

ОТЗЫВ

официального оппонента
на диссертацию Дроботова Юрия Евгеньевича
«Потенциалы и гиперсингулярные интегралы в весовых пространствах
обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости на метрических
пространствах с мерой»,
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-
математических наук по специальности
1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационное исследование Юрия Евгеньевича Дроботова выполнено в области новейших задач на стыке классической теории потенциала, дробного исчисления и современной теории функциональных пространств, качественно обобщающих классические определения. Полученные результаты развивают известные фундаментальные теоремы о действии сингулярных интегральных операторов в пространствах квалифицированной гладкости, рассматривая влияние степенных весов, естественных для этого направления исследований. Несомненным достоинством диссертации является решение поставленных задач в контексте общей теории, что обеспечивает согласованность доказываемых генерализаций с предшествующими достижениями в этой сфере.

Актуальность темы исследования

Актуальность выбранной темы обусловлена несколькими факторами. Во-первых, потенциалы Рисса и гиперсингулярные интегралы представляют собой важный класс операторов, играющих ключевую роль в теории дробного интегрирования. Эти операторы находят приложения в различных разделах математической физики, включая теорию упругости, гидродинамику, теорию диффузии и другие области, где возникают задачи с особенностями и нелокальными взаимодействиями.

Во-вторых, в последние годы значительно возрос интерес к изучению функциональных пространств с обобщёнными условиями гладкости, особенно в контексте весовых пространств и пространств с переменной гладкостью. Такие пространства «улавливают» тонкие свойства функций и, как следствие, позволяют содержательно исследовать поведение решений интегральных уравнений первого рода.

В-третьих, перенос классических результатов на метрические пространства с мерой представляет собой актуальное направление исследований, связанное с развитием анализа на неевклидовых пространствах и многообразиях. Результаты этой теории, безусловно важные для дальнейшего развития функционального анализа, уже демонстрируют свою востребованность в задачах математического моделирования.

Таким образом, работа Ю. Е. Дроботова развивает аппарат дробного анализа в пространствах обобщённой гладкости, что представляется актуальным как для фундаментальной математики, так и для её приложений.

Содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 98 наименований. Объём работы составляет 142 страницы.

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи исследования, указаны методы исследований, научная новизна и положения, выносимые на защиту. Даётся подробный обзор современного состояния проблемы и связь работы с существующими исследованиями.

Первая глава работы посвящена развитию классического аппарата риссова дробного интегродифференцирования на единичной сфере многомерного евклидова пространства. Центральным объектом исследования является оператор типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром:

$$I_{\mathbb{S}^{n-1}}^{\alpha, \nu} f(x) = c(n, \alpha) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x - \sigma|^{n-1-\alpha}} \ln^{\nu} \frac{r}{|x - \sigma|} d\sigma, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

В этой главе:

- исследован мультипликатор Фурье—Лапласа данного оператора;
- построено обращение потенциала Рисса с логарифмическим ядром ($\nu=1$) на сфере;
- доказаны теоремы о действии оператора в степенно-весовых пространствах обобщённой гёльдеровости, включая изоморфизмы для потенциала с логарифмическим ядром;
- установлена ограниченность оператора при действии из $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ в пространство обобщённой гёльдеровости;
- наконец, полученные результаты использованы при изучении оператора, определенного интегрированием по \mathbb{R}^{n-1} и связанного с $I_{\mathbb{S}^{n-1}}^{\alpha, \nu}$ посредством стереографической проекции.

Вторая глава посвящена исследованию степенно-весовой обобщённой переменной гёльдеровости потенциала Рисса на метрических пространствах с мерой. В этой главе:

- введены новые определения локального модуля непрерывности и пространств переменной обобщённой гёльдеровости;
- доказаны оценки типа Зигмунда для интегрального оператора, связанного с потенциалом Рисса некоторым алгебраическим выражением;
- установлены теоремы об ограниченности данного интегрального оператора, а также исследуемого потенциала Рисса в степенно-весовых пространствах обобщённой переменной гёльдеровости.

