

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

**Пожарская Елизавета Дмитриевна**

**Решения периодических задач теории упругости  
со смешанными граничными условиями  
в клиновидной области**

1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
Борис Владимирович Соболев

Ростов-на-Дону — 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение                                                                 | 4  |
| Глава 1. Периодические смешанные задачи для уравнения Лапласа в<br>клине | 18 |
| 1.1. Постановки задач                                                    | 19 |
| 1.2. Интегральные уравнения. Регуляризация                               | 21 |
| 1.3. Численный метод                                                     | 24 |
| 1.4. Выводы                                                              | 28 |
| Глава 2. Периодические системы штампов на грани упругого клина           | 30 |
| 2.1. Одна грань клина жестко заделана                                    | 30 |
| 2.1.1. Постановка задачи                                                 | 30 |
| 2.1.2. Основные уравнения                                                | 32 |
| 2.1.3. Численный метод                                                   | 35 |
| 2.1.4. Выводы                                                            | 40 |
| 2.2. Свободная от напряжений одна грань клина                            | 41 |
| 2.2.1. Действие периодической системы сил                                | 42 |
| 2.2.2. Регуляризация интегрального уравнения контакта                    | 45 |
| 2.2.3. Численный метод                                                   | 48 |
| 2.2.4. Выводы                                                            | 53 |
| 2.3. Скользящая заделка одной грани клина                                | 54 |
| 2.3.1. Действие периодической системы сил                                | 54 |
| 2.3.2. Регуляризация интегрального уравнения контакта                    | 56 |
| 2.3.3. Численное решение                                                 | 59 |
| 2.3.4. Выводы                                                            | 68 |
| 2.4. Плоские контактные задачи для клина                                 | 69 |
| 2.4.1. Переменный по углу коэффициент Пуассона                           | 69 |
| 2.4.2. Выводы                                                            | 75 |

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| Глава 3. Жесткие включения в упругом клине    | 77  |
| 3.1. Пространственные задачи                  | 77  |
| 3.1.1. Пара включений в клине                 | 77  |
| 3.1.2. Периодические системы включений        | 83  |
| 3.1.3. Численный анализ                       | 86  |
| 3.1.4. Выводы                                 | 87  |
| 3.2. Плоские задачи                           | 89  |
| 3.2.1. Специальная аппроксимация символа ядра | 90  |
| 3.2.2. Регулярные асимптотики                 | 93  |
| 3.2.3. Сингулярные асимптотики                | 95  |
| 3.2.4. Выводы                                 | 98  |
| Заключение                                    | 99  |
| Список литературы                             | 101 |
| Приложение. Фрагмент программы для ЭВМ        | 113 |

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Уравнение Лапласа встречается в ряде задач математической физики, включая теорию потенциала, теплопроводности, упругости [80]. Общее представление решения уравнений Ламе упругого равновесия в форме Папковича–Нейбера сводится к нескольким уравнениям Лапласа со связанными граничными условиями [53,54,83]. Контактные задачи теории упругости имеют смешанные граничные условия и важны для расчета контактной прочности сопрягаемых деталей и конструкций. Каждый из нас ежедневно касается пальцем экрана смартфона, что служит предметом исследования контакта [91]. В качестве простейшей модели полуограниченного тела обычно выбирают полупространство. Модель клина двугранного угла позволяет учесть геометрию тела в виде угловой линии. Полупространство и четверть пространства являются частными случаями клина. Задачи множественного дискретного контакта встречаются, например, в пальпационной томографии [92]. Периодические рельефы встречаются у современных текстурированных поверхностей после лазерной обработки, что обуславливает актуальность периодических контактных задач [106,127].

Предлагаемая работа связана с развитием подходов для изучения пространственно периодических смешанных краевых задач для уравнений Лапласа и Ламе упругого равновесия в клиновидной области. В задачах возникают интегральные уравнения, ядра которых усложняются в задачах теории упругости в сравнении с задачами поиска гармонической функции, но главные члены ядер аналогичны. В зависимости от свойств символов ядер периодичность может вызывать расходимость ядра, что требует регуляризации. В соответствующих плоских задачах [5] для регуляризации почленно дифференцируют интегральное уравнение. При этом возникает сходящееся ядро, логарифмическая особенность становится сингулярной типа Коши. Однако в двумерном интегральном уравнении почленное дифференцирование по од-

ному из аргументов ведет в проблеме нахождения уже не произвольной постоянной, а произвольной функции. Поэтому в диссертации применяется другой подход, связанный с модернизацией краевой задачи заменой одного из граничных условий на относительное значение функции. Идея такой модернизации содержится в работах [51,85]. В задачах для уравнения Лапласа с расходимостью ядра вводится дополнительная регуляризирующая периодическая система точечных воздействий с тем же периодом определенной интенсивности (вводится отток тепла в случае уравнения теплопроводности, чтобы не было бесконечного перегрева). В контактных задачах о штампах, расположенных вдоль ребра клина, вводится регуляризирующая периодическая система сосредоточенных сил с тем же периодом, интенсивность которых равна силам, приложенных к штампам. Система сил может быть приложена на ребре или вне ребра клина. Соответствующие плоские задачи для клина являются частными случаями периодических задач. В диссертации рассматриваются двумерные задачи для жесткого тонкого включения в клине, а также для случая внедрения жесткого штампа в грань клина. В последнем случае взят упругий материал с меняющимся по угловой координате коэффициентом Пуассона, так как аналогичные проблемы для однородного материала были изучены ранее [5,30,70].

Проблематика механики контактных взаимодействий видится актуальной и востребованной не только в развитии фундаментальных вопросов теории, но и для моделирования и расчета строительных конструкций, механизмов, например зубчатых передач [49]. Задачи о включениях актуальны, например, для исследования напряженно-деформированного состояния композиционных материалов, биологических тканей в области имплантов. В результате расчетов на прочность возможно повышение надежности механизмов и машин.

В нашей стране сложился ряд крупных научных центров исследования контактных задач. Среди них можно выделить Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского (Москва), Московский государственный универ-

ситет им. М.В. Ломоносова, Южный федеральный университет, Донской государственный технический университет, Кубанский государственный университет и др. Значительный вклад в развитие механики контактных взаимодействий внесли С.М. Айзикович, В.М. Александров, Ю.А. Антипов, И.И. Аргатов, В.А. Бабешко, А.А. Баблюян, А.В. Белоконь, О.А. Беляк, В.Н. Беркович, А.А. Бобылев, Н.М. Бородачев, Ф.М. Бородич, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, Б.А. Галанов, Л.А. Галин, Е.В. Глушков, А.Г. Горшков, И.Г. Горячева, В.В. Калининчук, Е.В. Коваленко, В.И. Колесников, А.С. Кравчук, Е.А. Кузнецов, А.А. Ляпин, А.В. Манжиров, Ю.Ю. Маховская, В.И. Моссаковский, С.М. Мхитарян, Д.А. Пожарский, В.Л. Попов, Г.Я. Попов, О.Д. Пряхина, Ю.Н. Работнов, В.Л. Рвачев, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев, И.А. Солдатенков, М.А. Сумбатьян, Д.В. Тарлаковский, А.Ф. Улитко, Я.С. Уфлянд, И.Ю. Цуканов, М.И. Чебаков, И.Я. Штаерман, J.R. Barber, V.I. Fabrikant, G.M.L. Gladwell, K.L. Johnson, J.J. Kalker, L.M. Keer и др. Ряд результатов в данной области содержится в коллективной монографии [70] и в публикациях [1-27, 29-32, 34-37, 42, 44-47, 50, 51, 55, 56, 58-66, 73, 74, 76, 82, 84-95, 98-107, 109-114, 118, 120, 121, 124-131].

**Участие в научных проектах по теме диссертации.** Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18-01-00017-а «Контактные и смешанные задачи теории упругости для неоднородных цилиндрических, клиновидных и слоистых тел», РНФ 22-21-00013 «Пространственные периодические контактные задачи» и РНФ 24-21-00014 «Пространственные задачи множественного контакта при учете геометрических и структурных особенностей тел», стипендии Губернатора Ростовской области аспирантам и премии молодым ученым Ростовской области (2024 г.).

**Цель, объект и предмет исследования.** Цель диссертационной работы заключается в получении новых знаний о решениях периодических смешанных и контактных задач для уравнений Лапласа и Ламе упругого равновесия. Объектом исследования является модель тела в форме клина, позволяющая учесть геометрические особенности в виде угловой линии. Предметом иссле-

дования являются периодические задачи со смешанными граничными условиями для уравнений теории упругости, а также смешанные задачи поиска гармонической функции в пространственном клине.

**Идея работы** заключается в сведении периодических смешанных и контактных задач (ось, вдоль которой расположены области смены граничных условий, параллельна ребру клина) к интегральным уравнениям и разбиении ядер на «плоские» и «пространственные» части. В случае, когда «плоская» часть дает расходимость ядра, предлагается модификация постановки проблемы посредством добавления периодической регуляризирующей системы дискретных воздействий определенной интенсивности с тем же периодом. В результате получается интегральное уравнение со сходящимся ядром.

**Методы исследования** базируются на фундаментальных законах математической физики, механики деформируемого твердого тела, теории упругости, теории обобщенных функций, механики контактных взаимодействий, вычислительной математики, функционального и математического анализа. Применяются метод интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева, метод суперпозиции, численный метод Галанова нелинейных граничных интегральных уравнений, использующий метод Ньютона, метод специальной аппроксимации ядра интегрального уравнения, асимптотические методы, метод Винера–Хопфа, метод коллокаций.

**Основные научные положения, защищаемые автором:**

– решена трехмерная периодическая контактная задача с трением Кулона в заранее неизвестной области контакта для упругого клина, одна грань которого находится в условиях жесткой заделки;

– решены трехмерные периодические контактные задачи с заранее неизвестной областью контакта для упругого клина, одна грань которого свободна от напряжений или находится в условиях скользящей заделки при действии периодической цепочки сил вне зоны контакта;

– показано, что в плоских контактных задачах для упругого клина учет переменности коэффициента Пуассона по угловой координате может изменять свойства ядра интегрального уравнения и приводить к появлению логарифмических членов в регулярном асимптотическом решении;

– решены периодические задачи о системах жестких включений, а также задачи о паре включений в пространственном упругом клине с использованием регулярного асимптотического метода в предположении связи между двумя безразмерными геометрическими параметрами (относительное расстояние между включениями и их относительная удаленность от ребра клина);

– решены интегральные уравнения плоских задач о жестких включениях в упругом клине, которые являются предельными случаями уравнений соответствующих периодических задач; для их решения применены регулярный и сингулярный асимптотические методы, а также метод, основанный на специальной аппроксимации ядра.

**Научная новизна работы** состоит в следующем:

– разработана модель тела с угловой линией в виде клина двугранного угла при исследовании пространственно периодических физических процессов, описываемых трехмерными уравнениями Лапласа и Ламе упругого равновесия со смешанными граничными условиями;

– периодические смешанные и контактные задачи для уравнений Лапласа и Ламе в пространственном клине сведены к новым интегральным уравнениям, ядра которых разбиты на «плоские» и «пространственные» части; в случае расходимости ядра предложен метод его регуляризации; в периодической контактной задаче для упругого клина с одной жестко заделанной гранью проведен учет сил трения перпендикулярных ребру клина;

– в периодических контактных задачах для упругого клина с неизвестной областью контакта показана возможность перколяции (слияния соседних зон контакта) при усилении контакта; на линиях возможного слияния контактных пятен обнаруживаются новые интегрируемые особенности ядер ин-

тегральных уравнений, требующие регуляризации при численном методе решения;

– в плоских контактных задачах для упругого клина с переменным по угловой координате коэффициентом Пуассона получены новые асимптотические решения по сравнению со случаем однородного клина;

– получены новые интегральные уравнения периодических задач о жестких включениях, а также о двух включениях в трехмерном упругом клине и найдены их регулярные асимптотические решения;

– впервые получены асимптотические решения плоских задач о жестком включении в упругом клине, а также замкнутое решение при специальной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения.

**Обоснованность и достоверность результатов** обеспечивается постановками решаемых задач с учетом регуляризации, применением строгих математических численных и асимптотических методов решения, совпадением результатов при применении для решения одной и той же задачи разных методов, совпадением результатов в частных случаях с известными результатами. Например, ядра интегральных уравнений периодических задач, разбитые на «плоскую» и «пространственную» части сравнивались в частных случаях (полупространство, четверть пространства) с ядрами в форме без квадратур.

**Научное и теоретическое значение результатов исследований.** Развитый метод регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения может быть применен и в других аналогичных задачах со смешанными граничными условиями. Результаты расчетов могут быть использованы для контроля точности прямых методов типа метода конечных элементов при наличии у тела угловой линии.

**Практическая ценность работы.** Рассмотренные периодические задачи для клина в силу симметрии эквивалентны непериодическим смешанным задачам для клина усеченного двумя перпендикулярными ребрами плоскостями. В контактных задачах на таких плоскостях следует ставить условия скользящей заделки. Модель усеченного клина конечной длины вдоль ребра

более соответствует практическим задачам, чем клин с бесконечным ребром. Результаты могут также быть востребованы для прочностного анализа тел с угловой линией и периодическим рельефом поверхности после лазерной обработки.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на XVIII и XXI международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016 и 2023 г.), на XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023 г.), на Всероссийской школе «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 2024 г.), на Всероссийской конференции «Актуальные проблемы науки и техники» (Ростов-на-Дону, 2024 г.), на международной конференции «Интеллектуальные информационные технологии и математическое моделирование 2024» (Дивноморское, 2024 г.).

**Публикации.** Основные материалы диссертации опубликованы в 11 работах [132-142], в том числе 4 статьях [132-135], входящих в Перечень ВАК, Scopus, Web of Science.

**Личный вклад автора.** В работах [132,134-136,142] постановки задач и рекомендации по выбору методов решения принадлежат соавторам в равной степени, аналитические и численные исследования и основные результаты — автору диссертационной работы. В [133] исследование задачи с трением вдоль ребра клина принадлежит соавторам, а задачи с трением перпендикулярно ребру клина — автору диссертации. В [137,138,140,141] исследования задач для слоя или полупространства принадлежат соавторам, а задач для клина — автору диссертации.

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 3-х глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем работы составляет 131 страницу, включая 31 рисунок, 15 таблиц, список литературы, который содержит 142 наименования и разбит на части: рус-

скоязычные публикации, работы на иностранных языках, публикации соискателя ученой степени.

В первой главе рассматриваются периодические задачи со смешанными граничными условиями для трехмерного уравнения Лапласа в пространственном клине двугранного угла. При помощи метода интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева задачи сводятся к интегральным уравнениям по области смены граничных условий, периодически повторяющейся вдоль ребра клина. В зависимости от типа граничных условий (Дирихле или Неймана на одной грани клина) ядро интегрального уравнения соответственно представляется сходящимся или расходящимся рядом. В случае задачи теплопроводности расходимость можно интерпретировать как перегрев грани клина, на которой есть пространственно периодический приток тепла, при нулевом оттоке тепла на другой грани клина. В случае расходимости предлагается регуляризация краевой задачи путем введения дополнительного периодического точечного воздействия на грани клина, удовлетворяющего определенным условиям (задается отток тепла в случае задачи теплопроводности). При заранее неизвестной области смены граничных условий для решения интегральных уравнений предлагается использовать численный метод нелинейных уравнений Б.А. Галанова. Развитый подход применим и к системам уравнений Лапласа со связанными граничными условиями, которые возникают в представлении Папковича–Нейбера общего решения уравнений Ламе упругого равновесия. В случае периодических задач для упругого клина, как показано в последующих главах, возникают аналогичные интегральные уравнения с более сложными ядрами, но принципиальные части ядер такие же, как в уравнениях главы 1.

Во второй главе в п. 2.1 в пространственно-периодической постановке исследуется контактная задача теории упругости для клина (имеет двугранный угол, частные значения угла соответствуют полупространству и четверти пространства). Учитываются кулоновские силы трения в неизвестной области контакта, которые перпендикулярны ребру клина. Одна из граней кли-

на жестко фиксирована, а другая контактирует с бесконечной прямолинейной цепочкой одинаковых жестких штампов, ось цепочки параллельна ребру клина. Получено интегральное уравнение, ряд в его ядре, связанный с компонентами Черрути вклада сил трения, точно просуммирован. Для решения задачи применяется численный метод нелинейных интегральных уравнений Б.А. Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Проведен расчет механических характеристик, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта бесконечной длины. В п. 2.2 и 2.3 соответственно исследуются пространственно-периодические проблемы нормального контакта для упругого клина с одной свободной от напряжений или закрепленной скользящей заделкой гранью. Другая грань клина подвержена внедрению бесконечной периодической прямолинейной системы жестких штампов, расположенных вдоль ребра клина (двухгранного угла). Система штампов вызывает бесконечное нормальное смещение грани клина (кроме случая полупространства со скользящей заделкой по полуплоскости). Для регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения относительно контактных давлений берется дополнительная периодическая система нормальных сил, действующих вне области контакта. Эта система параллельна цепочке штампов и имеет тот же период. Силы в регуляризующей цепочке равны по модулю и направлены противоположно силам, приложенным к штампам. Метод регуляризации эквивалентен известному подходу, связанному с введением относительного смещения. Рассматриваются два случая регуляризации: цепочка сил приложена вне ребра клина (первый случай) или на ребре (второй случай). После регуляризации интегрального уравнения применяется численный метод Б.А. Галанова, области контакта и контактные давления находятся одновременно. Ядра интегральных уравнений линейно-периодических задач содержат слагаемые, возникающие в соответствующих плоских контактных задачах, в задаче Герца и дополнительные члены. Рассмотренный в п. 2.1 случай жесткой заделки грани клина двухгранного угла не требует регуляризации, поскольку в «плоской» части ядра

возникает символ типа  $\text{th}(Au)/u$ , обеспечивающий сходимость интеграла при  $u \rightarrow 0$ . Такого же типа символ возникает и в случае полупространства, половина границы которого закреплена жесткой или скользящей заделкой [44]. В отличие от этих случаев для свободной от напряжений или закрепленной скользящей заделкой грани клина в «плоской» части ядра интегрального уравнения пространственной линейно-периодической контактной задачи возникает символ типа  $\text{cth}(Au)/u$ , вызывающий расходимость интеграла при  $u \rightarrow 0$  и бесконечную постоянную в ядре [5]. Чтобы убрать бесконечную постоянную, в плоских контактных задачах для клина дифференцируют почленно одномерное интегрального уравнения (тип ядра меняется с логарифмического на сингулярный типа Коши), из-за этого не удается определить связь между вдавливающей силой и осадкой штампа, контактное давление находится через силу, действующую на штамп [5]. Для пространственных контактных задач дифференцирование двумерного интегрального уравнения по одному из аргументов требует последующего нахождения уже не произвольной постоянной, а произвольной функции. Поэтому здесь используется другой подход, связанный с введением относительного смещения в условие контакта. В п. 2.4 изучаются задачи контакта для плоского упругого клина, когда пуассоновский коэффициент непрерывно меняется по угловой координате. В частном случае возникают уравнения для однородного клина, изученные ранее [5]. Область контакта имеет конечную длину на одной грани клина и не достигает его вершины, другая же грань жестко фиксирована либо свободна от напряжений. Задачи ведут к интегральным уравнениям, получены точные формулы для ядер. Получены регулярные асимптотические решения, которые эффективны для зон контакта относительно удаленных от вершины клина. Выяснено, что для данного типа неоднородности материала в асимптотиках могут встречаться логарифмические члены, отсутствующие в известных решениях для однородного клина.

В третьей главе в п. 3.1 рассматриваются задачи о системах тонких жестких эллиптических включений (два одинаковых включения, периоди-

ческая система включений) в трехмерном упругом клине двухгранного угла, на внешних гранях клина ставятся условия жесткой или скользящей заделки. Задачи сведены к интегральным уравнениям с симметричными ядрами. Для характеристики расположения включений в биссекториальной плоскости клина предложены два безразмерных геометрических параметра. В предположении линейной связи между параметрами для решения применяется регулярный асимптотический метод. Асимптотика для двух включений сравнивается с соответствующими решениями для единичного включения в клине и для периодической цепочки включений, ось которой параллельна ребру клина. В п. 3.2 рассматриваются проблемы теории упругости для плоского клина, в середине которого имеется тонкое жесткое включение конечной длины, сдвигаемое в направлении биссектрисы. На обеих гранях клина ставятся условия жесткой или скользящей заделки. С применением интегрального преобразования Меллина проблемы приводятся к интегральным уравнениям относительно касательных напряжений. Относительная дистанция включения от угловой точки характеризуется одним безразмерным геометрическим параметром. Для получения решений интегральных уравнений привлекаются три метода. В первом методе удается построить замкнутое решение на основе специальной аппроксимации символа ядра. В ходе второго метода решение разлагается по степеням малого параметра, давая регулярные асимптотики, эффект от которых проявляется при достаточной удаленности включения от угловой точки. В ходе третьего метода конструируются сингулярные асимптотики, эффект от них проявляется для включений, достаточно близких к угловой точке. На базе этих трех подходов сделан численный анализ при варьировании граничных условий, безразмерного параметра, угла клина и коэффициента Пуассона.

Для проведения расчетов составлены программы на Фортране. Поскольку программа метода Б.А. Галанова опубликована [41], как и программы решения систем линейных алгебраических уравнений [72], в приложе-

нии приводится фрагмент программы расчета ядра интегрального уравнения периодической контактной задачи для пространственного клина.

Контактные явления случаются буквально повсюду, что обуславливает интерес к контактными задачам во всем мире. Выявить напряженно-деформированное состояние тела в окрестности зоны контакта возможно только в результате исследования контактных задач. За рубежом для решения таких задач в основном используется метод конечных элементов [97]. Однако в трехмерном случае этот метод может давать существенные погрешности при учете трения и геометрических особенностей тела. Численным методам в механике контакта посвящены монографии [126,129]. В нашей стране для решения задач математической физики развиваются сеточные методы [71,77,78,123], специфические методы решения обратных коэффициентных задач [28]. После выхода обзорной монографии [70] в области контактных задач было издано немало монографий и статей, часть из которых уже упоминалась выше. Б.А. Галанов разработал нелинейный численный метод решения пространственных контактных задач с неизвестной зоной контакта [31]. Весьма распространенным является метод интегральных преобразований [82], позволяющий свести контактную задачу к интегральному уравнению первого рода, решение которого в общем случае представляет некорректную задачу [79]. В силу особенностей ядер интегральных уравнений контактных задач для их решения удалось развить асимптотические методы [4-7,29,70], регулярный и сингулярный, последний метод включает метод Винера–Хопфа [57]. Динамике контакта посвящены, среди прочих, монографии [14,34,45-47]. А.А. Бобылев применил метод сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта [20], разработал алгоритм решения задач дискретного контакта с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова [21-24].

Пионерскими в области задач периодического контакта считаются работы [122,125]. В настоящее время можно выделить метод локализации И.Г. Горячевой, применяемый для систем круговых инденторов [35,36,106]. В

этом методе влияние соседних штампов учитывается через точное решение Л.А. Галина для сосредоточенной силы, приложенной вне круговой области контакта. Следует учитывать, что метод локализации не работает в зоне перколяции (слияния соседних областей контакта) при  $a/L > 0.7$ , где  $a$  — характерный размер единичной области контакта,  $L$  — период системы (предполагается совпадение периодов в направлениях осей) [85]. Явление перколяции изучалось в работах [130,131] при использовании быстрого преобразования Фурье, что привело к уточнению решения К. Джонсона и соавторов [42,111,130] для двоякопериодического контакта. В.М. Александров, по-видимому, впервые применил теорию обобщенных функций для расщепления ядра интегрального уравнения двоякопериодической контактной проблемы для слоя [8]. Изучалось влияние сил трения, износа, сцепления и адгезии при периодическом контакте упругих тел [37,73,74,101-106].

