

## Отзыв научного руководителя по диссертационной работе

Дроботова Юрия Евгеньевича

«Потенциалы и гиперсингулярные интегралы в весовых пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости на метрических пространствах с мерой», представленной на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Дроботов Юрий Евгеньевич завершил обучение в аспирантуре Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича в 2022 г., получив квалификацию «Исследователь. Преподаватель-исследователь» (направление подготовки «01.06.01 Математика и механика»). За время обучения в аспирантуре Дроботов Ю. Е. выполнил учебный план, получив оценку «отлично» по всем предметам и аттестациям, включая кандидатские экзамены. В настоящее время соискатель совмещает научно-исследовательскую работу с преподаванием курсов по математике и компьютерным наукам в учебных заведениях высшего образования.

Первые результаты диссертационного исследования были получены Дроботовым Ю. Е. во время обучения. Основные результаты диссертации оформлены соискателем во время работы в Южном федеральном университете по следующим научно-исследовательским проектам:

- внутренний грант Южного федерального университета №ВнГр/2020-04-ИМ;
- индивидуальный грант в рамках программы Министерства науки и высшего образования РФ по содействию занятости выпускников 2020 года на научно-исследовательских позициях в вузах и научных организациях;
- международный научно-исследовательский проект «Операторы гармонического анализа в нестандартных пространствах функций и их приложения» (грант РФФИ «СТ\_а», № 20-51-46003).

Отдельные вопросы в смежных областях, а также связанные с приложениями теоретических результатов, разрабатывались соискателем в рамках следующих научно-исследовательских проектов:

- государственное задание в области научной деятельности «Разработка экспериментально-теоретических методов и численного моделирования структурно-чувствительных свойств перспективных материалов и композитов с сегнетопьезоэлектрическими характеристиками, а также устройств генерации энергии» (проект № FENW-2023-0012),
- «Исследование интегральных операторов в обобщённых пространствах Лебега» (грант РФФИ «мол\_нр», №15-31-50241);
- «Исследование интегральных операторов в гранд-пространствах Лебега на неограниченных множествах» (грант РФФИ «мол\_нр», №17-301-50023);
- проект РНФ №21-19-00423 «Исследование и разработка перспективных сегнетопьезоматериалов с улучшенными свойствами и их применений»;
- проект РНФ №25-29-00809 «Разработка теоретико-экспериментальных и интеллектуальных методов идентификации поврежденного состояния конструкций на основе анализа деформационных откликов».

Полученные результаты были представлены соискателем на конференциях различного уровня, среди которых преобладают международные конференции:

- Межвузовская научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных им. Е. В. Арменского, МИЭМ НИУ ВШЭ в 2016 г.;
- VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике в 2016 г.;

- 5-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посвящённая 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева, РУДН, 2018 г.;
- XV Владикавказская молодёжная математическая школа в 2020 г.;
- Международный молодёжный научный форум «Ломоносов» в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в 2016, 2020 и 2021 г.;
- Международная конференция «Комплексный анализ и смежные проблемы» в Казанском федеральном университете в 2022 г.;
- Международная конференция “Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications” (PHENMA) в 2018—2024 гг, включая пленарный доклад по теме диссертационного исследования на конференции в Индонезии в 2023 г.;
- Международная конференция “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis” в 2018—2020, 2024 гг.

Тематика диссертационного исследования Дроботова Ю. Е. принадлежит теории операторов дробного интегродифференцирования функций многих вещественных переменных и качественной теории интегральных уравнений с операторами дробного анализа. Настоящая работа развивает исследования научной школы С. Г. Самко, обогащая полученные ранее результаты теоремами о действии операторов типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром, определенных на гиперсфере и гиперплоскости многомерного евклидова пространства, а также потенциалов и гиперсингулярных интегралов на метрических пространствах с мерой в пространствах обобщенной и обобщенной переменной гёльдеровости со степенными весами.

Актуальность выбранной тематики обусловлена, в частности, той ролью, которую операторы типа потенциала Рисса и гиперсингулярные интегралы играют в дробном анализе и его приложениях. Так, риссовы ядра содержат в качестве частных и предельных случаев ядра классической теории (ньютоново и логарифмическое ядра, ядра Грина), а всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с однородной характеристикой. Риссово дробное интегродифференцирование рассматривает изучаемые соискателем операторы как реализацию дробных степеней оператора Лапласа, чем обусловлен интерес к ним в математическом моделировании сложных сред и процессов. Необходимо отметить, что значительное обобщение, достигаемое за счет введения потенциалов и гиперсингулярных интегралов на множествах произвольных метрических пространств, не только доставляет новые фундаментальные результаты в анализе, но и обогащает возможности математического моделирования, в том числе в отношении новых междисциплинарных направлений. При этом рассматриваемые в диссертации обобщения условия Гёльдера предполагают возможность тонкой квалификации гладкостных свойств функций и потому востребованы в современных подходах качественной теории интегральных уравнений.

