МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Дроботов Юрий Евгеньевич

Потенциалы и гиперсингулярные интегралы в весовых пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости на метрических пространствах с мерой

Специальность 1.1.1. — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

доцент Вакулов Борис Григорьевич

Ростов-на-Дону — 2025

Оглавление

Введение

§ 1. Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Анализ в функциональных пространствах, обобщающих классические, представляет значительный интерес для современной математики как ввиду ее собственных потребностей, так и в связи с появлением большого числа приложений, задачи которых включают исследование тонких свойств функциональных зависимостей. Настоящая работа выполнена в развитие методов анализа непрерывности, квалифицированной в терминах специальных обобщений условия Гёльдера. В классическом виде последнее обнаруживает свою значимость как средство формализации понятия гладкости дробного порядка. Говоря конкретно, рассматриваются условия ограниченности операторов типа потенциала Рисса и гиперсингулярных интегралов в весовых пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости, а также изоморфизм операторов типа потенциала в частных случаях. Актуальность выбранной темы может быть обоснована следующим образом.

Как известно, риссово дробное интегродифференцирование функций многих вещественных переменных рассматривает потенциал Рисса и гиперсингулярный интеграл в качестве реализации своих основных операций. Так, гиперсингулярный интеграл играет роль дифференциального оператора —

дробной степени оператора Лапласа [86, с. 483], распространяя определение дробной производной Маршо на многомерный случай (см. также [40, 41]). Этот подход имеет место и на однородных пространствах, например сфере [42]. Кроме того, всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с характеристикой специального вида [86, с. 530], что вызывает особый интерес к исследованию таких операторов в контексте задач математической физики.

Риссовы ядра, обобщающие ядра классической теории [32, с. 62], — например, ньютоново и логарифмическое ядра, ядра Грина, связанные с областью многомерного пространства, — позволяют распространить основные результаты на большое число конкретных задач. Свертка с риссовым ядром реализует отрицательные дробные степени оператора Лапласа, что может быть показано в образах Фурье [86, с. 361]. Таким образом, потенциалы Рисса и гиперсингулярные интегралы оказываются взаимнообратными операторами на хотя бы определенной совокупности функциональных пространств: некоторые теоремы об обращении гиперсингулярными интегралами операторов типа потенциала цитируются в основном тексте данной работы в связи с изложением новых результатов в этой области.

Отдельно прокомментируем значимость избранной тематики для приложений за пределами теоретических построений. Анализ академической литературы свидетельствует в пользу большого интереса со стороны математического моделирования к дробному интегродифференцированию, включая риссову теорию для фукнкций многих переменных: укажем, например, работы [53, 54, 56, 73, 74], связанные с изучением задач в различных областях механики и теории управления, а также монографии [90, 75], рассматривающие многочисленные вопросы современной теоретической физики и материаловедения. При этом существенным вопросом качественной теории интегральных уравнений остается формализация гладкости получаемых решений, содержательно характеризующая корректность рассматриваемых задач. На пути развития соответствующих концепций, в достаточной степени отвечающих усложняющимся запросам теории операторов в приложениях к задачам математической физики, неизбежны обобщения классических функциональных пространств, в том числе пространств гёльдеровского типа, введение которых еще в теории эллиптических уравнений в частных производных мотивировано тем же вопросом.

Настоящее исследование развивает результаты классического риссова интегродифференцирования посредством обоснования обобщенной гёльдеровости операторов типа потенциала со степенно-логарифмическим ядром в сферическом и пространственном случаях, в том числе при наличии специальных и степенных весов. Более того, в работе рассмотрены потенциалы и гиперсингулярные интегралы на почти однородных метрических пространствах с мерой и доказана ограниченность этих операторов при действии в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом.

Место исследования в дисциплине. Раздел риссовых интегралов и производных дробного порядка получил развитие методами спектральной теории в работах С. Г. Самко [40, 41, 42]. Их основной результат составляет описание пространства риссовых потенциалов на $\mathbb{R}^n$ в терминах разностных сингулярных интегралов, особенность которых доминирует над размерностью пространства [43], то есть гиперсингулярных интегралов. Обращение потенциалов Рисса такими интегральными операторами впервые доказано для функций из L^p–пространства, в том числе — в весовом случае.

Подходы, основанные на исследовании символов интегральных операторов на сфере, позволили качественно обобщить теоретические результаты относительно операторов типа потенциала, содействуя формированию отдельного направления анализа сферических сверток. В этом отношении стоит отметить работу [44], где рассматривались спектры некоторых наиболее часто встречающихся операторов сферической свертки, а также [2], пионерскую с точки зрения классификации таких операторов на основании асимптотического поведения мультипликаторов Фурье–Лапласа на бесконечности. Там же был обоснован подход к описанию дробной гладкости сферических сверток в терминах класса мультипликаторов заданной асимптотики и обобщенных пространств Гёльдера, предпосылки к чему имеют довольно богатую историю; значимым результатом в этом отношении является теорема об изоморфизме вида

$$A^{\alpha}\left(H^{\varphi}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right)=H^{\varphi_{\alpha}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right),$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n}$, A^{α} — оператор сферической свертки вида

$$A^{\alpha}f(x):=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}k(x\cdot\sigma)\,f(\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma,\ \ x\in\mathbb{S}^{n-1},$$

спектр которого $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ в разложении по сферическим гармоникам (то есть мультипликатор Фурье–Лапласа) имеет заданную асимптотику при $m\to\infty$, а $\varphi(h)$ и $\varphi_{\alpha}(h)$ есть мажоранты модуля непрерывности, характеризующие обобщенную гёльдеровость рассматриваемых функций.

Стоит напомнить, что гладкость как свойство непрерывной дифференцируемости функций может вводиться весьма разнообразными способами. Например, в работах [19, 23, 37] пространство гладких на сфере функций вводилось как частный случай пространств Бесова. Альтернативная точка зрения, изложенная в работе [35], предполагала введение дробной гладкости в терминах дифференцируемости по декартовым координатам. Однако работы [4, 17, 88] показали возможность эквивалентной нормировки пространств Гёльдера, возникающих в каждом из этих двух различных подходов.

Свое развитие тематика обобщенно-гёльдеровских пространств получила в работах [21, 22, 39], предлагавших использовать в качестве мажоранты модуля непрерывности произвольный, не обязательно степенной, функциональный параметр. Гармонический анализ в таких пространствах пополнился результатами в области теории потенциала [3, 12, 97], в том числе и в последние годы: так, исследования [26, 94, 95], развивая результаты работы [2], представили условия ограниченности оператора типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром на сфере, а также связанного с ним стереографической проекцией пространственного потенциала: эти результаты отражены в настоящей диссертации. В частных случаях оператор осуществляет изоморфизм обобщенных пространств Гёльдера, причем обратный оператор выражается композицией с гиперсингулярным интегралом. В работе [66] описаны классы однозначно разрешимых в пространствах обобщенной гёльдеровости интегральных уравнений первого рода, ядро оператора в которых имеет слабую особенность.

Интерес к операторам дробного интегродифференцирования переменного порядка [13, 14, 15, 83, 87] был естественно сопряжен с рассмотрением функциональных пространств, определяющие параметры которых также имеют функциональную природу. Отметим исследования [18, 80, 82, 84], в которых были доказаны, в том числе, теоремы типа Соболева в случае пространств Лебега с переменным показателем; работы [5, 6, 7, 10, 93, 77, 20], в которых рассматривались пространства $H^{\lambda(x)}$ переменной гёльдеровости и действие в них сферических, а затем и пространственных потенциалов постоянного и переменного (включая комплексные) порядков. Наконец, работы [16, 78] описывают действие операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов, определенных на однородных пространствах, в $H^{\lambda(x)}$ в безвесовом и случае специального веса, которым выступает сам переменный порядок $\alpha(x)$ или его вещественная часть.

Стоит заметить, что введение интегральных операторов на почти однородных квазиметрических пространствах в работах [16, 78, 85], преследующее целью максимальное обобщение классических результатов, является существенной проблемой. Отличие подхода, применяемого в этом случае, от известных в классической теории состоит в необходимости локализации аналитических свойств функций, действующих на таких пространствах, на основании общих геометрических соображений. Неприменимы более замечательные следствия евклидовой метризации пространства: например, тождество параллелограмма, которое для сферы приводит исследование в область общей теории операторов типа сферической свертки и упомянутых выше спектральных методов. Получение оценок типа Зигмунда затрудняется теперь отсутствием формулы Каталана, что привело к созданию аналогичного аппарата в работах [16, 78] (здесь он также используется в виде Лемм 2 и 3). Наконец, оценки вблизи особых точек — например, «весовой» точки a, — требует применения специальных неравенств, выводимых, как правило, непосредственно из неравенства треугольника или, в случае квазиметрических пространств, его обобщений. Немаловажно, что при этом параметризация констант, с которыми ограничены соответствующие интегралы, усложняется и в качественном аспекте: они становятся зависимыми от постулируемых характеристик самого множества интегрирования, что, конечно, играет свою роль в приложении полученных результатов для решения уравнений.

В настоящее время большой теоретический интерес представляют пространства обобщенной переменной гёльдеровости, введенные впервые в работе [8]. Исследования их с точки зрения риссова интегродифференцирования переменного порядка в [9, 79], ставили задачу на гиперсфере и гиперплоскости многомерного евклидова пространства; известны также результаты для этих пространств в анализе голоморфных функций [72]. Большую значимость имеют современные исследования классов Никольского–Бесова, осуществляемые с введением нового модуля непрерывности [30, 31].

В завершение обзора следует заметить, что генерализация известных функциональных пространств затрагивает не только пространства квалифицированной гладкости. Может быть отмечено интенсивное развитие теории гранд-пространств, которая результатами ряда современных исследований [47, 49, 50, 51, 76, 91, 92] превращена в самодостаточную область анализа. Можно видеть, что некоторые фундаментальные теоремы о действии, излагаемые в настоящей работе, могут быть рассмотрены далее с применением теорем о вложении пространств, что делает некоторый вклад в приведение новых областей анализа к теоретическому континууму, которым предстает классическое риссово дробное интегродифференцирование; впрочем, данные задачи не входят в число рассматриваемых настоящим исследованием.

Цели работы заключаются в описании весовой квалифицированной непрерывности функций при отображении их операторами типа потенциала Рисса и гиперсингулярными интегралами, что предполагает

– исследование ограниченности оператора типа риссова потенциала со степенно-логарифмическим ядром на функциях из L^p в пространстве обобщенной гёльдеровости на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а также на компактифицированном подпространстве $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ при наличии специальных весов;

– доказательство теорем о действии оператора типа риссова потенциала со степенно-логарифмическим ядром при отображении в пространствах обобщенной гёльдеровости со степенными весами на $\mathbb{S}^{n-1}$ и $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$;

– исследование ограниченности операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов на абстрактном метрическом пространстве с мерой при отображении в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются классические и современные методы анализа, а также некоторые отношения и понятия, характерные для геометрии метрических пространств. В том числе используются числовые и функциональные неравенства, следствия из формулы Каталана, спектральный анализ операторов сферической свертки, асимптотическое описание мультипликаторов Фурье–Лапласа, теоремы о действии операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов в пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости.

Научная новизна. Диссертация представляет ряд новых результатов в дробном анализе. Теоремы, доказанные в предпосылках риссова дробного интегродифференцирования, дополняют известные результаты исследованием оператора, предполагающего потенциалы Рисса частными реализациями. Теоремы об ограниченности потенциала и гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой в степенно-весовом случае являются новыми и существенно дополняющими известные достижения в этой области.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие новые результаты, развивающие аппарат риссова дробного интегро-дифференцирования и теоретические основания дробного анализа на метрических пространствах:

1) исследован мультипликатор оператора $I^{\alpha}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ типа сферического потенциала Рисса с логарифмическим ядром;
2) получен вид оператора, обратного оператору $I^{\alpha}_{\mathbb{S}^{n-1}}$;
3) доказаны следующие теоремы о действии оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ типа сферического потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром:
   (a) теорема типа Соболева об ограниченности оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ на функциях из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ в пространстве обобщенной гёльдеровости;
   (b) теорема об ограниченности оператора $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta_\Pi}$ в степенно-весовых пространствах обобщенной гёльдеровости при отображении функций из пространства $L^p\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_p\right)$ и самих степенно-весовых пространств обобщенной гёльдеровости, а также теорема об изоморфизме оператора типа потенциала с логарифмическим ядром при отображении последних;
4) доказаны весовая оценка типа Зигмунда для оператора типа потенциала Рисса на метрическом пространстве с мерой и теорема о действии этого оператора в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости в случае степенного веса;
5) доказаны весовая оценка типа Зигмунда для одного специального оператора гиперсингулярного интегрирования на метрическом пространстве с мерой и теорема о действии гиперсингулярного интеграла в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости в случае степенного веса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Основные результаты принадлежат тематике квалифицированной гладкости в контексте интегральных операторов дробного анализа. Проблема изменения гладкостных свойств функций рассматривается в широком классе сферических потенциалов со степенно-логарифмическим ядром, а также интегральных операторов, связанных с ними стереографической проекцией. Результаты второй и третьей глав представляют ценность для развития дробного анализа на метрических пространствах с мерой как самостоятельной математической дисциплины.

Практическая значимость полученных результатов обусловлена приложениями в области качественной теории интегральных уравнений. Приведенные результаты значительно развивают аппарат квалифицированной гладкости операторов, представляющих значительный интерес в контексте новейших моделей математической физики.

Достоверность изложенных результатов подтверждается строгим характером доказательства основных теорем и вспомогательных утверждений, а также их обоснованностью в контексте общей теории.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- межвузовская научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных им. Е. В. Арменского (Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ, Москва) в 2016 г.;
- международная научная конференция «VI Russian–Armenian Conference on Mathematical Analysis, Mahtematical Physics and Analytical Mechanics» (г. Ростов-на-Дону) в 2016 г.;

– 5-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Российский университет дружбы народов, Москва), посвящённая 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева, в 2018 г.;
– региональная школа-конференция молодых ученых «XV Владикавказская молодёжная математическая школа» (г. Владикавказ) в 2020 г.;
– международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) в 2016, 2020 и 2021 гг.;
– международная конференция «Комплексный анализ и смежные проблемы» (Казанский федеральный университет, г. Казань) в 2022 г.;
– международная научная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis» (г. Ростов-на-Дону) в 2018, 2021–2024 гг.;
– международная научная конференция «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» в 2015 г. (г. Азов, Россия), 2020 г. (г. Китакюсю, Япония), 2022 г. (пос. Дивноморское, Россия) и, в рамках пленарного доклада, в 2024 г. (г. Сурабая, Индонезия);

а также на следующих научных семинарах:

— научный семинар Бранденбургского технического университета в 2017 г.;
— международный научный семинар «Теория операторов, дифференциальные уравнения и их приложения» во Владикавказском научном центре Российской академии наук в 2020 г.;
— научный семинар кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в 2022 г.;

— научный семинар кафедры высшей математики Московского государственного строительного университета в 2022 г.

Основные результаты диссертации оформлены во время исполнения следующих научно-исследовательских проектов:

— грант Южного федерального университета № ВнГр/2020-04-ИМ;
— индивидуальный грант в рамках программы Министерства науки и высшего образования РФ по содействию занятости выпускников 2020 года на научно-исследовательских позициях в вузах и научных организациях;
— международный научно-исследовательский проект «Операторы гармонического анализа в нестандартных пространствах функций и их приложения» (проект РФФИ № 20-51-46003).

Отдельные вопросы в смежных областях, использующие результаты настоящего иссследования, разрабатывались в рамках следующих научно-исследовательских проектов:

— государственное задание в области научной деятельности «Разработка экспериментально-теоретических методов и численного моделирования структурно-чувствительных свойств перспективных материалов и композитов с сегнетопьезоэлектрическими характеристиками, а также устройств генерации энергии» (проект № FENW-2023-0012),
— «Исследование интегральных операторов в обобщённых пространствах Лебега» (проект РФФИ № 15-31-50241);
— «Исследование интегральных операторов в гранд-пространствах Лебега на неограниченных множествах» (проект РФФИ № 17-301-50023);
— проект РНФ № 21-19-00423 «Исследование и разработка перспективных сегнетопьезоматериалов с улучшенными свойствами и их применений»;
— проект РНФ № 25-29-00809 «Разработка теоретико-экспериментальных

и интеллектуальных методов идентификации поврежденного состояния конструкций на основе анализа деформационных откликов».

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в рецензируемых научных изданиях:

— статьи [9, 26, 27, 68] опубликованы в журналах, включенных в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Статьи [9, 68, 27] опубликованы в журналах, индексируемых в международной реферативной базе научных публикаций Scopus; журналы, в которых опубликованы [9, 27], входят также в число изданий, индексируемых Web of Science;

— главы в коллективных монографиях [98, 95, 66, 59] представлены в Scopus как отдельные публикации. Монография [75] индексируется Scopus;

— главы в коллективных монографиях [60, 94, 58] индексируются как отдельные публикации в базе РИНЦ и международных базах, исключая Scopus и Web of Science. Работы, опубликованные в материалах научных конференций, индексируются как отдельные публикации в базе РИНЦ.

Личный вклад соискателя. Статьи [9, 26, 27, 68], а также главы [66, 94, 95, 98] опубликованы в соавторстве с научным руководителем: Б. Г. Вакулову принадлежат постановка задач, указание метода исследования и общее руководство, соискателю — проведение исследования, оформление и обоснование результатов, включая доказательство основных теорем. В [75] соискателю принадлежит описание некоторых задач математической физики и методов их исследования в контексте результатов диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 142 страницы. Библиография — 98 наименований.

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю, Борису Григорьевичу Вакулову, чье руководство и поддержка стали основой для достижения приведенных результатов.

Диссертационная работа выполнена при поддержке ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» (проект № ГЗ0110/23-12-ММ), а также Регионального научно-образовательного математического центра «Северо- Кавказский центр математических исследований Владикавказского научного центра Российской академии наук» (соглашение Минобрнауки России № 075-02-2025-1633).

§ 2. Предварительные сведения

Настоящее исследование рассматривает интегральные операторы, определенные на подмножествах Ω некоторых метрических пространств $X = (X, d)$, где через d обозначена метрика. Напомним, что выражение

$$\operatorname{diam}(\Omega) := \sup_{x,y\in\Omega} d(x,y), \quad \Omega \subset X,$$

определяет так называемый диаметр множества Ω.

Классическое риссово дробное интегродифференцирование рассматривает в качестве X пространство $\mathbb{R}^n$, определяемое в следующем пункте этого параграфа. Затем приводятся термины, необходимые для интерпретации результатов, полученных в случае более общих метрических пространств с мерой.

§ 2.1. Риссово дробное интегродифференцирование на евклидовых пространствах

Следующие основные определения призваны прояснить содержание результатов, представленных в рамках первой главы настоящей работы. По существу, они представляют собой обобщения классических определений операторов риссова дробного интегродифференцирования, удобные для изложения предмета исследования.

Всюду далее $\mathbb{N}$ означает множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Основные обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — евклидово пространство векторов натуральной размерности n с действительными координатами:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; x_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

так что функция двух переменных

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}, \;\; x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

служит метрикой пространства $\mathbb{R}^n$, при этом, очевидно, $|x| = |x - 0|$.

Через $\mathbb{S}^{n-1}$ обозначим единичную сферу в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \tag{2}$$

а с помощью $\dot{\mathbb{R}}^{n-1} := \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ будем обозначать одноточечную компактификацию пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, которое само является гиперплоскостью объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$.

Операторы типа потенциала и сферические гиперсингулярные интегралы. Напомним, что *потенциал Рисса* определяется как свертка с риссовым ядром $\mathrm{k}_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ [86, с. 363]:

$$I^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{k}_\alpha(x-\sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathrm{Re}\,\alpha > 0. \tag{4}$$

В рамках настоящей работы будем рассматривать последнее как частный случай более общего ядра: именно, предложим

Определение 1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \;\; \nu > 0, \;\; r > 0,$$

и $\kappa(n, \alpha)$ принимает, вообще говоря, комплексное значение. Будем называть *ядром типа риссова* следующую функцию:

$$\mathrm{k}_{\alpha,\nu}(x) := c(n,\alpha)\; |\, x\,|^{\,\kappa(n,\alpha)}\; \ln^{\nu} \frac{r}{|\, x\,|}, \;\; \nu \geq 0, \;\; r > 0, \;\; x \in \Omega, \tag{3}$$

где постоянная $c(n, \alpha)$ играет роль нормировочного множителя, значение которого определяется контекстуально.

Таким образом, если положить в выражении (3) значение константы $c(n, \alpha)$ из [86, с. 361] (см. выражение (25.26)), а также

$$\Omega = \mathbb{R}^n, \;\; \kappa(\alpha, n) = \alpha - n, \;\; r = 1,$$

то классическое *риссово ядро* может быть выражено следующим образом:

$$\mathrm{k}_\alpha(x) = \begin{cases} \mathrm{k}_{\alpha,0}(x), & \text{если} \quad \kappa(n,\alpha) \neq 0, 2, 4, 6, ...; \\ \mathrm{k}_{\alpha,1}(x), & \text{если} \quad \kappa(n,\alpha) \quad \text{— нуль или четное.} \end{cases}$$

Действуя в рамках предложенного обобщения, приведем формальное

Определение 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и ядро $\mathrm{k}_{\alpha,\nu}(x)$ определено выражением (3) с некоторыми значениями указанных параметров. Будем называть *оператором типа потенциала Рисса* следующий интегральный оператор:

$$I^{\alpha,\nu}_{\Omega,\theta} f\,(x) := \int\limits_{\Omega} \theta(x,\sigma)\,\mathrm{k}_{\alpha,\nu}\,(|\,x-\sigma\,|)\; f(\sigma)\;\mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Функцию $f(\sigma)$ называют *плотностью*, а $\theta\,(x,\sigma)$ — *характеристикой* оператора типа потенциала (5).

Замечание 1. Условимся опускать обозначение характеристики в случае, если она постоянна, то есть:

$$I^{\alpha,\nu}_{\Omega} := I^{\alpha,\nu}_{\Omega,\theta}, \quad \text{если} \quad \theta(x,\sigma) \equiv \mathrm{const}, \quad x,\sigma \in \Omega.$$

Далее вид рассматриваемых операторов типа потенциала конкретизирован в контексте поставленных в исследовании задач, и ограничения на значения определяющих параметров также специфицированы исходя из них. В частности, при $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ будем полагать $\kappa(n,\alpha) = n - \alpha + 1$ и называть оператор, для краткости, *сферическим потенциалом.*

В связи с обращением сферических потенциалов вводятся операторы, которые будем называть *сферическими гиперсингулярными интегралами* и рассматривать в рамках следующего определения:

Определение 3. Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 2$ и

$$D_\varepsilon^\alpha f(x) := c(n, -\alpha) \int\limits_{\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}(x)} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|\, x - y\,|^{n-1+\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

где использовано так называемое урезание на сфере:

$$\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}(x) := \left\{\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1} : \, |\, x - \sigma\,| > \varepsilon \,\right\}.$$

Гиперсингулярный интеграл на сфере вводится как следующий предел:

$$D^{\,\alpha} f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} D_\varepsilon^\alpha f(x), \quad x \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{6}$$

Определение 3 было впервые предложено в [36], будучи существенно мотивированным фактом инвариантности относительно вращений операторов D_ε^α, что позволяет применять аппарат мультипликаторов Фурье–Лапласа к исследованию гиперсингулярного интеграла (6). Относительно последнего заметим следующее:

Замечание 2. Предел (6) существует по крайней мере на функциях, дважды непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{S}^{n-1}$.

2.1.1. Пространства обобщенной гёльдеровости

Пусть символ $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega)$ используется в дальнейшем для обозначения пространства функций, непрерывных на Ω; будем считать его снабженным классической sup-нормой

$$\|f\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |\, f(x)\,|\,.$$

Определение 4. *Обобщенным пространством Гёльдера* называется функциональное пространство

$$H^{\omega}(\Omega) \coloneqq \{\, f \in C(\Omega) : \omega(f,t) \le c\,\omega(t), \quad c, t > 0 \,\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

где

$$\omega(f,t) \coloneqq \sup_{\substack{x,y\in\Omega:\\ |\,x-y\,|\le t}} |\, f(x) - f(y)\,|\,, \quad t \in (0, \operatorname{diam}(\Omega)], \tag{7}$$

есть *модуль непрерывности* функции $f(x)$, $x \in \Omega$. Функцию $\omega(t)$, $t > 0$, принято называть *характеристикой* пространства $H^{\omega}(\Omega)$.

Пространство $H^{\omega}(\Omega)$ — банахово относительно нормы

$$\|f\|_{H^{\omega}(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sup_{t>0} \frac{\omega(f,t)}{\omega(t)}.$$

Введем также определение весовых пространств обобщенной гёльдеровости, отвечающее случаю, когда вес является степенной функцией:

Определение 5. Будем говорить, что функция f принадлежит пространству $H^{\omega}_{a}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, если

$$w_a\, f \in H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right), \ \lim_{x\to a} \left(w_a\, f\right)(x) = 0,$$

где весовая функция выражена следующим образом:

$$w_a(x) = |\, a - x\,|^{\gamma}, \ \ a \in \Omega, \ \ \gamma > 0.$$

В случае, если весовая функция имеет вид

$$w_{\{a_j\}}(x) = \prod_{j=1}^{m} |\, x - a_j\,|^{\gamma_j}, \ \text{ где } \ \ a_j \in \Omega, \ \ j = \overline{1, s}, \quad s \in \mathbb{N},$$

аналогично введем пространство

$$H^{\omega}_{\{a_j\}}(\Omega) := \left\{ w_{\{a_j\}} f \in H^{\omega}(\Omega) : \lim_{x\to a_j} \left(w_{\{a_j\}} f\right)(x) = 0, \quad j = \overline{1, s} \right\}.$$

2.1.2. Функциональные классы Бари–Стечкина

Теоремы о действии операторов типа потенциала (и гиперсингулярных интегралов) в пространствах обобщенной гёльдеровости формулируются в терминах специального класса функций, а именно:

Определение 6. Пусть $\omega(t)$ — непрерывная, неотрицательная и почти возрастающая на $[0,l]$ функция, причем $\omega(0) = 0$. Будем говорить, что функция $\omega(t)$ принадлежит *классу Бари–Стечкина* Φ^{δ}_{β}, если одновременно имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{\tau} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} \,\mathrm{d}\, t \le c_1\, \omega(\tau), \\ &\int\limits_{\tau}^{l} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\beta} \frac{\omega(t)}{t} \,\mathrm{d}\, t \le c_2\, \omega(\tau), \end{aligned} \qquad 0 \le \delta < \beta,$$

где константы c_1 и c_2 независимы от $\tau \in (0, l/2)$.

Замечание 3. В том случае, если выполнено только одно из приведенных условий, в обозначении Φ^{δ}_{β} удерживается лишь соответствующий индекс.

Замечание 4. Отметим, что в теоремах о действии параметр l, участвующий в определении классов, предполагается числом, не превосходящим $\mathrm{diam}\,(\Omega)$.

Ключевые свойства классов Бари–Стечкина описаны, например, в [21, с. 54] и цитируются в дальнейшем по мере необходимости.

§ 2.2. Потенциалы и гиперсингулярные интегралы на метрических пространствах с мерой

Следующие основные сведения отвечают содержанию Глав 2 и 3, посвященных развитию дробного анализа на метрических пространствах в более общих предпосылках.