В.А. Кондратьев обосновал разрешимость краевых задач для эллиптических уравнений в областях с угловыми точками [48]. И.И. Ворович и соавторы разработали вопросы разрешимости интегральных уравнений неклассических смешанных задач [29]. Беркович В.Н. развил метод граничных интегральных уравнений и исследовал плоские и антиплоские смешанные задачи динамической теории упругости для клиновидных, а также косослоистых областей с разрывными граничными условиями, проработал вопросы их разрешимости и подходы к построению приближенных решений, проанализировал характер формирования волнового поля, возбуждаемого источниками колебаний на границах, исследовал концентрацию напряжений вблизи угловых точек [18], а также получил точное решение одного класса интегральных уравнений смешанных задач упругости и математической физики [17].

Общее решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах в клине получается при помощи интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева [82]. В фундаментальные решения для пространственного клина входит модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) [43,52]. Для пространственного упругого клина в работах А.Ф. Улитко,

Е.И. Орлюка, И.А. Лубягина, Д.А. Пожарского и М.И. Чебакова были получены фундаментальные решения, включающие решения вспомогательных уравнений Фредгольма второго рода [62,81]. В частных случаях эти решения совпадают с известными решениями задач Буссинеска, Черрути и Миндлина [83,119]. Рассматривалась пространственно-периодическая контактная задача для клина из несжимаемого материала (без трения) при жесткой фиксации одной грани [59]. Решения многих контактных плоских и пространственных задач для упругого клина, в том числе неоднородного и составного, приведены в монографиях [1,5,11,29,62,88]. Исследовались плоские контактные задачи для клина с переменным по углу модулем сдвига и постоянным коэффициентом Пуассона [1]. При этом ядро интегрального уравнения строилось численно, отмечалось изменение асимптотики ядра по сравнению с однородным случаем. По-видимому, впервые А.Н. Бородачев [96] построил точное фундаментальное решение для слоя с переменным коэффициентом Пуассона при помощи представления Фрайбергера [108].

Решения задач для тел с включениями могут иметь приложения в механике композитов. Большинство публикаций по включениям посвящено плоским задачам [3,6,39,40,67,115]. В различных постановках изучались задачи о периодических системах включений в упругой плоскости [3,39]. Рассматривалось напряженно-деформированное состояние упругой полосы с жестким [6] или упругим [40] или включением. Анализировались задачи в нелинейной постановке, содержащей граничные условия с неравенствами [66,115-117].

## **Глава 1. Периодические смешанные задачи для уравнения Лапласа в клине**

В пространственном клине двугранного угла в цилиндрических координатах изучаются периодические задачи со смешанными граничными условиями для трехмерного уравнения Лапласа. При использовании метода интегральных преобразований краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям по области смены граничных условий, которая расположена на одной грани клина периодическим образом вдоль ребра. В зависимости от граничных условий на другой грани ядро интегрального уравнения может сходиться или расходиться. В последнем случае проводится регуляризация смешанной задачи посредством дополнительного периодического воздействия на грань клина, на которой располагаются области смены граничных условий. В предположении, что эти области априори неизвестны для решения предлагается применять численный метод нелинейных уравнений Б.А. Галанова. Данный подход, как будет показано в следующих главах, применим также к периодическим смешанным задачам для системы уравнений Ламе упругого равновесия в трехмерном клине.

Уравнение Лапласа является одним из наиболее известных в математической физике. В цилиндрических координатах в трехмерном клине решение уравнения Лапласа может быть представлено интегралами Фурье и Конторовича–Лебедева [62,82]. Пространственно периодические текстурированные поверхности могут возникать в результате лазерной обработки [104,127]. В аналогичной периодической задаче для упругого клина с одной жестко заделанной гранью ядро интегрального уравнения сходится [133]. Если же на одной грани упругого клина отсутствуют напряжения или она лежит без трения на недеформируемом основании, то ряд в ядре не сходится и проблемы нуждаются в регуляризации. В главе 1 объясняется, что аналогичная картина имеет место в более простых

интегральных уравнениях периодических смешанных граничных проблемах для уравнения Лапласа в клине.

### 1.1. Постановки задач

Применяя цилиндрические координаты, опишем клин двугранного угла  $\alpha$  неравенствами  $\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \alpha, |z| < \infty\}$ , ребро совпадает с осью  $z$ . Частными случаями служат полупространство ( $\alpha = \pi$ ) и четверть пространства ( $\alpha = \pi/2$ ). Сформулируем периодические смешанные краевые задачи A1 и A2 в клине для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  относительно функции  $u = u(r, \varphi, z)$ :

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha: u = f(r, z), (r, z) \in \Omega^*; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, (r, z) \notin \Omega^*; \\ \varphi = 0: \text{ A1) } u = 0; \text{ A2) } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть периодическая по  $z$  область  $\Omega^*$  имеет период  $2l$ , объединяя бесконечный набор конечных выпуклых областей с гладкой границей, расположенных вдоль ребра клина, не касаясь его (рис. 1.1):

$$\Omega^* = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k,$$

при этом область  $\Omega = \Omega_0$  симметрична по  $z$  и содержит точку  $(c, 0)$ . Ось периодической системы областей  $\Omega_k$  параллельна ребру клина. Функция  $f(r, z)$  — гладкая и периодическая по  $z$  с периодом  $2l$ , имеет максимум в точке  $(c, 0)$ . Должна существовать подобласть области  $\Omega$ , где  $f(r, z) > 0$ . Для определенности предположим, что

$$f(r, z) = \delta - A(r - c)^2 - Bz^2. \quad (1.2)$$

Предположим, что область  $\Omega$  неизвестна и выполняются условия

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha: \quad \frac{k_*}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = q(r, z) \geq 0, (r, z) \in \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, (r, z) \in \partial\Omega; \\ u > f(r, z), (r, z) \in S \setminus \Omega, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $S=\{|r-c|\leq d, |z|\leq l\}$  — прямоугольник, включающий область  $\Omega$  ( $d < c$ ),  $k_*$  — размерный коэффициент (например, коэффициент теплопроводности, в этом случае  $q(r,z)$  — плотность теплового потока).

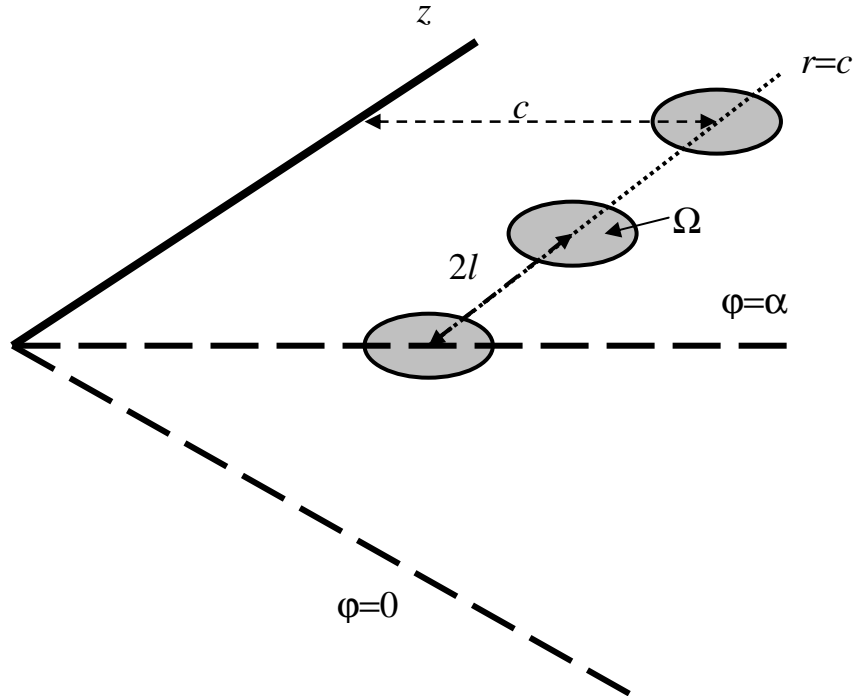


Рис. 1.1 — Области смены граничных условий

При известной функции  $f(r,z)$  (1.2) и значениях  $\alpha$ ,  $d$ ,  $k_*$  и  $l$  нужно определить функцию  $q(r,z)$ ,  $(r,z)\in\Omega$  и саму область  $\Omega$ . Гармоническая функция  $u$  должна убывать при  $r\rightarrow 0$  и  $r\rightarrow\infty$  в соответствие с ее представлением интегралом Фурье–Конторовича–Лебедева [62,82]. Интегральная характеристика искомой функции (например, количество тепла, проходящего через  $\Omega$  в единицу времени) вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega} q(r,z) dr dz = Q. \quad (1.4)$$

Условия типа (1.2), (1.3) и (1.4) можно встретить также в контактных задачах теории упругости [62].

В случае стационарного процесса теплопроводности задача A2 некорректна, так как суммарный поток тепла через границу клина должен быть равен нулю [80].

## 1.2. Интегральные уравнения. Регуляризация

Смешанные задачи (1.1) при помощи интегральных преобразований Фурье по  $z$  и Конторовича–Лебедева по  $r$  [82] сводятся к интегральному уравнению

$$\iint_{\Omega} q(x, y)K(x, y, r, z)dxdy = 2\pi k_* f(r, z), \quad (r, z) \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$K(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u)W(u)K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2lk))dud\beta,$$

$$\text{A) } W(u) = \text{th}(\alpha u), \quad \text{B) } W(u) = \text{cth}(\alpha u).$$

Можно показать, что для задачи А1 ряд в ядре уравнения (1.5) сходится, а для задачи А2 — расходится. Например, для полупространства ( $\alpha = \pi$ ) на основании известных интегралов ([62], формулы (109)) ядро (1.5) преобразуется к виду

$$K(x, y, r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \text{arctg} \frac{R_k}{2\sqrt{xr}} \right), \quad (1.6)$$

$$R_k = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y+2kl)^2}$$

для задачи А1 (ряд сходится) или

$$K(x, y, r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k} \quad (1.7)$$

для задачи А2 (ряд расходится). Сходимость ряда (1.6) базируется на соотношении ([75], формулы 4.4.5 и 4.4.8)

$$\text{arctg } z = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{1}{z} \quad (z \geq 0).$$

С физической точки зрения, если  $u$  — температура, расходимость в задаче А2 связана с перегревом клина из-за отсутствия оттока тепла на нижней грани клина (рис. 1.1).

Преобразуем ядро (1.5) при помощи соотношения [33]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2lk)) = 2\pi \cos(\beta(z - y)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\beta l - 2\pi k), \quad (1.8)$$

где  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Для задачи А1, используя известные интегралы и пределы [59,68,69], получим

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\alpha u)}{u} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \text{th}(\alpha u) \Sigma_u du, \quad (1.9)$$

$$\Sigma_u = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}\left(\frac{\pi k}{l} x\right) K_{iu}\left(\frac{\pi k}{l} r\right) \cos\left(\frac{\pi k}{l} (z - y)\right).$$

Первое слагаемое в правой части формулы (1.9) возникает в соответствующей плоской краевой задаче для клина. Методом работы [59] выделим из интегралов (1.9) главные части ( $C$  — постоянная Эйлера):

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \frac{C}{l} + \frac{1}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} +$$

$$+ \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left\{ [\text{th}(\alpha u) - 1] \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} +$$

$$+ \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) [\text{th}(\alpha u) - \text{cth}(\pi u)] \Sigma_u du, \quad (1.10)$$

$$R = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_k^{\pm} = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}.$$

Логарифмический член плоской задачи в (1.10) несет устранимую особенность. Главным в (1.10) является член  $1/R$  ядра интегрального уравнения пространственной задачи для единичной области смены граничных условий. Это ядро для единичной области смены граничных условий возникает из ядра (1.9) в результате предела

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \Sigma_u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \cos(\beta(z-y)) d\beta.$$

В случае задачи А2 в ядре типа (1.9) первое слагаемое в правой части меняется на расходящийся в нуле интеграл ( $C_{\infty}$  — бесконечная постоянная [5], формула (6.96))

$$\frac{1}{l} \int_0^{\infty} \frac{\text{cth}(\alpha u)}{u} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du = C_{\infty} - \frac{1}{l} \ln \left| \left(\frac{r}{x}\right)^{\pi/(2\alpha)} - \left(\frac{x}{r}\right)^{\pi/(2\alpha)} \right|. \quad (1.11)$$

В плоских смешанных задачах теории упругости для клина для устранения бесконечной постоянной в (1.11) интегральное уравнение почленно дифференцируют [5]. При этом главная логарифмическая часть дает сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши. Для двумерных интегральных уравнений дифференцирование по одному из аргументов приводит к проблеме нахождения не произвольной постоянной, а произвольной функции. Поэтому здесь предлагается подход, связанный с регуляризацией самой краевой задачи путем замены первого граничного условия (1.1) при  $\varphi=\alpha$  на относительное условие

$$\varphi = \alpha: u - u_* = f(r, z), (r, z) \in \Omega^*, \quad (1.12)$$

где  $u_*$  — значение функции  $u$  при действии на грани клина  $\varphi=\alpha$  периодической системы сосредоточенных воздействий интенсивности  $Q$  с периодом  $2l$ . Эти воздействия должны быть таковы, чтобы выполнялось условие корректности задачи стационарной теплопроводности [80]

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} dr dz = 0, \quad (1.13)$$

где  $\Sigma$  — поверхность клина. Вместо замены первого условия (1.1) на (1.12) можно заменить второе условие (1.1) на

$$\varphi = \alpha: \frac{k_*}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -Q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(r-h)\delta(z+2lk), (r, z) \notin \Omega^*, \quad (1.14)$$

где постоянная  $h>0$  такова, что система точечных воздействий (отток тепла) лежит вне области  $\Omega^*$ . Условие (1.12) выполняется за счет выбора (1.14).

Чтобы регуляризовать краевую задачу А2 берется условие (1.12) или (1.14), метод суперпозиции с учетом того, что разность двух расходящихся рядов может сходиться. Регуляризирующая система воздействий (1.14) имеет тот же период  $2l$ , расположена на прямой  $r=h$  параллельной оси  $r=c$  системы областей смены граничных условий. Интенсивность воздействий равна интегральной характеристике  $Q$  (1.4). Система точечных воздействий (1.14) в задаче А2 приводит к интегральному уравнению со сходящимся ядром

$$\iint_{\Omega} q(x, y)[K(x, y, r, z) - K(h, 0, r, z)] dx dy = 2\pi k_* f(r, z), \quad (r, z) \in \Omega. \quad (1.15)$$

Используя теорию обобщенных функций, формулы (1.8), (1.11), известные интегралы и пределы [59,68,69], преобразуем ядро уравнения (1.15) к форме

$$\begin{aligned} & K(x, y, r, z) - K(h, 0, r, z) = \\ & = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{1}{R_k^+(h, 0)} - \frac{1}{R_k^-(h, 0)} \right] + \\ & + \frac{A_*}{2l} \ln \frac{x}{h} + \frac{1}{l} \ln \left| \frac{(r/h)^{\pi/(2\alpha)} - (h/r)^{\pi/(2\alpha)}}{(r/x)^{\pi/(2\alpha)} - (x/r)^{\pi/(2\alpha)}} \right| - \frac{1}{l} \ln \left| \frac{(r/h)^{1/2} - (h/r)^{1/2}}{(r/x)^{1/2} - (x/r)^{1/2}} \right| + \\ & + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) [\text{cth}(\alpha u) - \text{cth}(\pi u)] \Sigma(u) du, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$R_h = \sqrt{(r-h)^2 + z^2}, \quad R_k^{\pm}(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad A_* = 1 - \pi\alpha^{-1},$$

$$\Sigma(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [K_{iu}(\pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - K_{iu}(\pi_k h) \cos(\pi_k z)], \quad \pi_k = \frac{\pi k}{l}.$$

При  $\alpha=\pi$  ядро (1.16) дает регуляризацию расходящегося ядра (1.7).

### 1.3. Численный метод

Для решения интегральных уравнений (1.5) и (1.15) применим численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений Б.А. Галанова [31]. Метод дает возможность одновременно найти функцию  $q(r, z)$  и область  $\Omega$ . Заключим область  $\Omega$ , содержащую точку  $r=c, z=0$ , в прямоугольник  $S=\{|r-c| \leq d, |z| \leq l\}$ . Метод базируется на введении специальных нелинейных операторов, сведении задачи к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна, для численного решения которого в прямоугольнике  $S$  применяется модифицированный метод Ньютона последовательных приближений. Доказательство существования и единственности решения аналогично приведенному в [31].

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r-c}{l}, \quad x' = \frac{x-c}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad A' = Al, \quad B' = Bl, \quad \lambda = \frac{c}{l}, \quad h' = \frac{h}{l},$$

$$q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi k_*}, \quad \varepsilon = \frac{d}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad Q' = \frac{Q}{2\pi k_* l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega. \quad (1.17)$$

Параметр  $\lambda$  характеризует относительную удаленность периодической цепочки от ребра клина. В обозначениях (1.17) интегральное уравнение (1.5), (1.2) запишем в форме

$$\iint_{\Omega} q(x, y) K_*(x, y, r, z) dx dy = \delta - Ar^2 - Bz^2, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (1.18)$$

где для задачи А1 на основании (1.10) имеем

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+} + \frac{1}{S_k^-} - \frac{1}{k} \right] + C + \ln \frac{|r-x|}{4 |\ln((r+\lambda)/(x+\lambda))|} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left\{ [\text{th}(\alpha u) - 1] \cos \left( u \ln \frac{r+\lambda}{x+\lambda} \right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} +$$

$$+ \frac{4}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) [\text{th}(\alpha u) - \text{cth}(\pi u)] \Sigma_u^* du, \quad (1.19)$$

$$S_k^{\pm} = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2k)^2},$$

$$\Sigma_u^* = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi k(x+\lambda)) K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)),$$

а для регуляризованной задачи А2 на основании (1.16)

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{1}{S_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} - \frac{1}{S_k^+(h, 0)} - \frac{1}{S_k^-(h, 0)} \right] +$$

$$+ \frac{A_*}{2} \ln \frac{x+\lambda}{h} + \ln \left| \frac{((r+\lambda)/h)^{\pi/(2\alpha)} - (h/(r+\lambda))^{\pi/(2\alpha)}}{((r+\lambda)/(x+\lambda))^{\pi/(2\alpha)} - ((x+\lambda)/(r+\lambda))^{\pi/(2\alpha)}} \right| -$$

$$- \ln \left| \frac{((r+\lambda)/h)^{1/2} - (h/(r+\lambda))^{1/2}}{((r+\lambda)/(x+\lambda))^{1/2} - ((x+\lambda)/(r+\lambda))^{1/2}} \right| +$$

$$+ \frac{4}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) [\text{cth}(\alpha u) - \text{cth}(\pi u)] \Sigma_*(u) du, \quad (1.20)$$

$$S_h = \sqrt{(r+\lambda-h)^2 + z^2}, \quad S_k^{\pm}(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2k)^2},$$

$$\Sigma_*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi k(r + \lambda)) [K_{iu}(\pi k(x + \lambda)) \cos(\pi k(z - y)) - K_{iu}(\pi kh) \cos(\pi kz)].$$

На рис. 1.2-1.6 показаны графики зависимостей  $Q(\alpha)$ ,  $Q(\lambda)$  и  $Q(\delta)$  для задач А1 и А2, а также границы областей  $\Omega$  для задачи А1 и графики  $Q(h)$  для задачи А2.

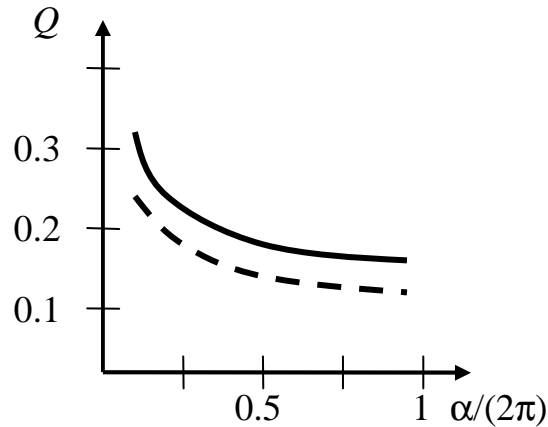


Рис. 1.2 — Графики для задачи А1:  $Q(\alpha)$  при  $\delta=A=B=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=4$  (пунктир)

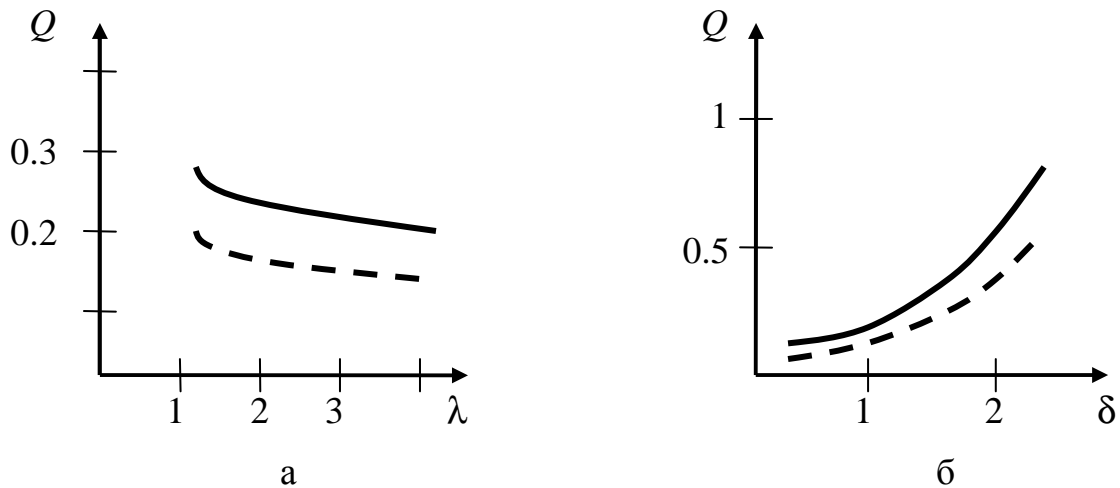


Рис. 1.3 — Графики для задачи А1: (а)  $Q(\lambda)$  при  $\delta=A=B=\varepsilon=1$  и (б)  $Q(\delta)$  при  $A=B=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ; в обоих случаях  $\alpha=\pi/2$  (сплошная линия) и  $\alpha=3\pi/2$  (пунктир)

Интегральная характеристика  $Q$  с ростом угла клина снижается в задаче А1 и возрастает в задаче А2 (рис. 1.2 и 1.5а). С ростом  $\lambda$  (при отдалении периодической цепочки областей от ребра клина)  $Q$  ведет себя по-разному: убывает в задаче А1 и немного увеличивается в задаче А2 (рис. 1.3а и 1.6а). Величина  $Q$  с ростом  $\delta$  растет в обеих задачах (рис. 1.3б и 1.6б).