Наконец, **третья глава** содержит исследование гиперсингулярных интегралов на метрических пространствах с мерой. Основные результаты главы составляют:

- оценки типа Зигмунда для интегрального оператора, связанного с гиперсингулярным интегралом;
- теоремы об ограниченности данного интегрального оператора и рассматриваемого гиперсингулярного интеграла в степенно-весовых пространствах обобщённой переменной гёльдеровости;
- условия, при которых операторы «ухудшают» гладкость функций, понимаемую в терминах введенных ранее пространств.

В заключении подведены итоги работы, сформулированы основные результаты и намечены перспективы дальнейших исследований. Предшествующее изложение в основной части работы позволяет позитивно оценить имеющийся задел для решения предлагаемых новых задач.

Научная новизна и достоверность результатов

Все представленные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно при поддержке научного руководителя Б. Г. Вакулова. Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Подробно исследован мультипликатор оператора типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром на сфере и построено обращение последнего в терминах гиперсингулярного интеграла.
2. Впервые доказаны теоремы о действии операторов типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром в безвесовых и степенно-весовых пространствах обобщённой гёльдеровости на сфере и компактифицированном пространстве \mathbb{R}^{n-1} , а также теоремы об ограниченности потенциалов и гиперсингулярных интегралов в пространствах обобщённой переменной гёльдеровости на метрическом пространстве с мерой.
3. Получены новые оценки типа Зигмунда для потенциалов и гиперсингулярных интегралов на метрических пространствах с мерой.
4. Как следствие пп. 1—3, значительно развит аппарат исследования операторов дробного интегродифференцирования в пространствах обобщённой гладкости.

Достоверность результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами, использованием современных методов функционального анализа и теории операторов, а также согласованностью результатов с известными в более простых, частных случаях.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов дробного анализа и теории обобщённых функциональных пространств. Полученные результаты представляют значительный интерес для

- теории интегральных операторов и функционального анализа,
- современного дробного интегродифференцирования,
- анализа в функциональных пространствах обобщённой гладкости;
- анализа на метрических пространствах с мерой.

Практическая значимость обусловлена возможными приложениями в:

- качественной теории интегральных уравнений,
- математической физике, особенно в моделях среднего поля, дробной динамике, исследованиях процессов с памятью,
- теории упругости и механики сложных сред,
- обратных задачах и задачах математического моделирования.

Важно подчеркнуть фундаментальный характер полученных результатов, что представляется особенно важным в контексте дальнейшего развития дробного анализа на достаточно высоком уровне математической культуры.

Рекомендации по использованию результатов диссертации

Результаты диссертации могут быть использованы при разработке учебных курсов и проведении исследовательской работы в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Российском университете дружбы народов, Воронежском государственном университете, Южном федеральном университете, Владикавказском научном центре Российской академии наук и других научных и образовательных учреждениях, для которых характерны исследования в области функционального анализа и теории операторов, а также применение результатов таких исследований в решении прикладных задач.

Апробация работы и подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати

Основные результаты диссертации докладывались на 12 международных и всероссийских конференциях, включая

- Международную конференцию «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018 г.),
- Международную конференцию «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis» (Ростов-на-Дону, 2018–2024 гг.),
- Международную конференцию «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (в России и за рубежом, 2015–2024 гг.).

По теме диссертации опубликовано 21 научная работа, в том числе:

- 4 статьи в журналах из перечня ВАК,
- 3 статьи в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science,
- 4 главы в коллективных монографиях, индексируемых в Scopus,
- 10 публикаций в материалах международных конференций.

Основные результаты работы опубликованы в ведущих рецензируемых научных изданиях, отвечающих всем соответствующим требованиям.

Соответствие автореферата основным положениям диссертации

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации, представляя обоснование актуальности темы исследования, излагая основные положения, выносимые на защиту, и вполне точно оценивая значимость полученных результатов.