Конфигурация метрических пространств. Пусть (X, d, μ) — некоторое пространство точек, на котором введены расстояние $d(x, \sigma)$ и мера $\mu(\sigma)$, $x, \sigma \in X$. Будем предполагать, что все открытые шары в (X, d, μ), т.е. множества вида

$$B(x,h) := \{\, \sigma \in X : \, d(x,\sigma) < h \,\},$$

измеримы и удовлетворяют следующему условию роста:

$$\forall x \in X : \;\; \mu\, B(x,h) \leq K\, h^N \;\; \text{при} \quad h \to 0, \tag{B}$$

в котором параметр $N > 0$ и постоянная $K > 0$ не зависят от $x \in \Omega$. Будем полагать также, что все сферы

$$S(x,h) := \{\, \sigma \in X : \, d(x,\sigma) = h \,\}, \;\; x \in X, \;\; h > 0,$$

таковы, что $\mu\, S(x,h) = 0$. Условимся обозначать замкнутые шары в X символом $B[x,h]$:

$$B[x,h] := \{\, \sigma \in X : \, d(x,\sigma) \leq h \,\}.$$

Метрика $d(x, y)$ по определению симметрична и удовлетворяет классическим прямому,

$$d(x,\sigma) \leq d(x,y) + d(y,\sigma), \tag{Δ_1}$$

а также — эквивалентному (Δ_1) в силу симметричности — обратному,

$$|\, d(x,y) - d(y,\sigma)\,| \le d(x,\sigma), \ \ x,y,\sigma \in X, \tag{Δ_2}$$

неравенствам треугольника.

Определения операторов. Будем рассматривать произвольно выбранное множество Ω такое, что

$$\Omega \subset X, \ \ 0 < \operatorname{diam}(\Omega) < \infty, \ \ \Omega \text{ — открытое.} \tag{O$_1$}$$

Положим, что на Ω выполнено так называемое условие аннигиляции:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{[\,d(x,\sigma)\,]^{N-\alpha}} - \frac{1}{[\,d(y,\sigma)\,]^{N-\alpha}} \right) \mathrm{d}\,\sigma \equiv 0, \\ 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \ \ x,y \in \Omega,\end{gathered} \tag{O$_2$}$$

где интегрирование осуществляется в терминах меры μ. Свойство аннигиляции представляет важность для включения тождественно постоянных функций в пространство гёльдеровских, поэтому предполагается, что в дальнейшем оно всегда выполнено.

Введем определения операторов риссова дробного интегродифференцирования на метрических пространствах описанной выше конфигурации, рассматривая, для определенности, число

$$\alpha \in \mathbb{C}: \ \ 0 \le \operatorname{Re}\alpha < 1.$$

как *порядок* потеницала Рисса или гиперсингулярного интеграла соответственно:

Определение 7. Следующий интегральный оператор понимается как *потенциал Рисса на метрическом пространстве с мерой*:

$$I^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma)}{[d(x,\sigma)]^{N-\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \Omega,$$

где интегрирование производится по мере $\mu(\sigma)$.

Определение 8. *Гиперсингулярный интеграл на метрическом пространстве с мерой* определен следующим выражением:

$$D^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma) - f(x)}{[d(x,\sigma)]^{N+\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \Omega,$$

где символ $\mathrm{d}\,\sigma$ указывает на интегрирование по мере $\mu(\sigma)$ в смысле следующего выражения:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x,\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma = \lim_{h\to+0} \int\limits_{\Omega\setminus B[x,h]} \varphi(x,\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

2.2.1. Локализации обобщенного условия Гёльдера

Локальные модули непрерывности и их свойства. Введем — вслед за классическим определением класса модулей непрерывности из [21, с. 49], — общий класс локальных модулей непрерывности, перечислив основные аналитические свойства его представителей:

Определение 9. Пусть выбрано число $l : 0 < l \leq \operatorname{diam}(\Omega)$. Функцию

$$M(x,h), \quad x \in \Omega, \quad 0 < h \leq l,$$

будем называть *локальным модулем непрерывности*, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

(9.1) $\forall x \in \Omega: \quad M(x,0)=0;$

(9.2) $M(x,h)$ является неубывающей функцией от h равномерно по x;

(9.3) $M(x,h)$ полуддитивна по h, т.е.

$$\forall x \in \Omega: \;\; M(x,h_1+h_2) \le M(x,h_1)+M(x,h_2);$$

(9.4) $M(x,h)$ есть непрерывная по h функция для всякого $x \in \Omega$.

Наиболее строгим из требуемых является свойство (9.3) полуаддитивности, однако именно это свойство позволит в дальнейшем применить аппарат оценок типа Зигмунда к исследованию локальной непрерывности. Так, важное следствие этого свойства составляет

Лемма 1. *Пусть $x \in \Omega$, $0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$, $M(x,h)$ — локальный модуль непрерывности в смысле Определения 9. Имеет место оценка:*

$$\frac{M(x,h_2)}{h_2} \le 2\,\frac{M(x,h_1)}{h_1}, \;\; 0 < h_1 \le h_2 \le l. \tag{M.1}$$

Доказательство. Рассуждения в основе доказательства леммы ничем принципиально не отличаются от классического случая, изложенного в [21, с. 50]. Прежде всего, из свойства (9.3), данного в Определении 9, следует, что

$$\forall x \in \Omega: \quad M(x,n\,h) \le n\,M(x,h), \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{M.2}$$

Положим:

$$h_2 = h_1 + h, \;\; 0 \le (n_0-1)\,h_1 \le h \le n_0\,h_1,$$

где n_0 — некоторое натуральное число (в частности, можно положить $n_0 = 1 + \lfloor h/h_1 \rfloor$). Тогда имеем в силу свойства (9.3) и оценки (M.2), зафиксировав некоторую точку $x \in \Omega$:

$$\frac{M(x,h_2)}{h_2} \le \frac{M(x,h_1)}{h_1+h} + \frac{M(x,h)}{h_1+h} \le \\ \le \frac{M(x,h_1)}{h_1} + \frac{M(x,n_0\,h_1)}{h_1+(n_0-1)\,h_1} \le 2\,\frac{M(x,h_1)}{h_1}.$$

$\square$

Отметим, что из свойства (M.2), а также (9.3) полуаддитивности и (9.2) неубывания по h следует следующая оценка с произвольным $k > 0$:

$$M(f,x,k\,h) \le \lfloor k \rfloor\, M(f,x,h) + M(f,x,\lambda\,h) \le \\ \le (k+1)\,M(f,x,h), \quad k = \lambda + \lfloor k \rfloor, \quad 0 \le \lambda < 1, \tag{M.3}$$

где $\lfloor k \rfloor$ означает целую часть числа k.

Локальный модуль непрерывности в смысле Определения 9 может быть введен, например, следующим выражением:

$$M_f(x,h) = \sup_{\substack{\sigma_1,\sigma_2 \in \Omega \cap B[x,l]: \\ d(\sigma_1,\sigma_2) \le h}} |\,f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\,|\,, \;\; x \in \Omega, \\ 0 < h \le l < \infty. \tag{8}$$

Действительно, пусть f — функция, непрерывная на Ω. Тогда свойства (9.1), (9.2) и (9.4) из Определения 9, очевидно, выполнены для (8); свойство (9.3) легко проверяется: пусть

$$\sigma_k \in \Omega \cap B[x,l], \;\; h_k := d(x,\sigma_k), \;\; k = 1,2,$$

тогда, согласно неравенству треугольника (Δ_1), $d(\sigma_1,\sigma_2) \le h_1 + h_2$, и справедлива следующая оценка:

$$
\begin{aligned}
&|\, f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\,| \le |\, f(\sigma_1) - f(x)\,| + |\, f(x) - f(\sigma_2)\,| \le \\
&\qquad\qquad \le \sum_{k=1}^{2} \sup_{\substack{\sigma_1', \sigma_2' \in \Omega \cap B[x,l]: \\ d(\sigma_1', \sigma_2') \le h_k}} |\, f(\sigma_1') - f(\sigma_2')\,| = M_\Omega(f, x, h_1) + M_\Omega(f, x, h_2).
\end{aligned}
$$

Пространства обобщенной переменной гёльдеровости. Пусть множество Ω удовлетворяет условиям (O_1). Востребовано

Определение 10. Пусть обозначено:

$$
T_l := \Omega \times [0, l), \;\; 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)\,. \tag{9}
$$

Будем говорить, что функция $\omega \;:\; T_l \;\to\; [0, \infty)$, принадлежит *классу* $W = W(T_l)$, если выполнены следующие условия:

(10.1) $\forall x \in \Omega$: $\omega(x, h)$ — непрерывная, почти возрастающая по $h \in (0, l]$, и $\lim\limits_{h \to +0} \omega(x, h) = 0$;

(10.2) $\inf\limits_{x \in \Omega} \omega(x, h) > 0$ при $h > 0$.

Как и ранее, символом $\mathcal{C}(\Omega)$ обозначено пространство непрерывных на Ω вещественнозначных функций. Введем

Определение 11. Пусть $\omega \in W(\Omega)$, $M_f(x, h)$ — локальный модуль непрерывности, ассоциированный с $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Будем называть

$$
\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega) := \{\, f \in \mathcal{C}(\Omega) : \; M_f(x, h) \le c\,\omega(x, h)\,\}\,, \;\; 0 < c < \infty,
$$

пространством обобщенной переменной гёльдеровости на Ω, а функцию ω — характеристикой этого пространства.

Заметим, что пространство $\mathcal{H}(\Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{H}(\Omega)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\Omega)} + \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ h\in(0,l]}} \frac{M_f(x,h)}{\omega(x,h)}, \ \ 0 < l \le \mathrm{diam}\,(\Omega)\,.$$

Аналогично, введем определение весовых пространств обобщенной переменной гёльдеровости, релевантное поставленным в исследовании задачам:

Определение 12. Пусть весовая функция имеет следующий вид:

$$w_a(x) = [\,d(a,x)\,]^{\gamma}\,, \ \ 0 < \mathrm{Re}\,\gamma < 1 + N. \tag{10}$$

Функциональное пространство

$$\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) := \Big\{\, f \in \mathcal{C}(\Omega) :\, w_a\, f \in \mathcal{H}^{\,\omega(\cdot)}(\Omega), \quad (w_a\, f)(0) = 0 \,\Big\}$$

будем называть *степенно-весовым пространством обобщенной переменной гёльдеровости.*

Определения 11 и 12 могут быть конкретизированы с указанием конкретных локальных модулей непрерывности: например, данного выше модуля (8). Рассмотрим также подход, основанный на понятии субметрии, в рамках которого вводились оригинальные пространства обобщенной переменной гёльдеровости в предшествующих работах.

Напомним, что отображение φ между метрическими пространствами X и Y называется *субметрией*, если для каждой точки $x \in X$ образ всякого замкнутого шара при отображении φ является замкнутым шаром того же радиуса с центром в точке $\varphi(x) \in Y$ [1]. Имея в качестве φ вещественнозначную функцию, предложим

Определение 13. Будем называть *модулем субметрии* вещественнозначной функции f, определенной на Ω, функцию

$$\omega_f(x,h) := \sup_{\sigma\in\Omega\cap B[x,h]} |\, f(x) - f(\sigma)\,|\,, \ \ x\in\Omega, \ \ h>0. \tag{11}$$

Очевидно, модуль субметрии ω_f не может, вообще говоря, рассматриваться как объект класса локальных модулей непрерывности, поскольку свойство субметрии (а значит, и все полезные следствия из него) не гарантированы. С учетом сказанного, возможна следующая спецификация пространств, введенных Определениями 11 и 12:

Определение 14. Пусть функциональные пространства, обозначаемые в дальнейшем как $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ и $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, рассматриваются в качестве пространств $\mathcal{H}^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ соответственно, если последние определены в терминах модуля субметрии ω_f и тот обладает свойством полуаддитивности для данного класса функций, либо в терминах минимальной мажоранты модуля субметрии ω_f из класса локальных модулей непрерывности.

Интересно отметить, что в силу (M.2) выполнено следующее соотношение:

$$\forall x\in\Omega: \quad \omega_f(x,h) \le 2\, M_f(x,h), \ \ h\in(0,l], \ \ 0<l<\infty,$$

позволяющее утверждать о теоретико-множественном включении пространств типа $\mathcal{H}$, определенных в терминах локального модуля непрерывности (8), в H-пространства хотя бы в том случае, когда ω_f сам принадлежит классу локальных модулей непрерывности; обратное не гарантировано. Такая «градация» пространств преследует своей целью обеспечить точные формулировки результатов, сохраняющие характер преемственности с предшествующими достижениями, подчеркнув возможность их обобщения.

2.2.2. Классы Зигмунда–Бари–Стечкина

Теоремы о действии, доказываемые далее, формулируются в терминах класса Зигмунда–Бари–Стечкина, который налагает дополнительные ограничения на характеристику гёльдеровского пространства. Данные классы предлагаются на основе введенных Определением 10, а именно:

Определение 15. Функция $\omega \in W(T_l)$ принадлежит *классу Зигмунда–Бари–Стечкина*

$$\Phi_{\beta}^{\delta} = \Phi_{\beta}^{\delta}\left(\Omega \times [0,l]\right), \ \ 0 \le \delta < \beta, \ \ x \in \Omega,$$

если оба следующих условия выполнены:

$$\int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\delta} \frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \le c\,\omega(x,h), \ \ \int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{\beta} \frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \le c\,\omega(x,h),$$

где $0 < h \le l/2$, и постоянная $c > 0$ не зависит от h, ни от x.

Отметим, что замечания, сопровождавшие Определение 6 класса Бари–Стечкина, имеют место и в данном случае.

§ 2.3. Аппарат построения оценок типа Зигмунда

2.3.1. Числовые неравенства

Условимся использовать верхние индексы, чтобы обозначать константы в контексте тех или иных неравенств; переменные, определяющие их значения, будем помещать в скобки. Некоторые переменные, такие как Ω, ν или M, могут рассматриваться как параметры, определяющие постановку задачи, так что они выносятся в дальнейшем в нижние индексы, поскольку, как функции оставшихся переменных, встречающиеся константы будут очевидно ограничены.

Пусть d_1 и d_2 — неотрицательные вещественные числа, тогда

$$\left|\, d_1^{\lambda} - d_2^{\lambda} \,\right| \le \frac{|\,\lambda\,|}{\operatorname{Re}\lambda}\, |\, d_1 - d_2 \,|^{\operatorname{Re}\lambda}, \;\; 0 < \operatorname{Re}\lambda \le 1. \tag{N:1}$$

Для вещественных значений λ этот результат известен, например, из [21, p. 27], однако (N:1) может быть показано и для комплексных значений, если воспользоваться следующим выражением:

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} |\,\varphi'(\tau)\,|\, \mathrm{d}\,\tau, \;\; \varphi(t) = t^{\,\lambda}, \tag{12}$$

считая, например, $d_2 > d_1$, которые полагаются пределами интегрирования.

Имея в виду то же предположение, легко получить следующее неравенство:

$$\left|\, d_1^{\lambda} - d_2^{\lambda} \,\right| \le |\,\lambda\,|\; d_j^{-1+\operatorname{Re}\lambda}\; |\, d_1 - d_2 \,|, \;\; j = \begin{cases} 1, & 0 < \operatorname{Re}\lambda \le 1, \\ 2, & \operatorname{Re}\lambda > 1. \end{cases} \tag{N:2}$$

Для вещественных λ неравенство (N:2) является перефразированным классическим результатом из [71, p. 39]. В работе [78] данные неравенства были показаны для комплексных значений λ с использованием теоремы о среднем значении в форме Лагранжа. Альтернативно, можно прийти к тому же результату, продолжив (12) как

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le |\,t_1 - t_2\,| \int\limits_{0}^{1} |\,\varphi'\left((t_2 - t_1)\,\tau + t_1\right)|\, \mathrm{d}\,\tau \tag{12}$$

в силу хорошо известной формулы замены переменной под интегралом [70, p. 248].

Наконец, будем использовать следующий результат:

$$\left|\,\frac{1}{d_1^{\lambda}}-\frac{1}{d_2^{\lambda}}\,\right| \le c^{\,(\mathrm{N}:3)}(\lambda)\,\frac{|\,d_1-d_2\,|\;(d_1+d_2)^{\,-1+\operatorname{Re}\lambda}}{(d_1\,d_2)^{\operatorname{Re}\lambda}},\quad \operatorname{Re}\lambda>0. \tag{N:3}$$

Для вещественных $\lambda>0$ неравенство (N:3) известно из работ С. Л. Соболева [48, с. 251]. Его доказательство для комплексных λ опирается на те же рассуждения: положим $t=\dfrac{d_1-d_2}{d_1+d_2}$, тогда доказательство (N:3) сводится к доказательству неравенства

$$\left|\,\frac{(1+t)^{\,\lambda}-(1-t)^{\,\lambda}}{2^{\,\lambda}\,t}\,\right| \le c^{\,(\mathrm{N}:3)}(\lambda),\quad -1\le t\le 1,\ \ \operatorname{Re}\lambda\ge 0. \tag{13}$$

Использование здесь (12) в предположении

$$t_1=1\pm t,\ \ t_2=1\mp t,\ \ t\in[-1,1],$$

позволяет получить (13) непосредственно, где константа выражается следующим образом:

$$c^{\,(\mathrm{N}:3)}(\lambda)=\begin{cases}|\,\lambda\,|/\operatorname{Re}\lambda, & \operatorname{Re}\gamma\in(0,1]\cup[2,\infty),\\[2mm] 2^{\,1-\operatorname{Re}\lambda}\;|\,\lambda\,|, & \operatorname{Re}\gamma\in[1,2].\end{cases}$$

2.3.2. Основные леммы

Пусть вновь имеет место обозначение (9). Напомним

Определение 16. Будем говорить, что неотрицательная функция $L(x,t)$, определенная на T_l, *почти возрастает по* t *равномерно по* x, если найдется константа $c_L \geq 1$ такая, что выполнено неравенство

$$L(x,t) \leq c_L\, L(x,\tau) \quad \text{для всех} \quad 0 < t < \tau \leq l. \tag{14}$$

Для оценки возникающих далее интегральных конструкций используются следующие леммы:

Лемма 2. *Пусть $L(x,t)$ – неотрицательная функция на T_l, почти возрастающая по t равномерно по x и удовлетворяющая неравенству*

$$L(x, 2\,t) \leq C\, L(x,t), \;\; 0 < C < \infty.$$

Для всякого неотрицательного числа λ имеет место следующая оценка:

$$\int\limits_{B(x,h)} \frac{L\,(x, d(x,\sigma))}{d^{\lambda}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq c_0 \int\limits_0^h \frac{t^{\nu-1} L(x,t)}{t^{\lambda}}\,\mathrm{d}\,t, \;\; 0 < c_0 < \infty,$$

где $x \in \Omega$, $0 < h < l$, постоянные C и c_0 не зависят от x.

Лемма 3. *Пусть выполнены предпосылки Леммы 2. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega \backslash B(x,h)} \frac{L\,(x, d(x,\sigma))}{d^{\lambda}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq c_0 \int\limits_h^l \frac{t^{\nu-1} L(x,t)}{t^{\lambda}}\,\mathrm{d}\,t, \;\; 0 < c_0 < \infty,$$

где $0 < h < l\,/\,k$, $k > 1$, постоянная c_0 не зависит от $x \in \Omega$.

Леммы 2 и 3 доказаны в работе [78] в более общем случае, рассматривающем в качестве λ неотрицательную, ограниченную на Ω функцию. Роль этих результатов аналогична роли известных следствий из формул типа Каталана в интегральном исчислении на многомерной сфере евклидова пространства.

Интересно, что константа c_0 в обеих леммах допускает точное выражение, связанное с постулируемыми свойствами пространства X. Так, рассматривая в качестве функции L в выражениях выше локальный модуль непрерывности в смысле Определения 9 и имея в виду его свойство (M.3), запишем:

$$c_0 = K\, c_L^2 \min_{t>1} \frac{t^{\lambda}(t+1)}{\varphi(t)}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1-t^{\lambda-\nu}}{\nu-\lambda}, & \lambda \neq \nu, \\ \ln t, & \lambda = \nu, \end{cases}$$

где константы K и c_L атрибутированы условиям (B) и (14) соответственно.

Следующие соглашения и неравенства используются для доказательства оценок типа Зигмунда во второй и третьей главах.

§ 3. Обзор основных результатов исследования

Первая глава диссертации посвящена развитию классического аппарата риссова дробного интегродифференцирования на единичной сфере. С целью точнее передать контекст, результаты для «сферических» и «пространственных» потенциалов будем приводить совместно, поскольку вторые получаются из первых путем преобразований вследствие стереографической проекции.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. *Ожидаемый вид оператора, обратного потенциалу* $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, *представляет собой композицию гиперсингулярного интеграла* D^{α} *и оператора сферической свертки* A, *а именно:*

$$\left(I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1} = \left[c(n,\alpha)\,\mathrm{I} + D^{\alpha}\right] A,$$

где используется следующая нормировочная постоянная:

$$c(n,\alpha) = 2^{(n-1-\alpha)/2} / a\,(n,\alpha)\,,$$

$$a\,(n,\alpha) = -2^{\frac{\alpha+n-1}{2}} \pi^{\frac{n-3}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\,(\alpha-n+1)\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-n+3}{2}\right),$$

а мультипликатор Фурье–Лапласа оператора A имеет следующий вид:

$$\mathcal{M}\langle A\rangle = -2^{\frac{n+\alpha}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \binom{m+n-3}{m} \frac{(n-1)_m}{m\,(n/2)_m} \left(m + \frac{n-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times$$

$$\times\, \mathrm{B}^{-1}\left(\frac{n}{2}, m\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n-\alpha+2}{2}\right) \left\{1 + \ln\frac{2}{r} \cdot \left[\psi\left(\frac{\alpha-n+2}{2}\right) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \psi\left(\frac{\alpha-n+2}{2} - m\right) - \psi\left(\frac{\alpha+n}{2} + m\right)\right]\right\}.$$

В приведенных выражениях используются следующие обозначения:

- $\Gamma(z)$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, — гамма-функция Эйлера,
- $\mathrm{B}(z_1, z_2) = \Gamma(z_1)\,\Gamma(z_2)/\Gamma(z_1+z_2)$, $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$,
- $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент, $(x)_k$ — символ Похгаммера, где n — натуральное, k — неотрицательное целое.

Теорема 5. *Пусть $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$. Если $\omega \in \Phi^0_{1-\mathrm{Re}\,\alpha}$, то оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ограничен из $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ в $H^{\omega_{\alpha,\nu}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, где*

$$\omega_{\alpha,\nu}(t) = t^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(t)\,\ln^{\nu}\frac{r}{t}, \quad r > 2. \tag{15}$$

При $\nu = 1$ имеет место изоморфизм: $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right) = H^{\omega_{\alpha,1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$.

Теорема 6. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, *вес* $w_\Pi(x)$ *определен выражением*

$$w_\Pi(x) := \sqrt{1 + |\, x\,|^2}, \;\; x \in \mathbb{R}^{n-1},$$

а характеристика $\theta(x, \sigma)$ *оператора* $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}$ *имеет вид*

$$\theta(x, \sigma) = \frac{r}{2}\, w_\Pi(x)\, w_\Pi(\sigma), \;\; x, \sigma \in \mathbb{R}^{n-1}, \;\; r > 2.$$

При $\omega \in \Phi^0_{1-\operatorname{Re}\alpha}$ *справедливо вложение*

$$I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}\left(H^{\,\omega}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\Pi^{-\kappa(n,\alpha)}\right)\right) \subseteq H^{\,\omega_{\alpha,\nu}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\Pi^{\kappa(n,\alpha)}\right),$$

$$\kappa(n, \alpha) = n - 1 + \alpha,$$

где характеристика $\omega_{\alpha,\nu}(\cdot)$ *имеет вид* (15).

Теорема 7. *Пусть весовая функция имеет вид*

$$w_{\{a_j\}}(x) = \prod_{j=1}^{s} |\, x - a_k\,|^{r_j}, \;\; x, a_j \in \mathbb{S}^{n-1}, \;\; j = \overline{1, s}, \;\; s \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ *ограничен, а для* $\nu \in \{0, 1\}$ *— является изоморфизмом при отображении из* $H^{\omega}_{w_{\{a_j\}}}(\mathbb{S}^{n-1}, w_{\{a_j\}})$ *в* $H^{\omega_{\alpha,\nu}}_{w_{\{a_j\}}}(\mathbb{S}^{n-1}, w_{\{a_j\}})$, *если:*

- *при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < r_j < n$, $j = \overline{1, s}$, *характеристика* $\omega \in \Phi^0_{\min\{1,\, r_j\}-\operatorname{Re}\alpha}$;
- *при* $n \le \mu_j < n - \operatorname{Re}\alpha + 1$, $j = \overline{1, s}$, *справедливо, что* $\omega \in \Phi^{\max\{r_j\}-n+1}_{1-\operatorname{Re}\alpha}$.

Теорема 8. *Пусть* $\boldsymbol{r} = (r_1, ..., r_s)$, $s \in \mathbb{N}$, *и* $r_j > 0$, $j = \overline{1, s}$. *В условиях Теоремы 7, имеет место следующее вложение функциональных пространств:*

$$I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}\left[H^{\omega}_{\{s_j\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_{-\kappa(n,\alpha)}\right)\right] \subseteq H^{\omega_{\alpha,\nu}}_{\{s_j\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_{\kappa(n,\alpha)}\right),$$

где обозначено:

$$w_\varepsilon(x) := 2^{\|\boldsymbol{r}\|}\, [w_\Pi(x)]^{\varepsilon - \|\boldsymbol{r}\|/2} \prod_{j=1}^{s} \frac{|\, x - s_j \,|^{\,r_j}}{w_\Pi^{r_j}(s_j)}, \quad \|\boldsymbol{r}\| = \sum_{j=1}^{s} r_j.$$

Для весовых функций, «привязанных» к нулю и бесконечности, имеет место следующий результат:

Следствие 9. *Пусть обозначено:*

$$w_\varepsilon(\boldsymbol{r}, x) := 2^{\,r_1 + r_2}\, |\, x \,|^{\,r_2}\, [w_\Pi(x)]^{\,2\varepsilon - (r_1 + r_2)/2}, \quad \boldsymbol{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение Теоремы 8 имеет место также и для следующих функциональных пространств:

$$H^{\omega_\alpha}_{\{0\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\varepsilon\right), \quad \boldsymbol{r} = (r_1, 0); \;\; H^{\omega_\alpha}_{\{\infty\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\varepsilon\right), \quad \boldsymbol{r} = (0, r_2);$$

$$H^{\omega_\alpha}_{\{0,\infty\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\varepsilon\right), \quad \boldsymbol{r} = (r_1, r_2).$$

Наконец, в первой главе доказан следующий результат, дополняющий классическую теорему Соболева:

Теорема 10. *Пусть $\nu \geq 0$ и выполнено условие*

$$\alpha > \frac{n-1}{p}, \;\; 1 \leq p \leq \infty.$$

Оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ограничен из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ в $H^{\,\omega_{\alpha,\nu}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, где

$$\omega_{\alpha,\nu}(t) = t^{\,\alpha - (n-1)/p}\, \ln^{\nu} \frac{m}{t}, \;\; m \geq r > 2. \tag{17}$$

Для пространственного оператора типа потенциала имеет место

Теорема 11. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, тогда оператор* $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}$, *определенный выше, ограничен из* $L^{p}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1},w_p\right)$ *в* $H^{\omega_{\alpha,\nu}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1},w_{\Pi}^{(n-1+\alpha)/2}\right)$, *где характеристика* $\omega_{\alpha,\nu}$ *выражена* (17), *и*

$$w_p(x) := 2^{p\,(n-2)}\left[w_{\Pi}(x)\right]^{\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\varepsilon = \frac{(n-1)\,(2\,p-1)-\alpha}{2} - p, \quad 1 < p < \infty.$$

Вторая глава диссертации посвящена исследованию локальной обобщенной гёльдеровости потенциала Рисса I^{α}, введенного Определением 7. Совместно с ним рассматривается следующий интегральный оператор $\mathcal{I}^{\alpha}$, связанный с I^{α} соотношением

$$w(x)\,I^{\alpha}f\,(x) = I^{\alpha}f_w\,(x) + \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\,f_w\,(x)\,, \quad f_w(x) = w(x)\,f(x).$$

Здесь $w(x)$ — произвольный вес, однако в дальнейшем в роли весовой функции рассматривается степенной вес (10).