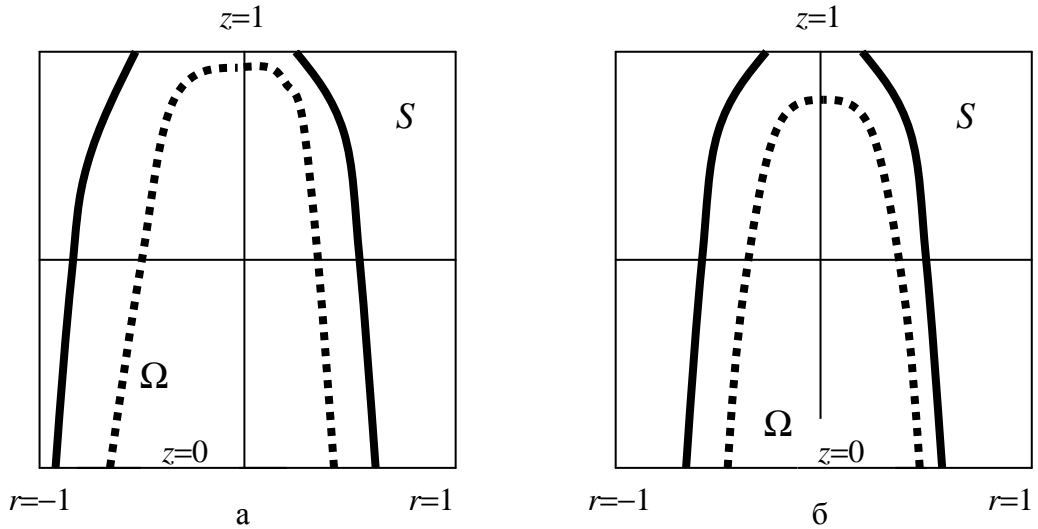


Рис. 1.4 — Границы половинок симметричных по  $z$  областей  $\Omega$  в задаче A1 при  $A=\varepsilon=1$ ,  $B=0.2$ ,  $\lambda=2$ : (а)  $\alpha=\pi/2$  и (б)  $\alpha=3\pi/2$ ;  $\delta=1.5$  (сплошные линии) и  $\delta=0.5$  (точечные линии)

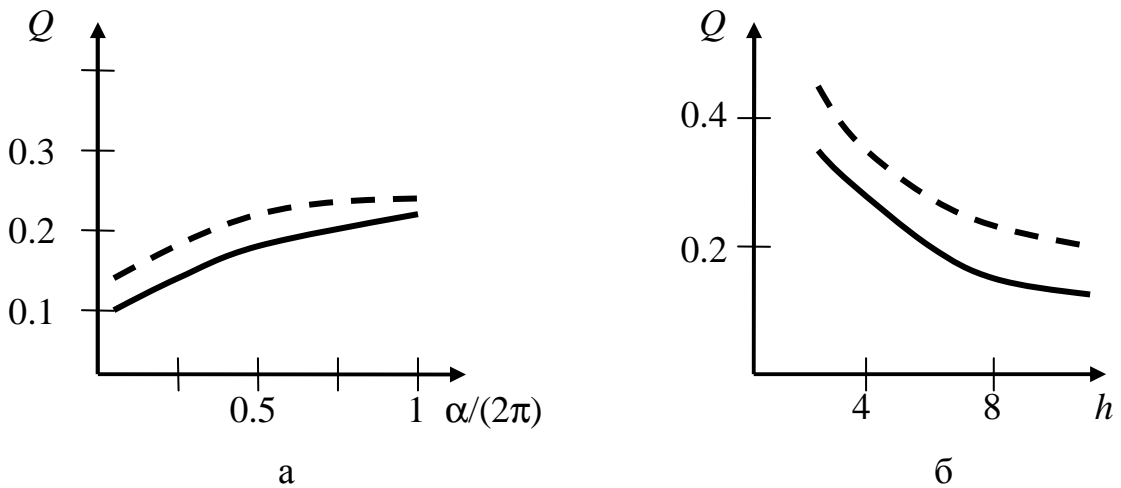


Рис. 1.5 — Графики для задачи A2: (а)  $Q(\alpha)$  при  $\delta=A=B=\varepsilon=1$ ,  $h=10$ ,  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=4$  (пунктир) и (б)  $Q(h)$  при  $\delta=A=B=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $\alpha=\pi/2$  (сплошная линия) и  $\alpha=3\pi/2$  (пунктир)

В задаче A1 площадь области  $\Omega$  при  $\alpha=\pi/2$  больше, чем при  $\alpha=3\pi/2$  (рис. 1.4). В задаче A2 наоборот, площадь области  $\Omega$  при  $\alpha=\pi/2$  меньше, чем при  $\alpha=3\pi/2$  ( $A=\varepsilon=1$ ,  $B=0.2$ ,  $\delta=\lambda=2$ ,  $h=10$ ). В обеих задачах с ростом  $\delta$  начинается перколяция (слияние соседних областей смены граничных условий, рис. 1.4). Ядра (1.10), (1.16) интегральных уравнений имеют дополнительные интегрируемые особенности типа  $1/R$  на сторонах прямоугольника  $S$ , где возможна перколяция.

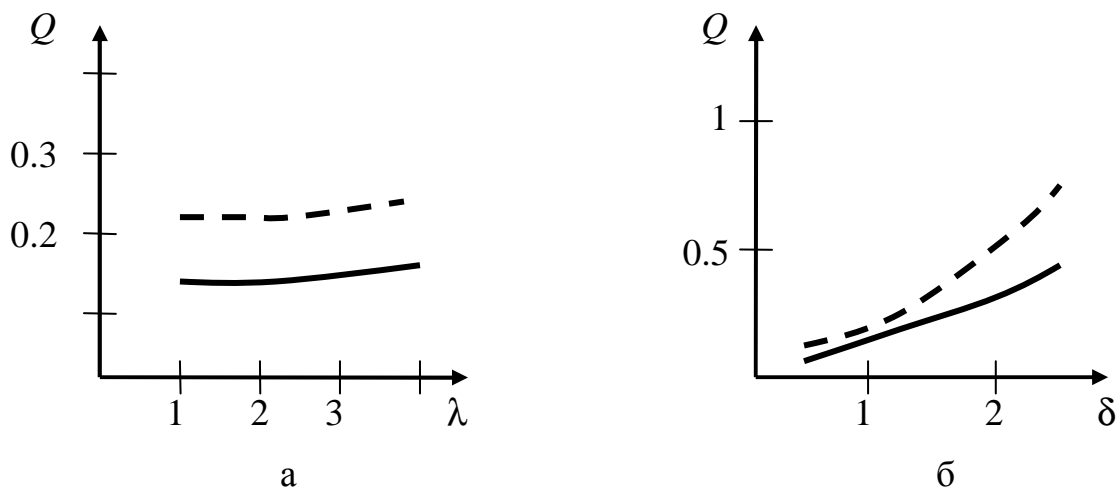


Рис. 1.6 — Графики для задачи А2: (а)  $Q(\lambda)$  при  $\delta=A=B=\varepsilon=1$ ,  $h=10$  и (б)  $Q(\delta)$  при  $A=B=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $h=10$ ; в обоих случаях  $\alpha=\pi/2$  (сплошная линия) и  $\alpha=3\pi/2$  (пунктир)

#### 1.4. Выводы

Ядра интегральных уравнений рассмотренных пространственных периодических смешанных задач обобщают ядра интегральных уравнений соответствующих плоских и пространственных задач для единичной области смены граничных условий.

Описанную в этой главе схему исследования периодической проблемы со смешанными граничными условиями для уравнения Лапласа можно перенести и на периодические контактным задачам теории упругости [133]. Тогда обозначения можно интерпретировать так:  $q(r,z)$  — давление в единичной области контакта  $\Omega$ ;  $\delta$  — осадка жестких инденторов (эллиптических параболюидов);  $r=c$  — точка начального контакта индентора и упругого клина в области  $\Omega$ ;  $Q$  — силы, действующие на инденторы. В случае регуляризации контактной задачи берется дополнительная система сосредоточенных сил интенсивности  $Q$  с периодом  $2l$ . Ядра интегральных уравнений контактных задач сложнее с ядер (1.9) и (1.14), поскольку включают дополнительные члены в соответствие с известными более сложными функциями Грина [62].

Возникает аналогия между рассмотренными периодическими смешанными задачами для уравнения Лапласа в клине и периодическими контактными задачами для упругого клина. Задачи сводятся к интегральным

уравнениям, ядра которых могут сходиться или расходиться в зависимости от типа символа ядра. В случае расходимости аналогия дает возможность осуществлять типовую регуляризацию посредством использования дополнительных периодических дискретных воздействий. Расходимость ядра в задаче A2 не связана напрямую с невыполнением условия корректности задачи стационарной теплопроводности (1.12). Например, для случая краевой задачи с единичной областью смены граничных условий и условием Неймана на другой грани клина условие корректности (1.12) не выполняется, но ядро соответствующего интегрального уравнения сходится. Более того, при  $\alpha=\pi$  это интегральное уравнение в точности совпадает с интегральным уравнением контактной задачи Герца для уравнений Ламе упругого равновесия [29].

Рассмотренные периодические задачи для клина эквивалентны соответствующим непериодическим задачам для усеченного клина плоскостями  $z=\pm l$  перпендикулярными ребру, когда имеется единичная область смены граничных условий  $\Omega$ , а при  $z=\pm l$  поставлены условия Неймана (рис. 1.7).

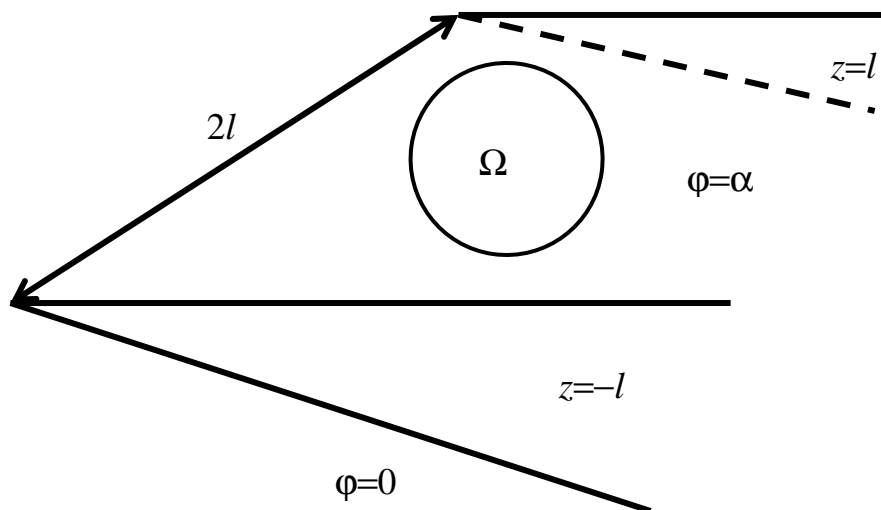


Рис. 1.7 — Усеченный клин плоскостями  $z=\pm l$  перпендикулярными ребру

## Глава 2. Периодические системы штампов на грани упругого клина

### 2.1. Одна грань клина жестко заделана

Изучается пространственно периодическая контактная задача упругости для клиновидной области (двухгранный угол, в частных случаях возникают полупространство, четверть пространства). В условиях жесткой фиксации одной грани тела его другая грань подвергается внедрению бесконечной прямолинейной цепочки одинаковых жестких штампов, выстроенных вдоль прямой линии параллельной ребру двухгранного угла. В незаданной зоне контакта возникают силы трения Кулона перпендикулярные ребру тела. Выписано интегральное уравнение, в ядре которого удалось просуммировать ряд, связанный с вкладом сил трения от решения задачи Черрути. При численном решении востребован метод нелинейных граничных интегральных уравнений Б.А. Галанова, ведущий к одномоментному нахождению области контакта и контактных давлений. Изучены механические характеристики, перколяция в зоне контакта, т.е. переход от дискретного к непрерывному контакту.

В отличие от задач для несжимаемого материала [59] учитываются силы трения Кулона при произвольном коэффициенте Пуассона.

#### 2.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейно упругое клиновидное тело  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $|z| < \infty$ , ребро которого направлено по оси  $z$  цилиндрической системы координат. Грань тела  $\varphi=0$  жестко закреплена. В квазистатической постановке изучим периодическую контактную задачу В1 о линейной цепочке одинаковых жестких инденторов (период  $2l$ , ось цепочки параллельна ребру тела и находится на расстоянии  $c$  от нее), внедренных в грань  $\varphi=\alpha$  на величину  $\delta$  и начинающихся достаточно медленно сдвигаться без перекоса перпендикулярно ребру тела (рис. 2.1). Берем в учет кулоновские силы трения коллинеарные

направлению движения и действующие против движения. Предполагается симметрия по  $z$ . К инденторам приложены нормальные силы  $P$  на расстоянии  $H$  от ребра и касательные силы  $T=\mu P$  ( $\mu$  — коэффициент кулоновского трения). Пусть незаданные пятна контакта априори заключены в известные соприкасающиеся прямоугольники со сторонами  $2l$  и  $2a$  (рис. 2.1,  $a < c$ ). Полуось  $r$  пересекает прямоугольник  $S$ , содержащий пятно контакта  $\Omega$ , в котором основание индентора определяется функцией  $f(r,z)$ , вне  $S$  эта функция продолжается периодически по  $z$  с периодом  $2l$ . Пусть далее

$$f(r,z) = \frac{(r-c)^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}, \quad (2.1)$$

где  $R_1 \leq R_2$ .

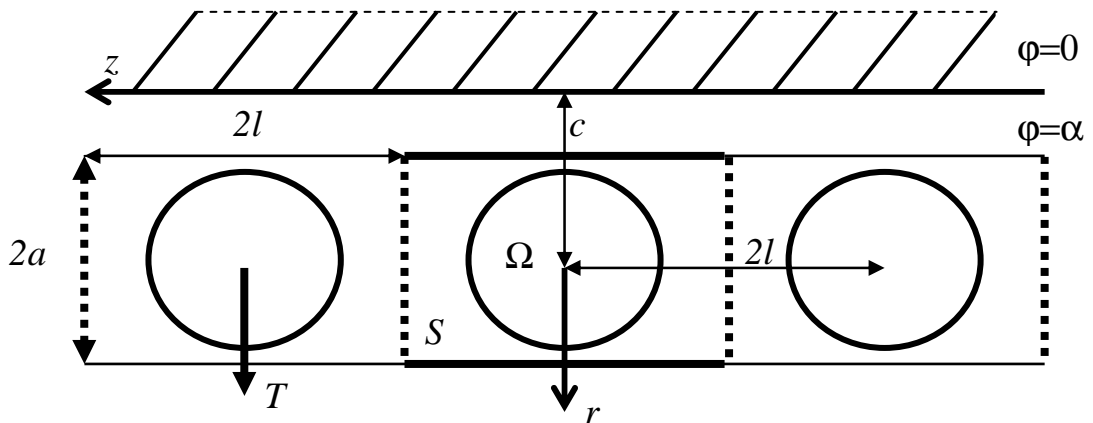


Рис. 2.1 — Схема контакта (грань  $\varphi=\alpha$ ). Грань  $\varphi=0$  жестко закреплена (задача В1)

Граничные условия задачи В1 выпишем в виде ( $\Omega^*$  — объединенная область контакта)

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha: \quad u_\varphi &= -(\delta - f(r,z)), \quad (r,z) \in \Omega^*; \quad \sigma_\varphi = 0, \quad (r,z) \notin \Omega^*; \\ \tau_{r\varphi} &= \mu\sigma_\varphi, \quad \tau_{\varphi z} = 0; \\ \varphi = 0: \quad u_\varphi &= u_r = u_z = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При известных модулях упругости  $G$  (модуль сдвига),  $\nu$  (коэффициент Пуассона), величинах  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $l$ ,  $\delta$ ,  $\mu$  и функции  $f(r,z)$  требуется определить об-

ласть контакта  $\Omega$  и контактное давление  $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$ ,  $(r, z) \in \Omega$ , затем при использовании интегральных условий равновесия инденторов могут быть подсчитаны значения  $P$  и  $H$ .

### 2.1.2. Основные уравнения

Для пространственного упругого клина с одной жестко фиксированной гранью функции Грина включают решения вспомогательных интегральных уравнений Фредгольма второго рода [58,62]. Беря суперпозицию этих функции в условиях (2.2), учитывая периодичность, получим интегральное уравнение относительно контактного давления ( $\theta = G/(1-\nu)$ ,  $n=0, 1$ )

$$\iint_{\Omega} q(x, y) K(x, y, r, z) dx dy = 2\pi\theta[\delta - f(r, z)], \quad (r, z) \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$K(x, y, r, z) = K_0(x, y, r, z) - \mu K_1(x, y, r, z),$$

$$K_n(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta r) \times \\ \times \left\{ \theta_n(u, \beta x) + \frac{\Psi_n(u, \beta x)}{\text{ch}(\pi u / 2)} \right\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2lk)) du d\beta,$$

$$W(u) = \frac{2\Delta(u)}{2\kappa \text{ch}(2\alpha u) + 4u^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 + 1},$$

$$\Delta(u) = \kappa \text{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha), \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad \theta_0(u, \beta x) = K_{iu}(\beta x),$$

$$\theta_1(u, \beta x) = \frac{h_0(u)}{u} K_{iu}(\beta x) - \nu_* \int_0^\infty h(t) \frac{\text{sh}(\pi t) K_{it}(\beta x) dt}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)}, \quad \nu_* = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)},$$

$$h_0(u) = \frac{2u^2 \sin^2 \alpha}{\Delta(u)}, \quad h(t) = \frac{2\kappa \text{sh}^2(\alpha t)}{\Delta(t)} - \frac{h_0(t)}{1 - 2\nu}.$$

Здесь  $K_{iu}(r)$  — цилиндрическая функция Макдональда (Бесселя), а функции  $\Psi_n(u, \beta x)$  при фиксированном  $\beta x$  подчиняются интегральным уравнениям Фредгольма второго рода ( $0 \leq u < \infty$ )

$$\Psi_n(u, \beta x) = (1 - 2\nu) \int_0^\infty L(u, \tau) \left[ \Psi_n(\tau, \beta x) + \text{ch} \frac{\pi \tau}{2} F_n(\tau, \beta x) \right] d\tau, \quad (2.4)$$

$$L(u, \tau) = 2\text{ch} \frac{\pi u}{2} \text{sh} \frac{\pi \tau}{2} W(\tau) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\pi t) g(t) dt}{[\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi u)][\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi \tau)]},$$

$$g(t) = -\frac{\text{th}(\alpha t) \sin^2(2\alpha)}{\text{ch}(2\alpha t) + \cos(4\alpha)} +$$

$$+ \{ \sin^2 \alpha (g_0(t)[2g_1(t) - tg_2(t)] - g_3(t)[2g_2(t) + tg_1(t)]) -$$

$$- 2(1 - \nu) \sin \alpha (g_0(t)[\sin(3\alpha) - \text{ch}(2\alpha t) \sin \alpha] - g_3(t) \text{sh}(2\alpha t) \cos \alpha) \} / g_4(t),$$

$$g_0(t) = \kappa \text{sh}(2\alpha t) \cos(2\alpha) - t \sin(2\alpha), \quad g_1(t) = -\text{ch}(2\alpha t) + \cos(2\alpha) + \sin^2(2\alpha),$$

$$g_2(t) = \text{th}(\alpha t) \sin(2\alpha)(1 + \cos(2\alpha)), \quad g_3(t) = (\kappa \text{ch}(2\alpha t) - 1) \sin(2\alpha),$$

$$g_4(t) = [g_0^2(t) + g_3^2(t)] (\text{sh}^2(\alpha t) + \cos^2(2\alpha)),$$

$$F_0(\tau, \beta x) = \theta_0(\tau, \beta x), \quad F_1(\tau, \beta x) = \theta_1(\tau, \beta x) + \frac{\tau K_{i\tau}(\beta x)}{2(1 - \nu)(1 - 2\nu)W(\tau)}.$$

Для сходимости ряда в ядре  $K_0(x, y, r, z)$  важно, что его символ  $W(u)$  имеет тип тангенса гиперболического. Интегральное уравнение (2.3) при  $\alpha = \pi$  совпадает с полученным ранее для полупространства [44]. При  $\nu = 0.5$  ядро уравнения (2.3) принимает вид

$$K(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W_1(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2lk)) du d\beta, \quad (2.5)$$

$$W_1(u) = W_*(u) - \mu f_*(u) \left( 1 - x \frac{d}{dx} \right),$$

$$W_*(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha)}{2(\text{ch}^2(\alpha u) + u^2 \sin^2 \alpha)}, \quad f_*(u) = \frac{u \sin^2 \alpha}{\text{ch}^2(\alpha u) + u^2 \sin^2 \alpha}.$$

В случае  $\mu = 0$  формулы (2.5) дают известное ядро [59].

Для упрощения ядра уравнения (2.3) возьмем соотношение [33]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2lk)) = 2\pi \cos(\beta(z - y)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\beta l - 2\pi k), \quad (2.6)$$

где  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака. При вычислении интегралов с  $\delta$ -функцией (2.6) требуются значения пределов

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) du = \int_0^{\infty} \frac{W(u)}{u} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du, \quad (2.7)$$

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{W(u) h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} K_{it}(\beta x) K_{iu}(\beta r) dt du = - \int_0^{\infty} \frac{W(u) h(u)}{u} \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du$$

возникающих в ядре (2.3) при  $k=0$ .

Пределы (2.7) приводят к соответствующей плоской задаче. Удерживая в ядре уравнения (2.3) только член при  $k=0$  (единичный штамп) для полосовой области контакта вдоль ребра клина, применяя преобразование Фурье по  $z$  и совершая предельный переход  $\beta \rightarrow 0$  при учете формул (2.7), приходим к известному ядру интегрального уравнения контактной задачи с трением для плоского клина [62]

$$K(x, r) = \int_0^{\infty} \frac{W(u)[u - \mu h_0(u)]}{u^2} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du - \mu \nu_* \int_0^{\infty} \frac{W(u) h(u)}{u} \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du. \quad (2.8)$$

Отделим принципиальные члены ядра (2.3). Для функции  $K_0(x, y, r, z)$  берем интегралы и ряд [62,68,69] ( $C$  — постоянная Эйлера)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ut) - \exp(-u)}{u} du = -\ln |t|, \quad \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(\pi u) K_{iu}(tx) K_{iu}(tr) du = \frac{\pi}{2} K_0(t |r - x|),$$

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} K_0(\pi_k |r - x|) \cos(\pi_k(z - y)) = \frac{1}{R} + \frac{1}{l} \left( C + \ln \frac{|r - x|}{4l} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right],$$

$$R = \sqrt{(r - x)^2 + (z - y)^2}, \quad R_k^{\pm} = \sqrt{(r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2}, \quad \pi_k = \pi k / l,$$

а для зависящей от  $\mu$  части ядра применим интеграл и ряд [62,68,69]

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{U(t, u) K_{it}(\beta x) K_{iu}(\beta r)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \cos(\beta(z - y)) d\beta dt du = -\frac{r - x}{R^2},$$

$$U(t, u) = \operatorname{ch}(\pi t) \operatorname{ch}(\pi u) - 1, \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r - x}{(R_k^+)^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi(r - x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r - x)/l) - \cos(\pi(z - y)/l)]}.$$

Ряд (2.9) дает возможность просуммировать слагаемые, порожденные решением задачи Черрути для полупространства.

