Science Publishers, 2021. – Ch. 7. – P. 63–70. – (Materials Science and Technologies). – (Physics Research and Technology). ISBN 978-1-53619-958-1

.[18] **Drobotov**, **Y. E.** On solvability of integral equations of the first kind with mild singularity in the kernel / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *Springer Proceedings in Materials : [Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications : Proceedings of the International Conference PHENMA 2021-2022 / I. A. Parinov, S.-H. Chang, A. N.*

Soloviev (eds.)]. – 2023. – Vol. 20. – P. 120–132. – DOI: 10.1007/978-3-031-21572-8_11.

[19] **Vakulov**, **B. G.** Riesz potential with logarithmic kernel in generalized Hölder spaces : Theorems on Inversion and Isomorphisms / B. G. Vakulov, Y. E. Drobotov // *Recent Applications of Financial Risk Modelling and Portfolio Management / Tihana Škrinjarić, Mirjana Čižmešija, Bryan Christiansen(eds.).* – Hershey PA: IGI Global Scientific Publishing, 2021. – Ch. 14. – P. 275–296. – DOI: 10.4018/978-1-7998-5083-0.ch014

.[20] **Vakulov**, **B. G.** The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere / B. G. Vakulov, Y. E. Drobotov // *Springer Proceedings in Materials : [Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications : Proceedings of the International Conference PHENMA 2020 / I. A. Parinov, S.-H. Chang, Y.-H. Kim, N.-A. Noda (eds.)].* – 2021. – Vol. 10. – P. 147–159. – DOI: 10.1007/978-3-030-76481-4_13.

[21] **Vakulov**, **B. G.** Riesz Potentials in generalized Hölder spaces / B. G. Vakulov, G. S. Kostetskaya, Y. E. Drobotov // *Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises / I. Nekrasova, O. Karnaukhova, B. Christiansen [eds.]* – Hershey PA: IGI Global, 2018. – Ch. 13. – P. 249–273. – DOI: 10.4018/978-1-5225-3767-0.ch013