Теорема 12. *Пусть*

$$\begin{gathered} x, y \in \Omega: \quad d(x,y) \le h \le l/k, \\ 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)\,, \quad k > 1. \end{gathered}$$

Имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\,f_w\,(x) - \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\,f_w\,(y)\,| \le c\,h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,x,y\}} \int\limits_{h}^{l} \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t,$$

$$0 < c < \infty, \quad \gamma_0 = \min(1, \operatorname{Re}\gamma).$$

На основании этого результата доказывается следующая теорема о действии:

Теорема 13. *Пусть выполнено:*

$$0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \quad \gamma_0 = \min(1, \operatorname{Re}\gamma).$$

Если характеристика $\omega(t)$ такова, что

$$\omega \in \Phi_{\gamma_0 - \operatorname{Re}\alpha}\left(\Omega \times T_{\operatorname{diam}(\Omega)}\right),$$

$$\forall h \in T_{\operatorname{diam}(\Omega)} : \quad \sup_{x\in\Omega} \frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le c_\omega, \;\; 0 < c_\omega < \infty,$$

и выполнено условие непрерывности типа Дини:

$$\begin{gathered} c_\omega^{(1)}\,\omega\left(y, d(x,y)\right) \le \omega\left(x, d(x,y)\right) \le c_\omega^{(2)}\,\omega\left(y, d(x,y)\right), \\ x, y \in \Omega, \;\; 0 < c_\omega^{(1)}, c_\omega^{(2)} < \infty. \end{gathered} \tag{18}$$

то следующий интегральный оператор ограничен:

$$\mathcal{I}_\Omega^\alpha : \mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) \to H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a),$$

где пространство образов имеет следующую характеристику:

$$\omega_\alpha(x,h) := h^{\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(x,h), \;\; x \in \Omega, \;\; h \in T_{\operatorname{diam}(\Omega)}.$$

Теорема 14. *В условиях предыдущей теоремы потенциал Рисса*

$$I^\alpha : \mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) \to H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$$

является ограниченным оператором.

Третья глава посвящена исследованию гиперсингулярного интеграла D^{α} на метрическом пространстве с мерой. Рассматривается оператор $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$, связанный с D^{α} следующим выражением:

$$w_a(x)\, D^{\alpha} f(x) = D^{\alpha} f_w(x) + \mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(x).$$

Для него доказаны

Теорема 15. *Пусть* $0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$, *задана весовая функция вида* (10)*:*

$$w(x) = d^{\gamma}(x,a), \ \ a, x \in \Omega, \ \ 0 < \operatorname{Re}\gamma \le 1,$$

а под $M(f,x,h)$ *подразумевается произвольный локальный модуль непрерывности, например:*

- *модуль субметрии* $\omega_{\Omega}(f,x,h)$, *если он полуаддитивен по* h*;*
- *минимальная мажоранта модуля* ω_{Ω} *из класса локальных модулей непрерывности, если* $\omega_{\Omega}(f,x,h)$ *не обладает свойством полуаддитивности по* h *для данной функции* f *на* Ω*;*
- *определенный выше локальный модуль непрерывности* (8).

Имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(y)\,| \le c \left\{ \sum_{z \in \{a,x,y\}} \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \right.$$
$$\left. + \, h^{\operatorname{Re}\gamma} \sum_{z \in \{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M(f_w, z, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\gamma+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}, \quad 0 < c < \infty,$$

где $y \in B[x,h]$, $0 < h < l$.

Теорема 16. *Пусть* $0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$, *весовая функция имеет вид:*

$$w(x) = d^{\gamma}(x,a), \quad a, x \in \Omega, \quad \operatorname{Re}\gamma > 1.$$

и $M(f,x,h)$ *имеет тот же смысл, что и для предыдущей теоремы. Для всяких*

$$x, y \in \Omega: \quad d(x,y) \le h, \ \ 0 < h \le l,$$

имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega} f_w(y)\,| \le c \left\{ \sum_{z \in \{a,x,y\}} \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \right.$$
$$\left. + h \sum_{z \in \{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}, \quad 0 < c < \infty.$$

Наконец, с использованием этих оценок типа Зигмунда, доказана

Теорема 17. *Пусть характеристика* $\omega(x,h)$ *такова, что* $\omega \in \Phi^{\operatorname{Re}\alpha}_{1+\operatorname{Re}\alpha}$ *и выполнены условие* (18) *а также, для всякого* $h > 0$, *условие*

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le c_\omega, \quad 0 < c_\omega < \infty.$$

Тогда оператор $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega}$ *ограничен из* $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}_0(\Omega, w_a)$ *в* $H^{\omega_\alpha(\cdot)}_0(\Omega, w_a)$, *а гиперсингулярный интеграл* $D^{\,\alpha}$ *ограничен из* $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}_0\,(\Omega, w_a)$ *в* $H^{\omega\,-\alpha(\cdot)}_0\,(\Omega, w_a)$.

Глава 1. Развитие риссова дробного интегродифференцирования в обобщенных пространствах Гёльдера

1.1 Основные сведения спектральной теории операторов сферической свертки

Как известно, между метрикой (1) *многомерного евклидова пространства* пространства $\mathbb{R}^n$ и скалярным произведением,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \tag{1.1}$$

существует следующее соотношение:

$$x \cdot y = \left(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2 \right) /2,$$

или, в силу тождества параллелограмма,

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\, x \cdot y}. \tag{1.2}$$

Отметим, что для точек x, y *единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ (см. (2)) выражение (1.2) может быть, очевидно, переписано в следующем виде:

$$|x-y| = \sqrt{2}\,\sqrt{1-x\cdot y}, \quad x, y \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{1.3}$$

Далее рассматриваются интегральные операторы из класса *операторов сферической свертки*, общий вид которых представим выражением (1.4):

$$K\,f\,(x) = \int\limits_{\mathbb{S}^n} \mathrm{k}\,(x\cdot\sigma)\;f\,(\sigma)\;\mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1}, \tag{1.4}$$

где функция $\mathrm{k}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *ядром* оператора K; отметим, что, таким образом, ядро оператора сферической свертки предполагается функцией от скалярного произведения (1.1). Формула Функа—Гекке утверждает, что собственными функциями всякого оператора вида (1.4) являются *сферические гармоники* $Y_m\,(x)$ порядка m [45, с. 42]:

$$\begin{gathered} K\,Y_m = k_m\,Y_m, \\ Y_m\,(x) := \mathrm{P}_m\,(x/|x|\;) = |x|^{-m}\,\mathrm{P}_m\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где через $\mathrm{P}_m\,(x)$ обозначен многочлен степени m, удовлетворяющий уравнению Лапласа: $\Delta\mathrm{P}_m = 0$, то есть *гармонический многочлен.*

Собственные значения k_m в формуле (1.5) образуют так называемый *мультипликатор Фурье–Лапласа* $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ оператора K и могут быть вычислены по следующей формуле [44], [45, с. 41]:

$$k_m = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left((n-1)\,/2\right)} \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{k}\,(t)\;P_m\,(t)\;\left(1-t^2\right)^{(n-3)/2}\,\mathrm{d}\,t. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $\Gamma(z)$ — *гамма-функция Эйлера*:

$$\Gamma\,(z) = \int\limits_0^\infty t^{\,z-1}\, e^{\,-t}\, \mathrm{d}\,t, \ \ \operatorname{Re} z > 0,$$

$P_m\,(t)$ — *обобщенные многочлены Лежандра*:

$$P_m\,(t) = \begin{cases} T_m\,(t)\,, & n = 2; \\ \dbinom{m+n-3}{m}^{-1} C_m^{\,(n-2)/2}\,(t)\,, & n \geq 3, \end{cases}$$

где использованы $T_m\,(t)$ – *многочлены Чебышёва первого рода*,

$$T_m\,(t) = \cos\left(m \cdot \arccos\, t\right), \ \ t \in [-1, 1], \tag{1.7}$$

биномиальный коэффициент, который имеет следующее выражение:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}, \ \ 0 \leq k \leq n, \tag{1.8}$$

и $C_m^{\,\lambda}\,(t)$, $t \in [-1, 1]$, – *многочлены Гегенбауэра*:

$$C_m^{\,\lambda}\,(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_{\,m,k}\, t^{\,m-2k}, \ \ a_{\,m,k} = \frac{(-1)^{\,k}\ (\lambda)_{\,m-k}\ 2^{\,m-2k}}{k!\ (m-2k)\,!}. \tag{1.9}$$

Напомним, что многочлены (1.7) и (1.9) могут быть выражены через *многочлены Якоби* $P_m^{(\rho,\,\sigma)}\,(t)$, которые имеют вид

$$P_m^{(\rho,\,\sigma)}\,(t) = \frac{1}{2^m}\,\sum_{k=0}^{m} \binom{m+\rho}{k} \binom{m+\sigma}{m-k}\ (t+1)^{\,k}\ (t-k)^{\,m-k}, \\ t \in [-1, 1], \tag{1.10}$$

где использован *символ Похгаммера*:

$$(\lambda)_k = \lambda\,(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+k-1)\,,\ \ (\lambda)_0 = 1. \tag{1.11}$$

Именно, справедливы следующие выражения:

$$T_m\,(t) = \frac{m!}{(1/2\,)_m}\,P_m^{(-1/2,\,-1/2)}\,(t)\,, \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered} C_m^{\lambda}\,(t) = \frac{(2\,\lambda)_m}{(\lambda+1/2)_m}\,P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\,\lambda-\frac{1}{2}\right)}\,(t) = \\ = \frac{(2\,\lambda)_m}{m!}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t^2-1}{4}\right)^{\frac{1-2\,\lambda}{4}}\,P_{m+\lambda-\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\,\frac{1}{2}-\lambda\right)}\,(t)\,. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Выражения (1.12) и (1.13) представляют интерес в связи с вычислением мультипликатора Фурье–Лапласа, поскольку позволяют воспользоваться известными сведениями о многочленах (1.10), включая формулы интегрирования.

Итак, пусть $Y_{m\mu}\,(x)$, $x\in\mathbb{S}^n$, есть ортонормированная система сферических гармоник, $\mu = 1, 2, \ldots, d\,(m)$, где

$$d\,(m) = \frac{(n+2m-2)\ (n+m-3)\,!}{m!\ (n-2)\,!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

и прообраз f представлен своим разложением по $Y_{m\mu}$:

$$f\,(x) = \sum_{m,\mu} f_{m\mu} Y_{m\mu}\,(x), \quad f_{m\mu} = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f\,(\sigma)\ Y_{m\mu}\,(\sigma)\,d\sigma.$$

Тогда образ $K\,f$ имеет следующий вид в разложении по сферическим гармоникам [44]:

$$K\,f\,(x) = \sum_{m,\mu} k_m f_{m\mu} Y_{m\mu}\,(x).$$

Таким образом, всякий оператор сферической свертки (1.4) однзначно определен своим мультипликатором Фурье–Лапласа $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$. Условимся далее записывать этот факт следующим образом:

$$\mathcal{M}\langle K\rangle = k_m, \quad m = 0, 1, 2, ...,$$

где k_m — общий член последовательности собственных значений, образующих мультипликатор Фурье–Лапласа. Отметим также, что ядро оператора сферической свертки может быть восстановлено по заданному мультипликатору $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ с использованием следующей формулы [44]:

$$\begin{aligned} &\mathrm{k}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} k_m\, T_m(t), && n = 2, \\ &\mathrm{k}(t) = \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Big/ \left(4\,\pi^{\,n/2}\right) \times \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} (2\,m + n - 2)\; k_m\, C_m^{(n-2)/2}(t)\,, && n \geq 3. \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.2 Спектральный анализ сферических потенциалов

Содержание данного и следующего параграфов составляет исследование операторов типа потенциала Рисса со степенно-логарифимическим ядром,

$$\begin{gathered} I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) = c(n,\alpha) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|\,x-\sigma\,|^{\,n-1-\alpha}}\, \ln^{\nu} \frac{r}{|\,x-\sigma\,|}\, \mathrm{d}\,\sigma, \\ n \geq 3, \quad r,\, \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \nu \geq 0, \end{gathered} \tag{1.15}$$

введенного Определением 1.

1.2.1 Обращение сферического потенциала

Из (1.3) следует, что $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ есть оператор сферической свертки вида (1.4), и аппарат мультипликаторов Фурье–Лапласа применим. Так, имеет место

Лемма 1.1. *Пусть нормировочная постоянная в* (3) *такова:*

$$c(n,\alpha) = 2^{\,(n-1-\alpha)/2}/a\,(n,\alpha)\,,$$

$$a\,(n,\alpha) = -2^{\frac{\alpha+n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\,(\alpha-n+1)\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n+3}{2}\right).$$

Тогда имеет место следующее выражение мультипликатора:

$$\mathcal{M}\langle I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = \frac{\Gamma\,(m+(n-1-\alpha)/2)}{\Gamma\,(m+(n-1+\alpha)/2)}. \tag{1.16}$$

Лемма 1.1 доказана в работе [44].

Приведем важнейшие приложения Леммы 1.1, первым из которых рассмотрим обращение сферического потенциала в терминах гиперсингулярного интеграла, введенного Определением 3. Положим

$$c(n,\alpha) = -2^{\,\alpha}\,\pi^{\,(n-3)/2}\,\sin\left[\frac{\pi}{2}\,(1-n+\alpha)\right]\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{3-n+\alpha}{2}\right).$$

Теорема 1.2. *Оператор* $\left(I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1}$*, обратный сферическому потенциалу* $I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}$*, имеет следующую конструкцию:*

$$\left(I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1} = c(n,\alpha)\,\mathrm{I} + D^{\,\alpha},$$

где

$$c(n,\alpha) = \Gamma\left(\frac{n-1+\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1-\alpha}{2}\right), \tag{1.17}$$

I — *единичный оператор:* $\mathrm{I}\, f = f$.

Доказательство. Доказательство, основанное на анализе мультипликатора (1.16), приводилось в работе [81, с. 160]. □

1.2.2 Мультипликатор и обращение потенциала с логарифмическим ядром

Новый результат, дополняющий Лемму 1.1, имеет вид

Лемма 1.3. *Пусть обозначено:*

$$K(m,n) = \begin{cases} m!\,/(1/2)_m, & n = 2; \\ \dbinom{m}{m+n-3}^{-1} \dfrac{(n-2)_m}{((n-1)/2)_m}, & n \geq 3, \end{cases}$$

где использованы символ Похгаммера (1.11) *и биномиальный коэффициент* (1.8)*. Имеет место следующее выражение для мультипликатора сферического потенциала* $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$*:*

$$\mathcal{M}\langle I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = -2^{\frac{n-1+\alpha}{2}}\, \pi^{\frac{n-1}{2}}\, \frac{1}{m!}\, \frac{K(m,n)}{\Gamma\left[(n-1)/2\right]} \left(\frac{n+1-\alpha}{2}\right)_m \cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{n-1}{2} + m\right) \cdot \left\{1 + \ln\frac{2}{r}\, \left[\psi\left(\frac{3-n+\alpha}{2}\right) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\ \psi\left(\frac{3-n+\alpha}{2} - m\right) - \psi\left(\frac{n-1+\alpha}{2} + m\right)\right]\right\},$$

где использованы следующие специальные функции:

$$\mathrm{B}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\,\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}, \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.6): обозначив $t = x \cdot \sigma$, запишем мультипликатор Фурье–Лапласа следующим образом:

$$\mathcal{M}\langle I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = \frac{2\,\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,(1+t)^{\frac{n-3}{2}}\,\ln\frac{1-t}{r}\,P_m^{\left(\frac{n-3}{2},\,\frac{n-3}{2}\right)}(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

где отражено также представление (1.13) многочленов Гегенбауэра через многочлены Якоби. В результате другой простой замены, а именно $\tau = -t$, и представления вида

$$\ln\frac{1+\tau}{r} = \ln\left(\frac{1+\tau}{2}\cdot\frac{2}{r}\right) = \ln\frac{1+\tau}{2} + \ln\frac{2}{r},$$

имеем следующее представление последнего интеграла:

$$\mathcal{M}\langle I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = (-1)^m \left\{\int\limits_{-1}^{1} (1+\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}\,(1-\tau)^{\frac{n-3}{2}}\,P_m^{\left(\frac{n-3}{2},\,\frac{n-3}{2}\right)}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \right.$$

$$\left. + \ln\frac{2}{r}\int\limits_{-1}^{1} (1+\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}\,(1-\tau)^{\frac{n-3}{2}}\,\ln\frac{1+\tau}{2}\,P_m^{\left(\frac{n-3}{2},\,\frac{n-3}{2}\right)}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right\}.$$

Чтобы вычислить интегралы, составляющие сумму в правой части, могут быть использованы формулы 11 (с. 519) и 1 (с. 530) из [38] соответственно:

$$\int\limits_{-a}^{a} (t+a)^{\gamma-1}\,(a-t)^{\rho}\,P_m^{(\rho,\,\sigma)}\left(\frac{t}{a}\right)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!}\,(\sigma-\gamma+1)_m\,(2a)^{\gamma+\rho}\,\mathrm{B}\left(\gamma,\rho+m+1\right),$$

$$\int\limits_{-a}^{a} (t+a)^{\gamma-1}\,(a-t)^{\rho}\,\ln\frac{t+a}{2\,a}\,P_m^{(\rho,\sigma)}\left(\frac{t}{a}\right)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!}\,(\sigma-\gamma+1)_m\,(2\,a)^{\gamma+\rho}\times$$

$$\times\left[\psi\,(\gamma-\sigma)+\psi\,(\gamma)-\psi\,(\gamma-\sigma-m)-\psi\,(\gamma+\rho+m+1)\right],$$

причем для обеих предполагается, что $a, \mathrm{Re}\,\gamma > 0$ и $\mathrm{Re}\,\rho > -1$. Осуществив расчет и выполнив элементарные алгебраические преобразования результата, приходим к утверждению доказываемой леммы. $\square$

Лемму 1.3 применим для описания оператора, обратного $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$:

Теорема 1.4. *Оператор, обратный потенциалу $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, представляет собой композицию гиперсингулярного интеграла D^{α}, введенного Определением 3, и оператора, обратного некоторому оператору сферической свертки A, т.е.*

$$\left(I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1} = \left[c(n,\alpha)\,\mathrm{I} + D^{\alpha}\right]\,A^{-1}, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1,$$

где постоянная $c(n,\alpha)$ имеет вид (1.17) *и*

$$\mathcal{M}\langle A\rangle = 2^{(n+\alpha-2)/2}\,\pi^{n/2}\,(\alpha-2\,m-n)\binom{m+n-3}{m}(n-1)_m\times$$

$$\times\,\frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left((n-\alpha+2)/2\right)}\left\{1+\ln\frac{2}{r}\,\left[H_{(\alpha-n)/2}-H_{(\alpha-2\,m-n)/2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\psi\left(\frac{2\,m+n+\alpha}{2}\right)+\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\},$$

H_z означает аналитическое продолжение гармонических чисел.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из представления

$$\mathcal{M}\langle I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle = \mathcal{M}\langle I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle \cdot \mathcal{M}\langle A\rangle, \tag{1.18}$$

которое появляется в результате применения известных выражений:

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \;\; \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$

где $a \in \mathbb{R}$, k — целое, z — комплексное. Так, имеем:

$$\left(\frac{1+n-\alpha}{2}\right)_m \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, m+\frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m+\dfrac{n+1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(m+\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(m+\dfrac{n-1+\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \mathcal{M}\langle I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle \left(m+\frac{n-1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(m+\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+n-\alpha}{2}\right)}.$$

Воспользовавшись далее тем фактом, что $m! = \Gamma(m+1)$ в случае неотрицательного целого m, имеем:

$$\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(m+\dfrac{n-1}{2}\right)}{m!\,\Gamma\left(\dfrac{1+n-\alpha}{2}\right)}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m)} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{m\,\mathrm{B}\left(\dfrac{n-1}{2}, m\right)\Gamma\left(\dfrac{1+n-\alpha}{2}\right)},$$

так что композиция $I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}} = I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\,A$ обнаруживает себя при ближайшем рассмотрении мультипликатора $\mathcal{M}\langle I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle$. Мультипликатор же обратного оператора $\left(I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1}$ имеет очевидное выражение:

$$\mathcal{M}\langle\left(I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1}\rangle = \left(\mathcal{M}\langle I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle\,\mathcal{M}\langle A\rangle\right)^{-1} = \mathcal{M}\langle\left(I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\right)^{-1}\rangle \Big/ \mathcal{M}\langle A\rangle.$$

□

1.3 Теоремы о действии

Содержание данного параграфа представлено теоремами о действии оператора (1.15) в обобщенных пространствах Гёльдера $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, введенных в общем виде Определением 4. Напомним, что последние определяются следующим условием на модуль непрерывности функции $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$:

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{S}^{n-1}:\\ |\,x-y\,|\le t}} |\,f(x)-f(y)\,| \le c\,\omega(t), \;\; t\in(0,2], \;\; 0<c<\infty. \tag{1.19}$$

Общая методика доказательства теорем о действии в $H^{\omega}(\Omega)$-пространствах заключается в построении так называемых оценок типа Зигмунда — мажорант модуля разности значений образа в двух соседних точках в виде интегральных конструкций от модуля непрерывности. Условием теоремы о действии предполагают принадлежность характеристики пространства классу Бари–Стечкина (см. Определение 6).

Рассматривая характеристику $\omega(t)$ пространства $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ как порядок непрерывности, квалифицированной в терминах условия (1.19), будем говорить о гладкости как предмете исследования в том случае, если речь идет о действии в рамках пространств обобщенной гёльдеровости. Другим вопросом, рассматриваемым здесь, является исследование ограниченности в $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ оператора (1.15) при отображении функции из $L^{p}(\mathbb{S}^{n-1})$.

1.3.1 Гладкость сферических потенциалов

Если объект исследования принадлежит классу операторов сферической свертки, альтернативой общему методу оценок типа Зигмунда в большом числе частных случаев выступает анализ мультипликаторов Фурье–Лапласа. Напомним следующее определение, впервые предложенное в работе [2]:

Определение 1.5. Обозначим через

$$\mathcal{W}_{\lambda,N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad N = 0, 1, ...,$$

класс мультипликаторов $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ по сферическим гармоникам, отвечающих следующим двум требованиям:

$$\forall m = 0, 1, ..., N : \qquad |\, k_m \,| < \infty,$$

$$k_m = \sum_{j=0}^{N} c_j\, m^{\lambda - j} + \mathcal{O}\left(m^{\lambda - N - \varepsilon}\right), \quad c_j \neq 0, \quad j = 0, ..., N, \quad \varepsilon > 0$$

Там же доказан следующий фундаментальный результат:

Теорема 1.6. *Пусть A^{α} — оператор сферической свертки вида* (1.4)*. Если выполнено следующее условие:*

$$\mathcal{M}\langle A^{\alpha} \rangle \in \mathcal{W}_{-\alpha,\, \lfloor (n+1)/2 \rfloor}, \quad \alpha > 0,$$

то имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$\omega\left(A^{\alpha} f, h\right) \leq c\, h \int\limits_{h}^{2} \frac{\omega(f,t)}{t^{2-\alpha}}\, \mathrm{d}\, t, \quad 0 < c < \infty.$$

Если последовательность $\mathcal{M}\langle A^{\alpha}\rangle$ к тому же не содержит нулевых элементов, то имеет место следующий изоморфизм функциональных пространств:

$$A^{\alpha}\left(H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right)=H^{\omega_{\alpha}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right),\ \ \omega\in\Phi^{0}_{1-\alpha+\lfloor\alpha\rfloor},\ \ \omega_{\alpha}(t)=t^{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor}\,\omega(t).$$

Напомним определение среднего функции, заданной на сфере, согласно, например, [45, с. 144]:

Определение 1.7. Пусть $n\geq 3$ и обозначено:

$$t=\sigma\cdot x,\ \ x\in\mathbb{S}^{n-1},\ \ -1<t<1.$$

Среднее функции $f(\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{S}^{n-1}$, есть следующий интеграл:

$$\mathrm{M}_f(x,t):=\frac{1}{|\,\mathbb{S}^{n-2}\,|\,\left(1-t^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}_x\left(x\,t,\sqrt{1-t^2}\right)} f\left(\sigma\right)\,\mathrm{d}\,S,\ \ x\in\mathbb{S}^{n-1},$$

где $\mathrm{d}\,S$ — элемент площади сферы $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\mathbb{S}^{n-2}_x\left(c,r\right),\quad c\in\mathbb{R}^n,\quad r>0,$$

есть $(n-2)$-мерная сфера с центром в точке c и радиуса r, полученная в сечении сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ гиперплоскостью на высоте $|\,t\,|$ от ее центра ортогонально вектору x.

Имеет место следующая лемма, доказанная в [45, с. 146]:

Лемма 1.8. *Пусть $n\geq 3$, f непрерывна на $\mathbb{S}^{n-1}$ и выполнено условие*

$$\left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\,k(t)\in L^1\left(-1,1\right).\tag{1.20}$$

Справедлива формула

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\sigma)\, k(x\cdot\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma = \left|\,\mathbb{S}^{n-2}\,\right| \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{M}_f(x,t)\, \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\, f(t)\, \mathrm{d}\, t.$$

Отметим, что Определение 1.7 и Лемма 1.8 вводятся также и в случае $n = 2$, который не рассматривается в настоящей работе.

Основной результат данного параграфа представим следующим образом:

Теорема 1.9. *Пусть* $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$. *Если* $\omega \in \Phi^0_{1-\mathrm{Re}\,\alpha}$, *то оператор* $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ *ограничен из* $H^{\,\omega}\,(\mathbb{S}^n)$ *в* $H^{\,\omega_{\alpha,\nu}}\,(\mathbb{S}^n)$, *где*

$$\omega_{\alpha,\nu}(t) = t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(t)\,\ln^{\nu}\frac{r}{t},\;\; r > 2. \tag{1.21}$$

При $n \geq 3$ *и* $\nu = 1$ *имеет место изоморфизм обобщенных пространств Гёльдера:*

$$I^{\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}(H^{\,\omega}\,(\mathbb{S}^n)) = H^{\,\omega_{\alpha,1}}\,(\mathbb{S}^n)\,.$$

Доказательство. Пусть $\nu = 0$. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ доказываемое утверждение следует из Теоремы 1.6 непосредственно. Действительно, асимптотика отношения гамма-функций имеет следующий вид [33, с. 20]:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{\,a-b}\left\{\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^{\,j}\,\frac{(b-a)_j\,B_j^{(a-b+1)}(a)}{j!}\,z^{\,-j} + \mathcal{O}\left(z^{\,-N}\right),\right\}$$

$$|\arg(z+a)\,| \leq \pi-\xi,\;\; \xi > 0,$$

где a и b — ограниченные комплексные числа, а $B_j^{(a-b+1)}(a)$ — обобщенные многочлены Бернулли, для которых известно следующее замечательное тождество [55]:

$$B_j^{\lambda}(\lambda - a) = (-1)^j \, B_j^{\lambda}(a), \ \ j \in \mathbb{N}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Имея в виду выражение (1.16), положим в приведенной формуле соответствующие значения a и b, а также заметим, что

$$z^{\,\lambda} = \mathcal{O}\left(z^{\,1+\lambda-\varepsilon}\right), \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \ 0 < \varepsilon < 1.$$

Поскольку обобщенные многочлены Бернулли не содержат нулей в рассматриваемом диапазоне, мультипликатор $\mathcal{M}\langle I^{\,\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\rangle$ отвечает всем условиям изоморфизма, сформулированным в Теореме 1.6. Для комплексных α соответствующий результат известен из работы [11].

Пусть $n \geq 3$ и $\nu = 1$. Изоморфизм пространств при отображении оператором $I^{\,\alpha,1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ следует из предыдущего. Действительно, с использованием формулы 15 из [38, с. 462], а также известных соотношений (см., например, (1.1.5) в [89, с. 2]) имеем в рассматриваемом случае:

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\,\frac{n-3}{2}} \, C_m^{(n-2)/2}(t) \, \mathrm{d}\, t =$$

$$= \frac{(-1)^{\,m} \; (n-3)_m \sqrt{\pi}}{m!} \, \frac{\Gamma\left[(n-1)/2\right]}{\Gamma(n/2)} \, \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(m+n-1)\,\Gamma(1-m)}.$$

Итак, применимость Леммы 1.8 устанавливается непосредственным вычислением; в свою очередь, справедливо следующее представление среднего функции f (см. [45, с. 145]):

$$M_f(x,t) = \frac{1}{|\,\mathbb{S}^{n-2}\,|} \int\limits_{\mathbb{B}^{\,n-2}(0,1)} \frac{f_x(z_+) + f(z_-)}{\sqrt{1 - |\,\sigma\,|^{\,2}}} \, \mathrm{d}\,\sigma,$$

где $f_x := f\,[\omega_x(\sigma)]$ и ω_x — вращение, переводящее орт $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ в вектор $x \in \mathbb{S}^{n-1}$; $z_\pm$ — следующие точки сферы $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$z_\pm := \left(t, \sigma\sqrt{1-t^2}, \pm\sqrt{1-|\,\sigma\,|^2}\,\sqrt{1-t^2}\right), \;\; \sigma \in \mathbb{B}^{n-2}(0,1),$$

$\mathbb{B}^{n-2}(0,1)$ — $(n-2)$-мерный шар единичного радиуса с центром в начале координат. Данное представление показывает, что оператор A «сохраняет» обобщенную гёльдеровость функции f, так что утверждаемый изоморфизм справедлив.