В итоге перепишем ядро (2.3) так:

$$\begin{aligned}
K_0(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \frac{C}{l} + \frac{1}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \\
& + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left\{ [W(u) - 1] \cos \left( u \ln \frac{r}{x} \right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \\
& + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) \left\{ [W(u) - \operatorname{cth}(\pi u)] \Sigma(u, u) + \frac{W(u) \Sigma_0(u)}{\operatorname{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1(x, y, r, z) = & \frac{\pi v_* \operatorname{sh}(\pi(r-x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} + \\
& + \frac{v_*}{l} \int_0^{\infty} [W(u)h(u) - 1] \sin \left( u \ln \frac{r}{x} \right) \frac{du}{u} + \\
& + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) W(u) \left[ \frac{h_0(u)}{u} \Sigma(u, u) + \frac{\Sigma_1(u)}{\operatorname{ch}(\pi u / 2)} \right] du - \\
& - \frac{4v_*}{\pi l} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{W(u)h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t) - U(t, u)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \Sigma(t, u) dt du, \\
& \Sigma(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{it}(\pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) \cos(\pi_k(z-y)), \\
& \Sigma_n(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_n(u, \pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) \cos(\pi_k(z-y)).
\end{aligned}$$

В соотношениях (2.10) улучшена сходимость интегралов при учете асимптотического поведения функций на бесконечности. Равенства (2.10) содержат члены, входящие в ядра известных интегральных уравнений пространственных и плоских контактных задач с трением для единичного штампа; в пределе при  $l \rightarrow \infty$  получаются известные ядра для одного штампа. Особенность логарифмического слагаемого в ядре  $K_0(x, y, r, z)$  является устраняемой при  $r \rightarrow x$  [59].

### 2.1.3. Численный метод

Для приближенного решения задачи В1 используем метод Б.А. Галановым [31], позволяющий провести одновременное определение области

контакта и давления. Распространим интегрирование в (2.3), (2.1) прямоугольник  $S$ , включающий область  $\Omega$  (рис. 2.1). Вспоминая об отсутствии контакта и равенстве нулю давления в  $S \setminus \Omega$ , запишем систему равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \int_S q(N)K(N, M)dN &= d(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega, \\ \int_S q(N)K(N, M)dN &> d(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in S \setminus \Omega, \\ N = x, y, \quad M = r, z, \quad d(M) &= 2\pi\theta[\delta - f(M)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Нелинейные операторы

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и разложение давления

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$$

позволяют свести систему (2.11) к нелинейному операторному уравнению гаммерштейнского типа

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d, \quad (2.12)$$

где  $p = p(M)$ ,  $p^\pm = p^\pm(M)$ ,  $d = d(M)$ ,

$$Kp^+ = \int_S p^+(N)K(N, M)dN. \quad (2.13)$$

Интегральное неравенство (2.11) удовлетворено автоматически. Можно доказать эквивалентность системы (2.11) и уравнения (2.12) [31,62].

Процедура численного решения уравнения (2.12) основана на модифицированном методе Ньютона с построением последовательных приближений

$$p_{n+1} = p_n - (F' p_n)^{-1} \Theta p_n, \quad p_n = p_n(M), \quad n = 0, 1, \dots, \quad p_0 = d,$$

где  $F$  — дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор  $\Theta$  по равномерной метрике [31,62].

Если для единичного штампа [31,62] первое ядро (2.10) в  $S$  имеет классическую особенность  $R^{-1}$ , то здесь возникают дополнительные интегрируемые особенности  $(R_1^\pm)^{-1}$  в точках  $r = x, z - y = \pm 2l$  на сторонах  $S$

(точки на рис. 2.1). В вычислениях ядра в интегралах типа (2.13) особенности сглаживались по формуле ( $k=0;1$ )

$$(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2 \rightarrow (r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2 + \frac{h_1 h_2}{16},$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — шаги сетки по осям  $r$  и  $z$ .

Привлекаем безразмерные обозначения (далее штрихи опускаем)

$$r' = \frac{r-c}{l}, \quad x' = \frac{x-c}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad A = \frac{l}{2R_1}, \quad B = \frac{l}{2R_2}, \quad \lambda = \frac{c}{l},$$

$$q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega.$$

Параметр  $\lambda$  характеризует относительную удаленность цепочки штампов от ребра клина. В безразмерных обозначениях части ядра (2.10) трансформируются так ( $S_k^\pm$  см. формулы (1.19)):

$$K_0^*(x, y, r, z) = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+} + \frac{1}{S_k^-} - \frac{1}{k} \right] + C + \ln \frac{|r-x|}{4 |\ln((r+\lambda)/(x+\lambda))|} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left\{ [W(u) - 1] \cos \left( u \ln \frac{r+\lambda}{x+\lambda} \right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} +$$

$$+ \frac{4}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ [W(u) - \text{cth}(\pi u)] \Sigma^*(u, u) + \frac{W(u) \Sigma_0^*(u)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right\} du,$$

$$K_1^*(x, y, r, z) = \frac{\pi v_* \text{sh}(\pi(r-x))}{2 [\text{ch}(\pi(r-x)) - \cos(\pi(z-y))]} +$$

$$+ v_* \int_0^{\infty} [W(u)h(u) - 1] \sin \left( u \ln \frac{r+\lambda}{x+\lambda} \right) \frac{du}{u} +$$

$$+ \frac{4}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W(u) \left[ \frac{h_0(u)}{u} \Sigma^*(u, u) + \frac{\Sigma_1^*(u)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right] du -$$

$$- \frac{4v_*}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{W(u)h(t) \text{sh}(\pi u) \text{sh}(\pi t) - U(t, u)}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)} \Sigma^*(t, u) dt du,$$

$$\Sigma^*(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{it}(\pi k(x+\lambda)) K_{iu}(\pi k(r+\lambda) \cos(\pi k(z-y))),$$

$$\Sigma_n^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_n(u, \pi k(x + \lambda)) K_{iu}(\pi k(r + \lambda)) \cos(\pi k(z - y)).$$

В табл. 2.1 и 2.2 можно увидеть значения  $P(\delta)$  ( $\lambda=3, \nu=0.5, \mu=0.2, \varepsilon=1$ ) и  $P(\lambda)$  ( $\delta=1.5, \nu=0.5, \mu=\pm 0.2, \varepsilon=1$ ) при изменении угла клина  $\alpha$ , вычисленные для  $A=1$  и  $B=0.5$ . Значения силы  $P$  снижаются при увеличении угла клина, при удалении системы инденторов от ребра и возрастают с ростом осадки. Для упругого полупространства соответствующие значения меньше, чем в случае четверти пространства, это связано с изменением взаимного расположения заделанной грани и зоны контакта. Для полупространства из несжимаемого материала знак  $\mu$  не оказывает влияния на  $P$  (см. уравнения (2.3) и (2.5)). Направленность сил трения ощутимо влияет на силу  $P$  при  $\nu=0.5$  с случае контакта вблизи ребра остроугольного клина. Для несжимаемой четверти пространства при  $\mu < 0$  (силы трения направлены в положительном направлении полуоси  $r$ ) значения  $P$  меньше, чем при  $\mu > 0$  (см. табл. 2.2). Противоположная ситуация наблюдалась для сжимаемого полупространства ( $\alpha=\pi, \nu=0.25$ ) [44]. Отмеченное поведение интегральной характеристики  $P$  коррелирует со знаком связанной с  $\mu$  части фундаментального решения плоской задачи (2.8), которое является нормальным перемещением (с обратным знаком), вызванным действием касательной силы, приложенной в точке  $r=x$  и направленной к углу клина [62]. При  $r < x$  для полуплоскости указанное нормальное перемещение точек границы  $u_\varphi(r, \alpha = \pi) \leq 0$  ( $\nu=0.25$ ) [44], тогда как для несжимаемой четверти плоскости  $u_\varphi(r, \alpha = \pi/2) \geq 0$  ( $\nu=0.5$ ), что может оказывать разнонаправленное влияние на контакт.

Таблица 2.1 — Значения  $P(\delta)$ ; задача В1

| $\delta$        | 0.4    | 0.8   | 1.2   |
|-----------------|--------|-------|-------|
| $\alpha=\pi/2$  | 0.0728 | 0.189 | 0.325 |
| $\alpha=\pi$    | 0.0588 | 0.144 | 0.243 |
| $\alpha=3\pi/2$ | 0.0553 | 0.134 | 0.223 |

Таблица 2.2 — Значения  $P(\lambda)$ ; задача В1

| $\lambda$                 | 1.4   | 2.4   | 3.4   |
|---------------------------|-------|-------|-------|
| $\alpha=\pi/2, \mu=0.2$   | 0.656 | 0.480 | 0.416 |
| $\alpha=\pi/2, \mu=-0.2$  | 0.567 | 0.436 | 0.383 |
| $\alpha=\pi, \forall \mu$ | 0.413 | 0.340 | 0.309 |
| $\alpha=3\pi/2, \mu=0.2$  | 0.368 | 0.310 | 0.285 |
| $\alpha=3\pi/2, \mu=-0.2$ | 0.358 | 0.304 | 0.279 |

Для инденторов, которые достаточно вытянуты вдоль оси цепочки, с возрастанием осадки  $\delta$  имеет место растягивание пятна контакта с выходом на боковые стороны  $S$  (показаны точками на рис. 2.1), это означает начало перколяции (слияние областей контакта). На рис. 2.2 нанесены графики (а)  $\min\delta(\lambda)$  и (б)  $\min P(\lambda)$ , при которых начинается слияние областей контакта ( $\nu=0.5, A=\varepsilon=1, B=\mu=0.2$ ; сплошные линии для  $\alpha=3\pi/2$ , пунктир —  $\alpha=\pi$ , точки —  $\alpha=\pi/2$ ). Значения  $\min P(\lambda)$  при  $\alpha=\pi$  и  $\alpha=\pi/2$  отличаются от соответствующих значений при  $\alpha=3\pi/2$  не более, чем на 2%, и не показаны на рис. 2.2б. С уменьшением угла клина снижается осадка, при которой наступает перколяция. При удалении цепочки инденторов от ребра клина указанная осадка, наоборот, возрастает. При этом сила  $P$  меняется незначительно.

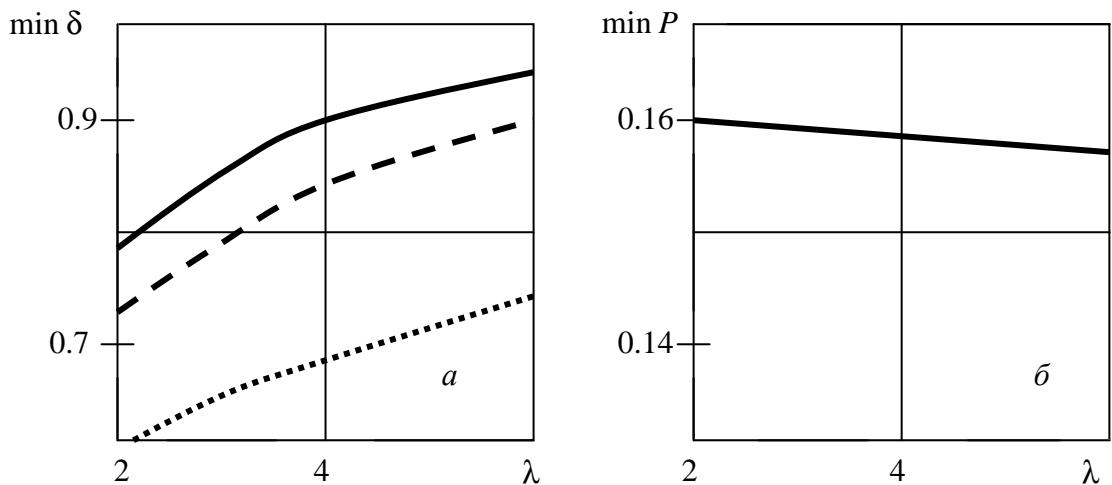


Рис. 2.2 — Значения (а)  $\min\delta(\lambda)$  и (б)  $\min P(\lambda)$  для начала перколяции; задача В1

На рис. 2.3 внутри  $S$  показаны границы половинок симметричных по  $z$  областей контакта  $\Omega$  ( $\nu=0.5$ ,  $A=\varepsilon=1$ ,  $B=\mu=0.2$ ). При развитии перколяции с ростом осадки  $\delta$  наблюдается увеличение зоны слияния соседних областей при  $z=1$  и площади  $\Omega$ , область  $\Omega$  смещается в сторону ребра клина относительно точки начального касания (рис. 3а,  $\alpha=\pi/2$ ,  $\delta=1$ ,  $\lambda=2$ ). Область контакта возрастает, когда угол клина становится меньше (рис. 3б,  $\delta=0.5$ ,  $\lambda=1.5$ , сплошная линия для  $\alpha=\pi$ , пунктир —  $\alpha=\pi/2$ ).

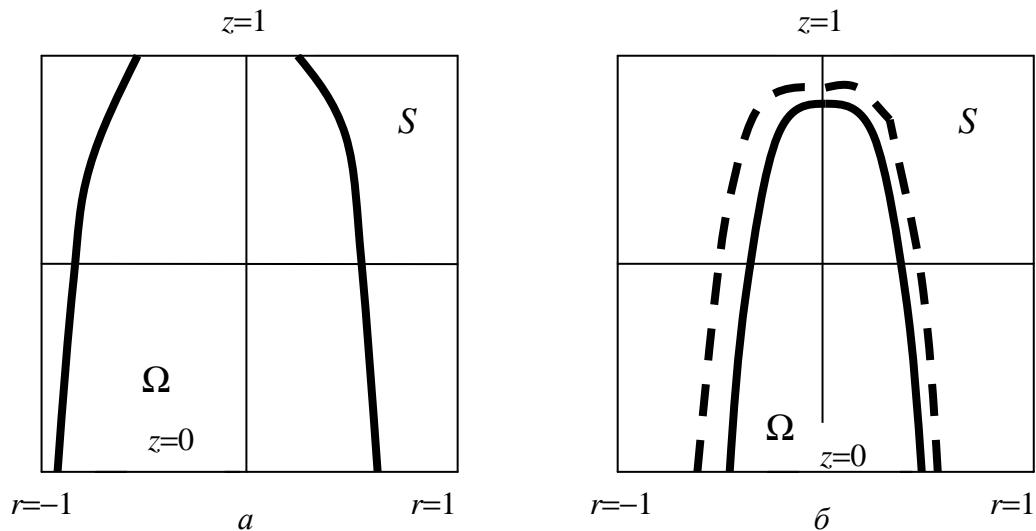


Рис. 2.3 — Границы половинок симметричных по  $z$  областей контакта  $\Omega$ ; задача В1

#### 2.1.4. Выводы

При жесткой фиксации одной грани клина получаются корректные интегральные уравнения пространственной задачи линейно-периодического контакта с кулоновским трением (символ ядра типа тангенса гиперболического дает сходимость). Ядро интегрального уравнения представлено в форме, включающей известные члены ядер интегральных уравнений соответствующих плоских и пространственных контактных задач с трением для одного штампа. Дополнительные интегрируемые особенности ядра порядка  $R^{-1}$  возникают на линиях возможного слияния контактных пятен. Для случаев полупространства и остроугольного клина контактные характеристики могут существенно отличаться.

## 2.2. Свободная от напряжений одна грань клина

В пространственной формулировке исследуется контактная задача В2 для упругого клина, когда одна грань свободна от напряжений. На другой грани клина осуществляется взаимодействие с пространственно периодической прямолинейной системой жестких штампов, которые расположены вдоль ребра клина с двухгранным углом. Суперпозиция фундаментальных решений Буссинеска бесконечное нормальное упругое смещение грани клина (в частном случае, полупространства). С целью регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения контактной задачи дополнительно вводится периодическая (с тем же периодом) система нормальных сил, действующих вне области контакта. Важно, что ось данной система параллельна оси цепочки штампов. Силы в новой цепочке противонаправлены силам, приложенным к штампам, а по абсолютной величине такие же. Эта регуляризация эквивалентна известному приему введения относительного смещения в граничное условие контакта. Предлагаются два варианта регуляризации: цепочка сил может действовать вне ребра клина (первый вариант) или на ребре (второй вариант). Для численного решения регуляризованного интегрального уравнения снова привлекается метод Б.А. Галанова, при этом область контакта и давления в ней находятся одновременно.

С привлечением теории обобщенных функций удастся выделить в ядре интегрального уравнения части, встречающиеся в соответствующей плоской и пространственной контактной задаче, также есть дополнительные члены. Изученный в п. 2.1 случай жесткой заделки грани клина обходится без регуляризации, так как в «плоской» части ядра имеется символ типа  $\text{th}(Au)/u$ , дающий сходимость интеграла при  $u \rightarrow 0$ . Аналогичный типа символ возникает также для упругого полупространства, часть границы которого закреплена жесткой или скользящей заделкой [44]. В отличие от этих случаев для свободной от напряжений грани клина в «плоской» компоненте ядра интегрального уравнения пространственной линейно-периодической контактной зада-

чи возникает символ типа  $\text{cth}(Au)/u$ , приводящий к расходимости интеграла при  $u \rightarrow 0$  и к бесконечной постоянной в ядре [5]. Для исключения бесконечной постоянной в плоских контактных задачах (клин, полуплоскость) применяют почленное дифференцирование одномерного интегрального уравнения (при этом главная логарифмическая часть ядра переходит в сингулярность типа Коши), в результате не получается найти соотношение между вдавливающей силой и осадкой штампа, контактное давление определяется через силу, приложенную к штампу [5]. В пространственном случае дифференцирование двумерного интегрального уравнения по одному из аргументов подразумевает последующее определение не произвольной постоянной, а произвольной функции. В связи с этим здесь развивается подход, основанный на введении относительного смещения в условие контакта [51,85].

### 2.2.1. Действие периодической системы сил

Возьмем клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $|z| < \infty$  с параметрами упругости  $G$  (модуль сдвига) и  $\nu$  (коэффициент Пуассона). Ребро двухгранного угла совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат. Грань клина  $\varphi=0$  свободна от напряжений. К грани  $\varphi=\alpha$  в точках  $r=h$ ,  $z=2kl$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) приложена бесконечная периодическая система нормальных сил  $P$  с периодом  $2l$ , линия действия которых параллельна ребру клина (рис. 2.4). Суперпозиция фундаментальных решений [62] дает для нормального упругого перемещения грани  $\varphi=\alpha$  выражение

$$u_{\varphi}^*(r, \alpha, z) = -\frac{P}{2\pi\theta} M_h(r, z), \quad \theta = \frac{G}{1-\nu}, \quad (2.14)$$

$$M_h(r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) K_{iu}(\beta r) W(u, \beta h) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z + 2lk)) du d\beta, \quad (2.15)$$

$$W(u, \beta h) = W(u) K_{iu}(\beta h) + \frac{W_+(u) \Psi_+(u, \beta h) - W_-(u) \Psi_-(u, \beta h)}{2\text{ch}(\pi u / 2)}, \quad (2.16)$$

$$W_{\pm}(u) = \pm \frac{\text{ch}(\alpha u) \mp \cos \alpha}{\text{sh}(\alpha u) \pm u \sin \alpha}, \quad (2.17)$$

$$W(u) = \frac{W_+(u) - W_-(u)}{2} = \frac{\text{sh}(2\alpha u) + u \sin(2\alpha)}{\text{ch}(2\alpha u) - 1 - 2u^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2.18)$$

Здесь  $K_{iu}(r)$  — цилиндрическая функция Бесселя, а функции  $\Psi_{\pm}(u, \beta h)$  при фиксированном значении  $\beta h$  удовлетворяют фредгольмовским интегральным уравнениям второго рода ( $0 \leq u < \infty$ )

$$\Psi_{\pm}(u, \beta h) = (1 - 2\nu) \int_0^{\infty} L_{\pm}(u, \tau) \left[ \Psi_{\pm}(\tau, \beta h) + \text{ch} \frac{\pi\tau}{2} K_{it}(\beta h) \right] d\tau, \quad (2.19)$$

$$L_{\pm}(u, \tau) = 2 \text{ch} \frac{\pi u}{2} \text{sh} \frac{\pi\tau}{2} W_{\pm}(\tau) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\pi t) g_{\pm}(t) dt}{[\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi u)][\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi\tau)]},$$

$$g_+(t) = \frac{\text{cth}(\alpha t / 2) \sin^2 \alpha}{\text{ch}(\alpha t) - \cos(2\alpha)}, \quad g_-(t) = \frac{\text{th}(\alpha t / 2) \sin^2 \alpha}{\text{ch}(\alpha t) + \cos(2\alpha)}.$$

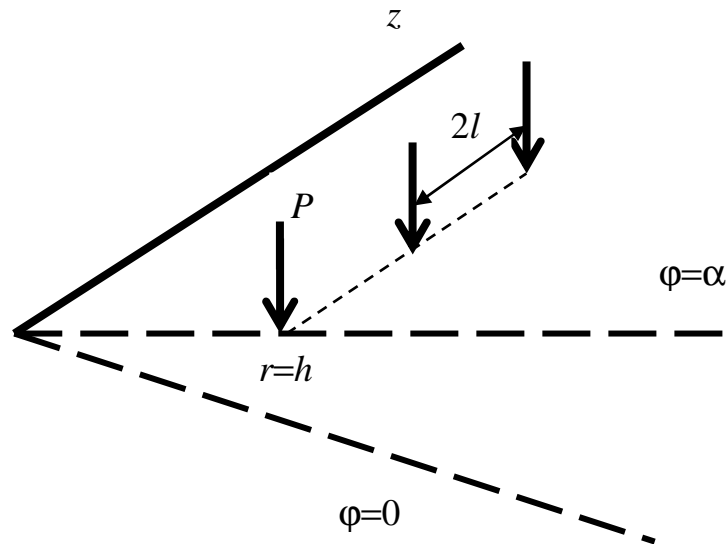


Рис. 2.4 — Периодическая система сил  $P$  на клине в точках  $r=h, \varphi=\alpha, z=2kl$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

Функция-символ  $W(u)$  (2.18) совпадает с символом соответствующей плоской задачи для клина [5] и по поведению в нуле и бесконечности является функцией типа  $\text{cth}(Au)$ ,

$$\frac{1}{A} = \lim_{u \rightarrow 0} u W(u) = \frac{2\alpha + \sin(2\alpha)}{2(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)}. \quad (2.20)$$

Расходимость ряда-интеграла (2.15) становится очевидной для полупространства, когда  $\alpha = \pi$ ,  $W(u) = \text{cth}(\pi u)$ ,  $\Psi_{\pm}(u, \beta h) = 0$ , и на основании интеграла [69]

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{ch}(\pi u) K_{iu}(\beta r) K_{iu}(\beta h) \cos(\beta z) du d\beta = \frac{1}{\sqrt{(r-h)^2 + z^2}}$$

приходим к расходящемуся ряду

$$M_h(r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(r-h)^2 + (z+2kl)^2}}. \quad (2.21)$$

В общем случае из «плоской» части ряда-интеграла (2.15) можно выделить бесконечную постоянную  $C_{\infty}$ , если воспользоваться формулами [5,33,75]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z+2lk)) = 2\pi \cos(\beta z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\beta l - 2\pi k), \quad (2.22)$$

$$\text{sh}(\pi u) K_{iu}(\beta r) = \frac{\pi}{2i} [I_{-iu}(\beta r) - I_{iu}(\beta r)], \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} K_{iu}(\beta h) I_{iu}(\beta r) = \frac{1}{2iu} \left(\frac{r}{h}\right)^{iu}, \quad (2.23)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{cth}(Au)}{u} \cos(\gamma u) du = -\ln\left(2\text{sh} \frac{\gamma\pi}{2A}\right) + C_{\infty} \quad (A > 0, \gamma > 0). \quad (2.24)$$

Здесь  $\delta(\beta)$  —  $\delta$ -функция Дирака,  $I_{\mu}(r)$  — цилиндрическая функция Бесселя. «Плоская» часть выражения (2.15) связана со слагаемым при  $k=0$  в правой части формулы (2.22).