Диссертация Дроботова Ю. Е. состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы. Общий объем работы составляет 142 страницы, список литературы включает 98 наименований. Основные результаты диссертации состоят в следующем.

В первой главе рассматриваются операторы типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром, определенные на единичной гиперсфере многомерного евклидова пространства. Исследуется отображение такими операторами функций из пространства  $L^p$  в пространство обобщенной гёльдеровости и доказывается теорема типа Соболева. Далее, исследуется мультипликатор оператора типа потенциала Рисса с логарифмическим ядром, что позволяет пополнить результаты о действии таких операторов в пространствах обобщенной гёльдеровости со степенным весом теоремами об изоморфизме и, как следствие, сделать выводы о классах однозначно разрешимых уравнений первого рода. Наконец, полученные результаты применяются для исследования

потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром, определенных на компактифицированной гиперплоскости многомерного евклидова пространства.

Во второй главе рассматриваются операторы типа потенциала Рисса, определенные на множестве метрического пространства с мерой, снабженного специальным условием роста шаров. Доказывается весовая оценка типа Зигмунда для вспомогательного интегрального оператора и, на основании последней, – теорема о действии потенциала в весовых пространствах обобщенной переменной гёльдеровости; в качестве веса здесь и далее рассматривается степенная функция с комплексным показателем степени. Обобщение условия Гёльдера осуществляется в терминах локального модуля непрерывности функции, понятие о котором вводится на высоком уровне теоретической абстракции. Наконец, рассмотрены частные конфигурации таких пространств, определяемые в терминах модуля субметрии и локального модуля непрерывности «классического» вида.

В третьей главе аналогичное исследование проводится для гиперсингулярных интегралов на метрических пространствах с мерой. Доказывается весовая оценка типа Зигмунда для специального оператора гиперсингулярного интегрирования, дополняющая оценку для гиперсингулярного интеграла в безвесовом случае. На основании полученной оценки доказывается теорема об ограниченности гиперсингулярного интеграла в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости со степенным весом, когда показатель степени является комплексным числом.

Результаты диссертационного исследования изложены в 21 научной публикации. Четыре статьи опубликованы в следующих журналах из перечня научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций, защищаемых в диссертационном совете ЮФУ801.01.02: «Сибирские электронные математические известия» (2 работы), «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» (1 работа) и «Journal of Mathematical Sciences» (1 работа), из них три журнала индексируются в международных базах научной периодики Scopus, два журнала входят также в международную реферативную базу Web of Science. Четыре работы опубликованы в формате глав коллективных монографий, изданных в международных издательствах Springer, Nova и IGI Global, причем каждая из данных работ представлена в Scopus как отдельная публикация. Часть результатов, связанных с физическими приложениями, обсуждается в монографии «Advanced Ferroelectric and Piezoelectric Materials», индексируемой в Scopus, соавтором которой является соискатель. Четыре публикации представляют собой главы в сборниках трудов международных конференций и коллективных монографиях, индексируемых в РИНЦ, но не представленных в Scopus и Web of Science. Наконец, девять публикаций составляют тезисы избранных докладов на конференциях различного уровня, индексируемые в РИНЦ. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежат постановки задач и общее руководство работой, соискателю принадлежит реализация выбранных методик.

Таким образом, результаты диссертации получили широкую апробацию в рецензируемых научных изданиях. Они реализованы с применением подробно обоснованных методов функционального анализа и спектральной теории операторов, и их достоверность не вызывает сомнений.

Работа Дроботова Ю. Е. во время проведения диссертационного исследования может быть охарактеризована положительно. Полученные им результаты интересны, содержательны и вносят заметный вклад в развитие общей теории. В настоящее время соискатель является специалистом, способным самостоятельно ставить и решать новые научные задачи в рамках рассматриваемой тематики, а также в междисциплинарных исследованиях. Считаю, что диссертация Дроботова Ю. Е. представляет собой законченное научное произведение на актуальную тему и вполне удовлетворяет всем требованиям п. 2. Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет»,

«Южный федеральный университет», а ее автор – Дроботов Юрий Евгеньевич – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки).

**Научный руководитель:**

Кандидат физико-математических наук (1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ), доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета

Почтовый адрес: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

Телефон: +7(863)2975 114 (доб. 115)

e-mail: [bvak1961@bk.ru](mailto:bvak1961@bk.ru)

29.05.2025



Вакулов Борис Григорьевич

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет»

Личную подпись Вакулова Б.Г.

ЗАВЕРЕНО:

Главный специалист по управлению персоналом

Мир / Подпись М.И.

«29» мая 2025 г.