Пусть, наконец, $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Этот случай отвечает рассмотренному в работе [12], где доказательство утверждаемого результата было получено методом оценок типа Зигмунда. □

Результаты о действии оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ на функциях из весового пространства, рассматриваемого в смысле Определения 5, приведем в следующей теореме:

Теорема 1.10. *Пусть весовая функция имеет вид*

$$w_{\{a_j\}}(x) = \prod_{j=1}^{N} |\,x - a_k\,|^{\,r_j}, \;\; x, a_j \in \mathbb{S}^{n-1}, \;\; j = \overline{1, N}. \tag{1.22}$$

Оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ограничен, а при $\nu \in \{0, 1\}$ — изоморфен при отображении из $H^{\omega}_{w_{\{a_j\}}}\left(\mathbb{S}^{n-1}, w_{\{a_j\}}\right)$ в $H^{\omega_{\alpha,\nu}}_{w_{\{a_j\}}}\left(\mathbb{S}^{n-1}, w_{\{a_j\}}\right)$, если:

- *при $0 < \operatorname{Re}\alpha < r_j < n$, $j = \overline{1, N}$, характеристика $\omega \in \Phi^0_{\min\{1,\, r_j\} - \operatorname{Re}\alpha}$;*
- *при $n \le \mu_j < n - \operatorname{Re}\alpha + 1$, $j = \overline{1, N}$, справедливо, что $\omega \in \Phi^{\max\{r_j\}-n+1}_{1-\operatorname{Re}\alpha}$.*

Доказательство. Рассуждения в основе доказательства теоремы аналогичны приведенным в доказательстве Теоремы 1.9. □

1.3.2 Теорема типа Соболева для сферического потенциала со степенно-логарифмическим ядром

Рассмотрим действие сферических потенциалов на функциях из пространства $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, нормированного классическим образом:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} := \left\{\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\, f(\sigma)\,|^p \, \mathrm{d}\,\sigma\right\}^{1/p}, \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|\, f(x)\,|\}.$$

Классический результат представляет теорема Соболева, обобщающая на многомерный случай теорему Харди–Литтлвуда, а именно [86, с. 365]:

Теорема 1.11. *Пусть* $1 \leq p, q \leq \infty$. *Риссов потенциал* I^α, *определенный выражением* (4), *ограничен из* $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ *в* $L^q\left(\mathbb{R}^n\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < \alpha < n, \;\; 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \;\; \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Для оператора типа потенциала Рисса на сфере результаты о действии на функциях из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ были впервые представлены в работе [36], где они формулировались в терминах пространства $L^{p,\alpha}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ и гиперсингулярного интеграла на сфере, представленного выше Определением (3). Пространства $L^{p,\alpha}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ определены в [36] как замыкание класса бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{S}^{n-1}$ по норме

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})} = \left\|\sum_{m,\mu}\left[1 + m\,(m+n-2)^{\alpha/2} f_{m,\mu}\, Y_{m,\mu}\right]\right\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})},$$

что имеет в виду применение аппарата Фурье–Лапласа к исследованию рассматриваемых проблем. Важнейшим здесь является следующее соотношение функциональных пространств:

$$L^{p,\alpha}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) = I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right),$$

$$I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right) := \left\{ f : f = I^{\alpha,0}_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi, \quad \varphi \in L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \right\},$$

справедливое при $\alpha \geq 0$ и $1 \leq p < \infty$. Основной результат работы [36] представим в следующем виде:

Теорема 1.12. *Для того чтобы*

$$f \in L^{p,\alpha}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right), \;\; 1 \leq p < \infty, \;\; 0 < \alpha < 2,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f \in L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ *и чтобы выполнялось неравенство*

$$A_p(f) := \sup_{\varepsilon>0} \|D^{\alpha}_{\varepsilon} f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} < \infty.$$

Заметив, что пространство $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, $1 \leq p < \infty$, является полным по норме

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} + A_p(f),$$

условие Теоремы 1.12 заменяют условием существования конечного предела при $\varepsilon \to 0$ усеченных гиперсингулярных интегралов D^{α}_{ε} в терминах нормы пространства $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$.

Дополним результаты приведенных теорем условиями ограниченности потенциала $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ в пространстве обобщенной гёльдеровости при отображении функции из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$. Сперва приведем ряд вспомогательных результатов, первым из которых является классическое неравенство Гёльдера, а именно:

Лемма 1.13 (Неравенство Гёльдера)**.** *Пусть*

$$1 \le p \le \infty, \;\; p' := p/(p-1).$$

причем $p' = \infty$*, если* $p = 1$*, и* $p' = 1$*, если* $p = \infty$*. Справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\Omega} |\, f(\sigma)\, g(\sigma)\,| \;\, \mathrm{d}\,\sigma \le \|f\|_{\,L^{p}(\Omega)} \; \|g\|_{\,L^{p'}(\Omega)}\,, \;\; \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

где $f \in L^p\,(\Omega)$*,* $g \in L^{p'}\,(\Omega)$*.*

Лемма 1.14. *Пусть* $n \ge 3$*,* $0 \le a < b \le 2$ *и обозначено:*

$$J(x) := \int\limits_{a<|\,x-\sigma\,|<b} g\,(|\,x-\sigma\,|) \;\, \mathrm{d}\,\sigma, \;\; x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$J(x) \le c_n \int\limits_a^b g(u) u^{n-2}\, \mathrm{d}\,u, \;\; 0 < c_n < \infty,$$

$$J(x) = J(y), \;\; x, y \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Доказательство. Применив формулу Каталана, имеем:

$$J(x) = 2^{\,3-n}\, c_n \int\limits_a^b g(u)\, u^{\,n-2}\, (4-u^{\,2})^{\,(n-3)/2}\; \mathrm{d}\,u.$$

Отсюда утверждение леммы следует непосредственно.

$\square$

Лемма 1.15. *Пусть $h, \beta > 0$ и $r, \nu \in \mathbb{R}$. Имеют место следующие оценки:*

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_0^h u^{\beta-1} \ln^{\nu} \frac{r}{u} \,\mathrm{d}\, u \le c\, h^{\beta} \ln^{\nu} \frac{r}{u}, \\ \int\limits_h^2 u^{-\beta-1} \ln^{\nu} \frac{r}{u} \,\mathrm{d}\, u \le c\, h^{-\beta} \ln^{\nu} \frac{r}{u}, \end{aligned}\right. \qquad 0 < c < \infty.$$

Лемма 1.16. *Пусть $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $|\,x - \sigma\,| \ge 2\,|\,x - y\,|$. При $\gamma \ge 0$ и $\nu \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:*

$$\left|\,|\,x-\sigma\,|^{-\gamma} \ln^{\nu} \frac{r}{|\,x-\sigma\,|} - |\,y-\sigma\,|^{-\gamma} \ln^{\nu} \frac{r}{|\,y-\sigma\,|}\right| \le$$

$$\le \frac{c\,|\,x-y\,|}{|\,x-\sigma\,|^{\gamma+1}} \ln^{\nu} \frac{r_0}{|\,x-\sigma\,|}, \quad r_0 > 2, \quad 0 < c < \infty.$$

Основной результат настоящего отдела имеет следующий вид:

Теорема 1.17. *Пусть $n \ge 3$ и $\nu \in \mathbb{R}$ и выполнено условие*

$$\alpha > \frac{n-1}{p}, \;\; 1 \le p \le \infty. \tag{1.23}$$

Тогда найдется число $m \ge r > 2$ такое, что оператор $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, выраженный (1.15)*, ограничен из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ в $H^{\omega_{\alpha,\nu}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, где*

$$\omega_{\alpha,\nu}(h) = h^{\alpha-(n-1)/p} \ln^{\nu} \frac{m}{h}.$$

Доказательство. Зафиксируем точки $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ таким образом, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$0 < |\,x-y\,| \le \frac{h}{2} < 1. \tag{1.24}$$

$$\left|\, I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}} f\,(x) - I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}} f\,(y) \,\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{<}(x,h)} k_{\alpha,\nu}(x,\sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma + \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{\geq}(x,h)} k_{\alpha,\nu}(x,\sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{<}(x,h)} k_{\alpha,\nu}(y,\sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma + \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{\geq}(x,h)} k_{\alpha,\nu}(y,\sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma \right| \leq$$

$$\leq |\, I_1\,| + |\, I_2\,| + |\, I_3\,|\,,$$

где введены интегралы

$$I_1 \coloneqq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{<}(x,h)} \frac{f(\sigma)}{|\, x-\sigma\,|^{\,n-1-\alpha}}\, \ln^{\nu} \frac{r}{|\, x-\sigma\,|}\, \mathrm{d}\,\sigma,$$

$$I_2 \coloneqq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{<}(x,h)} \frac{f(\sigma)}{|\, y-\sigma\,|^{\,n-1-\alpha}}\, \ln^{\nu} \frac{r}{|\, y-\sigma\,|}\, \mathrm{d}\,\sigma,$$

$$I_3 \coloneqq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{\geq}(x,h)} \frac{f(\sigma)}{|\, x-\sigma\,|^{\,n-1-\alpha}}\, \ln^{\nu} \frac{r}{|\, x-\sigma\,|}\, \mathrm{d}\,\sigma -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{\geq}(x,h)} \frac{f(\sigma)}{|\, y-\sigma\,|^{\,n-1-\alpha}}\, \ln^{\nu} \frac{r}{|\, y-\sigma\,|}\, \mathrm{d}\,\sigma,$$

на следующих подмножествах:

$$\mathbb{S}^{n-1}_{<}(x,h) \coloneqq \left\{\, \sigma \in S^{\,n-1} :\, 0 < |\, x-\sigma\,| < h \,\right\},$$
$$\mathbb{S}^{n-1}_{\geq}(x,h) \coloneqq \left\{\, \sigma \in S^{\,n-1} :\, h \leq |\, x-\sigma\,| < 2 \,\right\}.$$

Оценка I_1 Воспользуемся неравенством Гёльдера из Леммы 1.13, а также первым утверждением Леммы 1.14, чтобы получить следующую цепочку неравенств:

$$|\,I_1\,| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \left\{ \int |\,x-\sigma\,| < h\,|\,x-\sigma\,|^{p'(\alpha-n+1)} \ln^{\nu\,p'} \frac{r}{x-\sigma}\,\mathrm{d}\,\sigma \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \left\{ \int\limits_0^h u^{p'(\alpha-n+1)+n-2} \ln^{\nu\,p'} \frac{r}{u}\,\mathrm{d}\,u \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

С учетом первого неравенства Леммы 1.15 запишем следующую мажоранту в случае интеграла I_1:

$$|\,I_1\,| \leq c\,h^{\alpha-\frac{n-1}{p}} \ln^{\nu} \frac{r}{h}, \quad 0 < c < \infty.$$

Оценка I_2 Заметим следующий факт:

$$\{\,\sigma:\,|\,x-\sigma\,| < h\,\} \subset \{\,\sigma:\,|\,y-\sigma\,| < 2h\,\}\,,$$

следствием которого является неравенство

$$|\,I_2\,| \leq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}_{<}(y,2h)} |\,k_{\alpha,\nu}(y,\sigma) f(\sigma)\,|\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

так что данный случай сводится к предыдущему в силу второго утверждения Леммы 1.15. Таким образом, имеет место следующая оценка:

$$|\,I_2\,| \leq c\,h^{\alpha-\frac{n-1}{p}} \ln^{\nu} \frac{r}{h}, \;\; 0 < c < \infty.$$

Оценка I_3 Применив Леммы 1.13 и 1.16, получаем:

$$
|\,I_3\,| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \left\{ \int\limits_{|\,x-\sigma\,|\ge h} \left| |\,x-\sigma\,|^{\alpha-n+1} \ln^{\nu} \frac{r}{|\,x-\sigma\,|} - \right.\right.
$$

$$
\left.\left. - \, |\,y-\sigma\,|^{\alpha-n+1} \ln^{\nu p'} \frac{r}{|\,y-\sigma\,|} \right| \mathrm{d}\,\sigma \right\}^{\frac{1}{p'}},
$$

то есть

$$
|\,I_3\,| \le c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}\,|\,x-y\,| \left\{ \int\limits_{|\,x-\sigma\,|\ge h} |\,x-\sigma\,|^{(n-\alpha)\,p'} \ln^{\nu\,p'} \frac{r_0}{|\,x-\sigma\,|}\,\mathrm{d}\,\sigma \right\}^{\frac{1}{p'}},
$$

где $r_0 > 2$. По Лемме 1.14 имеем

$$
|\,I_3\,| \le c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}\,h \left\{ \int\limits_h^2 u^{(n-\alpha)\,p'+n-2} \ln^{\nu p'} \frac{r_0}{u}\,\mathrm{d}\,u \right\}^{\frac{1}{p'}},
$$

откуда, с учетом предположения (1.24):

$$
|\,I_3\,| \le c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}\,h^{\alpha-\frac{n-1}{p}} \ln^{\nu} \frac{r_0}{h}.
$$

В завершение достаточно выбрать максимум между r_0 и r в качестве m.

$\square$

1.4 Пространственные потенциалы

Настоящий параграф посвящен применению стереографической проекции для распространения приведенных результатов на случай потенциалов

$$I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}\varphi(x) = c(n,\alpha)\int\limits_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1}} \frac{\varphi(\sigma)}{|\,x-\sigma\,|^{n-1-\alpha}}\ln^{\nu}\frac{\theta(x,\sigma)}{|\,x-\sigma\,|}\,\mathrm{d}\,y, \quad x\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.25}$$

с характеристикой $\theta(x,\sigma)$ частного вида. Интегрирование в (1.25) осуществляется по

$$\dot{\mathbb{R}}^{n-1} := \mathbb{R}^{n-1}\cup\{\infty\},$$

то есть компактификации евклидова пространства бесконечно удаленной точкой. Ранее подобные задачи рассматривались для $I^{\alpha,0}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta_{\Pi}}$ сперва в случае вещественных [17], а затем и комплексных [3] значений α.

Геометрически пространство $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ трактуется как (гипер)плоскость пространства $\mathbb{R}^n$, и стереографическая проекция устанавливает следующее соответствие между точками на (гипер)сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ и векторами из $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$, биективное в силу компактификации [34, с. 36]:

$$\begin{gathered}\xi_k = \frac{2\,x_k}{|\,x\,|^2+1}, \quad k=\overline{1,n-1}; \qquad \xi_n = \frac{|\,x\,|^2-1}{|\,x\,|^2+1},\\ \xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{S}^{n-1}, \qquad x=(x_1,...,x_{n-1})\in\dot{\mathbb{R}}^{n-1}.\end{gathered} \tag{1.26}$$

При этом имеют место следующие преобразования метрики и элементарной площади сферы:

$$\begin{gathered} d_{\mathbb{S}^{n-1}}(\xi,\sigma) := |\,\xi-\sigma\,| = \frac{2\,|\,x-y\,|}{\sqrt{|\,x\,|^2+1}\,\sqrt{|\,y\,|^2+1}} =: d_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1}}(x,y),\\ \mathrm{d}\,\sigma = 2^{n-1}\left(|\,y\,|^2+1\right)^{1-n}\mathrm{d}\,y.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Здесь и далее в рамках этого отдела считается для удобства, что греческие буквы обозначают точки сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, латинские же атрибутированы элементам пространства $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$.

Стоит отметить, что формулы (1.26) и (1.27) при $n = 2$ представляют стандартный прием замены переменных под интегралом, однако для дробного анализа в пространствах высших размерностей они доставляют дополнительные вопросы, связанные с изменением порядка сингулярности, интегрируемостью якобиана преобразования и, как следствие, необходимостью переопределения функциональных пространств. Последний вопрос удобно формализовать введя оператор

$$\Pi\left[f(\xi)\right] = f_*(x), \;\; \xi \in \mathbb{S}^{n-1}, \;\; x \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}, \tag{1.28}$$

отражающий преобразование координат по формулам (1.26). Имея в виду (1.27), запишем для модуля непрерывности (7):

$$\Pi\left[\omega(f,t)\right] = \Pi\left[\sup_{d_{\mathbb{S}^{n-1}}(\xi,\sigma)\le t} |\, f(\xi) - f(\sigma)\,|\right] =$$

$$= \sup_{d_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1}}(x,y)\le t} |\, f_*(x) - f_*(y)\,| = \omega(f_*,t),$$

причем последнее обосновано эквивалентностью метрик на $\dot{\mathbb{R}}^{n-1}$. Таким образом, оператор Π устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциональными пространствами $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ и $H^{\omega}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}\right)$, а также пространствами $H^{\omega}_{\sigma_j}\left(\mathbb{S}^{n-1}, w\right)$ и $H^{\omega}_{\Pi(\sigma_j)}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_*\right)$ функций из $H^{\omega}(\,\cdot\,)$, исчезающих с весом в конечном числе точек. Для пространств $L^{p}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ отметим следующий факт:

Лемма 1.18. *Введем следующее обозначение:*

$$w_\Pi(x) := \sqrt{1 + |\,x\,|^2}, \;\; x \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.29}$$

Оператор стереографической проекции осуществляет следующее биективное отображение:

$$\Pi\left[L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right] = L^p\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w\right), \;\; w(x) = \left[\frac{2}{w_\Pi^2(x)}\right]^{p\,(n-1)}, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Доказательство. Утверждение леммы проверяется непосредственно: как это сделано, например, в работе [34, с. 42]. □

Итак, реализация композиции оператора (1.28) стереографической проекции со сферическим потенциалом $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ожидается в виде оператора $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}$, выраженного (1.25). Следующая лемма доставляет вид характеристики $\theta(x,\sigma)$ (а также константы $c(n,\alpha)$), что представляет основной интерес для последующего изложения:

Лемма 1.19. *Пусть* $f_*(x) = \Pi[f(\xi)], \quad \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$. *Имеет место следующее выражение:*

$$\Pi\, I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}\, f = w_\Pi^{n-1-\alpha}\, I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\theta}\left(w_\Pi^{-n-\alpha}\, f_*\right), \tag{1.30}$$

где вес w_Π *определен выражением* (1.29), *характеристика потенциала имеет вид:*

$$\theta(x,\sigma) = \frac{r}{2}\, w_\Pi(x)\, w_\Pi(\sigma), \;\; x, \sigma \in \mathbb{R}^{n-1}, \;\; r > 2, \tag{1.31}$$

и постоянная $c(n,\alpha) = 2^\alpha$ *в выражении* (1.25).

Доказательство. Действительно, на основании формул (1.27), получим

$$\Pi\left[I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}\, f(\xi)\right] = 2^{\alpha}\, \Big(|\,x\,|^2+1\Big)^{\frac{n-1-\alpha}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\dot{\mathbb{R}}^n} \frac{f_*(y)}{|\,x-y\,|^{n-1-\alpha}}\, \Big(1+|\,y\,|^2\Big)^{-\frac{n-1+\alpha}{2}}\, \ln^{\nu}\left(\frac{r}{2}\cdot\frac{\sqrt{|\,x\,|^2+1}\sqrt{|\,y\,|^2+1}}{|\,x-y\,|}\right) \mathrm{d}\,y,$$

что эквивалентно доказываемому утверждению. □

Отметим, что в частных случаях возможно представление оператора $\Pi I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ композицией операторов $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^n}$:

Следствие 1.20. *Пусть $a(x) \coloneqq \ln\, w_{\Pi}(x)$. Тогда для неотрицательных целых ν проекция оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ может быть записана как*

$$\Pi\, I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}\, f = w^{\frac{n-\alpha}{2}} \sum_{\substack{k_j\geq 0:\\ k_1+\ldots+k_4=\nu}} \binom{\nu}{k_1,\ldots,k_4} \frac{\ln^{k_1}\, 1/2}{2^{\,k_2\,k_3}}\cdot a^{\,k_2}\, I^{\alpha,k_4}_{\dot{\mathbb{R}}^n}\, \left(a^{\,k_3}\, f_*\right),$$

где суммирование производится по всем композициям числа ν из четырёх частей, $I^{\alpha,k_4}_{\dot{\mathbb{R}}^n}$ определены с константой $c(n,\alpha) = 2^{\alpha}$.

Доказательство. Согласно полиномиальной теореме [29, с. 100], имеем:

$$\left(\ln\frac{1}{2} + \ln\sqrt{|\,x\,|^2+1} + \ln\sqrt{|\,y\,|^2+1} + \ln\frac{r}{|\,x-y\,|}\right)^{\nu} =$$

$$= \sum_{\substack{k_j\geq 0:\\ k_1+\ldots+k_4=\nu}} \binom{\nu}{k_1,\ldots,k_4} \frac{1}{2^{\,k_2\,k_3}}\, \ln^{k_1}\frac{1}{2}\,\cdot$$

$$\cdot\, \ln^{k_2}\Big(|\,x\,|^2+1\Big)\, \ln^{k_3}\Big(|\,y\,|^2+1\Big)\, \ln^{k_4}\frac{1}{|\,x-y\,|}.$$

Использовав это в выражении (1.31), получаем искомое представление. □

Наконец, сформулируем результаты об обобщённой гёльдеровости оператора $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta_\Pi}$ с характеристикой (1.31) при обобщенной гёльдеровости или суммируемости его плотности:

Теорема 1.21. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, *вес* $w_\Pi(\cdot)$ *определен выражением* (1.29), *а характеристика* $\theta(x,\sigma)$ *оператора* (1.25) *имеет вид* (1.31).

При $\omega \in \Phi^0_{1-\operatorname{Re}\alpha}$ *справедливо вложение*

$$I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}\left(H^{\omega}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\Pi^{-\kappa(n,\alpha)}\right)\right) \subseteq H^{\omega_{\alpha,\nu}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\Pi^{\kappa(n,\alpha)}\right), \tag{1.32}$$

$$\kappa(n,\alpha) = n-1+\alpha, \tag{1.33}$$

где характеристика $\omega_{\alpha,\nu}(\cdot)$ *имеет вид* (1.21).

Теорема 1.22. *Пусть* $\boldsymbol{r} = (r_1, ..., r_s)$, $s \in \mathbb{N}$, *и* $r_j > 0$, $j = \overline{1,s}$, *а также ипользуются выражения* (1.29), (1.31) *и* (1.33). *В условиях Теоремы 1.9, имеет место следующее вложение функциональных пространств:*

$$I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}\left[H^{\omega}_{\{s_j\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_{-\kappa(n,\alpha)}\right)\right] \subseteq H^{\omega_{\alpha,\nu}}_{\{s_j\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_{\kappa(n,\alpha)}\right), \tag{1.34}$$

где обозначено:

$$w_\varepsilon(x) := 2^{\|\boldsymbol{r}\|}\,[w_\Pi(x)]^{\varepsilon-\|\boldsymbol{r}\|/2}\prod_{j=1}^{s}\frac{|\,x-s_j\,|^{r_j}}{w_\Pi^{r_j}(s_j)},\quad \|\boldsymbol{r}\| = \sum_{j=1}^{N} r_j.$$

Доказательство. Доказательство Теорем 1.21 и 1.22 осуществляется аналогично, предполагая использование результата Леммы 1.19 и того факта, что оператор стереографической проекции сохраняет обобщённую гёльдеровость.

В отношении доказательства Теоремы 1.22 заметим также, что точки $s_j \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ являются, в силу биективности стереографической проекции, образами некоторых $\sigma_j \in \mathbb{S}^{n-1}$, $j = \overline{1, N}$, так что условия Теоремы 1.10 гарантируют соответствующие утверждения для сферического прообраза потенциала $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta_\Pi}$. Преобразовав вес (1.22) по формуле из (1.27), обозначим через $w_\varepsilon(x)$ композицию результата этого преобразования с $w_\Pi(x)$, заданного выражением (1.29). Таким образом, условия теорем индуцированы соответствующими условиями для $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. □

Отметим в качестве отдельного утверждения следующий факт, установленный применением Теоремы 1.4:

Теорема 1.23. *При* $\nu \in \{0, 1\}$ *во вложениях* (1.32), (1.34) *достигаются равенства.*

Обобщенная гёльдеровость оператора $I^{\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}$ представляет особый интерес в случае весов, «привязанных» к нулю и бесконечности. Действительно, порядок сингулярности потенциала меньше размерности пространства, так что соответствующий интеграл в расходится на бесконечности, в то время как гиперсингулярный интеграл имеет нуль особой точкой.

Следствие 1.24. *Пусть обозначено:*

$$w_\varepsilon(\boldsymbol{r}, x) = 2^{\,r_1+r_2}\ |\,x\,|^{\,r_2}\ [w_\Pi(x)]^{\,2\,\varepsilon-(r_1+r_2)/2}\,,\quad \boldsymbol{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение Теоремы 1.22 имеет место также и для следующих функциональных пространств:

$$H^{\omega_\alpha}_{\{0\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\varepsilon\right),\quad \boldsymbol{r} = (r_1, 0);\ \ H^{\omega_\alpha}_{\{\infty\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\varepsilon\right),\quad \boldsymbol{r} = (0, r_2);$$

$$H^{\omega_\alpha}_{\{0,\infty\}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_\varepsilon\right),\quad \boldsymbol{r} = (r_1, r_2).$$

Заметим, что Следствие 1.24 было получено в [4] независимо на основании результатов для гёльдеровских пространств с весом

$$w(\xi) = |\,\xi - e_n\,|^{\,r_1}\; |\,\xi + e_n\,|^{\,r_2}\,,\;\; e_n \coloneqq (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Наконец, рассмотрим действие оператора $I^{\,\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta_\Pi}$ на функциях, суммируемых со степенью p. Под весовым пространством здесь подразумевается

$$L^{p}\,(\Omega, w) = \{\, f :\, w\, f \in L^{p}\,(\Omega)\,\}\,.$$

Теорема 1.25. *усть выполнено условие* (1.23)*, тогда оператор* $I^{\,\alpha,\nu}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1},\,\theta}$*, заданный в терминах* (1.29) *и* (1.31)*, ограничен из* $L^{p}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_p\right)$ *в* $H^{\,\omega_{\alpha,\nu}}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w_{\Pi}^{(n-1+\alpha)/2}\right)$*, где характеристика* $\omega_{\alpha,\nu}$ *выражена* (1.21)*, и*

$$w_p(x) \coloneqq 2^{\,p\,(n-2)}\,[w_\Pi(x)]^{\,\varepsilon}\,, \qquad x \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1},$$

$$\varepsilon = \frac{(n-1)\,(2\,p-1)-\alpha}{2} - p,\;\; 1 < p < \infty.$$

Доказательство. Рассуждаения в основе доказательства данной теоремы аналогичны проведенным при доказательстве Теорем 1.21 и 1.22.

Дополнительно требуется сослаться на Лемму 1.18 о преобразовании стереографической проекцией пространства $L^{p}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ в $L^{p}\left(\dot{\mathbb{R}}^{n-1}, w\right)$ со специальным весом. В произведении с функциональным сомножителем, отделенным в выражении (1.30), вес w образует весовую функцию w_p, вид которой дан в утверждении.

□

Глава 2. Операторы типа потенциала на метрических пространствах с мерой в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом

2.1 Постановка задачи

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой, для которого имеют место предположения (B), (Δ_1) и (Δ_2); множество Ω удовлетворяет (O_1). Будем рассматривать пространства обобщенной переменной гёльдеровости в контексте Определений 11 и 12, которые опираются на понятие локального модуля непрерывности, введенное Определением 9.