Переходя в формулах (2.14)–(2.19) к пределу  $h \rightarrow 0$  при учете равенства  $K_{iu}(0) = \pi\delta(u)$ , предела (2.20) и интегралов [33,69], для случая действия системы сил на ребре клина получим перемещение (2.14), где  $h=0$  и

$$M_0(r, z) = \frac{\pi}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+2kl)^2}} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh} \frac{\pi u}{2} K_{iu}(\beta r) [W_+(u)\Psi_+^*(u) - W_-(u)\Psi_-^*(u)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z+2lk)) du d\beta. \quad (2.25)$$

Функции  $\Psi_{\pm}^*(u)$  находятся из фредгольмовских интегральных уравнений второго рода ( $0 \leq u < \infty$ ; для численного решения применим метод коллокаций с квадратурной формулой Гаусса)

$$\Psi_{\pm}^*(u) - (1 - 2\nu) \int_0^{\infty} L_{\pm}(u, \tau) \Psi_{\pm}^*(\tau) d\tau = (1 - 2\nu) L_{\pm}^*(u), \quad (2.26)$$

$$L_{\pm}^*(u) = \pi A_{\pm} \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\pi t/2) g_{\pm}(t) dt}{\operatorname{ch}(\pi t) + \operatorname{ch}(\pi u)}, \quad A_{\pm} = \lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_{\pm}(u) = \pm \frac{\pi}{2} \frac{1 \mp \cos \alpha}{\alpha \pm \sin \alpha}.$$

Чем меньше угол клина, тем больше первое слагаемое в правой части формулы (2.25). Как следует из (2.20),  $A = O(\alpha^3)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . При  $\alpha = \pi$  имеем  $A = \pi$  и формула (2.25) совпадает с формулой (2.21), если в ней положить  $h = 0$ .

### 2.2.2. Регуляризация интегрального уравнения контакта

Изучим периодическую контактную задачу В2 о линейной цепочке одинаковых жестких инденторов (период  $2l$ , ось цепочки параллельна ребру клина и удалена от нее на расстояние  $c$ , рис. 2.5) внедренных в грань  $\varphi = \alpha$  на величину  $\delta$  без перекоса. Предполагается симметрия  $z$ . К инденторам приложены нормальные силы  $P$  на расстоянии  $H$  от угловой линии. В силу периодичности достаточно рассматривать единичную область контакта  $\Omega$  симметричную относительно полуоси  $r$  ( $z = 0$ ). Пусть форма основания штампа в  $\Omega$  (система эллиптических параболоидов)

$$f(r, z) = \frac{(r - c)^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}. \quad (2.27)$$

Граничные условия контактной задачи В2 имеют вид ( $\Omega^*$  — объединенная область контакта)

$$\varphi = \alpha: \quad u_{\varphi} = -(\delta - f(r, z)), \quad (r, z) \in \Omega^*; \quad \sigma_{\varphi} = 0, \quad (r, z) \notin \Omega^*; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0; \quad (2.28)$$

$$\varphi = 0: \quad \sigma_{\varphi} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0.$$

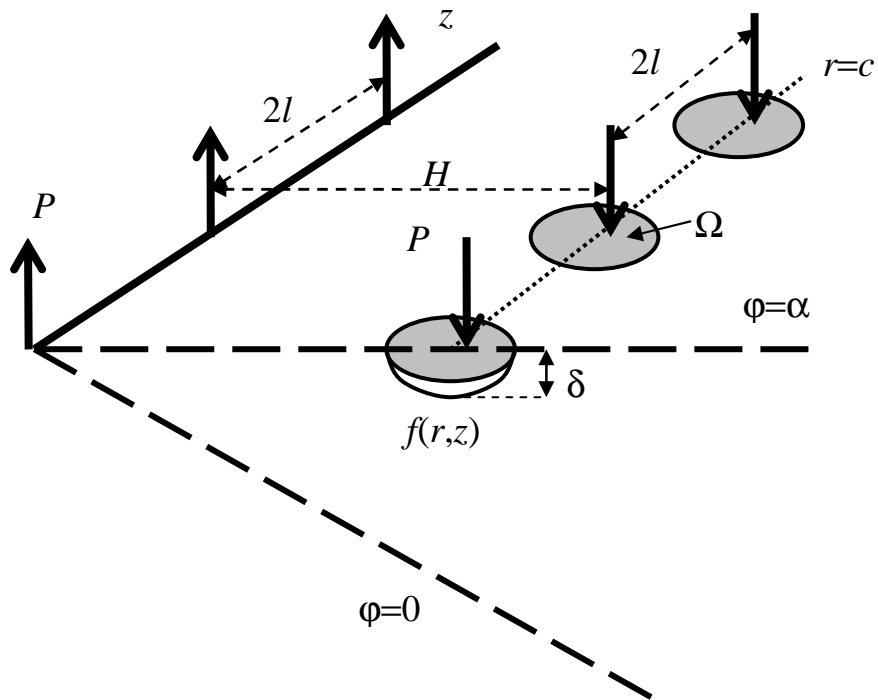


Рис. 2.5 — Периодическая система штампов и система сил на ребре клина ( $h=0$ )

Первое граничное условие (2.28) (условие контакта) служит для получения интегрального уравнения контактной задачи относительно контактного давления  $q(r,z)$ . При выводе интегрального уравнения в формуле (2.14) надо заменить  $P$  на  $q(x,y)$ ,  $h$  на  $x$ ,  $z$  на  $z-y$  и проинтегрировать по области  $\Omega$  по переменным  $x, y$ . Однако ряд (2) в ядре будет расходиться. Для регуляризации ядра обратимся к идее относительного смещения [51,85]. Заменим первое граничное условие (2.28) на следующее:

$$\varphi = \alpha: u_{\varphi} - u_{\varphi}^* = -(\delta - f(r,z)), (r,z) \in \Omega^*, \quad (2.29)$$

где  $u_{\varphi}^*$  — упругое перемещение грани клина  $\varphi=\alpha$  под действием бесконечной периодической системы нормальных сил  $P$ , приложенных на грани  $\varphi=\alpha$  вне области контакта на оси  $r=h$  параллельной ребру клина. Период системы сил также равен  $2l$ . Эти силы по модулю равны силам, которые действуют на штампы. При  $h=0$  силы приложены на ребре клина (рис. 2.5). Перемещение  $u_{\varphi}^*$  определяется формулами (2.14), (2.15) или (2.25).

При заданных величинах  $G, \nu, \alpha, c, l, \delta, h$  и функции  $f(r, z)$  (2.27) нужно найти область контакта  $\Omega$  и давление  $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$ ,  $(r, z) \in \Omega$ , При учете интегральных условий равновесия инденторов после этого могут быть найдены величины  $P$  и  $H$ . В частности,

$$\iint_{\Omega} q(x, y) dx dy = P. \quad (2.30)$$

При  $h \neq 0$  регуляризованное на основании условия (2.29) интегральное уравнение контактной задачи будет (первый вариант регуляризации)

$$\iint_{\Omega} q(x, y) T(x, y, r, z) dx dy = 2\pi\theta[\delta - f(r, z)], \quad (r, z) \in \Omega, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} T(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{1}{R_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{1}{R_k^+(h, 0)} - \frac{1}{R_k^-(h, 0)} \right] + \\ & + \frac{A_*}{2l} \ln \frac{x}{h} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} W_*(u) \left[ \cos\left(u \ln \frac{x}{r}\right) - \cos\left(u \ln \frac{h}{r}\right) \right] \frac{du}{u} + \\ & + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma(u) + \frac{W_+(u) \Sigma_+(u) - W_-(u) \Sigma_-(u)}{2 \text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_h = \sqrt{(r-h)^2 + z^2},$$

$$R_k^{\pm}(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad A_* = 1 - \pi A^{-1}, \quad W_*(u) = W(u) - \text{cth}(\pi u),$$

$$\Sigma(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [K_{iu}(\pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - K_{iu}(\pi_k h) \cos(\pi_k z)], \quad \pi_k = \frac{\pi k}{l},$$

$$\Sigma_{\pm}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [\Psi_{\pm}(u, \pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - \Psi_{\pm}(u, \pi_k h) \cos(\pi_k z)].$$

Во втором варианте регуляризации, когда  $h=0$ , ядро интегрального уравнения (2.31) принимает вид

$$\begin{aligned} T(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{\pi}{AR_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{\pi}{AR_k^+(0, 0)} - \frac{\pi}{AR_k^-(0, 0)} - \frac{A_*}{kl} \right] + \\ & + \frac{A_*}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \frac{A_* C}{l} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} (W^*(u) - A_*) \cos\left(u \ln \frac{x}{r}\right) + A_* \exp(-u) \frac{du}{u} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma_0(u) + \frac{W_+(u) \Sigma_+^*(u) - W_-(u) \Sigma_-^*(u)}{2 \text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.33)$$

$$W^*(u) = W(u) - \pi A^{-1} \text{cth}(\pi u), \quad \Sigma_0(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) K_{iu}(\pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)),$$

$$\Sigma_{\pm}^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [\Psi_{\pm}(u, \pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - \Psi_{\pm}^*(u) \cos(\pi_k z)].$$

Здесь  $C$  — постоянная Эйлера, возникающая из формул [69]

$$\int_0^{\infty} \text{ch}(\pi u) K_{iu}(tx) K_{iu}(tr) du = \frac{\pi}{2} K_0(t |r-x|),$$

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} K_0(\pi_k r) \cos(\pi_k z) = \frac{1}{R} + \frac{1}{l} \left( C + \ln \frac{r}{4l} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(0,0)} + \frac{1}{R_k^-(0,0)} - \frac{1}{kl} \right].$$

При выводе формул (2.32), (2.33) использованы соотношения (2.14)–(2.26), (2.29), (2.30), а также интеграл [5]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ut) - \exp(-u)}{u} du = -\ln |t|.$$

В ядрах (2.32) и (2.33) все ряды и интегралы сходятся с учетом асимптотического поведения функции Бесселя и символа  $W(u)$ . Логарифмический член ядра (2.33) обладает устранимой особенностью при  $r \rightarrow x$ . Отметим, что ядра (2.32), (2.33) включают как ядро интегрального уравнения пространственной контактной задачи Герца  $R^{-1}$  для полупространства, так и регуляризованное ядро интегрального уравнения контактной задачи для плоского клина, на одной грани которого отсутствуют напряжения [5].

Для случая полупространства, когда  $\alpha = \pi$ , оба варианта регуляризации эквивалентны и дают один результат, если в ядре (2.32) положить  $h=0$ . Тогда

$$T(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{1}{R_k^+(0,0)} - \frac{1}{R_k^-(0,0)} \right].$$

### 2.2.3. Численный метод

Для решения интегрального уравнения (2.31) применим численный метод Б.А. Галанова, ведущий к одномоментному нахождению контактных дав-

лений и зоны контакта [31]. Заключим область  $\Omega$ , содержащую точку начального касания  $r=c, z=0$ , в прямоугольник  $S=\{|r-c|\leq d, |z|\leq l\}$ . Распространим в (2.31) интегрирование на  $S$ , учитывая, что  $q(r,z)=0$  в дополнительной области  $S\setminus\Omega$ . К интегральному уравнению добавим интегральное неравенство отсутствия контакта в  $S\setminus\Omega$  и условие неотрицательности  $q(r,z)$  в  $\Omega$ . Путем введения специальных нелинейных операторов систему интегрального уравнения и неравенства можно свести в одному нелинейному интегральному уравнению гаммерштейновского типа, для его решения предлагается модифицированный метод Ньютона. При этом интегральное неравенство удовлетворяется автоматически. Граница области  $\Omega$  определяется точками, в которых искомая функция обращается в нуль.

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r-c}{l}, \quad x' = \frac{x-c}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad A_0 = \frac{l}{2R_1}, \quad B_0 = \frac{l}{2R_2}, \quad \lambda = \frac{c}{l}, \quad h' = \frac{h}{l}, \quad (2.34)$$

$$q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{d}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega.$$

Параметр  $\lambda$  характеризует относительную удаленность цепочки штампов от ребра клина. В обозначениях (2.34) ядро (2.32) будет

$$\begin{aligned} T_*(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{1}{S_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} - \frac{1}{S_k^+(h, 0)} - \frac{1}{S_k^-(h, 0)} \right] + \\ & + \frac{A_*}{2} \ln \frac{x+\lambda}{h} + \int_0^{\infty} W_*(u) \left[ \cos\left(u \ln \frac{x+\lambda}{r+\lambda}\right) - \cos\left(u \ln \frac{h}{r+\lambda}\right) \right] \frac{du}{u} + \\ & + \frac{4}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma^*(u) + \frac{W_+(u) \Sigma_+^0(u) - W_-(u) \Sigma_-^0(u)}{2\text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.35) \end{aligned}$$

$$S_h = \sqrt{(r+\lambda-h)^2 + z^2}, \quad S_k^{\pm}(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2k)^2},$$

$$\Sigma^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) [K_{iu}(\pi k(x+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)) - K_{iu}(\pi kh) \cos(\pi kz)],$$

$$\Sigma_{\pm}^0(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) [\Psi_{\pm}(u, \pi k(x+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)) - \Psi_{\pm}(u, \pi kh) \cos(\pi kz)].$$

Фрагмент программы расчета ядра (2.35) приведен в приложении.

В обозначениях (2.34) ядро (2.33) будет

$$\begin{aligned} T_*(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{\pi}{AS_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} - \frac{\pi}{AS_k^+(0,0)} - \frac{\pi}{AS_k^-(0,0)} - \frac{A_*}{k} \right] + \\ & + A_* \ln \frac{|r-x|}{4 |\ln((r+\lambda)/(x+\lambda))|} + A_* C + \\ & + \int_0^{\infty} \left[ (W^*(u) - A_*) \cos \left( u \ln \frac{x+\lambda}{r+\lambda} \right) + A_* \exp(-u) \right] \frac{du}{u} + \\ & + \frac{4}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma_0^*(u) + \frac{W_+(u) \Sigma_+^1(u) - W_-(u) \Sigma_-^1(u)}{2 \text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$S_0 = \sqrt{(r+\lambda)^2 + z^2}, \quad \Sigma_0^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) K_{iu}(\pi k(x+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)),$$

$$\Sigma_{\pm}^1(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) [\Psi_{\pm}(u, \pi k(x+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)) - \Psi_{\pm}^*(u) \cos(\pi kz)].$$

На рис. 2.6а для случая полупространства показана зависимость  $P(\lambda)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$  (сплошная линия). Пунктир соответствует точному решению задачи Герца для единичного штампа (ядро вида  $1/R$ ) [29]

$$q(r, z) = (2\sqrt{2}/\pi^2) \sqrt{1-2r^2-2z^2}, \quad P = 2\sqrt{2}/(3\pi) \approx 0.300. \quad (2.37)$$

Для случая рис. 2.6а при  $\lambda > 2.2$  легче вдавить цепочку штампов с пригрузкой, чем единичный штамп, а при  $\lambda < 2.2$  — наоборот.

На рис. 2.6б при  $\alpha=\pi$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$  приведены графики  $P(\delta)$  при  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=4$  (пунктир).

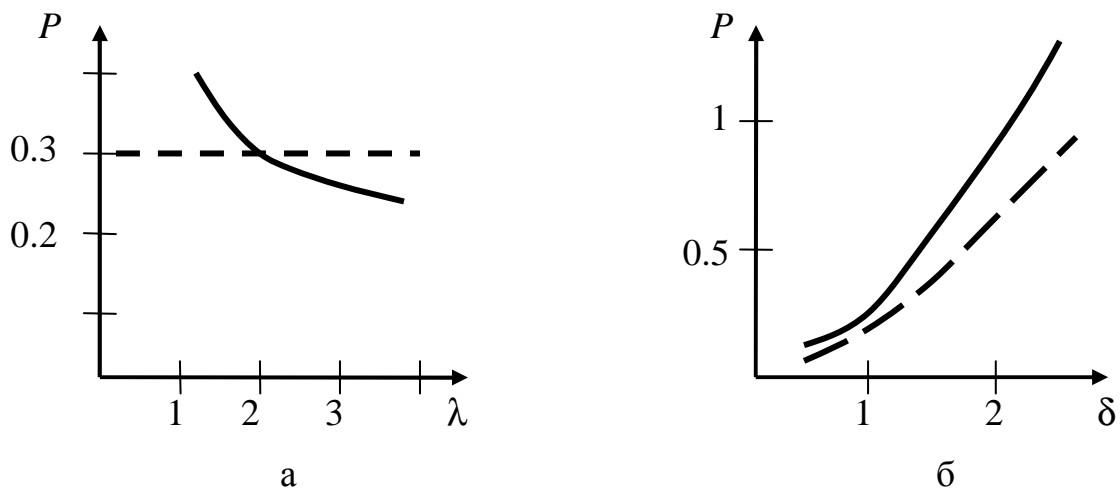


Рис. 2.6 — Графики (а)  $P(\lambda)$  при  $\alpha=\pi$ ,  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$  (сплошная линия) и точное решение задачи Герца (пунктир) и (б)  $P(\delta)$  при  $\alpha=\pi$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$ ,  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=4$  (пунктир); задача В2

На рис. 2.7 и 2.8 показаны границы половинок симметричных по  $z$  областей контакта  $\Omega$  при  $\alpha=\pi/2$ ,  $A_0=\varepsilon=1$ ,  $B_0=0.2$ ,  $\nu=0.5$ ; для рис. 2.7  $h=12$  (пригрузка вне ребра клина),  $\lambda=2$ ,  $\delta=1.5$  (сплошная линия) и  $\delta=1$  (точки); для рис. 2.8  $h=0$  (пригрузка на ребре),  $\lambda=4$ ,  $\delta=0.5$  (сплошная линия) и  $\delta=0.2$  (точки). Перколяция возникает на линии  $z=1$ . Области контакта смещаются в сторону действия пригрузки.

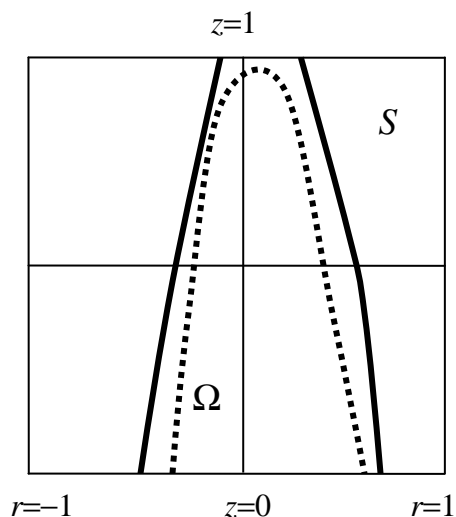


Рис. 2.7 — Границы половинок симметричных по  $z$  областей  $\Omega$  при  $\alpha=\pi/2$ ,  $A_0=\varepsilon=1$ ,  $B_0=0.2$ ,  $h=12$ ,  $\lambda=2$ ,  $\nu=0.5$ ,  $\delta=1.5$  (сплошная линия) и  $\delta=1$  (точки); задача В2

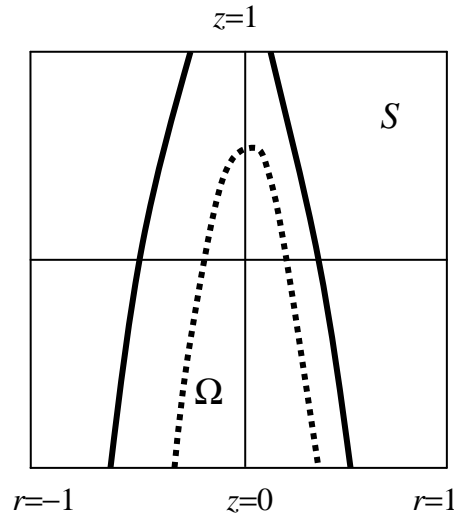


Рис. 2.8 — Границы половинок симметричных по  $z$  областей  $\Omega$  при  $\alpha=\pi/2$ ,  $A_0=\varepsilon=1$ ,  $B_0=0.2$ ,  $h=0$ ,  $\lambda=4$ ,  $\nu=0.5$ ,  $\delta=0.5$  (сплошная линия) и  $\delta=0.2$  (точки); задача В2

В табл. 2.3 внесены значения силы  $P(h)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $\nu=0.5$  и разных углах клина  $\alpha$ . Видно, что при отдалении регулирующей системы сил от линии, вдоль которой выстроены инденторы, интегральная характеристика давлений  $P$  снижается. При этом величина  $P$  возрастает с ростом угла клина.

Таблица 2.3 — Значения  $P(h)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $\nu=0.5$ ; задача В2

| $h$             | 4     | 6     | 8     | 10    | 12    |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha=\pi/2$  | 0.220 | 0.154 | 0.130 | 0.116 | 0.106 |
| $\alpha=\pi$    | 0.318 | 0.236 | 0.209 | 0.194 | 0.183 |
| $\alpha=3\pi/2$ | 0.335 | 0.252 | 0.225 | 0.210 | 0.199 |

На рис. 2.9 показаны зависимости  $P(\alpha)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $\nu=0.5$  и разных значениях  $h$ . Видно, что зависимости  $P(\alpha)$  монотонные, сила растет при увеличении угла пространственного клина и при приближении регулирующей системы сил к цепочке штампов.

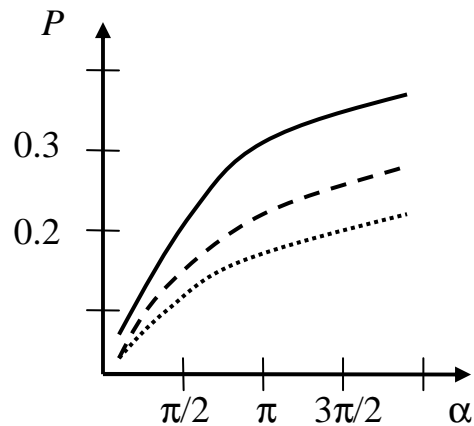


Рис. 2.9 — Зависимости  $P(\alpha)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $\nu=0.5$  и  $h=4$  (сплошная линия),  $h=8$  (пунктир) и  $h=12$  (точки); задача В2

#### 2.2.4. Выводы

Показана возможность регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения трехмерной периодической контактной задачи о бесконечной прямолинейной цепочке штампов на грани упругого клина, другая грань которого свободна от напряжений. Для этого использована дополнительная система нормальных сосредоточенных сил с тем же периодом и той же величины по модулю, что и силы, приложенные к штампам. Регуляризирующая система может быть приложена как вне ребра клина, так и на ребре. В последнем случае следует иметь ввиду существенный рост абсолютных значений дополнительных перемещений в ядре для острых углов клина.