Настоящая глава посвящена исследованию условий ограниченности риссова потенциала I^{α}, введенного Определением 7, в весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости, введенных Определением 12. Общая методика исследования предполагает использование теорем о действии I^{α} в безвесовых пространствах, что достигается следующим образом.

Воспользовавшись обозначением

$$f_w(x) := w(x)\, f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

запишем:

$$w(x)\, I^{\,\alpha} f\,(x) = w(x)\, I^{\,\alpha} \left(\frac{f_w}{w}\right)(x) \pm I^{\,\alpha} f_w\,(x) =$$

$$= I^{\,\alpha} f_w\,(x) + \int\limits_{\Omega} \frac{w(x)\, f_w(\sigma)}{w(\sigma)\,\left[d(x,\sigma)\right]^{N-\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma - \int\limits_{\Omega} \frac{f_w(\sigma)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{N-\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma =$$

$$= I^{\,\alpha} f_w\,(x) + \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega} f_w\,(x)\,,$$

где введено обозначение для следующего интегрального оператора:

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\,\varphi\,(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\,\frac{\varphi(\sigma)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{N-\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma, \quad x\in\Omega. \tag{2.2}$$

Действие оператора $I^{\,\alpha}$ в безвесовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости описано в предшествующих исследованиях: именно, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть $\omega \in \Phi_{1-\operatorname{Re}\alpha}$. Потенциал Рисса, введенный Определением 7, ограничен из $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ в $H^{\,\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega)$ с характеристикой (ω_α).*

Доказательство. Теорема представляет собой специализацию более общего результата относительно потенциалов Рисса переменного порядка на квазиметрических пространствах, доказанного в [78, 16]. □

Таким образом, дальнейшие усилия направлены на исследование условий ограниченности оператора $\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}$ на функциях из $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, а также при отображении элементов весового локального обобщенного пространства Гёльдера $\mathcal{H}_0(\Omega, w_a)$. В обоих случаях полагаем, что $(w\, f)(a) = 0$, что эквивалентно требованию $\Omega_0 = \{a\}$ в контексте Определения 12.

2.2 Оценка типа Зигмунда

2.2.1 Предварительные замечания

О пределах интегрирования Заметим, что, согласно Лемме 2, следующее выражение верно для любого $k > 1$:

$$\int\limits_{B[z,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{[d(z,\sigma)]^{\gamma_0+N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c^{(L_1)}_{M,N} \int\limits_0^{k\,h} \frac{M_{f_w}\,(z,t)}{t^{1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t,$$

где положим $\gamma_0 = \min(1,\gamma)$, и

$$\int\limits_{\Omega\setminus B[z,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{[d(z,\sigma)]^{\gamma_0+N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c^{(L_2)}_{M,N} \int\limits_{k\,h}^{l} \frac{M_{f_w}\,(z,t)}{t^{1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \;\; z\in\{a,x\}.$$

Очевидно, что

$$\pm\int\limits_{k\,h}^{\kappa} \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\lambda}}\,\mathrm{d}\,t \le \pm c_k \int\limits_{h}^{\kappa/k} \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\lambda}}\,\mathrm{d}\,t,$$

где

$$c_k = c_k(\lambda) := (1+k)\,k^{1-\lambda}, \;\; 0 < c_k < \infty,$$

Следовательно,

$$\int\limits_{Q} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{[\,d(z,\sigma)\,]^{1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \pm c^{(0)}_k \int\limits_{h}^{\kappa} \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \;\; c^{(0)}_k := c^{(0)}\,c_k, \qquad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} &\kappa = 0, \;\; c^{(0)} = c^{(L_1)}_{M,N}, \quad \text{если} \quad Q = B[z,h], \\ &\kappa = l, \;\; c^{(0)} = c^{(L_2)}_{M,N}, \;\; \text{если} \quad Q = \Omega \setminus B[z,h]. \end{aligned}$$

О специальном обозначении Будем использовать, из соображений краткости, символ $\xi_1 \,|\, \xi_2$, чтобы обозначить конкретный выбор между двумя альтернативными значениями, независимо от их происхождения. Условия этого выбора будут либо представлены, либо очевидны из контекста.

Будем применять этот символ в соответствии со следующим соглашением:

$$\overline{a \,|\, x} = x \,|\, a, \tag{2.4}$$

ожидая, что это обеспечит достаточную ясность и краткость во время перебора комбинаций.

2.2.2 Основной результат

Теорема 2.2. *Пусть* $0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$, *и*

$$x, y \in \Omega : \quad d(x,y) \le h \le l/k, \;\; k > 1. \tag{A}$$

Имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$|\, \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega} f_w(x) - \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega} f_w(y) \,| \le c\, h^{\gamma_0} \sum_{z \in \{a,x,y\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha}}\, \mathrm{d}\, t,$$

$$0 < c < \infty, \;\; \gamma_0 = \min(1, \operatorname{Re}\gamma).$$

Доказательство. Рассмотрим следующую декомпозицию множества Ω:

$$\Omega \subseteq \Omega_{\leq}(a) \cup \Omega_{\leq}(x) \cup \left[\Omega_{\geq}(a) \cap \Omega_{\geq}(x)\right], \tag{Ω_s}$$

где подмножества представляют собой шары или их дополнения, а именно

$$\Omega_{\leq}(a\,|\,x) := \{\, \sigma \in \Omega :\ d(a\,|\,x,\sigma) \leq \min\left[d(x\,|\,a,\sigma),\ k\,h\right] \},$$
$$\Omega_{\geq}(a\,|\,x) := \{\, \sigma \in \Omega :\ d(a\,|\,x,\sigma) \geq k\,h \,\}, \quad k > 1.$$

Примем во внимание представление

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)}\, f_w\,(x) - \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)}\, f_w\,(y) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)} \frac{[w_a(x) - w_a(y)] + [w_a(y) - w_a(\sigma)]}{w_a(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma)}{[d(x,\sigma)]^{N-\alpha}}\ \mathrm{d}\,\sigma -$$
$$- \int\limits_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)} \frac{w_a(y) - w_a(\sigma)}{w_a(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma)}{[d(y,\sigma)]^{N-\alpha}}\ \mathrm{d}\,\sigma =$$
$$= I_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)} + J_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)},$$

где вводятся следующие операторы:

$$I_Q := [w_a(x) - w_a(y)] \int\limits_Q \frac{f_w(\sigma)\ \mathrm{d}\,\sigma}{w_a(\sigma)\ [d(x,\sigma)]^{N-\alpha}},$$
$$J_Q := \int\limits_Q \frac{w_a(y) - w_a(\sigma)}{w_a(\sigma)}\ \left\{[d(x,\sigma)]^{\alpha-N} - [d(y,\sigma)]^{\alpha-N}\right\}\ f_w(\sigma)\ \mathrm{d}\,\sigma.$$

В результате имеем следующее неравенство:

$$|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega} f_w\,(x) - \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega} f_w\,(y)\,| \le \sum_{z\in\{x,y\}} \Big|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)} f_w\,(z)\,\Big| +$$

$$+\,\Big|\,I_{\Omega_{\ge}(a)\,\cap\,\Omega_{\ge}(x)}\,\Big| + \Big|\,J_{\Omega_{\ge}(a)\,\cap\,\Omega_{\ge}(x)}\,\Big|\,. \tag{2.5}$$

Первый интеграл. Рассмотрим первый член выражения (2.5), для которого выполняется

$$\Big|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)} f_w\,(x)\,\Big| \le \int\limits_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)} \frac{|\,w_a(x) - w_a(\sigma)\,|}{w_a(\sigma)}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{|\,f_w(\sigma)\,|}{[\,d(x,\sigma)\,]^{\,N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma, \quad x\in\Omega.$$

Будем строить необходимые оценки в следующих диапазонах значений $\operatorname{Re}\gamma$:

$$0<\operatorname{Re}\gamma<\min(1, N-\operatorname{Re}\alpha) \ \text{ and } \ 1\le\operatorname{Re}\gamma<1+N,$$

продиктованных, в сущности, компонентом $\Big|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)} f_w\,(x)\,\Big|$. Ясно, что основное влияние будут испытывать числовые неравенства, используемые в этих случаях; тем не менее, очевидно, весь диапазон возможных значений показателя веса принят в рассмотрение.

Случай $0<\operatorname{Re}\gamma<\min(1, N-\operatorname{Re}\alpha)$. Используем (N:1) вместе с (Δ_2):

$$|\,w_a(x) - w_a(\sigma)\,| \le c^{\,(\mathrm{N:1})}(\gamma)\,\,[\,d(x,\sigma)\,]^{\,\gamma}\,,\ \ c^{\,(\mathrm{N:1})}(\gamma) = |\,\gamma\,|\,/\operatorname{Re}\gamma,$$

откуда проистекает следующее выражение:

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)}\, f_w\,(x) \right| \leq$$

$$\leq c^{\,(\mathrm{N:1})}(\gamma) \int\limits_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(a,\sigma)\,]^{\gamma}\,[\, d(x,\sigma)\,]^{N-\gamma-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c^{\,(\mathrm{N:1})}(\gamma) \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_{\Omega_{\leq}(z)} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{[\, d(z,\sigma)\,]^{N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

После применения Леммы 2 и (2.3), имеем следующее неравенство:

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)}\, f_w\,(x) \right| \leq c_k^{(0)}\, c^{\,(\mathrm{N:1})}(\gamma) \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}\,(z,t)}{t^{\,1-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Заметим, что, согласно определению 9,

$$\int\limits_0^h t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}\,\frac{M_{f_w}(z,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t = h^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}\, M_{f_w}(z,h), \quad z\in\Omega.$$

Основываясь на свойствах $M_{f_w}(z,t)$, следующее неравенство верно:

$$h^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}\, M_{f_w}(z,h) \leq c_k^{(1,1)}\, h \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0 < c_k^{(1,1)} < \infty. \tag{2.6}$$

Действительно, в предположении, что $0 < h \leq l/k$, $k > 1$ имеем

$$K := \left(1 + \frac{1}{k}\right)\, h \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \geq \frac{h}{k} \int\limits_h^{k\,h} \frac{M_{f_w}\,(z,\, t/k)}{t/k}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{t^{\,1-\mathrm{Re}\,\alpha}},$$

где применяется свойство (M.2). Согласно свойству (M.1),

$$\frac{M_{f_w}\,(z,\,t/k)}{t/k} \geq \frac{1}{2}\,\frac{M_{f_w}\,(z,\,h)}{h}, \;\; t \leq k\,h.$$

В результате, используя первую теорему среднего значения для определенного интеграла, мы получаем следующее неравенство:

$$K \geq \frac{M_{f_w}(z,h)}{2\,k}\int\limits_{h}^{k\,h}\frac{\mathrm{d}\,t}{t^{\,1-\mathrm{Re}\,\alpha}} \geq \frac{k-1}{2\,k^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,h^{\,\mathrm{Re}\,\alpha}\,M_{f_w}(z,h),$$

Это означает, что (2.6) верно с постоянной

$$c_k^{(1,1)} = c_k^{(1,1)}(\alpha) = 2\,\frac{k+1}{k-1}\,k^{\,1-\mathrm{Re}\,\alpha}, \;\; k > 1.$$

Наконец, заметим, что, в силу $0 < \mathrm{Re}\,\gamma \leq 1$,

$$h\int\limits_{h}^{l}\frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \leq h\int\limits_{h}^{l}\frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\gamma-\mathrm{Re}\,\alpha}\,t^{\,1-\gamma}}\,\mathrm{d}\,t \leq h^{\,\mathrm{Re}\,\gamma}\int\limits_{h}^{l}\frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\gamma-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t,$$

Таким образом, из (2.6), следует, что

$$\left|\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)}\,f_w\,(x)\right| \leq c_k^{(1,2)}\,h^{\,\mathrm{Re}\,\gamma}\int\limits_{h}^{l}\frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\gamma-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \tag{2.7}$$

где

$$c_k^{(1,2)} = c_k^{(1,2)}(\alpha,\gamma) := c_k^{(0)}\,c_k^{(1,1)}(\alpha)\,c^{\,(\mathrm{N}:1)}(\gamma), \;\; 0 < c_k^{(1,2)} < \infty.$$

Случай $1 \le \operatorname{Re}\gamma < 1+N$**.** Используя (N:3), получаем следующее неравенство:

$$\left|\, w_a(x) - w_a(\sigma)\,\right| \le \left|\,\gamma\,\right|\, d(x,\sigma)\, \left[\max_{z\in\{x,\sigma\}} d(a,z)\right]^{\operatorname{Re}\gamma-1}. \tag{2.8}$$

Если $d(a,x) \le d(a,\sigma)$, мы, очевидно, можем использовать (Δ_1), чтобы обосновать следующее выражение:

$$d(x,\sigma) \le d(a,x) + d(a,\sigma) \le 2\, d(a,\sigma),$$

из которого следует

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)}\, f_w\,(x) \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)} \frac{d(x,\sigma)}{d(a,\sigma)} \frac{\left|\, f_w(\sigma)\,\right|}{\left[\, d(x,\sigma)\,\right]^{N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le$$

$$\le 2 \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_{B[z,\,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{\left[d(z,\sigma)\right]^{N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Это означает справедливость неравенства, аналогичного (2.6):

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)}\, f_w\,(x) \right| \le \left(2\, c_k^{(0)}\, c_k^{(1,1)}\right)\, h \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t. \tag{2.9}$$

Если $d(a,\sigma) \le d(a,x)$, рассмотрим следующие возможности:

$$\frac{1}{r}\, d(a,x) \le d(a,\sigma) \le d(a,x), \tag{2.10}$$

$$d(a,\sigma) \le \frac{1}{r}\, d(a,x), \quad r > 1. \tag{2.11}$$

Случай (2.10) сводится к предыдущему путем изменения постоянной:

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a) \cup \Omega_{\leq}(x)} f_w(x) \right| \leq$$

$$\leq |\gamma|\, r^{\operatorname{Re}\gamma - 1} \int\limits_{\Omega_{\leq}(a) \cup \Omega_{\leq}(x)} \left(\frac{d(a,x)}{r} \right)^{\operatorname{Re}\gamma - 1} \frac{d(x,\sigma)}{[\, d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(x,\sigma)\,]^{N - \operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq |\gamma|\, r^{\operatorname{Re}\gamma - 1} \int\limits_{\Omega_{\leq}(a) \cup \Omega_{\leq}(x)} \frac{d(x,\sigma)}{d(a,\sigma)} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(x,\sigma)\,]^{N - \operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Говоря конкретно, имеем в силу (Δ_1):

$$\frac{1}{r} \frac{d(x,\sigma)}{d(a,\sigma)} \leq \frac{1}{r} + \frac{1/r \,\cdot\, d(a,x)}{d(a,\sigma)} \leq 1 + \frac{1}{r}, \tag{2.12}$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega_{\leq}(a)} \frac{d(x,\sigma)}{d(a,\sigma)} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(x,\sigma)\,]^{N - \operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma \leq k\,(r+1) \int\limits_{B[a,k\,h]} \frac{M_{f_w}(a, d(a,\sigma))}{[\, d(a,\sigma)\,]^{N - \operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma,$$

в то время как оценка интеграла по $\Omega_{\leq}(x)$ очевидна. Таким образом,

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a) \cup \Omega_{\leq}(x)} f_w(x) \right| \leq c^{(1,3)}_{k,r}\, |\gamma| \sum_{z \in \{a,x\}} \int\limits_{B[z,\,k\,h]} \frac{M_{f_w}(z, d(z,\sigma))}{[d(z,\sigma)]^{N - \operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma,$$

где

$$c^{(1,3)}_{k,r} = c^{(1,3)}_{k,r}(\gamma) := k\, r^{\operatorname{Re}\gamma - 1}\,(1 + r), \;\; 0 < c^{(1,3)}_{k,r} < \infty.$$

При исследовании случая (2.11) можно заметить, что

$$\frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)} \leq \frac{d(a,\sigma) + d(x,\sigma)}{d(x,\sigma)} \leq 1 + \frac{1}{r} \frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)},$$

из чего следует

$$\frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)} \leq \frac{r}{r-1}, \quad r > 1. \tag{2.13}$$

Далее, имеем следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega_{\leq}(a)} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\;[\,d(x,\sigma)\,]^{N-\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq c_{\Omega}^{(1,4)} \int\limits_{B[a,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(a,d(a,\sigma))}{[\,d(a,\sigma)\,]^{N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

где постоянная

$$c_{\Omega}^{(1,4)} = c_{\Omega}^{(1,4)}(\gamma) := \max\Big(1, [\,\operatorname{diam}(\Omega)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\Big), \quad 0 < c_{\Omega}^{(1,4)} < \infty,$$

может быть оценена очевидным образом в рамках предположений

$$1 < \operatorname{Re}\gamma < N - \operatorname{Re}\alpha \qquad \text{или} \qquad \max(1, N-\operatorname{Re}\alpha) < \operatorname{Re}\gamma < 1+N,$$

рассмотренных по отдельности. Следовательно, может быть представлена следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\Big|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)}\,f_w\,(x)\Big| \leq \\
&\qquad \leq \int\limits_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)} \left(\frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)}\right)^{\operatorname{Re}\gamma-1} \left(\frac{d(x,\sigma)}{d(a,\sigma)}\right)^{\operatorname{Re}\gamma} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\,d(x,\sigma)\,]^{N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \\
&\qquad\qquad \leq c_{k,r,\Omega}^{(1,5)} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_{B[z,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z,d(z,\sigma))}{[\,d(z,\sigma)\,]^{1+N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq \\
&\qquad\qquad\qquad \leq c\,h \int\limits_{h}^{l} \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad c = c_k^{(0)}\,c_k^{(1,1)}c_{k,r,\Omega}^{(1,5)},
\end{aligned}$$

где

$$c^{(1,5)}_{k,r,\Omega} = c^{(1,5)}_{k,r,\Omega}(\gamma) := k\, \left(\frac{r}{r-1}\right)^{\mathrm{Re}\,\gamma-1} c^{(1,4)}_{\Omega}(\gamma),\;\; 0 < c^{(1,4)}_{k,r,\Omega} < \infty.$$

Окончательная оценка первого интеграла. На основании (2.7) и (2.9) следующая оценка типа Зигмунда справедлива для первого слагаемого рассматриваемого выражения:

$$\left| \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)}\, f_w\,(x) \right| \le c\, h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}\,(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t,\;\; \gamma_0 = \min(1, \mathrm{Re}\,\gamma),$$

где константа c является, в сущности, произведением $c^{(0)}_k$, $|\,\gamma\,|$ и максимума между $2\,c^{(1,1)}_k$, $c^{(1,3)}_{k,r}$ и $c^{(1,5)}_{k,r,\Omega}$.

Второй интеграл В этом параграфе абсолютное значение интеграла

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\le}(a)\,\cup\,\Omega_{\le}(x)}\, f_w\,(y)\,,\;\; y \in \Omega,$$

оценивается на основе предыдущего результата.

Начнем с того, что в силу (Δ_1) и предпосылки (A) верно следующее утверждение:

$$d(y,\sigma) \le (k+1)\,h,\;\; \forall\sigma \in B\,[x, k\,h]\,,$$

а значит,

$$B\,[x, k\,h] \subseteq B\,[y, (k+1)\,h]\,,\;\; k > 1. \tag{2.14}$$

Основываясь на том же, имеем:

$$d(y,\sigma) \ge (k-1)\,h,\;\; \forall\sigma : d(x,\sigma) \ge k\,h,$$

и, как следствие,

$$\Omega \setminus B\,[x, k\,h] \subseteq \Omega \setminus B\,[y, (k-1)\,h]\,. \tag{2.15}$$

Далее, заметим, что

$$\Omega_{\le}(a\,|\,x) = B\,[a\,|\,x, \min\,(k\,h, d(x\,|\,a, \sigma))] =$$

$$= B\,[a\,|\,x, k\,h] \cap\, (B\,[x\,|\,a, k\,h] \,\cup\, \Omega \setminus B\,[x\,|\,a, k\,h])\,.$$

Имеем:

$$\Omega \setminus B\,[a, k\,h] = R|_{k\,h}^{(k+1)\,h}\,[a] \,\cup\, \Omega \setminus B\,[a, (k+1)\,h]\,,$$

где обозначим:

$$R|_{\lambda_1}^{\lambda_2}\,[z] := \{\,\sigma \in \Omega :\ \lambda_1 \le d(z, \sigma) \le \lambda_2\,\}\,, \tag{2.16}$$

так что, очевидно,

$$R|_{k\,h}^{(k+1)\,h}\,[a] \subset B\,[a, (k+1)\,h]\,.$$

Следовательно, в силу (2.14),

$$B\,[x, \min\,(k\,h, d(a, \sigma))] \subseteq B\,[y, \min\,((k+1)\,h, d(a, \sigma))]\,. \tag{2.17}$$

Аналогично, учитывая (2.15), имеем

$$B\,[a, \min\,(k\,h, d(x, \sigma))] \subseteq B\,[a, (k+1)\,h] \,\cap$$

$$\cap\, (B\,[y, (k+1)\,h] \,\cup\, \Omega \setminus B\,[y, (k-1)\,h])\,,$$

где

$$\Omega \setminus B\,[y,(k-1)\,h] = R|_{(k-1)\,h}^{(k+1)\,h}\,[y] \,\cup\, \Omega \setminus B\,[y,(k+1)\,h]\,,$$

причем

$$R|_{(k-1)\,h}^{(k+1)\,h}\,[y] \subset B\,[y,(k+1)\,h]\,.$$

Таким образом,

$$B\,[a, \min\,(k\,h, d(x,\sigma))] \subseteq B\,[y, \min\,((k+1)\,h, d(x,\sigma))]\,. \tag{2.18}$$

На основании (2.17) и (2.18), множество Ω может быть представлено аналогично (Ω_s), но с разбиением относительно точки $y \in \Omega$. Следовательно, метод, применяемый к первому интегралу, может быть повторен здесь, чтобы получить аналогичную оценку:

$$\left|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega_{\leq}(a)\,\cup\,\Omega_{\leq}(x)}\,f_w\,(y)\,\right| \leq \sum_{z\in\{a,y\}}\ \int\limits_{\Omega_{\leq}(z)} \frac{|\,w_a(y)-w_a(\sigma)\,|}{w_a(\sigma)}\,\frac{f_w(\sigma)}{[\,d(y,\sigma)\,]^{N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c\,h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,y\}}\ \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}\,(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad \gamma_0 = \min(1, \mathrm{Re}\,\gamma),$$

где константа c имеет выражение, аналогичное полученному в окончательной оценке первого интеграла.

Третий интеграл Рассмотрим третье слагаемое основной суммы:

$$|\,I\,| := \left|\,I_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)}\,\right| = |\,w_a(x) - w_a(y)\,| \,\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)} \frac{|\,f_w(\sigma)\,|}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\mathrm{Re}\,\gamma}\,[d(x,\sigma)]^{N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Оценим его, рассмотрев в рамках различных диапазонов значений $\operatorname{Re}\gamma$, продиктованных численными неравенствами (N:1), (N:2) и (N:3). Константы, появляющиеся в этих неравенствах, пометим соответствующими верхними индексами.

Случай $0 < \operatorname{Re}\gamma \leq 1$. Используя (N:1) и (Δ_1), запишем:

$$|\, w_a(x) - w_a(y)\,| \leq c^{\,(\mathrm{N:1})}\, [\, d(x,y)\,]^{\operatorname{Re}\gamma} \leq c^{\,(\mathrm{N:1})}\, h^{\operatorname{Re}\gamma},$$

Таким образом, имеем:

$$|\, I\,| \leq c^{\,(\mathrm{N:1})}\, h^{\operatorname{Re}\gamma} \int\limits_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\,[\, d(x,\sigma)\,]^{N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Заметим, что в терминах (2.16) имеет место

$$\Omega_{\geq}(a) \,\cap\, \Omega_{\geq}(x) \subseteq R|_{k\,h}^{d(a,\sigma)}\,[x] \,\cup\, R|_{k\,h}^{d(x,\sigma)}\,[a]\,, \tag{2.19}$$

что позволяет, после применения Леммы 3, сформулировать следующее утверждение в терминах соглашения (2.4):

$$|\, I\,| \leq c^{\,(\mathrm{N:1})}\, h^{\operatorname{Re}\gamma} \sum_{z\in\{a\,|\,x,\,x\,|\,a\}} \int\limits_{R|_{k\,h}^{d(z,\sigma)}\,[\overline{z}]} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(\overline{z},\sigma)\,]^{N+\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c^{\,(\mathrm{N:1})}\, h^{\operatorname{Re}\gamma} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_{\Omega\setminus B[z,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{[\, d(z,\sigma)\,]^{N+\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq \left(c^{\,(\mathrm{N:1})}\, c_k^{(0)}\right)\, h^{\operatorname{Re}\gamma} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t.$$

Случай $1 < \operatorname{Re}\gamma < 1 + N$. С помощью (N:2), а затем (Δ_1) покажем

$$| \, w_a(x) - w_a(y) \, | \le | \, \gamma \, | \; h \left[\max_{z \in \{x,y\}} d(a,z) \right]^{\operatorname{Re}\gamma - 1}.$$

Чтобы рассмотреть случаи (2.10) и (2.11) в кратком изложении, введем

$$\Lambda_j(\xi_1,\xi_2) := R|_{k\,h}^{d(\xi_1,\sigma)} [\xi_2] \cap \begin{cases} R|_{\frac{1}{r} d(a,x)}^{d(a,x)} [a] \cup (\Omega \setminus B\,[a, d(a,x)]) \,, & j = 1, \\ B\left[a, \frac{1}{r} d(a,x)\right], & j = 2, \end{cases}$$

где $r > 1$, следовательно

$$\Omega_{\ge}(a) \cap \Omega_{\ge}(x) \subseteq \bigcup_{j \in \{1,2\}} \Lambda_j(a,x) \cup \Lambda_j(x,a).$$

1. Очевидно, имеет место оценка

$$\frac{d(a,x)}{d(a,\sigma)} \le \begin{cases} 1, & \sigma \in \Omega \setminus B\,[a, d(a,x)]\,, \\ r, & \sigma \in R|_{\frac{1}{r} d(a,x)}^{d(a,x)} [a]\,, \end{cases}$$

и справедлива основанная на ней, а также на (Δ_1) оценка

$$\left(\frac{d(a,y)}{d(a,\sigma)} \right)^{\operatorname{Re}\gamma - 1} \le \left(\frac{d(a,x) + d(x,y)}{d(a,\sigma)} \right)^{\operatorname{Re}\gamma - 1} \le c_{k,r}^{(3,1)}, \;\; \sigma \in \Lambda_{a\,|\,x}(x),$$

$$c_{k,r}^{(3,1)} = c_{k,r}^{(3,1)}(\gamma) := \left[\, k^{-1} + r \,\right]^{\operatorname{Re}\gamma - 1}, \;\; 0 < c_{k,r}^{(3,1)} < \infty.$$

Последнее означает, что для $z \in \{x, y\}$

$$\big| \, I_{\Lambda_1(a,x) \,|\, \Lambda_1(x,a)} \, \big| \leq$$

$$\leq |\,\gamma\,| \; h \int\limits_{\Lambda_1(a\,|\,x)} \left(\frac{d(a,z)}{d(a,\sigma)}\right)^{\operatorname{Re}\gamma-1} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{d(a,\sigma)\; [\, d(x,\sigma)\,]^{N-\operatorname{Re}\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq \left(c_{k,r}^{(3,1)} \; |\,\gamma\,|\right) \, h \int\limits_{\Omega\setminus B[x\,|\,a,\,k\,h]} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(x\,|\,a,\sigma)\,]^{1+N-\operatorname{Re}\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Приведенная оценка приводит к следующим неравенствам:

$$\big| \, I_{\Lambda_1(a,x) \,\cup\, \Lambda_1(x,a)} \, \big| \leq \left(c_{k,r}^{(3,1)} \; |\,\gamma\,|\right) \, h \sum_{z\in\{a,x\}} \; \int\limits_{\Omega\setminus B[z,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z, d(z,\sigma))}{[\, d(z,\sigma)\,]^{1+N-\operatorname{Re}\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma.$$

2. На основе (2.13), следующем из (2.11), имеем

$$\big| \, I_{\Lambda_2(a,x)} \, \big| \leq$$

$$\leq |\,\gamma\,| \; h \int\limits_{\Lambda_2(a,x)} \left(\frac{d(a,z)}{d(x,\sigma)}\right)^{\operatorname{Re}\gamma-1} \frac{|\, f_w(\sigma)\,|}{[\, d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma} \; [\, d(x,\sigma)\,]^{1+N-\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq \left(c_{k,r}^{(3,2)} \; |\,\gamma\,|\right) \, h \int\limits_{\Omega\setminus B[x,\,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(x, d(x,\sigma))}{[\, d(x,\sigma)\,]^{1+N-\operatorname{Re}\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma, \quad z \in \{x, y\},$$

где константа рассчитывается тем же образом, что и выше:

$$c_{k,r}^{(3,2)} = c_{k,r}^{(3,2)}(\gamma) := \left(\frac{1}{k} + \frac{r}{r-1}\right)^{\operatorname{Re}\gamma-1}, \;\; 0 < c_{k,r}^{(3,2)} < \infty.$$

3. Наконец,

$$\left|\, I_{\Lambda_2(x,a)} \,\right| \le$$

$$\le |\,\gamma\,|\; h \int\limits_{\Lambda_2(x,a)} \left(\frac{d(a,z)}{d(x,\sigma)}\right)^{\mathrm{Re}\,\gamma-1} \frac{d(x,\sigma)\; |\, f_w(\sigma)\,|}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\mathrm{Re}\,\gamma}\; [\,d(x,\sigma)\,]^{2+N-\mathrm{Re}\,\gamma-\mathrm{Re}\,\alpha}}\, \mathrm{d}\,\sigma \le$$

$$\le \left(c^{(3,3)}_{\Omega,k,r}\; |\,\gamma\,|\right) h \int\limits_{\Omega\setminus B[a,\,k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(a, d(a,\sigma))}{[\,d(a,\sigma)\,]^{1+N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\, \mathrm{d}\,\sigma, \quad z \in \{x, y\},$$

где, говоря конкретно, имеем следующее значение константы:

$$c^{(3,3)}_{\Omega,k,r} = c^{(3,3)}_{\Omega,k,r}(\gamma) := c^{(3,2)}_{k,r}(\gamma)\, \mathrm{diam}\,(\Omega)\,, \;\; 0 < c^{(3,3)}_{\Omega,k,r} < \infty.$$

Следовательно, применение Леммы 3 ко всем трем рассмотренным случаям приводит к следующему утверждению:

$$|\, I\,| \le c\, h \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}}\, \mathrm{d}\,t, \;\; 0 < c < \infty,$$

где константа может быть оценена, как показано ранее.

Окончательная оценка третьего интеграла. В результате предоставленных оценок имеет место следующий результат:

$$\left|\, I_{\Omega_{\ge}(a)\,\cap\,\Omega_{\ge}(x)} \,\right| \le c\, h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\mathrm{Re}\,\alpha}}\, \mathrm{d}\,t, \;\; 0 < c < \infty,$$

где c можно оценить через константы, выраженные выше.

Четвертый интеграл Обозначим $\lambda := N - \alpha$ для краткости. Имеем

$$| \, J \, | := \left| \, J_{\Omega_{\geq}(a) \cap \Omega_{\geq}(x)} \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{\Omega_{\geq}(a) \cap \Omega_{\geq}(x)} \frac{| \, w_a(y) - w_a(\sigma) \, |}{w_a(\sigma)} \left| \, [\, d(x,\sigma) \,]^{-\lambda} - [\, d(y,\sigma) \,]^{-\lambda} \right| \, | \, f_w(\sigma) \, | \, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Используем (N:3), (A) и (Δ_1), чтобы показать

$$\left| \, [\, d(x,\sigma) \,]^{-\lambda} - [\, d(y,\sigma) \,]^{-\lambda} \right| \leq$$
$$\leq c^{\,(\mathrm{N:3})}(\lambda) \, \frac{d(x,y) \; [\, d(x,\sigma) + d(y,\sigma) \,]^{-1+\operatorname{Re}\lambda}}{[\, d(y,\sigma) \, d(x,\sigma) \,]^{\operatorname{Re}\lambda}} \leq$$
$$\leq \frac{c^{\,(\mathrm{N:3})}(\lambda) \, h}{d(y,\sigma) \; [\, d(x,\sigma) \,]^{\operatorname{Re}\lambda}} \; \left[1 + \frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \right]^{-1+\operatorname{Re}\lambda}.$$

Заметим, что в силу (Δ_2) и (A),

$$\forall \sigma \in \Omega_{\geq}(x): \;\; d(y,\sigma) \geq d(x,\sigma) - d(x,y) \geq (k-1)\, h. \tag{2.20}$$

Следовательно, в виду (Δ_1) и (A),

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \leq \frac{d(x,y) + d(y,\sigma)}{d(y,\sigma)} \leq 1 + \frac{1}{k-1}, \;\; k > 1,$$

а значит,

$$\left| \, [\, d(x,\sigma) \,]^{-\lambda} - [\, d(y,\sigma) \,]^{-\lambda} \right| \leq \frac{c^{(4,1)}_{k,N} \, h}{d(y,\sigma) \; [\, d(x,\sigma) \,]^{N - \operatorname{Re}\alpha}},$$

где

$$c_{k,N}^{(4,1)} = c_{k,N}^{(4,1)}(\alpha) := c^{\,(\mathrm{N}:3)}(N-\alpha)\,\left(2+\frac{1}{k-1}\right)^{N-1-\mathrm{Re}\,\alpha},$$

$$0 < c_{k,N}^{(4,1)} < \infty.$$

Случай $0 < \mathrm{Re}\,\gamma \le 1$**.** Пусть $r > 1$, тогда

$$\Omega_{\ge}(a) \,\cap\, \Omega_{\ge}(x) \subseteq \Theta_1 \,\cup\, \Theta_2,$$

где

$$\Theta_j = \Theta_j(a,x) \,\cup\, \Theta_j(x,a), \;\; j = 1,2,$$

$$\Theta_j(\xi_1,\xi_2) := R|_{k\,h}^{d(\xi_1,\sigma)}\,[\xi_2] \,\cap\, \begin{cases} B\,[a, r\,d(a,y)] \,\cup\, R|_{d(a,y)}^{r\,d(a,y)}\,[a]\,, & j=1,\\ \Omega \setminus B\,[a, r\,d(a,y)]\,, & j=2. \end{cases}$$

1. Используем (N:2) вместе с (Δ_2), чтобы получить

$$|\,w_a(y) - w_a(\sigma)\,| \le c_r^{(4,2)}\,d(y,\sigma)\;[\,d(a,\sigma)\,]^{\,\mathrm{Re}\,\gamma-1}\,,\;\; \sigma \in \Theta_1,$$

$$c_r^{(4,2)} = c_r^{(4,2)}(\gamma) := r\;|\,\gamma\,|\,,\;\; 0 < c_r^{(4,2)} < \infty.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} |\,J_{\Theta_1}\,| &\le \left(c_{k,N}^{(4,1)}\,c_r^{(4,2)}\right)\,h\int\limits_{\Theta_1}\frac{|\,f_w(\sigma)\,|}{d(a,\sigma)\;[\,d(x,\sigma)\,]^{\,N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ &\le \left(c_{k,N}^{(4,1)}\,c_r^{(4,2)}\right)\,h\sum_{z\in\{a\,|\,x,\,x\,|\,a\}}\;\int\limits_{R|_{k\,h}^{d(z,\sigma)}\,[\overline{z}]}\frac{|\,f_w(\sigma)\,|}{[\,d(\overline{z},\sigma)\,]^{\,1+N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ &\le \left(c_k^{(0)}\,c_{k,N}^{(4,1)}\,c_r^{(4,2)}\right)\,h\sum_{z\in\{a,x\}}\;\int\limits_{\Omega\setminus B[z,k\,h]}\frac{M_{f_w}\,(z, d(a,z))}{[\,d(z,\sigma)\,]^{\,1+N-\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma. \end{aligned} \tag{2.21}$$

2. Используем (N:1) и (Δ_1), чтобы получить

$$|\, w_a(y) - w_a(\sigma) \,| \le c^{\,(\mathrm{N}:1)} \, [\, d(y,\sigma) \,]^{\,\mathrm{Re}\,\gamma - 1}, \;\; \sigma \in \Lambda_2^{(3)},$$

и, приняв во внимание, что в силу (Δ_1)

$$\frac{d(a,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le 1 + \frac{d(a,y)}{d(y,\sigma)} \le 1 + \frac{1}{r}\,\frac{d(a,\sigma)}{d(y,\sigma)}, \;\; \sigma \in \Omega \setminus B\,[a, r\,d(a,y)]\,,$$

имеем:

$$\frac{d(a,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le \frac{r}{r-1}, \;\; \sigma \in \Theta_2.$$

Таким образом, на основе

$$|\, J_{\Theta_2} \,| \le \left(c^{\,(\mathrm{N}:1)} \, c^{(4,1)}_{k,N} \right) h \int\limits_{\Theta_2} \left(\frac{d(a,\sigma)}{d(y,\sigma)} \right)^{1-\mathrm{Re}\,\gamma} \frac{|\, f_w(\sigma) \,|}{d(a,\sigma)\; [\, d(x,\sigma) \,]^{\,N-\mathrm{Re}\,\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma$$

получаем, аналогично (2.21),

$$|\, J_{\Theta_2} \,| \le c^{(4,3)}_{k,r,N} \, h \sum_{z \in \{a,x\}} \; \int\limits_{\Omega \setminus B[z, k\,h]} \frac{M_{f_w}\,(z, d(a,z))}{[\, d(z,\sigma) \,]^{\,1+N-\mathrm{Re}\,\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma,$$

где

$$c^{(4,3)}_{k,r,N} = c^{(4,3)}_{k,r,N}(\alpha,\gamma) := c^{\,(\mathrm{N}:1)}(\gamma)\, c^{(4,1)}_{k,N}(\alpha)\, \frac{r}{r-1}, \;\; 0 < c^{(4,3)}_{k,r,N} < \infty.$$

Прежде чем применить Лемму 3 заметим, что

$$\frac{h}{t^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}} \le \frac{h^{\,\mathrm{Re}\,\gamma}\, t^{\,1-\mathrm{Re}\,\gamma}}{t^{\,2-\mathrm{Re}\,\alpha}} = \frac{h^{\,\mathrm{Re}\,\gamma}}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\gamma-\mathrm{Re}\,\alpha}}, \;\; h \le t,$$

а значит,

$$\bigl|\, J_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)}\,\bigr| \leq c\, h^{\operatorname{Re}\gamma} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \;\; 0<c<\infty.$$

Случай $1<\operatorname{Re}\gamma<N+1$**.** В этом случае (2.8) имеет место с

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,\sigma)}{d(y,\sigma)} \leq 1+\frac{h}{(k-1)\,h} = \frac{k}{k-1},$$

что связано с (Δ_1), (A) и (2.20). Таким образом, справедлива следующая оценка:

$$|\,J\,| \leq c_{k,N}^{(4,4)}\, h \int\limits_{\Omega_{\geq}(a)\,\cap\,\Omega_{\geq}(x)} \frac{\Bigl[\max\limits_{z\in\{x,\sigma\}} d(a,z)\Bigr]^{\operatorname{Re}\gamma-1}}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}}\,\frac{|\,f_w(\sigma)\,|}{[\,d(x,\sigma)\,]^{N-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma, \qquad (2.22)$$

где

$$c_{k,N}^{(4,4)} = c_{k,N}^{(4,4)}(\alpha,\gamma) := |\,\gamma\,|\;\frac{k}{k-1}\,c_{k,N}^{(4,1)}(\alpha), \;\; 0<c_{k,N}^{(4,4)}<\infty.$$

Если $d(a,x)\leq d(a,\sigma)$, то (2.22) может быть продолжено как (2.21), но с постоянной $c_{k,N}^{(4,4)}$ вместо $c_{k,N}^{(4,1)}$. Если $d(a,\sigma)\leq d(a,x)$, то $|\,J\,|$ оценивается так же, как $|\,I\,|$ в случае $1<\operatorname{Re}\gamma<1+N$, но с $c_{k,N}^{(4,2)}\,c_\Omega$ вместо $c_\Omega^{(3)}$.

Окончательная оценка четвертого интеграла. Таким образом, после применения Леммы 3 получаем следующий результат:

$$|\,J\,| \leq c\, h^{\gamma_0} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \;\; 0<c<\infty,$$

где константа c оценивается, как обсуждалось выше. □

2.3 Теоремы о действии

В контексте уравнений с операторами потенциального типа особый интерес может быть адресован концепции локального модуля непрерывности, которая вводится следующими двумя определениями:

Определение 2.3. Пусть Ω является ограниченным открытым подмножеством X, определенного ранее.

$$\omega_f(x,h) := \sup_{\sigma\in\Omega\cap B[x,h]} |\, f(x) - f(\sigma)\,|\,, \;\; x\in\Omega, \tag{ω_f}$$

называется модулем субметрии функции f на Ω.

Имеет место следующий основной результат:

Теорема 2.4. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\gamma_0 = \min(1, \operatorname{Re}\gamma)$,

$$\omega \in \Phi_{\gamma_0 - \operatorname{Re}\alpha}\left(\Omega\times[0,\operatorname{diam}(\Omega)]\right), \tag{2.23}$$

$$\sup_{x\in\Omega}\frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le c_\omega, \;\; 0 < c_\omega < \infty, \tag{2.24}$$

и

$$\begin{gathered} c_\omega^{(1)}\,\omega\left(y, d(x,y)\right) \le \omega\left(x, d(x,y)\right) \le c_\omega^{(2)}\,\omega\left(y, d(x,y)\right), \\ x,y\in\Omega, \;\; 0 < c_\omega^{(1)}, c_\omega^{(2)} < \infty. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Следующий интегральный оператор ограничен:

$$\mathcal{I}^\alpha_\Omega : \mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) \to H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a),$$

где

$$\omega_\alpha(x,h) := h^{\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(x,h). \tag{ω_α}$$

Доказательство. Вследствие оценки типа Зигмунда из Теоремы 2.2,

$$\begin{aligned} |\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\, f_w\,(x) - \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\, f_w\,(y)\,| &\le c\, h^{\operatorname{Re}\alpha} \sum_{z\in\{a,x,y\}} \int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha} \frac{M_{f_w}(z,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \\ &\le c\, h^{\operatorname{Re}\alpha} \sum_{z\in\{a,x,y\}} \omega(z,h), \quad 0<c<\infty, \end{aligned}$$

где применяется условие (2.23) Как только (2.24) и (2.25) приняты во внимание, утверждение теоремы следует немедленно:

$$|\,\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\, f_w\,(x) - \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\, f_w\,(y)\,| \le c\,\omega_\alpha(x,h), \;\; 0<c<\infty,$$

где константа c определяется констант из оценки типа Зигмунда и констант, возникающих в условиях теоремы. □

Теорема 2.5. *В условиях* (2.23), (2.24) *и* (2.25), *потенциал Рисса*

$$I^{\,\alpha} : \mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a) \to H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$$

ограничен, где имеет место (ω_α).

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, используем

$$w_a(x)\, I^{\,\alpha}\, f\,(x) = I^{\,\alpha}\, f_w\,(x) + \mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}\, f_w\,(x)\,.$$

Имеет место следующее свойство классов Бари–Стечкина:

$$\Phi_{1-\operatorname{Re}\alpha} \cap \Phi_{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha} = \Phi_{\gamma_0-\operatorname{Re}\alpha}, \;\; \gamma_0 = \min(1, \operatorname{Re}\gamma),$$

так что I^{α} ограничен по Теореме 2.1; $\mathcal{I}^{\alpha}$ ограничен по Теореме 2.4. □

Глава 3. Гиперсингулярные интегралы на метрических пространствах с мерой в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом

3.1 Один оператор гиперсингулярного интегрирования

Очевидно следующее представление, справедливое для произвольной весовой функции $w(x)$:

$$w(x)\int_{\Omega}\frac{f(\sigma)-f(x)}{[d(x,\sigma)]^{N+\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma=\int_{\Omega}\frac{f_w(\sigma)-f_w(x)}{[d(x,\sigma)]^{N+\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma+ \\ +\int_{\Omega}\frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\frac{f_w(\sigma)}{[d(x,\sigma)]^{N+\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma, \tag{3.1}$$

где — как и ранее — применяется обозначение (2.1). Введем в рассмотрение интегральный оператор, представляющий интерес в связи с исследованием второго слагаемого в правой части (3.1):

$$\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x) := \int_{\Omega} \frac{w(x) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{[d(x,\sigma)]^{N+\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Содержание этой главы посвящено изучению отображений функции квалифицированной гладкости при наличии степенного веса вида (10). Ясно, что $f_w(a) = 0$ при $w(x) = w_a(x)$, поэтому из общего представления (3.1) имеем

$$w(x)\, D^{\alpha} f(x) = D^{\alpha} f_w(x) + \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Для гиперсингулярного интеграла D^{α} в правой части выражения (3.2) известна следующая теорема:

Теорема 3.1. *Пусть гёльдеровская характеристика*

$$\omega \in \Phi_{1+\operatorname{Re}\alpha}^{\operatorname{Re}\alpha}, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \tag{3.3}$$

а также удовлетворяет условию непрерывности типа Дини:

$$\begin{gathered} c_1\, \omega\left(y, d(x,y)\right) \le \omega\left(x, d(x,y)\right) \le c_2\, \omega\left(y, d(x,y)\right), \\ x, y \in \Omega, \quad 0 < c_1, c_2 < \infty. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Тогда оператор D^{α} ограничен из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ в $H^{\omega_{-\alpha}(\cdot)}(\Omega)$ с характеристикой

$$\omega_{-\alpha}(x,h) := h^{-\operatorname{Re}\alpha}\, \omega(x,h), \quad 0 < h \le l < \infty. \tag{3.5}$$

Доказательство. Теорема 3.1 доказана в [78], а также приводилась в [16]. □

Таким образом, дальнейшая работа имеет целью описание обобщенной переменной гёльдеровости специального оператора $\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha}$.

3.2 Оценки типа Зигмунда для оператора $\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha}$

Чтобы обеспечить достаточную наглядность, а также подробнее проиллюстрировать методику, примененную ранее к исследованию потенциала Рисса, рассмотрим построение оценки типа Зигмунда для оператора $\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha}$ в двух случаях: условно малого показателя веса, вещественная часть которого $\mathrm{Re}\,\gamma \in (0,1]$, и условно большого, отвечаюшего требованию $\mathrm{Re}\,\gamma > 1$.

3.2.1 Случай малого показателя веса

Теорема 3.2. *Пусть* $0 < l < \infty$*, задана весовая функция вида* (10)*:*

$$w(x) = d^{\gamma}(x,a), \;\; a, x \in \Omega, \;\; 0 < \mathrm{Re}\,\gamma \le 1,$$

а под $M_f(x,h)$ *подразумевается локальный модуль непрерывности в смысле Определения 9. Имеет место следующая оценка типа Зигмунда:*

$$|\,\mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(x) - \mathfrak{D}_{\Omega}^{\alpha} f_w(y)\,| \le c \left\{ \sum_{z\in\{a,x,y\}} \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, z, t\right)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \right.$$

$$\left. + \, h^{\,\mathrm{Re}\,\gamma} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\gamma+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}, \quad 0 < c < \infty,$$

где $y \in B[x,h]$*,* $0 < h < l$*.*

Доказательство. Отметим, что в условиях теоремы выполнено:

$$x, y \in \Omega: \quad d(x,y) \le h < k\,h, \;\; k > 1. \tag{3.6}$$

Имеет место следующая декомпозиция множества Ω:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4)\,,$$

где введены подмножества

$$\begin{aligned} \Omega_{1\,|\,2} &:= \{\, \sigma \in \Omega :\ d(x\,|\,a, \sigma) < k\,h\,\}\,, \\ \Omega_{3\,|\,4} &:= \{\, \sigma \in \Omega :\ d(x\,|\,a, \sigma) \geq k\,h\,\}\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь, как и ранее, запись вида «$a\,|\,b$» употребляется для обозначения выбора из двух вариантов, условия которого очевидны или явно представлены.
В терминах разбиения (3.7) имеет место представление

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y) &= \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1 \cup \Omega_2} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1 \cup \Omega_2} f_w(y) + \\ &+ \int\limits_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{[w(x) - w(y)] + [w(y) - w(\sigma)]}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{[d(x,\sigma)]^{N+\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma - \\ &- \int\limits_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{[d(y,\sigma)]^{N+\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma, \end{aligned}$$

из которого следует оценка

$$\begin{aligned} |\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y)\,| &\leq \left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1 \cup \Omega_2} f_w(x)\,\right| + \left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1 \cup \Omega_2} f_w(y)\,\right| + \\ &+ |\,w(x) - w(y)\,| \cdot |\,I\,| + |\,J\,|\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где явно выделены следующие интегралы:

$$I := \int\limits_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{w(\sigma)\ [d(x,\sigma)]^{N+\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

$$J := \int\limits_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \left(\frac{1}{\left[d(x,\sigma)\right]^{N+\alpha}} - \frac{1}{\left[d(y,\sigma)\right]^{N+\alpha}} \right) f_w(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Будем последовательно оценивать слагаемые из правой части (3.8), конструируя мажоранты в виде интегралов $M(f_w, z, t)$ как функции вещественной переменной t.

Оценка первого слагаемого

Множество $\Omega_1 \cup \Omega_2$ предполагает четыре взаимоисключающих варианта расположения точек x и a:

$$\begin{aligned} &\Lambda_{1\,|\,2}(x) := \{\, \sigma \in \Omega :\; d\,(a\,|\,x,\sigma) \le d\,(x\,|\,a,\sigma) < k\,h \,\}\,, \\ &\Theta_{1\,|\,2}(x) := \{\, \sigma \in \Omega :\; d\,(a\,|\,x,\sigma) < k\,h \le d\,(x\,|\,a,\sigma) \,\}\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где принципиально важным является соотношение $d(a,\sigma)$ и $d(x,\sigma)$. Исходя из двух вариантов последнего, а именно:

$$\Lambda_1(x) \cup \Theta_1(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x),$$

составим мажоранту как сумму соответствующих интегралов, обозначая для краткости введенные выражением (3.9) множества через Λ_j и Θ_j, $j = 1, 2$.

Оценка интеграла по $\Lambda_1 \cup \Theta_1$. Следующее неравенство очевидно:

$$|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| \le M\,(f_w, a, d(a,\sigma))\,, \;\; \sigma \in \Lambda_1 \cup \Theta_1.$$

Имея в виду соотношение расстояний вида $d(a,\sigma) \le d(x,\sigma)$, характерное для

$\Lambda_1 \cup \Theta_1$, запишем, применив Лемму 2:

$$
\begin{aligned}
\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)\,\right| &\le \int\limits_{\Lambda_1\cup\Theta_1} \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)^{\operatorname{Re}\gamma}\,[d(x,\sigma)]^{N-\operatorname{Re}\gamma+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\
&\le \int\limits_{B(a,k\,h)} \frac{M\left(f_w,a,d(a,\sigma)\right)}{[d(a,\sigma)]^{N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0\,c_1 \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w,a,\tau\right)}{\tau^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\tau,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

где использована замена $t = k\,\tau$, $\tau \in (0,h)$, вследствие чего константа c_1 выражается исходя из свойства (M.2) как $c_1 = k^{\,1-\operatorname{Re}\alpha}$ в случае натурального k и, согласно свойству (M.3), как $c_1 = (k+1)\,k^{\,-\operatorname{Re}\alpha}$ в общем случае.

Оценка интеграла по $\Lambda_2 \cup \Theta_2$. Для интеграла по $\Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x)$ рассуждения во многом аналогичны. Выше $M_f(z,t)$ рассматривалась при $z = a$, поскольку $d(a,\sigma)$ полагалось минимальным. Теперь же оценим числитель подынтегрального выражения, ориентируясь на соотношения для f_w в окрестности точки $z = x$:

$$
\begin{aligned}
|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,| &\le |\,f_w(\sigma)-f_w(x)\,| + |\,f_w(x)-f_w(a)\,| \le \\
&\le 3\,M\left(f_w,x,d(a,\sigma)\right), \quad d(x,\sigma)\le d(a,\sigma).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Поясним, что для второго слагаемого в промежуточной части (3.11) требуемая оценка следует из неравенства

$$
d(x,a) \le d(x,\sigma) + d(a,\sigma) \le 2\,d(a,\sigma),
$$

и свойства (M.2) локального модуля непрерывности:

$$
|\,f_w(x)-f_w(a)\,| \le M\left(f_w,x,d(x,a)\right) \le 2\,M\left(f_w,x,d(a,\sigma)\right).
$$

Далее, в силу свойства (M.1) имеет место:

$$\frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d(a,\sigma)} \le 2\,\frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d(x,\sigma)}, \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma), \tag{3.12}$$

а значит, вновь применив Лемму 2, имеем:

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_2\cup\Theta_2} f_w(x)\,\right| \le 3 \int\limits_{\Lambda_2\cup\Theta_2} \frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\ [d(x,\sigma)]^{N-\operatorname{Re}\gamma+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le$$

$$\le 6 \int\limits_{B(x,kh)} \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{[d(x,\sigma)]^{N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le C_1 \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, a, t\right)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad C_1 = 6\,c_0\,c_1.$$

Таким образом, мажоранта первого слагаемого из генерального представления (3.8) имеет вид:

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| \le C_1 \left\{ \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(x,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}.$$

Оценка второго слагаемого

В силу (3.6) и (Δ_1) имеет место:

$$d(y,\sigma) \le d(x,y) + d(x,\sigma) \le (k+1)\,h, \quad \forall \sigma \in \Omega_1,$$

что означает следующее вложение:

$$\begin{gathered} \Omega_1 \subseteq \{\,\sigma \in \Omega :\ d(y,\sigma) \le (k+1)\,h\,\} =: G, \\ G \cup \Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{2} \Lambda_i(y) \cup \Theta_i(y), \end{gathered} \tag{3.13}$$

где $\Lambda_i(y)$ и $\Theta_i(y)$ заданы выражением (3.9). Повторив рассуждения из предыдущего пункта, приходим к искомой оценке:

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y)\,\right| \le C\,\left\{\,\int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(y,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\,\right\}.$$

Оценка третьего слагаемого

Прежде всего отметим неравенство

$$|\,w(x)-w(y)\,| = \left|\,d(x,a)^{\operatorname{Re}\gamma} - d(y,a)^{\operatorname{Re}\gamma}\,\right| \le c^{\,(\mathrm{N}:1)}\;[\,d(x,y)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\,, \qquad (3.14)$$

следующее из (N:1). Применив (3.14), имеем:

$$\begin{gathered} |\,w(x)-w(y)\,|\cdot|\,I\,| \le \\ \le \left(c^{\,(\mathrm{N}:1)}\,k^{\operatorname{Re}\gamma}\right)\,h^{\operatorname{Re}\gamma}\int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{w(\sigma)\;[d(x,\sigma)]^{\,N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma. \end{gathered} \qquad (3.15)$$

Множество $\Omega_3\cap\Omega_4$ оставляет два равновозможных варианта расположения точек x и σ относительно точки a:

$$\begin{gathered} H_{1\,|\,2}(x) := \{\,\sigma\in\Omega:\; k\,h \le d(a\,|\,x,\sigma) \le d(x\,|\,a,\sigma)\,\}\,, \\ \Omega_3\cap\Omega_4 \subseteq H_1(x)\cup H_2(x). \end{gathered} \qquad (3.16)$$

Представим интеграл в правой части (3.15) суммой интегралов с тем же подынтегральным выражением, но взятых по $H_j = H_j(x,\,k\,h)$, $j=1,2$, соответственно; обозначим последние через I_1 и I_2.