### 2.3. Скользящая заделка одной грани клина

Изучается пространственно периодическая контактная задача ВЗ для упругого клина, которая отличается от рассмотренной в п. 2.2 лишь тем, что одна грань клина подчинена условиям скользящей заделки. Система штампов приводит к бесконечно большому нормальному смещению другой грани клина, так как функция-символ ядра интегрального уравнения относительно контактных давлений типа  $\text{cth}(Au)/u$  (кроме частного случая полупространства с заделкой по полуплоскости, когда функция-символ типа  $\text{th}(Au)/u$  [44]). Чтобы провести регуляризацию расходящегося ядра, краевая задача модифицируется дополнительной периодической системой сил, приложенных вне области контакта.

#### 2.3.1. Действие периодической системы сил

Берем клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $|z| < \infty$  с упругими параметрами  $G$  (модуль сдвига) и  $\nu$  (коэффициент Пуассона). Ребро двухгранного угла направлено по оси  $z$  цилиндрической системы координат. Грань  $\varphi=0$  подчинена условиям скользящей заделки. К грани  $\varphi=\alpha$  в точках  $r=h$ ,  $z=2kl$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) приложена бесконечная периодическая система нормальных сил  $P$  с периодом  $2l$ , линия действия которых параллельна ребру клина. Суперпозиция фундаментальных решений [62] дает для нормального упругого перемещения грани  $\varphi=\alpha$  выражение (2.14), (2.15), где

$$W(u, \beta h) = W(u) \left[ K_{iu}(\beta h) + \frac{\Psi(u, \beta h)}{\text{ch}(\pi u / 2)} \right], \quad W(u) = \frac{\text{ch}(2\alpha u) - \cos(2\alpha)}{\text{sh}(2\alpha u) + u \sin(2\alpha)}. \quad (2.38)$$

Функция  $\Psi(u, \beta h)$  при фиксированном значении  $\beta h$  удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода ( $0 \leq u < \infty$ )

$$\Psi(u, \beta h) = (1 - 2\nu) \int_0^{\infty} L(u, \tau) \left[ \Psi(\tau, \beta h) + \text{ch} \frac{\pi \tau}{2} K_{i\tau}(\beta h) \right] d\tau, \quad (2.39)$$

$$L(u, \tau) = 2\text{ch} \frac{\pi u}{2} \text{sh} \frac{\pi \tau}{2} W(\tau) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\pi t) g(t) dt}{[\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi u)][\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi \tau)]},$$

$$g(t) = \frac{\text{cth}(\alpha t) \sin^2(2\alpha)}{\text{ch}(2\alpha t) - \cos(4\alpha)}.$$

Функция-символ  $W(u)$  (2.38) совпадает с символом соответствующей плоской задачи для клина [5] и по поведению в нуле и бесконечности является функцией типа  $\text{cth}(Au)$  (кроме случая  $\alpha=\pi$  [44], когда символ типа  $\text{th}$  дает сходящуюся суперпозицию),

$$\frac{1}{A} = \lim_{u \rightarrow 0} u W(u) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2\alpha + \sin(2\alpha)}. \quad (2.40)$$

Расходимость ряда-интеграла (2.15), (2.38), (2.39) становится очевидной для четверти пространства, когда  $\alpha = \pi/2$ ,  $W(u) = \text{cth}(\pi u/2)$ ,  $\Psi(u, \beta h) = 0$ , и на основании интеграла [69]

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\text{ch}(\pi u) + 1] K_{iu}(\beta r) K_{iu}(\beta h) \cos(\beta z) du d\beta = \\ = \frac{1}{\sqrt{(r-h)^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(r+h)^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

приходим к расходящемуся ряду

$$M_h(r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(r-h)^2 + (z+2kl)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(r+h)^2 + (z+2kl)^2}} \right]. \quad (2.42)$$

Из «плоской» части ряда-интеграла (2.15), (2.38), (2.39) можно выделить бесконечную постоянную  $C_{\infty}$  при помощи формулам (2.22)–(2.24).

Переходя в формулах (2.14), (2.15), (2.38), (2.39) к пределу  $h \rightarrow 0$ , для системы сил на ребре клина получим перемещение (2.14), где  $h=0$  и

$$\begin{aligned} M_0(r, z) = \frac{\pi}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+2kl)^2}} + \\ + \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh} \frac{\pi u}{2} K_{iu}(\beta r) W(u) \Psi^*(u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z+2lk)) du d\beta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Функция  $\Psi^*(u)$  удовлетворяет фредгольмовскому интегральному уравнению второго рода ( $0 \leq u < \infty$ )

$$\Psi^*(u) - (1 - 2\nu) \int_0^{\infty} L(u, \tau) \Psi^*(\tau) d\tau = (1 - 2\nu) L^*(u), \quad (2.44)$$

$$L^*(u) = \frac{\pi^2}{2A} \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\pi t / 2) g(t) dt}{\operatorname{ch}(\pi t) + \operatorname{ch}(\pi u)}.$$

Чем меньше угол клина, тем меньше первое слагаемое в правой части формулы (2.43). В отличие от случая свободной грани, где  $A = O(\alpha^3)$  при  $\alpha \rightarrow 0$  здесь на основании (2.40) имеем  $A = O(\alpha^{-1})$ . При  $\alpha = \pi/2$  имеем  $A = \pi/2$  и формула (2.43) совпадает с формулой (2.44), если в ней положить  $h=0$ . В табл. 2.4 даны значения  $1/A$  для скользящей заделки (формула (2.40)) и свободной от напряжений грани клина (формула (2.20)).

Таблица 2.4 — Значения  $1/A$  для скользящей заделки и свободной грани клина

| $\alpha$ | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ | $5\pi/4$ | $3\pi/2$ | $7\pi/4$ |
|----------|---------|---------|---------|----------|-------|----------|----------|----------|
| (2.38)   | 0.20    | 0.39    | 0.64    | 0.27     | 0     | 0.11     | 0.21     | 0.10     |
| (2.20)   | 96      | 11      | 1.1     | 0.37     | 0.32  | 0.30     | 0.22     | 0.17     |

Как следует из формул (2.14), (2.25), (2.43) и (2.44) при действии единичной силы на ребре клина перемещение  $u_\varphi(r, \alpha, z)$  зависит линейным образом от величины  $1/A$ .

### 2.3.2. Регуляризация интегрального уравнения контакта

Рассмотрим периодическую контактную задачу В3 о линейной цепочке одинаковых жестких штампов, которая отличается от задачи в п. 2.2.2 тем, что одна грань клина лежит без трения на недеформируемом основании (скользящая заделка). Граничные условия имеют вид (сравните с (2.28))

$$\varphi = \alpha: u_\varphi = -(\delta - f(r, z)), (r, z) \in \Omega^*; \sigma_\varphi = 0, (r, z) \notin \Omega^*; \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0; \quad (2.45)$$

$$\varphi = 0: \quad u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0.$$

Аналогично п. 2.2.2 для регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения контактной задачи обратимся к идее относительного смещения [51,85]. Заменяем первое граничное условие (2.45) на условие (2.29), где  $u_\varphi^*$  — упругое перемещение грани  $\varphi=\alpha$  при воздействии бесконечной периодической (с периодом  $2l$ ) системы нормальных сил  $P$ , приложенных на этой грани вне области контакта на оси  $r=h$  параллельной ребру упругого тела. Перемещение  $u_\varphi^*$  определяется формулами (2.14), (2.15), (2.38), (2.39) или (2.43) при действии сил на ребре.

При задании величин  $G$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $l$ ,  $\delta$ ,  $h$  и функции  $f(r,z)$  (2.27) нужно найти область контакта  $\Omega$  и давление  $\sigma_\varphi(r,\alpha,z)=-q(r,z)$ ,  $(r,z)\in\Omega$ . Впоследствии, привлекая интегральные условия равновесия инденторов, могут быть рассчитаны величины  $P$  и  $H$ .

При  $h\neq 0$  регуляризованное при помощи условия (2.29) интегральное уравнение контактной задачи будет (первый вариант регуляризации, обозначения см. формулы (2.32))

$$\iint_{\Omega} q(x,y)T(x,y,r,z)dxdy = 2\pi\theta[\delta - f(r,z)], \quad (r,z)\in\Omega, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} T(x,y,r,z) = & \frac{1}{R} - \frac{1}{R_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x,y)} + \frac{1}{R_k^-(x,y)} - \frac{1}{R_k^+(h,0)} - \frac{1}{R_k^-(h,0)} \right] + \\ & + \frac{A_*}{2l} \ln \frac{x}{h} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} W_*(u) \left[ \cos\left(u \ln \frac{x}{r}\right) - \cos\left(u \ln \frac{h}{r}\right) \right] \frac{du}{u} + \\ & + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma(u) + \frac{W(u) \Sigma_1(u)}{\text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.47) \end{aligned}$$

$$\Sigma_1(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [\Psi(u, \pi_k x) \cos(\pi_k (z-y)) - \Psi(u, \pi_k h) \cos(\pi_k z)].$$

Здесь  $\Psi(u, \pi_k x)$  удовлетворяет фредгольмовскому интегральному уравнению второго рода (2.39).

Во втором варианте регуляризации, когда  $h=0$ , ядро интегрального уравнения (2.46) принимает вид (обозначения см. формулы (2.33))

$$\begin{aligned}
T(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{\pi}{AR_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{\pi}{AR_k^+(0, 0)} - \frac{\pi}{AR_k^-(0, 0)} - \frac{A_*}{kl} \right] + \\
& + \frac{A_*}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l|\ln(r/x)|} + \frac{A_* C}{l} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left[ (W^*(u) - A_*) \cos\left(u \ln \frac{x}{r}\right) + A_* \exp(-u) \right] \frac{du}{u} + \\
& + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma_0(u) + \frac{W(u) \Sigma_1^*(u)}{\text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.48)
\end{aligned}$$

$$\Sigma_1^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [\Psi(u, \pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - \Psi^*(u) \cos(\pi_k z)].$$

Здесь функция  $\Psi^*(u)$  удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода (2.44).

В ядрах (2.47) и (2.48) все ряды и интегралы сходятся с учетом асимптотического поведения функции Бесселя и символа  $W(u)$ . Логарифмический член ядра (2.48) обладает устранимой особенностью при  $r \rightarrow x$ . Ядра (2.47), (2.48) включают как ядро интегрального уравнения пространственной контактной задачи Герца  $R^{-1}$  для полупространства, так и регуляризованное ядро интегрального уравнения плоской контактной задачи для клина с одной гранью в условиях скользящей заделки [5].

Для случая четверти пространства, когда  $\alpha=\pi/2$ , ядра в обоих вариантах регуляризации могут быть представлены в эквивалентных формах без квадратур при помощи интеграла (2.41). Именно, вместо (2.47) при  $\alpha=\pi/2$  можно получить (используем обозначения (2.32))

$$\begin{aligned}
T(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} + \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_h} - \frac{1}{R_h^+} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} + \frac{1}{R_k^+(-x, y)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_k^-(-x, y)} - \frac{1}{R_k^+(h, 0)} - \frac{1}{R_k^-(h, 0)} - \frac{1}{R_k^+(-h, 0)} - \frac{1}{R_k^-(-h, 0)} \right], \quad (2.49) \\
R_+ = & \sqrt{(r+x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_h^+ = \sqrt{(r+h)^2 + z^2},
\end{aligned}$$

Вместо (2.48) при  $\alpha=\pi/2$  можно получить ( $R_0 = \sqrt{r^2 + z^2}$ )

$$T(x, y, r, z) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_+} - \frac{2}{R_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} + \frac{1}{R_k^+(-x, y)} + \frac{1}{R_k^-(-x, y)} - \frac{2}{R_k^+(0,0)} - \frac{2}{R_k^-(0,0)} \right]. \quad (2.50)$$

Проведена численная проверка совпадения ядер (2.49) и (2.50) соответственно с ядрами (2.47) и (2.48) при  $\alpha=\pi/2$ , которая подтверждает правильность формул (2.47) и (2.48). Проверка проводилась при  $v=0.5$ ,  $l=1$ ,  $z=y=0$ ,  $r=x \neq 0$ . В этом случае при  $h \neq 0$  надо проверить равенство

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x+h)^2 + 4k^2}} \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{x}{h} + \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(u \ln(x/h))}{u \operatorname{sh}(\pi u)} du + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [K_0(2\pi k x) - K_0(\pi k(x+h))].$$

При  $h=0$  проверка сводится к установлению равенства

$$\frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}} - \frac{1}{k} \right] = -\ln \frac{x}{4} - C + \int_0^{\infty} \left[ 1 - \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} - \exp(-u) \right] \frac{du}{u} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} K_0(2\pi k x).$$

Здесь использовано значение интеграла [60]

$$\int_0^{\infty} K_{iu}(a) K_{iu}(b) du = \frac{\pi}{2} K_0(a+b).$$

### 2.3.3. Численное решение

Для решения интегрального уравнения (2.46) снова применим численный метод Б.А. Галанова [31]. Заключим область  $\Omega$ , содержащую точку начального касания  $r=c$ ,  $z=0$ , в прямоугольник  $S = \{|r-c| \leq d, |z| \leq l\}$ .

Введем безразмерные обозначения (2.34) (штрихи далее опускаем). Тогда ядро (2.47) примет вид (см. обозначения в формулах (2.32), (2.35))

$$T_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{1}{S_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} - \frac{1}{S_k^+(h,0)} - \frac{1}{S_k^-(h,0)} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_*}{2} \ln \frac{x+\lambda}{h} + \int_0^\infty W_*(u) \left[ \cos\left(u \ln \frac{x+\lambda}{r+\lambda}\right) - \cos\left(u \ln \frac{h}{r+\lambda}\right) \right] \frac{du}{u} + \\
& + \frac{4}{\pi_0} \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma^*(u) + \frac{W(u) \Sigma_2^*(u)}{\text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.51)
\end{aligned}$$

$$\Sigma_2^*(u) = \sum_{k=1}^\infty K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) [\Psi(u, \pi k(x+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)) - \Psi(u, \pi kh) \cos(\pi kz)].$$

В обозначениях (2.34) ядро (2.48) будет (см. обозначения в формулах (2.32), (2.33), (2.35), (2.36))

$$\begin{aligned}
T_*(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{\pi}{AS_0} + \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} - \frac{\pi}{AS_k^+(0,0)} - \frac{\pi}{AS_k^-(0,0)} - \frac{A_*}{k} \right] + \\
& + A_* \ln \frac{|r-x|}{4 |\ln((r+\lambda)/(x+\lambda))|} + A_* C + \\
& + \int_0^\infty \left[ (W^*(u) - A_*) \cos\left(u \ln \frac{x+\lambda}{r+\lambda}\right) + A_* \exp(-u) \right] \frac{du}{u} + \\
& + \frac{4}{\pi_0} \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma_0^*(u) + \frac{W(u) \Sigma_3^*(u)}{\text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (2.52)
\end{aligned}$$

$$\Sigma_3^*(u) = \sum_{k=1}^\infty K_{iu}(\pi k(r+\lambda)) [\Psi(u, \pi k(x+\lambda)) \cos(\pi k(z-y)) - \Psi^*(u) \cos(\pi kz)].$$

В обозначениях (2.34) ядро (2.50) будет

$$\begin{aligned}
T_*(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} + \frac{1}{S_+} - \frac{2}{S_0} + \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} + \frac{1}{S_k^+(-x, y)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{S_k^-(-x, y)} - \frac{2}{S_k^+(0,0)} - \frac{2}{S_k^-(0,0)} \right], \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$$R = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad S_+ = \sqrt{(r+x+2\lambda)^2 + (z-y)^2}, \quad S_0 = \sqrt{(r+\lambda)^2 + z^2},$$

$$S_k^\pm(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2k)^2}.$$

Расчеты проведем для важного частного случая  $\alpha=\pi/2$  с регуляризацией на ребре клина ( $h=0$ ), когда ядро имеет вид (2.53). В силу симметрии условий скользящей заделки этот случай эквивалентен внедрению в полупространст-

во двух симметричных периодических цепочек штампов при действии регулизирующей системы сил между цепочками (рис. 2.10).

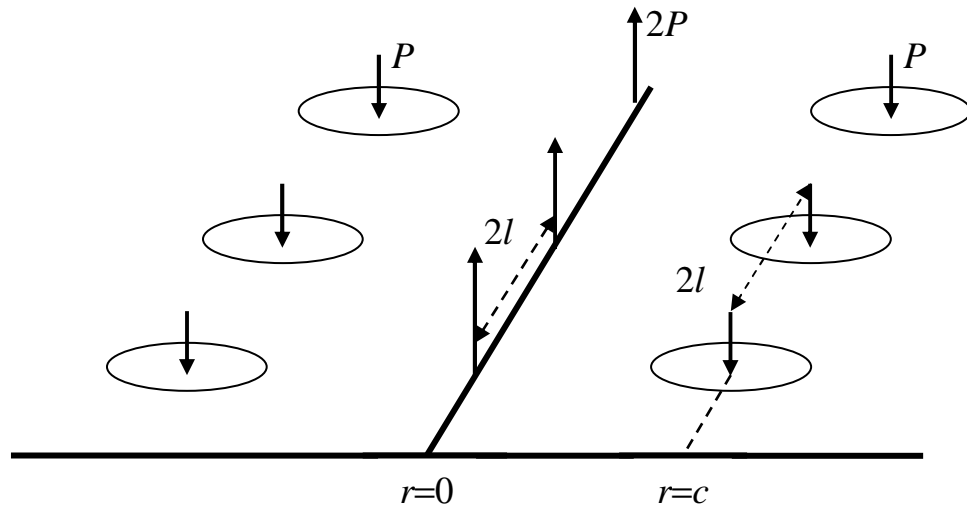


Рис. 2.10 — Две симметричные периодические системы штампов на полупространстве

На рис. 2.11а показана зависимость  $P(\lambda)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$  (сплошная линия). Пунктир соответствует точному решению (2.37) задачи Герца для единичного штампа (ядро вида  $1/R$ ). Для случая рис. 2.11а при  $\lambda \approx 4.3$  сила для двух параллельных цепочек штампов с пригрузкой соответствует силе по точному решению (2.37) для единичного штампа.

На рис. 2.11б при  $\alpha=\pi/2$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$  приведены графики  $P(\delta)$  при  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=4$  (пунктир).

На рис. 2.12 показаны границы половинок областей контакта для ядра (2.50) при  $\delta=0.5$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$ ,  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=8$  (пунктир). Площадь области  $\Omega$  возрастает при уменьшении  $\lambda$  с асимметрией возрастания влево от вертикали  $r=0$ .

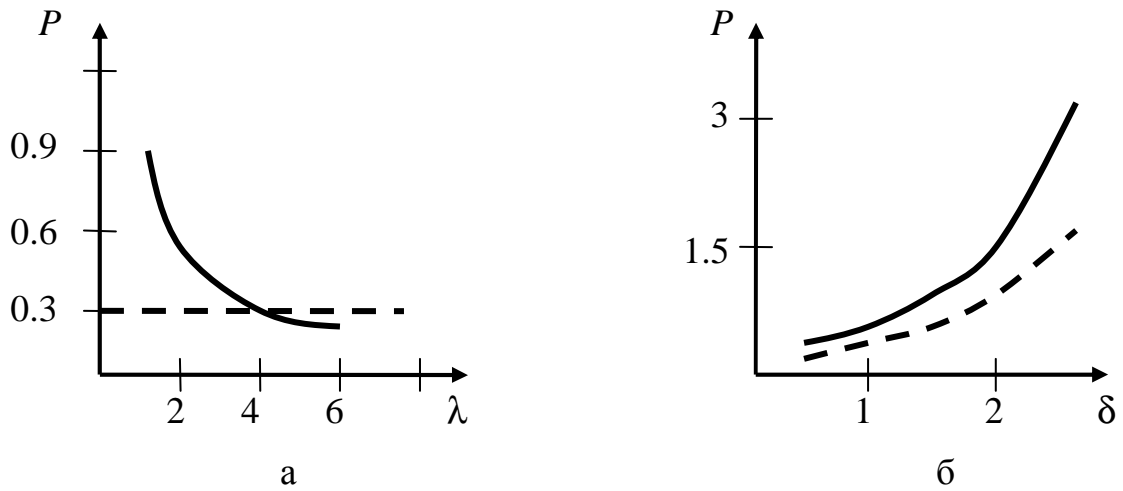


Рис. 2.11 — Графики (а)  $P(\lambda)$  при  $\alpha=\pi/2$ ,  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$  (сплошная линия) и точное решение задачи Герца (пунктир) и (б)  $P(\delta)$  при  $\alpha=\pi/2$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$ ,  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=4$  (пунктир); задача В3

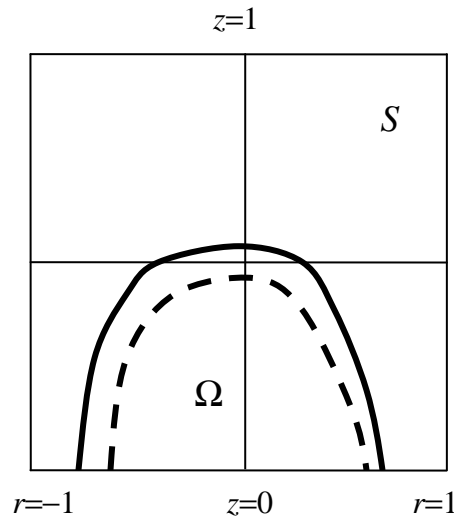


Рис. 2.12 — Границы половинок симметричных по  $z$  областей  $\Omega$  (ядро (2.53));  $\delta=0.5$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=0$ ,  $\lambda=2$  (сплошная линия) и  $\lambda=8$  (пунктир); задача В3

На рис. 2.13 показаны границы половинок областей контакта для ядра (2.50) при  $h=0$ ,  $\lambda=4$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\delta=0.7$  (сплошная линия) и  $\delta=1$  (точки). Область  $\Omega$  возрастает при росте осадки  $\delta$  с асимметрией возрастания влево от вертикали  $r=0$ .

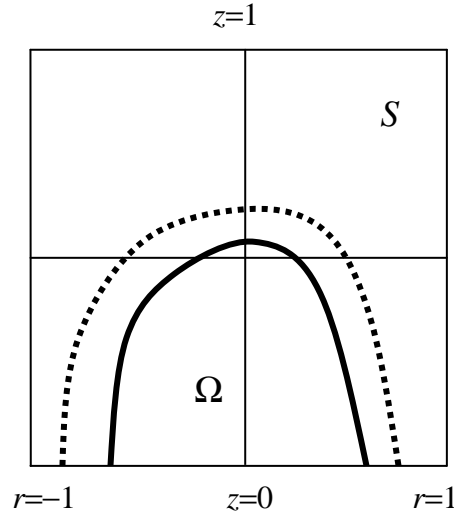


Рис. 2.13 — Границы половинок симметричных по  $z$  областей  $\Omega$  (ядро (2.53));  $h=0$ ,  $\lambda=4$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\delta=0.7$  (сплошная линия) и  $\delta=1$  (точки); задача В3

Рассмотрим еще случай, когда область контакта симметрична не только относительно  $z$ , но и относительно  $r$  (рис. 2.14). Здесь, как и на рис. 2.10, условия скользящей заделки выполняются на полуплоскости, перпендикулярной границе полупространства и проходящей через ось  $r=0$ .

В этом случае размерное ядро имеет вид

$$T(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{0.5}{R_h} - \frac{0.5}{R_{-h}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{0.5}{R_k^+(h, 0)} - \frac{0.5}{R_k^-(h, 0)} - \frac{0.5}{R_k^+(-h, 0)} - \frac{0.5}{R_k^-(-h, 0)} \right], \quad (2.54)$$

$$R_k^{\pm}(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad R_{\pm h} = \sqrt{(r \mp h)^2 + z^2}.$$

Соответствующее безразмерное ядро при обозначениях (2.34) будет

$$T_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{0.5}{S_h} - \frac{0.5}{S_{-h}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{S_k^+(x, y)} + \frac{1}{S_k^-(x, y)} - \frac{0.5}{S_k^+(h, 0)} - \frac{0.5}{S_k^-(h, 0)} - \frac{0.5}{S_k^+(-h, 0)} - \frac{0.5}{S_k^-(-h, 0)} \right], \quad (2.55)$$

$$S_k^{\pm}(x, y) = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2k)^2}, \quad S_{\pm h} = \sqrt{(r + \lambda \mp h)^2 + z^2}.$$

На рис. 2.15а для ядра (2.55) начерчена зависимость  $P(h)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$  (сплошная линия); пунктир для точного решения (2.37) задачи Герца (случай единичного штампа с ядром  $1/R$ ). Для случая рис. 2.15а при  $h \approx 2.2$  сила для цепочки штампов с симметричной пригрузкой совпадает с силой по решению Герца для единичного штампа. На рис. 2.15б для ядра (2.55) при  $A_0=B_0=\varepsilon=1$  начерчены графики  $P(\delta)$  для  $h=2$  (сплошная линия) и  $h=4$  (пунктир). На основе графиков 2.15 в силу симметрии можно понять поведение половинной силы  $P/2$  для четверти пространства со скользящей заделкой, когда  $\alpha=\pi/2$ ,  $\lambda=0$  (штампы на ребре клина).

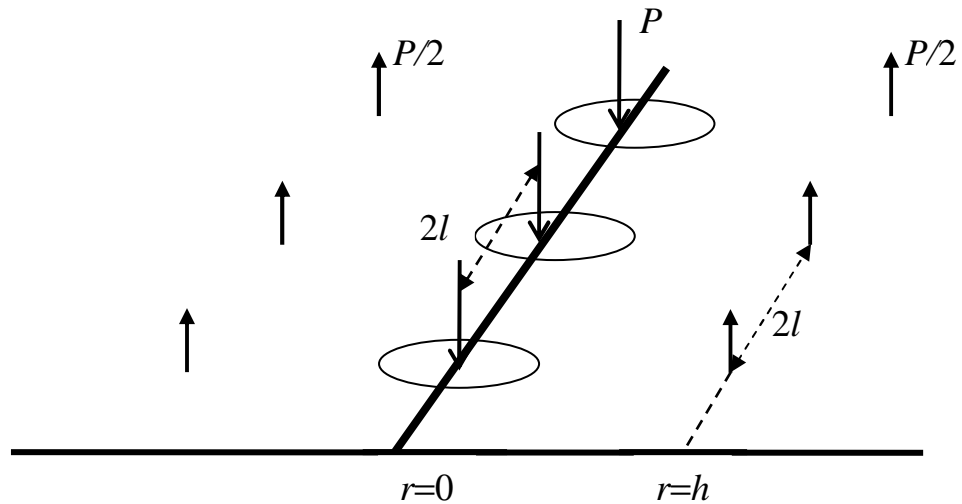


Рис. 2.14 — Симметричная по  $r$  периодическая система штампов на полупространстве

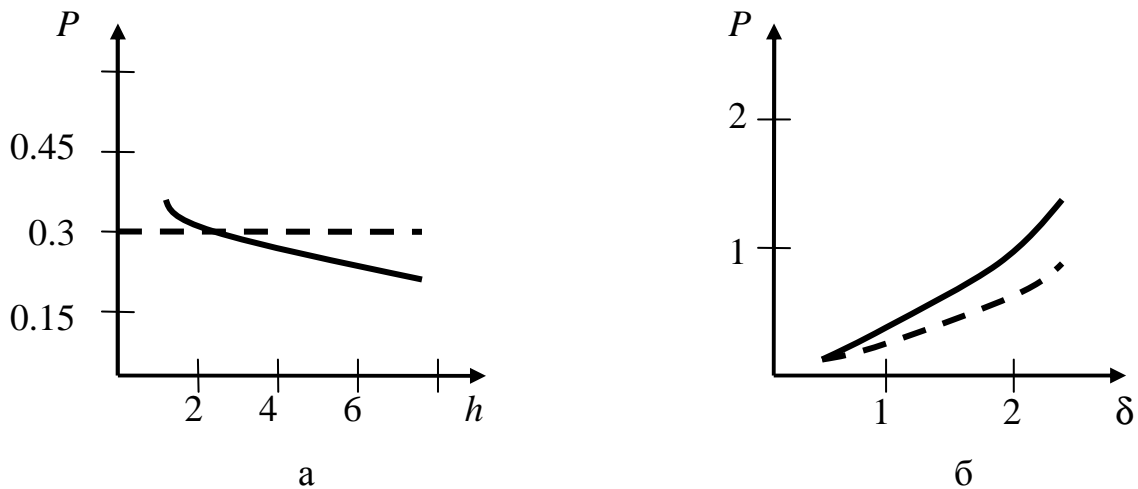


Рис. 2.15 — Графики для ядра (2.55): (а)  $P(h)$  при  $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$  (сплошная линия) и точное решение задачи Герца (пунктир) и (б)  $P(\delta)$  при  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=2$  (сплошная линия) и  $h=4$  (пунктир); задача В3

На рис. 2.16 и 2.17 показаны границы четвертей областей контакта для ядра (2.55) при  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ; рис. 2.16 для случая  $\delta=0.5$ ,  $h=2$  (сплошная линия) и  $h=8$  (пунктир); рис. 2.17 для случая  $h=4$ ,  $\delta=0.7$  (сплошная линия) и  $\delta=1$  (точки). Площадь области  $\Omega$  возрастает при уменьшении  $h$  и увеличении  $\delta$ .

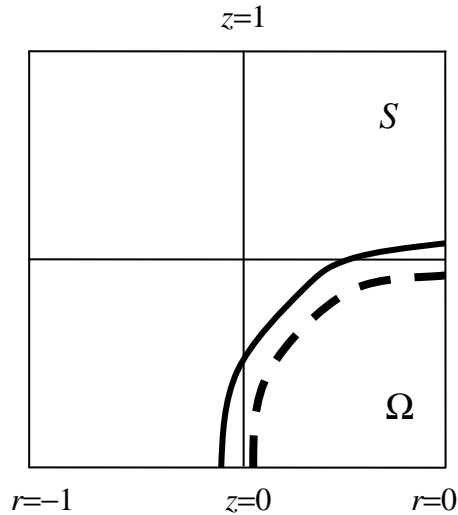


Рис. 2.16 — Границы четвертей симметричных по  $r, z$  областей  $\Omega$  (ядро (2.55));  $\delta=0.5$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $h=2$  (сплошная линия) и  $h=8$  (пунктир); задача В3

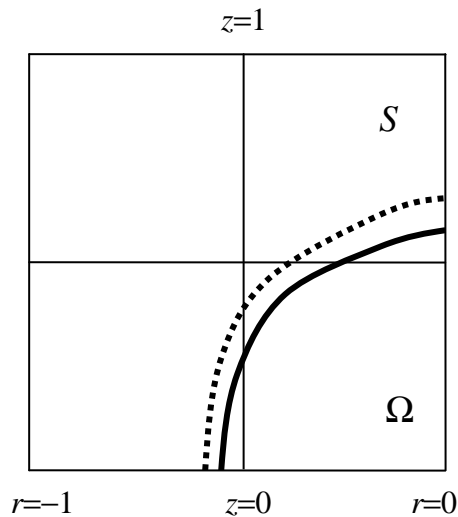


Рис. 2.17 — Границы четвертей симметричных по  $r, z$  областей  $\Omega$  (ядро (2.55));  $h=4$ ,  $A_0=B_0=\varepsilon=1$ ,  $\delta=0.7$  (сплошная линия) и  $\delta=1$  (точки); задача В3

Рис. 2.18 иллюстрирует развитие процесса перколяции (слияния соседних областей контакта на линии  $z=1$ ; штампы вытянуты вдоль оси  $z$ ) при возрастании осадки  $\delta$ .

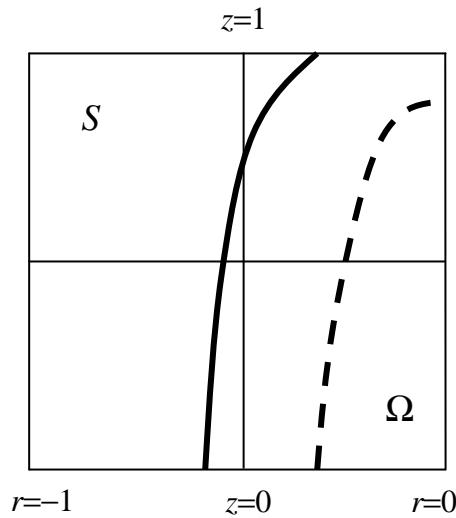


Рис. 2.18 — Границы четвертей симметричных по  $r, z$  областей  $\Omega$  (ядро (2.55));  $h=4, A_0=\varepsilon=1, B_0=0.2, \delta=0.5$  (пунктир) и  $\delta=1$  (сплошная линия, перколяция); задача В3

Ниже представим результаты расчетов при разных углах клина  $\alpha$  и  $\nu=0.5$  (при  $\nu=0.3$  результаты получаются очень близкими к приведенным ниже). В табл. 2.5 даны значения интегральной характеристики  $P$  для случая  $A_0=B_0=\varepsilon=1$  (случай  $\alpha=2\pi$  соответствует пространству с разрезом по полуплоскости, один берег разреза в условиях скользящей заделки).

Таблица 2.5 — Значения  $P$  для скользящей заделки при  $A_0=B_0=\varepsilon=1$

| $\alpha$           | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ | $5\pi/4$ | $3\pi/2$ | $7\pi/4$ | $2\pi$ |
|--------------------|---------|---------|----------|-------|----------|----------|----------|--------|
| $\delta=1.5$       |         |         |          |       |          |          |          |        |
| $\lambda=2, h=4.5$ | 0.534   | 0.421   | 0.536    | 0.677 | 0.611    | 0.563    | 0.616    | 0.672  |
| $\lambda=2, h=10$  | 0.346   | 0.252   | 0.342    | 0.466 | 0.404    | 0.365    | 0.408    | 0.457  |
| $\lambda=3, h=4.5$ | 0.835   | 0.721   | 0.856    | 0.988 | 0.928    | 0.882    | 0.934    | 0.986  |
| $\lambda=3, h=10$  | 0.359   | 0.279   | 0.353    | 0.437 | 0.398    | 0.370    | 0.401    | 0.433  |
| $\delta=2$         |         |         |          |       |          |          |          |        |
| $\lambda=2, h=10$  | 0.504   | 0.361   | 0.498    | 0.700 | 0.598    | 0.535    | 0.604    | 0.685  |

Как видно из табл. 2.5,  $\max P(\alpha)$  достигается при  $\alpha=\pi$  (точка смены типа символа ядра интегрального уравнения), а  $\min P(\alpha)$  — при  $\alpha=\pi/2$  (зависимость силы от угла немонотонная). Сила и номинальная область контакта растет с ростом  $\delta$  и  $\lambda$ , но уменьшается с ростом  $h$ .

Отметим, что в ядро (2.51) для клина входит коэффициент Пуассона (ввиду решений вспомогательных фредгольмовских интегральных уравнений второго рода). Однако с ростом  $\lambda$  и  $h$  (при удалении области контакта и линии пригрузки от ребра клина) зависимость ядра и безразмерного решения от коэффициента Пуассона снижается (ядро  $1/R$  для полупространства в задаче Герца вообще не зависит от коэффициента Пуассона). Расчеты показывают (табл. 2.5), что при  $\delta=1.5$ ,  $\alpha \geq \pi/4$ ,  $\lambda \geq 2$ ,  $h \geq \lambda + 2.5$  решение интегрального уравнения практически не зависит от коэффициента Пуассона.

Для вытянутых вдоль ребра клина штампов при усилении контакта (с ростом  $\delta$ ) начинается перколяция (слияние соседних областей контакта). В табл. 2.6 даны минимальные значения осадки, требуемые для начала перколяции, и соответствующие значения силы.

Таблица 2.6 — Значения  $\min \delta$  и  $P$  в начале перколяции ( $A_0=\varepsilon=1$ ,  $B_0=0.2$ ,  $\lambda=2$ ,  $h=10$ )

| $\alpha$      | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ | $5\pi/4$ | $3\pi/2$ | $7\pi/4$ | $2\pi$ |
|---------------|---------|---------|----------|-------|----------|----------|----------|--------|
| $\min \delta$ | 0.69    | 0.90    | 0.71     | 0.57  | 0.63     | 0.67     | 0.62     | 0.58   |
| $P$           | 0.16    | 0.16    | 0.16     | 0.16  | 0.16     | 0.16     | 0.16     | 0.16   |

Как видно из табл. 2.6, легче всего начать перколяцию при  $\alpha=\pi$ , а труднее всего — при  $\alpha=\pi/2$ , при этом сила почти не меняется.

Для сравнения укажем, что при  $\alpha=\pi$ ,  $\lambda=4$ ,  $h=10$  имеем  $\min \delta=0.60$ ,  $P=0.16$ , а при  $\alpha=\pi$ ,  $\lambda=2$ ,  $h=4$  имеем  $\min \delta=0.45$ ,  $P=0.16$  (значения остальных параметров такие же, как в табл. 2.6). При  $\alpha=\pi$  ростом  $\lambda$  и  $h$  осадка, требуемая для начала перколяции, возрастает.

#### 2.3.4. Выводы

Показана возможность регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения трехмерной периодической контактной задачи о бесконечной прямолинейной цепочке штампов на грани упругого клина, другая грань которого подчинена условиям скользящей заделки (кроме случая полупространства). Для этого использована дополнительная система нормальных сосредоточенных сил с тем же периодом и той же величины по модулю, что и силы, приложенные к штампам. Регуляризирующая система может быть приложена как вне ребра клина, так и на ребре. В частном случае четверти пространства регуляризованные ядра получены в эквивалентной форме без квадратур и проверено совпадение двух форм ядер, что подтверждает достоверность результатов регуляризации.

Изученные в п. 2.1-2.3 периодические контактные задачи для клина эквивалентны соответствующим непериодическим задачам для усеченного клина плоскостями  $z=\pm l$  (в размерных обозначениях) перпендикулярными ребру, когда имеется единичная область контакта  $\Omega$ , а при  $z=\pm l$  поставлены условия скользящей заделки (рис. 1.7).

## 2.4. Плоские контактные задачи для клина

Плоские задачи являются предельным случаем пространственных периодических задач. Поскольку такие задачи ранее изучались для однородного клина [5], здесь берется случай, когда в материале клина коэффициент Пуассона меняется по угловой координате достаточно гладким образом, при этом модуль сдвига постоянный. Соответствующим образом будет меняться и модуль упругости Юнга. Одна грань клина в контакте с индентором по отрезку конечной длины, который не достигает вершины клина, а другая грань жестко зафиксирована (задача В4) либо на ней нет напряжений (задача В5). Для того, чтобы вывести интегральные уравнения относительно контактного давления используем общее представление фрайбергерского типа решения уравнений упругого равновесия в полярных координатах с переменным по углу коэффициентом Пуассона. Вспомогательные краевые проблемы решаются точно при применении интегрального преобразования Меллина. Чтобы решить интегральные уравнения выбирается регулярный асимптотический метод В.М. Александрова, эффективность которого возрастает с удалением отрезка контакта от вершины клина. Во взятом случае закона неоднородности в асимптотиках возникают логарифмические члены, которые отсутствуют в подобных асимптотиках для однородного материала. Проведен численный анализ для законов, в которых коэффициент Пуассона, а также модуль упругости возрастает или уменьшается по угловой координате.

### 2.4.1. Переменный по углу коэффициент Пуассона

Беря полярные координаты  $r, \varphi$ , изучим плоские задачи линейной упругости о контактном взаимодействии клина угла  $\alpha$  с жестким индентором по отрезку  $\varphi=0, 0 < a \leq r \leq b$ . Вне отрезка контакта грань  $\varphi=0$  не нагружена, трением пренебрегаем. Грань клина  $\varphi=\alpha$  жестко зафиксирована (задача В4) или на ней нет напряжений (задача В5). Материал тела неоднородный: коэффициент Пуассона  $\nu=\nu(\varphi)$ , модуль сдвига  $G=\text{const}$ . Без ограничения общности будем по-

лагать, что подошва индентора плоская и он внедряется без перекоса на величину  $\delta$  под воздействием силы  $P$ . В задаче В4 при известных параметрах  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $G$  и закона  $v(\varphi)$  надо отыскать контактное давление  $\sigma_\varphi(r,0)=-q(r)$  на отрезке контакта. Затем можно вычислить силу  $P$  и точку, где она приложена. В задаче В5 нет возможности найти связь между приложенной силой  $P$  и осадкой  $\delta$  [5,60], поэтому вместо  $\delta$  считаем, что задана величина  $P$ . Этот парадокс известен и связан с плоской постановкой задачи для клина или полуплоскости (клин развернутого угла) и устраняется при переходе к пространственной контактной задаче (герцевского типа) для тела в форме клина с одной свободной гранью и полупространства.

Для вывода интегральных уравнений задач В4 и В5 относительно  $q(r)$  рассматриваются вспомогательные задачи о действии известной нагрузки на грани клина со взятым законом неоднородности при сохранении краевых условиях на другой грани (жесткая фиксация или отсутствие напряжений). Вспомогательные краевые проблемы решаются точно на основе общего представления фрайбергерского типа [108] решения уравнений Ламе в полярных координатах при переменном по углу коэффициенте Пуассона [60,62]. Представление предполагает решение векторного уравнения Лапласа и скалярного уравнения Пуассона, у которого правая часть зависит от закона  $v(\varphi)$ . К этим уравнениям применяется интегральное преобразование Меллина [82]. Нормальное перемещение грани упругого тела под приложенной нагрузкой можно представить в форме меллиновского интеграла. Условие контакта заключается в равенстве этого упругого перемещения и осадки индентора, что дает интегральное уравнение

$$\frac{1}{4G\pi i} \int_a^b q(\rho) d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} V_m(s) \left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds = \delta, \quad a \leq r \leq b, \quad (2.56)$$

где для задач В4 ( $m=1$ ) и В5 ( $m=2$ )

$$V_1(s) = \frac{\sin(2s\alpha) + s(D_2 + D_4)}{s\Delta_1(s)}, \quad V_2(s) = \frac{-(D_2 + D_4)}{s^2\Delta_2(s)},$$

$$\Delta_1(s) = 1 - s^2(D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 - D_4^2) - 2s(D_3 \cos(2s\alpha) - D_4 \sin(2s\alpha)),$$

$$\Delta_2(s) = D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 - D_4^2, \quad (2.57)$$

$$D_1 = \int_0^\alpha \eta(t) \sin(2t) dt, \quad D_2 = \int_0^\alpha \eta(t) \cos(2t) dt,$$

$$D_3 = \int_0^\alpha \omega(t) \sin(2st) dt, \quad D_4 = \int_0^\alpha \omega(t) \cos(2st) dt, \quad \omega(\varphi) = \frac{-1}{2(1 - v(\varphi))}.$$

В случае  $v(\varphi) = \text{const}$  интегральные уравнения (2.56), (2.57) переходят в известные для однородного материала [5]. Допустим, что функция  $\omega(\varphi)$  имеет следующий вид

$$\omega(\varphi) = \frac{-1}{2(1 - v_0)} - v_1 \sin(n\varphi), \quad v_0 = v(0), \quad v_1, n = \text{const}. \quad (2.58)$$

В задаче В5 в отличие от задачи В4 символ ядра интегрального уравнения  $V_2(s)$  обладает двукратным полюсом при  $s=0$ . Эта ситуация и не будет давать возможность выявить связь между  $P$  и  $\delta$  в задаче В5. Переходим в ядре (2.56) к интегралу по действительной оси, используем теорию вычетов для случая В5. Тогда, вводя безразмерные обозначения

$$x = \lambda \ln \frac{r}{a} - 1, \quad \lambda = 2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^{-1}, \quad f = \frac{\lambda \delta}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{rq(r)}{a\theta}, \quad \theta = \frac{G}{1 - v_0}, \quad (2.59)$$

придем к интегральному уравнению ( $m=1$  для задачи В4 и  $m=2$  для задачи В5)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k \left( \frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = \pi f \quad (|x| \leq 1), \quad (2.60)$$

$$k(t) = \int_0^\infty L_m(u) \frac{\cos(ut)}{u} du + \frac{\pi}{2} B_m t, \quad B_m = \lim_{u \rightarrow 0} u L_m(u), \quad B_1 = 0,$$

$$L_1(u) = \frac{2\kappa_0 \text{sh}(2\alpha u) - 2u \sin(2\alpha) + 2u\kappa v_1 (H_2 + H_4)}{d_1(u)}, \quad \kappa_0 = 3 - 4v_0, \quad \kappa = 2(1 - v_0),$$

$$L_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u) + u \sin(2\alpha) - u\kappa v_1(H_2 + H_4)}{d_2(u)},$$

$$d_1(u) = 2\kappa_0 \text{ch}(2\alpha u) + 2u^2(1 - \cos(2\alpha)) + \kappa_0^2 + 1 + 2u\kappa v_1(2\kappa F_0 + u\kappa v_1 F_1 + F_2),$$

$$d_2(u) = 2(\text{sh}^2(\alpha u) - u^2 \sin^2 \alpha) - \kappa v_1 u(\kappa v_1 u F_1 + F_2),$$

$$F_0 = H_3 \text{ch}(2\alpha u) - H_4 \text{sh}(2\alpha u), \quad F_1 = (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - H_4^2)/2,$$

$$F_2 = H_1 u(\cos(2\alpha) - 1) - H_2 u \sin(2\alpha) - H_3(\text{ch}(2\alpha u) - 1) + H_4 \text{sh}(2\alpha u),$$

$$H_1 = \frac{\sin((n+2)\alpha)}{n+2} - \frac{\sin((n-2)\alpha)}{n-2}, \quad H_2 = \frac{\cos((n+2)\alpha) - 1}{n+2} + \frac{\cos((n-2)\alpha) - 1}{n-2},$$

$$H_3 = 2 \frac{n \cos(n\alpha) \text{sh}(2\alpha u) - 2u \sin(n\alpha) \text{ch}(2\alpha u)}{n^2 + 4u^2},$$

$$H_4 = 2 \frac{n(\cos(n\alpha) \text{ch}(2\alpha u) - 1) - 2u \sin(n\alpha) \text{sh}(2\alpha u)}{n^2 + 4u^2}.$$

Безразмерный параметр  $\lambda$  вида (2.59) характеризует относительную отдаленность отрезка контакта от угловой точки. Чтобы решить интегральное уравнение (2.60), берем регулярный асимптотический метод [4,5,29], эффективный при больших  $\lambda$  (вдали от угловой точки). Известно [4], что структура асимптотики зависит от поведения символа ядра  $L_m(u)$  на бесконечности. Для однородного клина ( $v_1=0$ ) символ  $L_m(u) - 1$  экспоненциально убывает при  $u \rightarrow \infty$  [5]. В нашем случае

$$L_m(u) = 1 + \frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{u^2} + O\left(\frac{1}{u^3}\right) \quad (u \rightarrow \infty), \quad c_1 = -\frac{\kappa v_1 n}{2}, \quad c_2 = c_1^2. \quad (2.61)$$

Асимптотика (2.61) ведет к образованию в асимптотическом решении логарифмических членов, которых нет для однородного материала [5]. Именно, на базе (2.61) можно показать, что для ядра уравнения (2.60) справедливо степенно-логарифмическое разложение по малому параметру  $t \rightarrow 0$  [4,38]

$$k(t) = -\ln |t| + a_{30} + \pi B_m t / 2 + a_{20} |t| + a_{11} t^2 \ln |t| + a_{31} t^2 + O(t^3 \ln |t|),$$

$$a_{30} = \int_0^\infty \frac{L_m(u) - 1 + \exp(-u)}{u} du, \quad a_{20} = -\frac{\pi c_1}{2}, \quad a_{11} = \frac{c_2}{2}, \quad (2.62)$$

$$a_{31} = -\frac{3c_2}{4} + \frac{1}{2} \int_0^\infty [u^2 - u^2 L_m(u) + c_1 u + c_2(1 - \exp(-u))] \frac{du}{u}.$$

Для случая В5 ядро (2.62) включает бесконечную постоянную  $a_{30}$  из-за расходимости интеграла в нуле. Построение регулярного асимптотического решения для двух задач предполагает почленное дифференцирование уравнения (2.60) по  $x$ , в результате которого бесконечная постоянная в ядре для случая В5 исчезает, а интеграл в ядре начинает сходиться. Принципиальный логарифмический член в (2.62) для двух задач дает сингулярное ядро Коши. Будем искать асимптотическое решение в виде степенно-логарифмического разложения по малому параметру  $1/\lambda$ . Чтобы найти коэффициенты этого разложения, группируем и приравниваем слагаемые при одинаковых степенях  $\ln^k(\lambda)/\lambda^l$ . На каждом шаге построения асимптотики встречается сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, в правую часть которого входят члены, найденные на предыдущих шагах. Для первого члена асимптотики возникает однородное сингулярное интегральное уравнение, его нетривиальное решение зависит от произвольной постоянной [4]. Эту произвольную постоянную находим из интегрального условия равновесия индентора

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{\lambda P}{a\theta} = P_*. \quad (2.63)$$

В результате искомое давление будет выражено через приложенную к индентору безразмерную силу  $P_*$ . В случае В4 для нахождения связи между силой и осадкой построенное решение надо внести в исходное уравнение (2.60). В случае В5 этого сделать не удастся ввиду расходимости интеграла (2.62).