Оценка I_1. Интеграл I_1 оценивается в тех же соображениях, что и слагаемое $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)$, отсылая к (3.10). Именно, поскольку $d(a,\sigma)$ минимально на H_1, запишем, применив Лемму 3:

$$|\, I_1\,| \le c \int\limits_{\Omega\setminus B(a,\,k\,h)} \frac{M\,(f_w, a, d(a,\sigma))}{[d(a,\sigma)]^{\,N+\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\gamma}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le C \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\gamma}}\,\mathrm{d}\,t.$$

Оценка I_2. Для оценки интеграла I_2 воспользуемся теми же рассуждениями, что лежали в основе оценки $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_2\cup\Theta_2} f_w(x)$. Обратимся к (3.11) и затем (3.12):

$$|\, I_2\,| \le 3 \int\limits_{H_2} \frac{M\,(f_w, x, d(a,\sigma))}{d^{\operatorname{Re}\gamma}(a,\sigma)\,[d(x,\sigma)]^{\,N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le 6 \int\limits_{\Omega\setminus B(x,kh)} \frac{M(f_w, x, d(x,\sigma))}{[d(x,\sigma)]^{\,N+\operatorname{Re}\gamma+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

где осталось лишь применить Лемму 3.

Таким образом, имеем для третьего слагаемого:

$$|\, w(x)-w(y)\,|\cdot|\, I\,| \le C\,h^{\operatorname{Re}\gamma} \left\{ \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(x,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\gamma}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\gamma}}\,\mathrm{d}\,t \right\}.$$

Оценка четвертого слагаемого

Для удобства обозначим $\lambda := N + \operatorname{Re}\alpha$. Имеем следующую мажоранту:

$$|\, J\,| \le \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{\left|\,[\,d(a,y)\,]^{\operatorname{Re}\gamma} - [\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\,\right|}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}} \left|[\,d(x,\sigma)\,]^{-\lambda} - [\,d(y,\sigma)\,]^{-\lambda}\right| \cdot$$

$$\cdot\,|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|\;\mathrm{d}\,\sigma.$$

При оценке отношения в подынтегральном выражении предположим сперва, что $d(a,\sigma) \le d(a,y)$. В этом случае воспользуемся числовым неравенством (N:2), а затем обратным неравенством треугольника (Δ_2), получая выражение

$$\frac{\Big|\, [\, d(a,y)\,]^{\operatorname{Re}\gamma} - [\, d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma} \,\Big|}{[\, d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}} \le |\,\gamma\,|\, \frac{d(y,\sigma)}{d(a,\sigma)}. \qquad (3.17)$$

К оценке второго модуля в правой части мажоранты $|\,J\,|$ применим неравенство С. Л. Соболева (N:3):

$$\Big|\, [\, d(x,\sigma)\,]^{-\lambda} - [\, d(y,\sigma)\,]^{-\lambda} \,\Big| \le \frac{c_\lambda\, k\, h}{[\, d(x,\sigma)\,]^{\lambda}\, d(y,\sigma)} \left[1 + \frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \right]^{\lambda-1}.$$

Ясно, что при $N < 1 - \operatorname{Re}\alpha$, то есть $\lambda < 1$, последняя скобка мажорируется единицей. Покажем, что она ограничена и в противоположном случае.

Принимая во внимание конструкцию множества интегрирования (3.7), а также изначальное условие (3.6), констатируем истинность двойного неравенства

$$d(x,y) < k\,h \le d(x,\sigma), \;\; \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4,$$

а значит, и нижней оценки

$$d(y,\sigma) \ge d(x,\sigma) - d(x,y) > (k-1)\,h, \;\; \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4.$$

Как следствие представленных выше соотношений имеем

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le \frac{d(x,y) + d(y,\sigma)}{d(y,\sigma)} < 1 + \frac{k\,h}{d(y,\sigma)} < 1 + \frac{k}{k-1}, \;\; k > 1.$$

Таким образом, в случае $\sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4$ справедлива оценка

$$|\, d^{-\lambda}(x,\sigma) - d^{-\lambda}(y,\sigma)\,| \le \frac{c_\lambda\, h}{d^{\lambda}(x,\sigma)\, d(y,\sigma)}, \qquad (3.18)$$

в которой постоянная c_λ зависит от параметров α, N, а также значения $k > 1$.

Объединив теперь оценки (3.17) и (3.18), имеем:

$$|\,J\,| \le C_2\,h \sum_{s=1}^{2} \int\limits_{H_s} \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\,\left[d(x,\sigma)\right]^{N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma = C_2\,h\,(J_1+J_2),$$

где $C_2 = \operatorname{Re}\gamma\, c_0\, c_\lambda$, а интегралы J_1 и J_2 имеют подынтегральное выражение интеграла J, но взяты, соответственно, по множествам H_1 и H_2, определенным выражением (3.16).

Оценка J_1. На множестве H_1 выполняется соотношение: $d(a,\sigma) \le d(x,\sigma)$. Учитывая это, имеем, применив Лемму 3:

$$J_1 \le \int\limits_{\Omega\setminus B(a,kh)} \frac{M_{f_w}(a, d(a,\sigma))}{d\left[(a,\sigma)\right]^{1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0\,c_1 \int\limits_{h}^{l} \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t.$$

Оценка J_2. На H_2 воспользуемся (3.11), (3.12) и Леммой 3:

$$J_2 \le 6 \int\limits_{\Omega\setminus B(x,kh)} \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le C_1 \int\limits_{h}^{l} \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Предположим теперь, что $d(a,y) \le d(a,\sigma)$. Воспользовавшись (N:1), представим вместо (3.17) оценку

$$\frac{\left|\,[\,d(a,y)\,]^{\operatorname{Re}\gamma} - [\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}\,\right|}{[\,d(a,\sigma)\,]^{\operatorname{Re}\gamma}} \le \frac{|\,\gamma\,|}{\operatorname{Re}\gamma}\,\left[\frac{d(y,\sigma)}{d(a,\sigma)}\right]^{\operatorname{Re}\gamma}. \tag{3.19}$$

Считая $d(a,\sigma) \le d(y,\sigma)$, воспользуемся (Δ_1), чтобы записать:

$$d(y,\sigma) \le d(a,\sigma) + d(a,y) \le 2\,d(a,\sigma),$$

немедленно сводя ситуацию к полученным ранее оценкам J_1 и J_2. Предположив же противное, зафиксируем $r > 0$ и рассмотрим

В заключение отметим, что

$$\frac{h}{t^{2+\mathrm{Re}\,\alpha}} \le \frac{h^{\mathrm{Re}\,\gamma}\, t^{1-\mathrm{Re}\,\gamma}}{t^{2+\mathrm{Re}\,\alpha}} = \frac{h^{\mathrm{Re}\,\gamma}}{t^{1+\mathrm{Re}\,\alpha+\mathrm{Re}\,\gamma}}, \;\; h \le t, \;\; 0 < \mathrm{Re}\,\gamma \le 1.$$

Таким образом, имеем для последнего слагаемого из представления (3.8):

$$|\,J\,| \le C_1\, C_2\, h^{\mathrm{Re}\,\gamma} \left\{ \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(x,t)}{t^{1+\mathrm{Re}\,\gamma+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{1+\mathrm{Re}\,\gamma+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}.$$

Завершающие выводы

Объединив полученные выше оценки, получаем утверждение доказываемой теоремы. Интересно отметить, что константа c, с которой оно справедливо, представляет собой произведение C_1 и C_2, значения которых могут быть определены в контексте конкретной задачи. $\square$

Отметим, что под локальным модулем непрерывности $M_f(x,h)$ могут подразумеваться:

- модуль субметрии $\omega_\Omega(f,x,h)$, если он полуаддитивен по h;
- минимальная мажоранта модуля $\omega_\Omega(f,x,h)$ из класса локальных модулей непрерывности, если $\omega_\Omega(f,x,h)$ не обладает свойством полуаддитивности по h для данной функции f на Ω;
- определенный выше локальный модуль непрерывности (8).

Оригинальное определение пространств обобщенной переменной гёльдеровости из предшествующих работ основывалось на втором варианте.

3.2.2 Случай большого показателя веса

Аналогично рассмотренному выше случаю, имеет место

Теорема 3.3. *Пусть* $0 < l \leq \operatorname{diam}(\Omega)$, *весовая функция имеет вид:*

$$w(x) = d^{\gamma}(x,a), \quad a, x \in \Omega, \quad \operatorname{Re}\gamma > 1.$$

и $M_f(x,h)$ *имеет тот же смысл, что и для Теоремы 3.2. Для всяких*

$$x, y \in \Omega : \quad d(x,y) \leq h, \quad 0 < h \leq l,$$

имеет место следующая оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y)\,| \leq c \left\{ \sum_{z \in \{a,x,y\}} \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \right.$$
$$\left. + h \sum_{z \in \{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}, \quad 0 < c < \infty.$$

Доказательство. Пусть, как и при доказательстве Теоремы 3.2, имеют место декомпозиция (3.7) множества Ω и следующее из нее представление (3.8). Оценивая последовательно каждое слагаемое в его правой части, рассмотрим, в каких моментах проявляются отличия между подходами к получению мажорант нужного вида.

Оценка первого слагаемого

Рассмотрим

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| \le \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \frac{|\,w(x)-w(\sigma)\,|}{w(\sigma)}\, \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{[d(x,\sigma)]^{\,N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Предполагается, что $\operatorname{Re}\gamma > 1$, поэтому неравенство (N:1) записывается в виде

$$\begin{aligned}
|\,w(x)-w(\sigma)\,| = \left|\,d^{N}(a,x)-d^{N}(a,\sigma)\,\right| \le \\
\le |\,\gamma\,|\; d(x,\sigma)\, \left\{ \max_{z\in\{x,\sigma\}} d(a,z) \right\}^{-1+\operatorname{Re}\gamma}, \quad \sigma\in\Omega_1\cup\Omega_2,
\end{aligned}$$

что предполагает необходимость рассматривать два подынтегральных множества, положив $G=\Omega_1\cup\Omega_2$:

$$\mathrm{B}_x(G) := G\cap B\left[a, d(a,x)\right],\ \ \mathrm{B}^*_x(G) := G\setminus B\left[a, d(a,x)\right]. \tag{3.20}$$

Таким образом, имеем следующую мажоранту:

$$\begin{aligned}
\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| \le \int\limits_{\mathrm{B}^*_x(\Omega_1\cup\Omega_2)} \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\ [d(x,\sigma)]^{\,-1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma + \\
+ \int\limits_{\mathrm{B}_x(\Omega_1\cup\Omega_2)} \frac{[d(a,x)]^{\,-1+\operatorname{Re}\gamma}}{d^{\operatorname{Re}\gamma}(a,\sigma)}\, \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{[d(x,\sigma)]^{\,-1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Учтем также, что по-прежнему актуальна декомпозиция (3.9) множества $\Omega_1\cup\Omega_2$, отражающая соотношения расстояний $d(a,\sigma)$ и $d(x,\sigma)$:

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{2} \left[\Lambda_j(x) \cup \Theta_j(x)\right].$$

Оценка интеграла I_1. Представим мажоранту интеграла I_1 как сумму интегралов $I_{1,1}$ и $I_{1,2}$ с тем же подынтегральным выражением, но взятых, соответственно, по множествам

$$G_j^* := \mathrm{B}_x^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \,\cap\, \left[\Lambda_j(x) \,\cup\, \Theta_j(x)\right], \quad j = 1, 2.$$

Чтобы оценить первый из них, воспользуемся следующей импликацией:

$$\sigma \in \Lambda_1(x) \cup \Theta_1(x) \implies \sigma \in B(a, k\,h) \quad \text{и} \quad d(a,\sigma) \le d(x,\sigma).$$

Следовательно, по Лемме 2,

$$I_{1,1} := \int\limits_{G_1^*} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\ \left[d(x,\sigma)\right]^{-1+N+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \int\limits_{B(a,k\,h)} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{\left[d(a,\sigma)\right]^{N+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le$$
$$\le c \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, a, t\right)}{t^{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0 < c < \infty,$$

причем значение константы c обсуждалось ранее в связи с оценкой (3.10).

В то же время для интеграла $I_{1,2}$ релевантно следующее наблюдение:

$$\sigma \in \Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x) \implies \sigma \in B(x, k\,h) \quad \text{и} \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma).$$

Далее, $\sigma \in \mathrm{B}\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$ означает, что $d(a,x) \le d(a,\sigma)$ и, как следствие, выполнено:

$$|\, f_w(a) - f_w(\sigma)\,| \le |\, f_w(a) - f_w(x)\,| + |\, f_w(x) - f_w(\sigma)\,| \le 2\, M\,(f_w, x, d(a,\sigma))\,.$$

Наконец, примем во внимание (3.12), а именно:

$$\frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)} \le \frac{M\,(f_w, x, d(a,\sigma))}{d(a,\sigma)} \le 2\,\frac{M\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d(x,\sigma)}, \quad \sigma \in G_1^*.$$

Как результат, по Лемме 2 имеем:

$$I_{1,2} := \int\limits_{G_1^*} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\ [d(x,\sigma)]^{-1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c\int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, x, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0 < c < \infty.$$

Таким образом, интеграл I_1 мажорируется суммой одномерных интегралов необходимого вида.

Оценка интеграла I_2. При оценке I_2 необходимо рассмотреть отношение расстояний, которым представлен первый дробный сомножитель в подынтегральном выражении. Предложим следующую декомпозицию множества Ω, отражающую варианты расположения точек x и σ относительно точки a:

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}(x) := \left\{ \sigma \in \Omega :\ \frac{1}{\operatorname{Re}\gamma}\, d(a,x) \le d(a,\sigma) \le d(a,x) \right\}, \\ &N(x) := \left\{ \sigma \in \Omega :\ d(a,\sigma) \le \frac{1}{\operatorname{Re}\gamma}\, d(a,x) \right\}, \end{aligned} \qquad \operatorname{Re}\gamma > 1,$$

согласно которому выполнено вложение:

$$\mathrm{B}_x\,(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subseteq \mathrm{M}(x) \cup N(x).$$

Отметим следующие импликации:

$$\sigma \in \mathrm{M}(x) \implies \frac{d(a,x)}{d(a,\sigma)} \le \operatorname{Re}\gamma, \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} \sigma \in N(x) \implies \left\{ \frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)} \le \frac{d(a,\sigma)+d(x,\sigma)}{d(x,\sigma)} \le \right. \\ \left. \le 1 + \frac{1}{\operatorname{Re}\gamma} \cdot \frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)} \right\} \implies \frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)} \le \frac{\operatorname{Re}\gamma}{\operatorname{Re}\gamma - 1}. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Представим I_2 в виде суммы интегралов $I_{2,1}$ и $I_{2,2}$ с тем же подынтегральным выражением, но взятых по пересечениям $\Omega_1 \cup \Omega_2$ с $\mathrm{M}(x)$ и $N(x)$ соответственно. Согласно (3.21), интеграл $I_{2,1}$ оценивается так же, как и I_1:

$$\begin{aligned} I_{2,1} := \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2\cap \mathrm{M}(x)} \frac{[d(a,x)]^{-1+\operatorname{Re}\gamma}}{d^{\operatorname{Re}\gamma}(a,\sigma)} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{[d(x,\sigma)]^{-1+N+\operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ \le \operatorname{Re}\gamma^{-1+\operatorname{Re}\gamma} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Lambda_j(x,h)\,\cup\,\Theta_j(x,h)} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\;[d(x,\sigma)]^{-1+N+\operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ \le c \left\{ \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w,a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w,x,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,t \right\}, \end{aligned}$$

где точное значение постоянной зависит от выбора $\operatorname{Re}\gamma$. Аналогично,

$$\begin{aligned} I_{2,2} := \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2\cap N(x)} \left[\frac{d(a,x)}{d(x,\sigma)}\right]^{-1+\operatorname{Re}\gamma} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d^{\operatorname{Re}\gamma}(a,\sigma)\;[d(x,\sigma)]^{N+\operatorname{Re}\alpha-\operatorname{Re}\gamma}} \,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ \le c \left\{ \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w,a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w,x,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}} \,\mathrm{d}\,t \right\}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущей оценке, точное значение константы c выражается через величину $\operatorname{Re}\gamma$.

В результате приведенных выше оценок имеем следующую мажоранту первого слагаемого в правой части неравенства (3.8):

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| \le c\left\{\int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, a, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, x, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\right\},\ \ 0 < c < \infty.$$

Оценка второго слагаемого

Здесь имеют место те же соображения, что и при оценке второго слагаемого в рамках доказательства Теоремы 3.2. Именно, пользуемся тем, что

$$d(x,y) \le h \quad \text{по предположению,}\ \ \text{и}\ \ \sigma\in\Omega_1\cup\Omega_2 \implies d(x,\sigma) < k\,h.$$

Следовательно, согласно неравенству треугольника (Δ_1),

$$d(y,\sigma) \le d(x,y) + d(x,\sigma) \le (k+1)\,h,\ \ \sigma\in\Omega_1\cup\Omega_2,$$

так что вновь имеет место вложение (3.13), и описанный выше подход может быть повторен, приводя к следующей мажоранте второго слагаемого:

$$\left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y)\,\right| \le c\left\{\int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, a, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M\,(f_w, y, t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\right\}.$$

Оценка третьего слагаемого

Будем предполагать, что $d(a,x) \ge d(a,y)$. Согласно неравенству (N:1), имеем следующую оценку:

$$| \, w(x) - w(y) \, | = | \, d^{\gamma}(a,x) - d^{\gamma}(a,y) \, | \leq$$

$$\leq | \, \gamma \, | \; d(x,y) \; [d(a,x)]^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \leq | \, \gamma \, | \; h \; [d(a,x)]^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \, .$$

Вновь воспользуемся разбиением (3.16), отражающим характерные для множества $\Omega_3 \cap \Omega_4$ соотношения расстояний. Имеем следующую мажоранту второго слагаемого в правой части основной оценки (3.8):

$$| \, w(x) - w(y) \, | \, \cdot \, | \, \mathfrak{I} \, | \leq | \, \gamma \, | \; h \; (\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2) \, ,$$

$$\mathfrak{I}_j := \int\limits_{H_j(x)} \left[\frac{d(a,x)}{d(a,\sigma)} \right]^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \frac{| \, f_w(\sigma) - f_w(a) \, |}{d(a,\sigma) \; [d(x,\sigma)]^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma, \;\; j = 1, 2.$$

В то же время необходимо принять во внимание соотношения расстояний, заданные множествами (3.20), рассмотрев пересечения последних с H_j.

Итак, имеем по Лемме 2:

$$\int\limits_{H_j(x) \cap \mathrm{B}^{*}_{x}(\Omega_3 \cap \Omega_4)} \left[\frac{d(a,x)}{d(a,\sigma)} \right]^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \frac{| \, f_w(\sigma) - f_w(a) \, |}{d(a,\sigma) \; [d(x,\sigma)]^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq \int\limits_{H_j(x)} \frac{| \, f_w(\sigma) - f_w(a) \, |}{d(a,\sigma) \; [d(x,\sigma)]^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c \int\limits_{h}^{l} \frac{M \, (f_w, a \, | \, x, t)}{t^{\,2+\mathrm{Re}\,\alpha}} \, \mathrm{d}\,t, \quad a \, | \, x = \begin{cases} a, & j = 1, \\ x, & j = 2, \end{cases}$$

где c — положительная постоянная.

Оценим интегралы по множествам

$$G_j = H_j(x) \cap \mathrm{B}_x\left(\Omega_3 \cap \Omega_4\right),$$

$$G_j \subseteq \left[H_j(x) \cap \mathrm{M}(x)\right] \cup \left[H_j(x) \cap N(x)\right], \;\; j = 1, 2,$$

где $\mathrm{M}(x)$ и $N(x)$ введены выше выражением (3.2.2). Используем теперь импликацию (3.21) совместно с тем фактом, что

$$d(a,\sigma) \leq d(x,\sigma), \;\; \sigma \in H_1(x),$$

а также импликацию (3.22), учитывая

$$d(x,\sigma) \leq d(a,\sigma), \;\; \sigma \in H_2(x),$$

чтобы получить следующую оценку:

$$\int\limits_{G_j} \left[\frac{d(a,x)}{d(a,\sigma)}\right]^{-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\;\left[d(x,\sigma)\right]^{N+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq \mathrm{Re}\,\gamma^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \int\limits_{H_j(x)\cap \mathrm{M}(x)} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\;\left[d(x,\sigma)\right]^{-1+N+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma +$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{Re}\,\gamma}{\mathrm{Re}\,\gamma - 1}\right)^{-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \int\limits_{H_j(x)\cap N(x)} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d^{\,\mathrm{Re}\,\gamma}(a,\sigma)\;\left[d(x,\sigma)\right]^{N+\mathrm{Re}\,\alpha-\mathrm{Re}\,\gamma}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c\;\mathrm{Re}\,\gamma^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma} \sum_{z\in\{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M\left(f_w, z, t\right)}{t^{2+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad \mathrm{Re}\,\gamma > 1, \quad 0 < c < \infty.$$

Таким образом, третье слагаемое в правой части основного неравенства

(3.8) имеет следующую мажоранту:

$$|\, w(x) - w(y)\,| \cdot |\, \mathfrak{I}\,| \leq c\, h \sum_{z \in \{a,x\}} \int\limits_h^l \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{\,2+\operatorname{Re}\alpha}}\, \mathrm{d}\, t, \;\; 0 < c < \infty.$$

Оценка четвертого слагаемого

Рассматривается следующий интеграл:

$$|\, \mathfrak{I}\,| = \int\limits_{\Omega_3 \cap \Omega_4} \frac{|\, d^{\,\gamma}(a,y) - d^{\,\gamma}(a,\sigma)\,|}{d^{\operatorname{Re}\gamma}(a,\sigma)} \left|\, [d(x,\sigma)]^{\,-N-\alpha} - [d(y,\sigma)]^{\,-N-\alpha} \right| \cdot$$

$$\cdot \;|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|\;\, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Используя неравенство (N:1), получаем оценку:

$$\frac{\left|\, d^{\gamma}(a,y) - d^{N}(a,\sigma)\,\right|}{d^{\operatorname{Re}\gamma}(a,\sigma)} \leq |\,\gamma\,|\; \frac{d(y,\sigma)}{d(a,\sigma)} \left\{ \frac{\max\,[d(a,y), d(a,\sigma)]}{d(a,\sigma)} \right\}^{\,-1+\operatorname{Re}\gamma},$$

мотивирующую обратиться к декомпозиции на множества $\mathrm{B}_y\,(\Omega_3 \cap \Omega_4)$ и $\mathrm{B}^*_y\,(\Omega_3 \cap \Omega_4)$, введенных выше выражением (3.20).

В то же время, использовав (N:2), имеем:

$$\begin{aligned} &\left|\, \frac{1}{d^{\,N+\alpha}(x,\sigma)} - \frac{1}{d^{\,N+\alpha}(y,\sigma)} \right| \leq \\ &\quad \leq h\;(N + \operatorname{Re}\alpha)\, \frac{[d(x,\sigma) + d(y,\sigma)]^{\,-1+N+\operatorname{Re}\alpha}}{[d(x,\sigma)\, d(y,\sigma)]^{\,N+\operatorname{Re}\alpha}} =: A. \end{aligned} \tag{3.23}$$

По изначальному предположению, $d(x,y) \leq h$; кроме того, выполнено неравенство: $d(x,\sigma) \geq k\,h$, если $\sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4$, поэтому имеет место оценка:

$$\frac{d(y,\sigma)}{d(x,\sigma)} \leq \frac{d(x,\sigma)+d(x,y)}{d(x,\sigma)} \leq 1+\frac{h}{d(x,\sigma)} \leq \frac{1+k}{k}, \quad k>1, \tag{3.24}$$

Сократив $d(x,\sigma)$, возможно продолжить неравенство (3.23) следующим образом:

$$A \leq \frac{c\,h}{d(x,\sigma)\,d^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}(y,\sigma)}, \ \ c \geq \frac{N+\mathrm{Re}\,\alpha}{2^{\,1-N-\mathrm{Re}\,\alpha}}.$$

Итак, в силу (3.24), имеем следующую оценку:

$$|\,\mathfrak{J}\,| \leq c\,h \left\{ \int\limits_{\mathrm{B}^*_y(\Omega_3\cap\Omega_4)} \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\ \left[d(y,\sigma)\right]^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\mathrm{B}_y(\Omega_3\cap\Omega_4)} \frac{\left[d(a,y)\right]^{\,-1+\mathrm{Re}\,\gamma}}{d^{\,\mathrm{Re}\,\gamma}(a,\sigma)}\, \frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{\left[d(y,\sigma)\right]^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \right\} =: c\,h\,\left(\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2\right),$$

где $c \geq 2^{\,N+\mathrm{Re}\,\alpha}\,\left(N+\mathrm{Re}\,\alpha\right)$. Отметим, что в силу неравенства треугольника (Δ_1) выполнено:

$$\forall x \in \Omega_3: \quad k\,h \leq d(x,\sigma) \leq h + d(y,\sigma), \ \ \text{т.е.} \quad (k-1)\,h \leq d(y,\sigma),$$

поскольку $d(x,y) \leq h$ по предположению. Следовательно, имеет место вложение множеств вида

$$\Omega_3 \cap \Omega_4 \subseteq H_1\,(y) \cup \left[H_2\,(y) \cup \Theta_2(y)\right] =: G_1 \cup G_2.$$

Отметим, что всюду на объемлющей сумме множеств $G_1 \cup G_2$ характерно соотношение расстояний $d(a,\sigma) \leq d(y,\sigma)$.

Таким образом, исключив чрезмерные подробности, запишем оценку, которая основана на применении Леммы 3 к мажорантам на соответствующих подмножествах:

$$\mathfrak{J}_1 \leq \sum_{G\in\{G_1,G_2\}} \int\limits_G \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\ [d(y,\sigma)]^{N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega\setminus B(a,k\,h)} \frac{M\,(f_w, a, d(a,\sigma))}{[d(a,\sigma)]^{1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma + 2 \int\limits_{\Omega\setminus B(y,h)} \frac{M\,(f_w, y, d(y,\sigma))}{[d(y,\sigma)]^{1+N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c \sum_{z\in\{a,y\}} \int\limits_h^l \frac{M\,(f_w, z, t)}{t^{2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0 < c < \infty.$$

Оценка $\mathfrak{J}_2$ предполагает воспользоваться теми же соображениями, что при оценке $I_{2,1}$ выше. Чтобы обосновать соответствующую возможность, заметим справедливость вложения $\mathrm{B}_y(\Omega_3 \cap \Omega_4) \subseteq \mathrm{M}(y) \cup N(y)$, так что имеют место импликации типа (3.21) и (3.22). В результате имеем следующую оценку:

$$\mathfrak{J}_2 \leq \operatorname{Re}\gamma^{\,N-1} \int\limits_{\mathrm{B}_y(\Omega_3\cap\Omega_4)} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\ [d(y,\sigma)]^{N+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \leq$$

$$\leq c\ \operatorname{Re}\gamma^{\,-1+\operatorname{Re}\gamma} \left\{ \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(y,t)}{t^{2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t. \right\},$$

$$\operatorname{Re}\gamma > 1, \quad 0 < c < \infty.$$

Примем во внимание свойство локального модуля непрерывности:

$$\left.\frac{M_{f_w}(z,t)}{t}\right|_{t\in[h,l]} \leq 2\ \left.\frac{M_{f_w}(z,t)}{t}\right|_{t\in[0,h]}, \ \ z \in \Omega.$$

Поскольку, по предположению, $h \le l$, имеем следующее неравенство:

$$h \int\limits_h^l \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,2+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right) \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \le 2 \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t, \quad z \in \Omega,$$

что и приводит к оценке нужного вида:

$$|\,\mathfrak{J}\,| \le c\,h \left\{ \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(a,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^h \frac{M_{f_w}(y,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t \right\}, \quad 0 < c < \infty.$$

Завершающие выводы

Таким образом, объединив полученные выше оценки для каждого из слагаемых в общем представлении (3.8) мажоранты, имеем утверждаемую теоремой оценку типа Зигмунда. □

3.3 Теоремы о действии

Доказанные далее теоремы утверждают условия ограниченности гиперсингулярного оператора $D^{\,\alpha}$, введенного Определением 8, а также интегрального оператора $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$, введенного выражением (3.1), в пространствах обобщенной переменной, а также локальной обобщенной гёльдеровости со степенным весом (10). Под вторыми имеются в виду пространства, определенные условием на локальный модуль непрерывности (8); аналогичные формулировки справедливы, очевидно, и для потенциала Рисса.

Новые результаты существенно опираются на Теорему 3.1 о действии в безвесовом случае, и ее условия используются также при формулировке новых теорем в этом параграфе.

3.3.1 Основной результат

Докажем ограниченность гиперсингулярного интеграла D^α при отображении функции из пространства $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, введенного Определением 12.

Теорема 3.4. *Пусть характеристика* $\omega(x,h)$ *удовлетворяет условиям* (3.3) *и* (3.4), *а также, для всякого* $h>0$, *условию*

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le c_\omega, \;\; 0<c_\omega<\infty. \tag{3.25}$$

Тогда оператор D^α *ограничен из* $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *в* $H^{\,\omega-\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *с характеристикой* (3.5) *и степенным весом* $w_a(x)$, *введенным в* (10).

Доказательство. По предположению теоремы выполнено:

$$\begin{gathered} \forall x\in\Omega: \quad M(w_a\, f, x, h) \le C\,\omega(x,h), \;\; h\in(0,l], \\ 0<l\le \operatorname{diam}(\Omega)\,, \end{gathered} \tag{3.26}$$

где в качестве отображения M рассматривается модуль субметрии ω_Ω или его минимальная мажоранта из класса локальных модулей непрерывности, а вес $w_a(x)$ имеет вид:

$$w_a(x) = d^\gamma(a,x), \;\; \operatorname{Re}\gamma>0.$$

Обратимся к аддитивному представлению (3.2). Ограниченность первого слагаемого в правой его части утверждается Теоремой 3.1. Ограниченность же оператора $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$ на функции $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ следует из оценок типа Зигмунда, указанных в Теоремах 3.2 и 3.3 в случае $\operatorname{Re}\gamma\le 1$ и Теоремой 3.3 — в случае $\operatorname{Re}\gamma>1$.

Действительно, на основании (3.26) имеет место неравенство:

$$
\begin{gathered}
\frac{h^{\operatorname{Re}\alpha}}{\omega(x,h)}\,|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(y)\,| \le \\
\le c\,h^{\operatorname{Re}\alpha}\left\{\sum_{z\in\{a,x,y\}}\int\limits_0^h \frac{M\,(f_w,z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t + h^{\,r_\gamma}\sum_{z\in\{a,x\}}\int\limits_h^l \frac{M\,(f_w,z,t)}{t^{\,1+r_\gamma+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\right\} \le \\
\le \frac{c}{\omega(x,h)}\left\{\sum_{z\in\{a,x,y\}}\int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}\frac{\omega(z,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t + \sum_{z\in\{a,x\}}\int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{r_\gamma+\operatorname{Re}\alpha}\frac{\omega(z,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t\right\}, \\
r_\gamma = \min\{1,\operatorname{Re}\gamma\}\,, \quad 0<c<\infty.
\end{gathered}
$$

Имеют место следующие рассуждения:

- слагаемые с $z=a$ получают мажоранту нужного вида немедленно ввиду условия (3.25) доказываемой теоремы, которое влечет оценку

$$
\frac{c}{\omega(x,h)} \le \frac{c}{\omega(a,h)}\,\sup_{x\in\Omega}\frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le \frac{c\,c_\omega}{\omega(a,h)}, \quad h>0;
$$

- слагаемые, где $z=x$, оцениваются непосредственно исходя из определения класса Бари–Стечкина;
- для оценки слагаемых, у которых $z=y$, учтем требование (3.4), которое сводит этот случай к предыдущему.

$\square$

3.3.2 О действии в локальном обобщенном пространстве Гёльдера

Из Теорем 3.2 и 3.3 непосредственно следует ограниченность оператора $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$ на функциях из пространства $\mathcal{H}_0(\Omega, w)$, а именно:

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия Теоремы 3.4. Оператор* $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$ *ограничен из* $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *в* $\mathcal{H}_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$*, где используются характеристика* (3.5) *и весовая функция* (10)*.*

Рассуждения в основе доказательства Теоремы 3.5 повторяют таковые для Теоремы 3.4, не представляя существенной новизны. Относительно оператора D^{α} из Определения 8 сформулируем, имея в виду методику получения оценок типа Зигмунда в безвесовом случае,

Предложение 3.6. *В предпосылках Теоремы 3.4 гиперсингулярный интеграл* D^{α} *ограничен из* $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ *в* $\mathcal{H}_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$*.*

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Исследован мультипликатор оператора $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ и построено обращение потенциала Рисса с логарифмическим ядром ($\nu = 1$) на сфере.
2. Доказаны теоремы о действии оператора типа риссова потенциала со степенно-логарифмическим ядром на сфере в безвесовых и степенно-весовых пространствах обобщенной гёльдеровости, включая изоморфизм для потенциала с логарифмическим ядром.
3. Доказана теорема об ограниченности потенциала $I^{\alpha,\nu}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ в пространстве обобщенной гёльдеровости при действии из $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$.
4. Исследовано действие пространственного потенциала со степенно-логарифмической характеристикой специального вида в обобщенных пространствах Гёльдера со специальными весами.
5. Получены оценки типа Зигмунда для интегрального оператора $\mathcal{I}^{\alpha}_{\Omega}$, связанного с изучением потенциала Рисса на метрическом пространстве с мерой при воздействии степенного веса.
6. Доказана ограниченность потенциала Рисса на метрическом пространстве с мерой в степенно-весовых пространствах $H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$ обобщенной переменной гёльдеровости.
7. Построена оценка типа Зигмунда для интегрального оператора $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$ на метрическом пространстве с мерой, связанного с изучением гиперсин-

гулярного интеграла при воздействии степенного веса.

8. Доказана ограниченность в $H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$ гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой.
9. Приведены основания для дальнейшего обобщения полученных результатов на более широкий класс функциональных пространств обобщенной переменной гёльдеровости.

Действительно, введенный Определением 9 локальный модуль непрерывности позволяет концептуализировать разнообразные подходы к локализации квалифицированной гладкости в рамках единых теоретических оснований: некоторые показательные примеры обсуждаются в диссертации.

Отметим также очевидные перспективы распространения полученных результатов на квазиметрические пространства и операторы риссова дробного интегродифференцирования переменного порядка. Существенный и принципиально обоснованный интерес представляет при этом постановка задач для пространств с весами, принадлежащими более общим функциональным классам, таким как класс Зигмунда–Бари–Стечкина. Подобные обобщения, как предполагается, будут способствовать развитию дробного анализа как самостоятельной математической дисциплины.

Наконец, значительное внимание в современной литературе уделяется и другим обобщениям классических функциональных пространств, например, гранд-пространствам Лебега, в области которых автором получены результаты в ряде совместных [52, 28] и индивидуальных [57] публикаций. Дальнейшее развитие методов в этом направлении, продолжающее исследования, инициированные в настоящей диссертации, представляется важным для решения актуальных проблем современного функционального анализа.

Список литературы

Русскоязычные источники

[1] **Берестовский, В. Н.** Субметрии пространственных форм отрицательной кривизны / В. Н. Берестовский // *Сибирский математический журнал.* – 1987. – Т. 28. – С. 552—562.

[2] **Вакулов, Б. Г.** Оператор типа потенциала на сфере в обобщенных классах Гёльдера / Б. Г. Вакулов // *Известия вузов. Математика.* – 1986. – Т. 30. – № 11. – С. 90—94.

[3] **Вакулов, Б. Г.** Сферические операторы типа потенциала в обобщенных пространствах Гёльдера с весом на сфере / Б. Г. Вакулов // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* – 1999. – № 4. – С. 5—10.

[4] **Вакулов, Б. Г.** Об эквивалентных нормировках в пространствах функций комплексной гладкости на сфере / Б. Г. Вакулов // *Труды Института математики.* – 2001. – Т. 9. – С. 41—44.

[5] **Вакулов, Б. Г.** Сферические операторы типа потенциала в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка / Б. Г. Вакулов // *Владикавказский математический журнал.* – 2005. – Т. 7. – № 2. – С. 26—40.

[6] **Вакулов, Б. Г.** Сферические потенциалы в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка / Б. Г. Вакулов // *Доклады Академии наук.* – 2005. – Т. 400. – № 5. – С. 581—584.

[7] **Вакулов, Б. Г.** Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера переменного порядка / Б. Г. Вакулов // *Доклады АН.* – 2006. – Т. 407. – № 1. – С. 12—15.

[8] **Вакулов, Б. Г.** Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера переменного порядка / Б. Г. Вакулов // *Доклады Академии наук.* – 2006. – Т. 407. – № 1. – С. 12—15.

[9] **Вакулов, Б. Г.** Оператор типа потенциала Рисса переменного порядка по $\dot{\mathbb{R}}^n$ в весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости / Б. Г. Вакулов, Ю. Е. Дроботов // *Сибирские электронные математические известия.* – 2017. – Т. 14. – С. 647—656.

[10] **Вакулов, Б. Г.** Потенциал Рисса с интегрируемой плотностью в переменных пространствах Гёльдера / Б. Г. Вакулов, Ю. Е. Дроботов // *Математические заметки.* – 2020. – Т. 108. – № 5. – С. 669—678.

[11] **Вакулов, Б. Г.** Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера с весом / Б. Г. Вакулов, Н. К. Карапетянц, Л. Д. Шанкишвили // *Доклады РАН.* – 2002. – Т. 382. – № 3. – С. 301—304.

[12] **Вакулов, Б. Г.** Операторы сферической свертки со степенно-логарифмическим ядром в обобщенных пространствах Гёльдера / Б. Г. Вакулов, Н. К. Карапетянц, Л. Д. Шанкишвили // *Известия вузов. Математика.* – 2003. – Т. 47. – № 2. – С. 1—12.

[13] **Вакулов, Б. Г.** Операторы дробного интегрирования и дифференцирования переменного порядка в пространствах Гёльдера $H^{\omega(x,t)}$ / Б. Г. Вакулов, Е. С. Кочуров // *Владикавказский математический журнал.* – 2010. – Т. 12. – № 4. – С. 3—11.

[14] **Вакулов, Б. Г.** Оценки типа Зигмунда для операторов дробного интегрирования и дифференцирования переменного порядка / Б. Г. Вакулов, Е. С. Кочуров // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* – 2011. – Т. Спецвыпуск. – С. 15—17.

[15] **Вакулов, Б. Г.** Оценки типа Зигмунда для операторов дробного интегрирования и дифференцирования переменного порядка / Б. Г. Вакулов, Е. С. Кочуров, Н. Г. Самко // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* – 2011. – Т. 6(165). – С. 20—28.

[16] **Вакулов, Б. Г.** Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гёльдера переменного порядка на однородных пространствах / Б. Г. Вакулов, Н. Г. Самко, С. Г. Самко // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск.* – 2009. – С. 40—45.

[17] **Вакулов, Б. Г.** Об эквивалентных нормировках в пространствах функций дробной гладкости на сфере типа $C^\lambda(S_{n-1})$, $H^\lambda(S_{n-1})$ / Б. Г. Вакулов, С. Г. Самко // *Известия вузов. Математика.* – 1987. – Т. 31. – № 12. – С. 90—95.

[18] **Вакулов, Б. Г.** Весовая теорема Соболева для пространственных и сферических потенциалов в пространствах Лебега с переменными показателями / Б. Г. Вакулов, С. Г. Самко // *Доклады Академии наук.* – 2005. – Т. 404. – № 4. – С. 439—442.

[19] **Гаджиев, А. Д.** Эквивалентная нормировка в пространствах Бесова на сфере и свойства символа многомерного сингулярного интеграла / А. Д. Гаджиев, Х. П. Рустамов // *Известия вузов. Математика.* – 1984. – № 9. – С. 69—71.

[20] **Гинзбург, А. И.** Дробное интегродифференцирование в гельдеровских классах переменного порядка / А. И. Гинзбург, Н. К. Карапетянц // *Доклады РАН.* – 1994. – Т. 339. – № 4. – С. 439—441.

[21] **Гусейнов, А. И.** Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений / А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров. – Moscow: Наука, 1980. – 320 с.

[22] **Джафаров, А. С.** Наилучшее приближение конечными сферическими суммами и некоторые дифференциальные свойства гармонических в шаре функций / А. С. Джафаров // *Теоремы вложения и их приложения. Труды симпозиума по теоремам вложения* (Баку). – Наука, 1970. – С. 75—81.

[23] **Джафаров, А. С.** Конструктивное описание обобщенных классов Бесова на многомерной сфере / А. С. Джафаров // *Доклады АН СССР.* – 1985. – Т. 285. – № 3. – С. 542—546.

[24] **Дроботов, Ю. Е.** Потенциал Рисса переменного порядка с суммируемой плотностью в пространствах обобщенной гёльдеровости / Ю. Е. Дроботов // *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии на-*

ук Л. Д. Кудрявцева (Москва, 26–29 ноября 2018 г.). – М.: Российский университет дружбы народов (РУДН), 2018. – С. 55—56.

[25] **Дроботов, Ю. Е.** К исследованию условий ограниченности потенциала Рисса переменного порядка в пространствах обобщенной и переменной гёльдеровости со специальными весами / Ю. Е. Дроботов, Б. Г. Вакулов // *Межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов им. Е.В. Арменского. Материалы конференции* (Москва, 17–29 февраля 2016 г.). – М.: Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ, 2016. – С. 17—18.

[26] **Дроботов, Ю. Е.** Гладкостные свойства оператора типа потенциала Рисса с логарифмической характеристикой / Ю. Е. Дроботов, Б. Г. Вакулов // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.* – 2022. – № 1(213). – С. 4—11.

[27] **Дроботов, Ю. Е.** К исследованию весовой обобщенной гельдеровости гиперсингулярного интеграла на метрическом пространстве с мерой / Ю. Е. Дроботов, Б. Г. Вакулов // *Сибирские электронные математические известия.* – 2024. – Т. 21. – № 2. – С. 1347—1369.

[28] **Дроботов, Ю. Е.** Потенциал Рисса с однородным ядром в гранд-пространствах Лебега на полуоси / Ю. Е. Дроботов, С. М. Умархаджиев // *Вестник Академии наук Чеченской Республики.* – 2018. – Т. 1. – № 1(38). – С. 18—25.

[29] **Завало, С. Т.** Элементарная алгебра / С. Т. Завало. – Москва: Просвещение, 1964. – 304 с.

[30] **Косов, Е. Д.** Характеризация классов Бесова в терминах нового модуля непрерывности / Е. Д. Косов // *Доклады Академии наук.* – 2017. – Т. 477. – № 3. – С. 262—265.

[31] **Косов, Е. Д.** Классы Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах / Е. Д. Косов // *Математический сборник.* – 2019. – Т. 210. – № 5. – С. 663—692.

[32] **Ландкоф, Н. С.** Основы современной теории потенциала / Н. С. Ландкоф. – Москва: Наука, 1966. – 516 с.

[33] **Люк, Ю.** Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – Москва: Мир, 1980. – 607 с.

[34] **Михлин, С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. – Ленинград: Физматгиз, 1962. – 256 с.

[35] **Никольский, С. М.** Приближение сферическими полиномами / С. М. Никольский, П. И. Лизоркин // *Труды МИАН СССР.* – 1984. – Т. 166. – С. 186—200.

[36] **Павлов, П. М.** Описание пространств $L_p^\alpha(S_{n-1})$ в терминах сферических гиперсингулярных интегралов / П. М. Павлов, С. Г. Самко // *Доклады АН СССР.* – 1984. – Т. 276. – № 3. – С. 546—550.

[37] **Петрова, И. В.** Теорема Джексона и пространства Бесова на сфере / И. В. Петрова // *Доклады АН СССР.* – 1984. – Т. 276. – № 3. – С. 544—549.

[38] **Прудников, А. П.** Интегралы и ряды. Т. 2: Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – Москва: Физматлит, 2003. – 632 с.

[39] Х. П. Рустамов. «О точности гладкостных свойств символа многомерного сингулярного оператора с непрерывной характеристикой». Депонировано в ВИНИТИ, № 5014-81. 1981.

[40] **Самко**, **С. Г.** О пространствах риссовых потенциалов / С. Г. Самко // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* – 1976. – Т. 40. – № 5. – С. 1143—1172.

[41] **Самко**, **С. Г.** Обобщенные потенциалы Рисса и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение / С. Г. Самко // *Доклады АН СССР.* – 1977. – Т. 232. – № 3. – С. 528—531.

[42] **Самко**, **С. Г.** Сферические потенциалы, сферическое риссово дифференцирование и их приложения / С. Г. Самко // *Известия вузов. Математика.* – 1977. – № 2. – С. 135—139.

[43] **Самко**, **С. Г.** Обобщенные потенциалы Рисса и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками: их символы и обращение / С. Г. Самко // *Труды Математического института им. В. А. Стеклова.* – 1980. – Т. 156. – С. 173—243.

[44] **Самко**, **С. Г.** Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу / С. Г. Самко // *Известия вузов. Математика.* – 1983. – Т. 27. – № 4. – С. 35—52.

[45] **Самко**, **С. Г.** Гиперсингулярные интегралы и их приложения / С. Г. Самко. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1984. – 208 с.

[46] **Самко**, **С. Г.** Гранд-пространства типа Морри / С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев // *Владикавказский математический журнал.* – 2020. – Т. 22. – № 4. – С. 104—118. – http://www.vmj.ru/articles/2020_4_9.pdf.

[47] **Самко, С. Г.** Локальные гранд-пространства Лебега / С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев // *Владикавказский математический журнал.* – 2021. – Т. 23. – № 4. – С. 96—108. – http://www.vmj.ru/articles/2021_4_8.pdf.

[48] **Соболев, С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – Москва: Наука, 1974. – 808 с.

[49] **Умархаджиев, С. М.** Обобщение понятия гранд-пространства Лебега / С. М. Умархаджиев // *Известия высших учебных заведений. Математика.* – 2014. – № 4(623). – С. 35—43.

[50] **Умархаджиев, С. М.** Об эллиптических однородных дифференциальных операторах в гранд-пространствах / С. М. Умархаджиев // *Известия высших учебных заведений. Математика.* – 2020. – № 3(714). – С. 57—65.

[51] **Умархаджиев, С. М.** Потенциал Рисса в обобщенном гранд-пространстве Лебега / С. М. Умархаджиев, Ю. Е. Дроботов // *Известия Академии наук Чеченской Республики.* – 2015. – Т. 4. – № 29. – С. 26—29.

[52] **Умархаджиев, С. М.** Потенциал Рисса в обобщенном гранд-пространстве Лебега / С. М. Умархаджиев, Ю. Е. Дроботов // *Известия Академии наук Чеченской Республики.* – 2015. – Т. 4. – № 29. – С. 26—29.

Англоязычные источники

[53] **Almeida, R.** A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string / R. Almeida, A. B. Malinowska, D. F. M. Torres // *J. Math. Phys.* – 2010. – T. 51.

[54] **Bastos, N. R. O.** Discrete-time fractional variational problems / N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira, D. F. M. Torres // *Signal Process.* – 2010. – T. 91. – C. 513—524.

[55] **Chellal, R.** An Identity for Generalized Bernoulli Polynomials / R. Chellal, F. Bencherif, M. Mehbali // *Journal of Integer Sequences.* – 2020. – T. 23. – № 7. – https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL23/Chellal/chellal7.pdf.

[56] **Coimbra, C. F. M.** Mechanics with variable-order differential operators / C. F. M. Coimbra // *Ann. Phys.* – 2003. – T. 12. – C. 692—703.

[57] **Drobotov, Y.** Analytical input signal restoration in a grand Lebesgue space for linear systems with negative-fractional order transfer functions / Y. Drobotov // In: *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. PHENMA 2024*, Cham: Springer, 2025. P. 611–620

. [58] **Drobotov, Y. E.** An integral equation of the first kind with a negative power of the Laplacian / Y. E. Drobotov // In: *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, 2021 – 2022*, Hauppauge NY, USA: Nova Science Publishers, Inc., 2023. P. 145–150

. [59] **Drobotov, Y. E.** On hypersingular integrals over metric measure spaces in generalized Hölder spaces with power weights / Y. E. Drobotov // In: *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications – 2023*, Hauppauge NY, USA: Nova Science Publishers, Inc., 2024. C. 51—59

. [60] **Drobotov**, **Y. E.** On multipliers of spherical convolution operators with power-logarithmic kernels / Y. E. Drobotov, T. M. Andreeva // In: *Proceedings of the 2020 International Conference on "Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications"*, Hauppauge NY, USA: Nova Science Publishers, Inc., 2021. P. 63–70

. [61] **Drobotov**, **Y. E.** On the conditioning of the Poisson type equation on a sphere and some remarkable outcomes / Y. E. Drobotov, D. S. Baraeva, B. G. Vakulov // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. 2023 International Conference* (Surabaya, Indonesia, 03–08 October 2023). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2023. – P. 97–98.

[62] **Drobotov**, **Y. E.** On particles distribution in mean field models evaluated through hypersingular integrals / Y. E. Drobotov, A. S. Piskunov, B. G. Vakulov // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. 2023 International Conference* (Surabaya, Indonesia, 03–08 October 2023). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2023. – P. 98–99.

[63] **Drobotov**, **Y. E.** The Riesz potential type operator with power-logarithmic kernel in mathematical modelling / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. Abstracts & Schedule* (Kitakyushu, Japan, 26–29 March 2021). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2021. – P. 92–93.

[64] **Drobotov**, **Y. E.** Hypersingular integrals on sets of metrical spaces and their smoothness properties / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *10th Anniversary International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2021-2022)* (Divnomorsk, Rus-

sia, 23–27 May 2022). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2022. – P. 322–323.

[65] **Drobotov**, **Y. E.** On smoothness of the Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *10th Anniversary International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2021-2022)* (Divnomorsk, Russia, 23–27 May 2022). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2022. – P. 99–100.

[66] **Drobotov**, **Y. E.** On solvability of integral equations of the first kind with mild singularity in the kernel / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *Springer Proceedings in Materials.* – 2023. – Vol. 20. – P. 120–132. – https://doi.org/10.1007/978-3-031-21572-8_11.

[67] **Drobotov**, **Y. E.** The solvability of integral equations of the first kind with mild singularity kernels / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. 2023 International Conference* (Surabaya, Indonesia, 03–08 October 2023). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2023. – P. 99–100.

[68] **Drobotov**, **Y. E.** Hypersingular integrals in power-weighted variable generalized Hölder spaces over metric measure spaces / Y. E. Drobotov, B. G. Vakulov // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2024. – Vol. 278. – № 3. – P. 301–304.

[69] **Gilbarg**, **D.** Elliptic Partial Differential Equations of Second Order / D. Gilbarg, N. S. Trudinger. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 517 p.

[70] **Gradshteyn**, **I. S.** Tables of Integrals, Sums, Series and Products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. – San Diego: Academic Press, 2007. – 1200 c.

[71] **Hardy**, **G. H.** Inequalities / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. – Cambridge: Cambridge University Press, 1934. – 456 c.

[72] **Karapetyants**, **A.** Variable Order Fractional Integrals in Variable Generalized Hölder Spaces of Holomorphic Functions / A. Karapetyants, S. Samko // *Anal. Math. Phys.* – 2021. – T. 11. – № 156. – c. 25.

[73] **Kilbas**, **A. A.** Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – c.

[74] **Klimek**, **M.** Fractional sequential mechanics—models with symmetric fractional derivative / M. Klimek // *Czechoslovak J. Phys.* – 2001. – T. 51. – № 12. – C. 1348—1354.

[75] **Parinov**, **I. A.** Advanced Ferroelectric and Piezoelectric Materials: With Improved Properties and their Applications / I. A. Parinov, S. V. Zubkov, A. S. Skaliukh, V. A. Chebanenko, A. V. Cherpakov, Y. E. Drobotov. – Singapore: World Scientific, 2024. – 450 p.

[76] **Rafeiro**, **H.** Local grand Lebesgue spaces on quasi-metric measure spaces and some applications / H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev // *Positivity.* – 2022. – T. 26. – № 3. – c. 53.

[77] **Ross**, **B.** Fractional integration operator of a variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$ / B. Ross, S. G. Samko // *Internat. J. Math. Math. Sci.* – 1995. – T. 18. – C. 777—788.

[78] **Samko**, **N.** Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic / N. Samko, S. Samko, B. Vakulov // *Journal of Function Spaces and Applications.* – 2010. – Vol. 8. – № 3. – P. 215–244.

[79] **Samko**, **N.** Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic / N. Samko, B. Vakulov // *Mathematische Nachrichten.* – 2011. – T. 284. – № 2-3. – C. 355—369.

[80] **Samko**, **N. G.** Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent / N. G. Samko, S. G. Samko, B. G. Vakulov // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2007. – Vol. 335. – № 1. – P. 560–583.

[81] **Samko**, **S.** Hypersingular Integrals and Their Applications / S. Samko. – London: Taylor & Francis, 2002. – 320 p.

[82] **Samko**, **S.** Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, II / S. Samko, E. Shargorodsky, B. Vakulov // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2007. – T. 325. – № 1. – C. 745—751.

[83] **Samko**, **S. G.** Fractional integration and differentiation of variable order / S. G. Samko // *Analysis Mathematica.* – 1995. – T. 21. – C. 213—236.

[84] **Samko**, **S. G.** Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ / S. G. Samko // *Contemporary Mathematics.* – 1998. – T. 212. – C. 203—219.

[85] **Samko**, **S. G.** Potential operators in generalized Hölder spaces on sets in quasi-metric measure spaces without the cancellation property / S. G. Samko // *Nonlinear Analysis.* – 2013. – T. 78. – C. 130—140.

[86] **Samko**, **S. G.** Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Marichev, O. I. Kilbas. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1993. – 976 p.

[87] **Samko**, **S. G.** Integration and differentiation to a variable fractional order / S. G. Samko, B. Ross // *Integral Transforms and Special Functions.* – 1993. – T. 1. – C. 277—300.

[88] **Samko**, **S. G.** On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere / S. G. Samko, B. G. Vakulov // *Fract. Calc. Appl. Anal.* – 2000. – T. 3. – № 4. – C. 401—433.

[89] **Slater**, **J. L.** Generalized hypergeometric functions / J. L. Slater. – Cambridge: Cambridge University Press, 1966. – 273 c.

[90] **Tarasov**, **V. E.** Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. – Berlin: Springer, 2010. – 450 p.

[91] **Umarkhadzhiev**, **S. M.** Unilateral ball potentials in grand Lebesgue spaces / S. M. Umarkhadzhiev // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.* – 2021. – T. 357. – C. 569—576.

[92] **Umarkhadzhiev**, **S. M.** Embedding of grand central Morrey-type spaces into local grand weighted Lebesgue spaces / S. M. Umarkhadzhiev // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2024. – T. 278. – № 3. – C. 394—405.

[93] **Vakulov**, **B. G.** Spherical potentials of complex order in the variable order Hölder spaces / B. G. Vakulov // *Integral Transforms and Special Functions.* – 2005. – T. 16. – № 5-6. – C. 489—497.

[94] **Vakulov**, **B. G.** Riesz potential with logarithmic kernel in generalized Hölder spaces / B. G. Vakulov, Y. E. Drobotov // In: *Recent Applications of Financial Risk Modelling and Portfolio Management*, Hershey PA, USA: IGI Global, 2021. P. 275–296

. [95] **Vakulov**, **B. G.** The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere / B. G. Vakulov, Y. E. Drobotov // *Springer Proceedings in Materials*. – 2021. – Vol. 10. – P. 147–159. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-76481-4_13.

[96] **Vakulov**, **B. G.** On smoothness of the solution of an integral equation with the spatial Riesz potential type operator / B. G. Vakulov, Y. E. Drobotov, G. S. Kostetskaya // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. Abstracts & Schedule* (Kitakyushu, Japan, 26–29 March 2021). – Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University Press, 2021. – P. 283–284.

[97] **Vakulov**, **B. G.** Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers / B. G. Vakulov, N. K. Karapetians, L. D. Shankisdvili // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2001. – T. 4. – № 1. – C. 101—115.

[98] **Vakulov**, **B. G.** Riesz Potentials in generalized Hölder spaces / B. G. Vakulov, G. S. Kostetskaya, Y. E. Drobotov // In: *Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises*, Hershey PA, USA: IGI Global, 2018. P. 249–273