Приближенное асимптотическое решение обеих задач запишем в виде  $(\lambda \rightarrow \infty)$

$$\varphi(x) = \frac{P_*}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[ 1 + \frac{\Phi_{10}(x)}{\lambda} + \frac{\Phi_{20}(x)}{\lambda^2} + \frac{\ln \lambda}{\lambda^2} \Phi_{21}(x) + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^3}\right) \right], \quad (2.64)$$

$$\Phi_{10}(x) = \frac{4}{\pi^2} a_{20} S_1(x) + \frac{\pi B_m}{2} x, \quad \Phi_{21}(x) = -a_{11}(1-2x^2),$$

$$\varphi_{20}(x) = (a_{11}(1.5 - \ln 2) + a_{31})(1 - 2x^2) + \frac{32}{\pi^4} a_{20}^2 (S_2(x) - S_0) -$$

$$- \frac{a_{20} B_m}{\pi} \left[ (1 - x^2) \ln \frac{1-x}{1+x} - 2x \right],$$

$$S_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m}{(4m^2 - 1)^3}, \quad S_1(x) = 1 - 2x^2 + 2\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\arccos x]}{(2m+1)^2}$$

$$S_2(x) = \sqrt{1-x^2} \left[ 0.4356 + 0.1321x^2 + 0.2494x \ln \frac{1-x}{1+x} \right].$$

В случае В4 интегральная характеристика контактного давления (2.63) (безразмерная вдавливающая сила) находится в виде

$$P_* = \pi f [a_{30} + 0.8106 a_{20} \lambda^{-1} + (a_{11} + a_{31} - 0.03287 a_{20}^2) \lambda^{-2} +$$

$$+ \ln(2\lambda)(1 - a_{11} \lambda^{-2}) + O(\lambda^{-4} \ln(2\lambda))]^{-1}. \quad (2.65)$$

Погрешность решения (2.64), (2.65) при  $\lambda \geq 5$  и не слишком малых углах  $\alpha$  не превосходит 5%. Это решение можно рекомендовать, когда отрезок контакта (индентор) относительно удален от угла тела.

Для задачи В4 в табл. 2.7 приведены значения постоянных  $a_{30}$  и  $a_{31}$  (2.62) и отнесенной к осадке силы (2.65), рассчитанные при  $\nu_0=0.3$  и разных  $\alpha$ ,  $\nu_1$  и  $n$  (в (2.65) взято  $\lambda=5$ ).

Таблица 2.7 — Значения величин (2.62) и (2.65) в задаче В4

| $\nu_1$  | 0.1     |          |          |          |         |          |        |          |
|----------|---------|----------|----------|----------|---------|----------|--------|----------|
| $n$      | 1       |          |          |          | 3       |          |        |          |
| $\alpha$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$    | $5\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$  | $5\pi/4$ |
| $a_{30}$ | 0.401   | 0.975    | 1.156    | 1.306    | 0.327   | 0.917    | 1.092  | 1.262    |
| $a_{31}$ | 0.113   | 0.00500  | -0.00853 | -0.0140  | -0.102  | -0.207   | -0.220 | -0.226   |
| $P_*/f$  | 1.153   | 0.953    | 0.904    | 0.866    | 1.173   | 0.963    | 0.914  | 0.871    |
| $\nu_1$  | -0.1    |          |          |          |         |          |        |          |
| $n$      | 1       |          |          |          | 3       |          |        |          |
| $\alpha$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$    | $5\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$  | $5\pi/4$ |
| $a_{30}$ | 0.650   | 1.265    | 1.489    | 1.635    | 0.735   | 1.327    | 1.555  | 1.683    |
| $a_{31}$ | 0.173   | 0.0660   | 0.0494   | 0.0433   | 0.391   | 0.283    | 0.265  | 0.260    |
| $P_*/f$  | 1.068   | 0.884    | 0.832    | 0.801    | 1.048   | 0.876    | 0.824  | 0.797    |

На основе решения (2.64) для давления при  $x=0$  получим

$$\varphi_0 = \frac{\varphi(0)}{P_*} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi^2 \lambda} a_{20} 0.8320 + \frac{1}{\lambda^2} (a_{11} (1.5 - \ln 2) + a_{31} + \frac{32}{\pi^4} a_{20}^2 0.2848) - \frac{\ln \lambda}{\lambda^2} a_{11} + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^3}\right) \right\}. \quad (2.66)$$

Для задачи В5 в табл. 2.8 приведены значения постоянной  $a_{31}$  (2.62) и отнесенного к силе давления (2.66), рассчитанные при  $v_0=0.3$  и разных  $\alpha$ ,  $v_1$  и  $n$  (в (2.66) взято  $\lambda=5$ ).

Таблица 2.8 — Значения величин (2.62) и (2.66) в задаче В5

| $v_1$       | 0.1     |          |         |          |         |          |        |          |
|-------------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|--------|----------|
| $n$         | 1       |          |         |          | 3       |          |        |          |
| $\alpha$    | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$   | $5\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$  | $5\pi/4$ |
| $a_{31}$    | -0.431  | -0.0831  | -0.0649 | -0.0608  | -0.717  | -0.311   | -0.288 | -0.281   |
| $\varphi_0$ | 0.310   | 0.315    | 0.315   | 0.315    | 0.302   | 0.307    | 0.307  | 0.308    |
| $v_1$       | -0.1    |          |         |          |         |          |        |          |
| $n$         | 1       |          |         |          | 3       |          |        |          |
| $\alpha$    | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$   | $5\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$  | $5\pi/4$ |
| $a_{31}$    | -0.462  | -0.0488  | -0.0261 | -0.0186  | -0.167  | 0.185    | 0.203  | 0.208    |
| $\varphi_0$ | 0.315   | 0.320    | 0.320   | 0.320    | 0.323   | 0.328    | 0.328  | 0.328    |

### 2.4.2. Выводы

При выбранном законе неоднородности материала изменяется характер поведения на бесконечности символов ядер интегральных уравнений контактных задач для клина, в связи с чем в регулярном асимптотическом решении (2.64), (2.65) возникают логарифмические члены. Подобных членов нет в решениях для однородного клина [5]. Подобная метаморфоза в поведении символа ранее отмечалась в контактных задачах для неоднородной по глубине полосы (вместо экспоненциального характера убывания на бесконечности возникает степенной) [1].

При выбранном законе (2.58)  $v(\varphi)$  растет при  $v_1 > 0$  и уменьшается при  $v_1 < 0$  от значения  $v_0 = 0.3$  (от грани контакта  $\varphi=0$ ). В случае В4 при возрастающем коэффициенте Пуассона по угловой координате (при этом модуль

продольной упругости также возрастает) контактные давления и сила, отнесенные к осадке штампа  $f$ , больше, чем при убывающем (см. табл. 2.7). С увеличением  $\lambda$  давления и сила уменьшаются в связи с удалением контактного отрезка от жестко заземленной грани. При возрастании  $n$  (частота осцилляций изменения коэффициента Пуассона) в случае В4 сила возрастает при зафиксированном  $\nu_1 > 0$  и убывает при  $\nu_1 < 0$ .

Для определения точки приложения силы  $P$  после нахождения контактных давлений следует воспользоваться интегральным условием равновесия штампа для момента силы [5].

## Глава 3. Жесткие включения в упругом клине

### 3.1. Пространственные задачи

Исследуются контактные задачи теории упругости о системах тонких жестких эллиптических включений (два одинаковых включения, периодическая система включений, ось включений параллельна угловой линии) в срединной полуплоскости пространственного клина двухгранного угла. Обе грани клина подчинены условиям жесткой или скользящей заделки. Для задач получены интегральные уравнения, ядра которых симметричны. В задачах есть два безразмерных геометрических параметра, которые описывают локацию включений внутри клина. Предполагается, что эти параметры связаны и для решения используется регулярный асимптотический метод В.М. Александрова. Полученное асимптотическое решение для двух включений сопоставляется с асимптотиками для единичного включения в клине и для периодической системы включений.

#### 3.1.1. Пара включений в клине

Возьмем упругий клин  $\{0 \leq r < \infty, -\alpha \leq \varphi \leq \alpha, |z| < \infty\}$ , ребро которого идет по оси  $z$  цилиндрической системы координат. Клиновый материал обладает модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В срединной полуплоскости клина расположены два тонких жестких включения, занимающих симметричные эллиптические области  $\Omega_{\pm} = \{(r-a)^2/c^2 + (z \pm l)^2/b^2 \leq 1\}$ ,  $a > c$ ,  $b \geq c$  (рис. 3.1). Между включениями и упругим материалом в зоне контакта имеется полное сцепление. На наружных гранях клина поставлены условия жесткой или скользящей заделки (задачи С1 и С2 соответственно). На включения воздействуют силы  $2T$ , приложенные в центральной грани  $\varphi=0$  перпендикулярно ребру клина. Включения сдвигаются на величину  $\delta$  в направлении действия сил. Из-за симметричности по  $\varphi$  можно рассматривать лишь область  $\varphi \in [0, \alpha]$ . В первом приближении в области контакта

пренебрегаем напряжением  $\tau_{\varphi z}$  по сравнению с  $\tau_{r\varphi}$ . Для единичного включения показано, что  $\tau_{\varphi z} = O(\tau_{r\varphi}/\lambda^2)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda = a/b$  [9]. Граничные условия задач имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi = 0: \quad & u_r = \delta, (r, z) \in \Omega; \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r, z) \notin \Omega; \quad u_\varphi = \tau_{\varphi z} = 0; \\ \varphi = \alpha: \quad & \text{C1) } u_\varphi = u_r = u_z = 0; \quad \text{C2) } u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

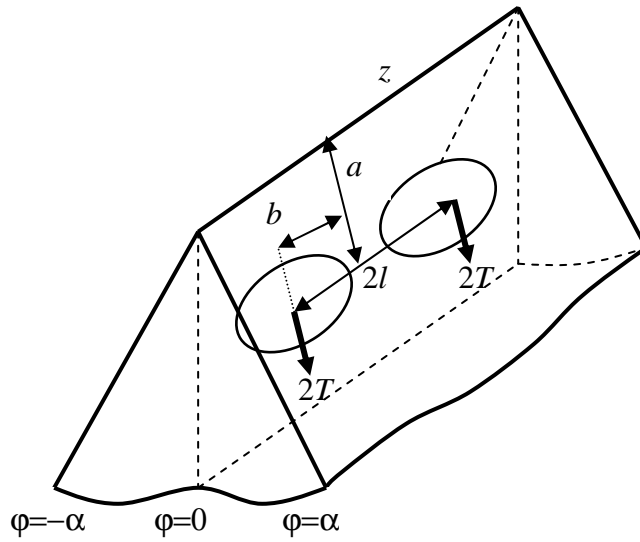


Рис. 3.1 — Эллиптические включения в клине

При известных величинах  $\alpha$ ,  $G$ ,  $\nu$ ,  $\delta$  и заданных областях  $\Omega_{\pm}$  требуется найти касательные контактные напряжения  $\tau_{r\varphi}(r, 0, z) = -\tau(r, z)$ ,  $(r, z) \in \Omega_{\pm}$ . Затем можно найти величину  $T$ , беря условие равновесия включений

$$\iint_{\Omega_{\pm}} \tau(r, z) dr dz = T. \quad (3.2)$$

Для получения интегральных уравнений краевых задач (3.1) берем известные фундаментальные решения и ядра интегральных уравнений аналогичных задач для единичного включения, полученные в форме скрытой симметрии по радиальной координате [9]. Переходя к форме явной симметрии ядер в соответствие с теоремой Бетти взаимности работ путем сдвига контура интегрирования ([62], п. 2.9.3), учитывая симметрию задач по  $z$  и вводя новые обозначения

$y = y'+l, z = z'+l, \Omega = \{(r-a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1\}, \theta = \kappa/\kappa_1, \kappa = 3 - 4\nu, \kappa_1 = 4 - 4\nu$   
и т.д., получим (штрихи далее опускаем)

$$\iint_{\Omega} \tau(x, y) K(x, y, r, z) dx dy = 2\pi G \delta, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$K(x, y, r, z) = \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) C(\beta y, \beta z) du d\beta,$$

$$W(u) = S_1(u) - \kappa^{-1} S_2(u) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2} S_3(u) x r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r},$$

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y-z)) + \cos(\beta(y+z+2l)),$$

Здесь  $K_{iu}(r)$  — цилиндрическая функция Бесселя [68,69]. Для задачи С1

$$S_1(u) = \frac{f_+(u)}{g_+(u)} - S_3(u), \quad S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_+(u)} - S_3(u), \quad S_3(u) = \frac{4\text{sh}^2(\alpha u) \sin^2 \alpha}{g_+(u) f_-(u)},$$

а для задачи С2

$$S_1(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)}, \quad S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_-(u)}, \quad S_3(u) = 0,$$

$$f_{\pm}(u) = \text{sh}(2\alpha u) \pm \kappa^{-1} u \sin(2\alpha), \quad g_{\pm}(u) = \text{ch}(2\alpha u) \pm \cos(2\alpha).$$

Для единичных эллиптических включений (задачи С3 и С4 соответственно для жесткой и скользящей заделки граней клина) в ядре (3.3) следует положить

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y-z)). \quad (3.4)$$

Форма ядер с явной симметрией по  $x, r$  гарантирует их корректность при всех углах клина. Пусть в уравнении (3.3), (3.4) область  $\Omega$  — полоса  $\{a \leq r \leq b, |z| < \infty\}$ ,  $\tau(r, z) = \tau(r)$ . Тогда, совершая предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$ , используя теорию обобщенных функций [33], приходим к интегральным уравнениям соответствующих плоских задач

$$\int_a^b \tau(\rho) k \left( \ln \frac{\rho}{r} \right) d\rho = \pi G \delta \quad (a \leq r \leq b), \quad k(t) = \theta \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut) du, \quad (3.5)$$

$$A) L(u) = \frac{2 \operatorname{sh}^2(\alpha u) - 2\kappa^{-2}u^2 \sin^2 \alpha}{f_-(u)}, \quad B) L(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)} = S_1(u).$$

Уравнения (3.5) можно вывести также при помощи интегрального преобразования Меллина. Устремляя  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha u = t$ , видим, что функция  $L(u)$  для скользящей заделки переходит в известный ядерный символ задачи о включении в упругой полосе ([6], формула (3.11)). Функции  $L(u)$  служат символами ядер интегральных уравнений (3.3) и (3.5). Важно, что эти функции по своему асимптотическому поведению в нуле и бесконечности являются функциями типа тангенса гиперболического. Исключением служит значение  $\alpha = \pi$  в задаче С2, когда  $L(u) = \operatorname{cth}(\pi u)$  и ядро уравнения (3.3) при условии (3.4) соответствует случаю единичного эллиптического включения в упругом пространстве ([6], формулы (1.16)), а ядро (3.5) — случаю включения в виде отрезка в упругой плоскости. В последнем случае интегральное уравнение (3.5) приводится к уравнению плоской контактной задачи о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость.

Ядро интегрального уравнения (3.3), (3.4) для задачи С2 при  $\alpha = \pi/2$ , используя известные интегралы ([62], формулы (109)), можно представить в виде

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R^3} - \frac{1}{R_+} + \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R_+^3},$$

$$R = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_+ = \sqrt{(r+x)^2 + (z-y)^2},$$

что соответствует случаю двух симметричных включений в упругом пространстве, сдвигаемых в противоположных направлениях оси, проходящей через их центры [6].

Для пары симметричных включений в упругом пространстве, смещаемых в одном направлении перпендикулярно прямой, соединяющей их центры (задача С2 при  $\alpha = \pi$ ), ядро уравнения (3.3) принимает форму [6]

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R^3} + \frac{1}{R_*} - \frac{(z+y+2l)^2}{\kappa_1 R_*^3}, \quad (3.6)$$

$$R_* = \sqrt{(r-x)^2 + (z+y+2l)^2}.$$

Для решения интегрального уравнения (3.3) применим регулярный асимптотический метод [6]. Введем безразмерные величины

$$r' = \frac{r-a}{b}, \quad z' = \frac{z}{b}, \quad \delta' = \frac{\delta}{b}, \quad c' = \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \mu = \frac{l}{b}, \quad (3.7)$$

$$\tau'(r', z') = \frac{\tau(r, z)}{G}, \quad T' = \frac{T}{Gb^2}, \quad \Omega \rightarrow \Omega'$$

и т.д. (штрихи далее опускаем). Локация пары эллиптических включений в клине характеризуется параметрами  $\lambda$  (относительная удаленность от ребра клина) и  $\mu$  (относительное расстояние между включениями). Предположим, что эти параметрами связаны соотношением

$$\mu = \gamma\lambda, \quad \gamma = l/a \quad (3.8)$$

и будем искать решение в виде разложения по степеням малого параметра  $1/\lambda$ .

Запишем уравнение (3.3) в безразмерных обозначениях, выделяя в ядре главную часть (3.6), соответствующую включению в упругом пространстве:

$$\iint_{\Omega} \tau(x, y) \left[ \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R^3} + K_*(x, y, r, z) \right] dx dy = 2\pi\delta, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (3.9)$$

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R_0} - \frac{(z_0 + y_0)^2}{\kappa_1 R_0^3} +$$

$$+ \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W_0(u) K_{iu}(\beta x_0) K_{iu}(\beta r_0) C_0(\beta y, \beta z) du d\beta,$$

$$R_0 = \sqrt{(r-x)^2 + (z_0 + y_0)^2}, \quad x_0 = x + \lambda, \quad r_0 = r + \lambda, \quad y_0 = y + \gamma\lambda, \quad z_0 = z + \gamma\lambda,$$

$$W_0(u) = S_1^*(u) - \kappa^{-1} S_2^*(u) \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x} + r_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2} S_3(u) x_0 r_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial r},$$

$$C_0(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y-z)) + \cos(\beta(y_0 + z_0)), \quad S_n^*(u) = S_n(u) - \text{cth}(\pi u) \quad (n=1,2).$$

Разложим функцию  $K_*(x, y, r, z)$  в ряд по степеням  $1/\lambda$  при помощи значения интеграла [69]

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty K_{iu}(\beta x_0) K_{iu}(\beta r_0) \cos(\beta z) d\beta = \frac{1}{\sqrt{x_0 r_0} \operatorname{ch}(\pi u)} F\left(\frac{1}{2} - iu, \frac{1}{2} + iu, 1; -\frac{(r-x)^2 + z^2}{4x_0 r_0}\right),$$

где  $F(a, b, c; x)$  — гипергеометрическая функция Гаусса, и биномиальных рядов. Можно показать, что такое разложение сходится при достаточно больших  $\lambda$  и определенных ограничениях на параметр  $\gamma$ . В частности, для пары круговых включений для сходимости достаточно наложить условия

$$\lambda > \max\left(\frac{1}{1-\gamma}, \sqrt{\frac{2}{1-\gamma^2}}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}}\right), \quad \gamma < \min(1, \alpha). \quad (3.10)$$

Для единичного кругового включения (случай (3.4)) оценки (3.10) меняются на неравенство

$$\lambda > \max(\sqrt{2}, \sqrt{1+\alpha^{-2}}).$$

Ограничиваясь первым членом разложения, получим ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{A}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad A = a_0 + a_1 + a_2. \quad (3.11)$$

Для пары включений

$$a_0 = \frac{\theta}{2\gamma}, \quad a_1 = \theta \int_0^\infty \operatorname{th}(\pi u) \left[ S_1^*(u) + \kappa^{-1} S_2^*(u) - \kappa^{-2} S_3(u) \frac{3+4u^2}{8} \right] du,$$

$$a_2 = \theta \int_0^\infty \operatorname{th}(\pi u) \left[ S_1^*(u) \sum_{n=0}^\infty V_n(u) + \kappa^{-1} S_2^*(u) \sum_{n=0}^\infty (1+2n)V_n(u) - \right.$$

$$\left. - \kappa^{-2} S_3(u) \sum_{n=0}^\infty \left( \frac{1}{4} + n + n^2 - \frac{n}{2\gamma^2} \right) V_n(u) \right] du, \quad V_n(u) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{1}{2} - iu \right)_n \left( \frac{1}{2} + iu \right)_n \gamma^{2n},$$

где  $(a)_n$  — символ Похгаммера [68].

Для единичного включения (задачи С3 и С4) в формулах (3.11) следует положить  $a_0 = a_2 = 0$ .

Для эллиптической области  $\Omega$  регулярное асимптотическое решение интегрального уравнения (3.9), (3.11) получим в виде ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$\tau(r, z) = \frac{\delta}{cDL(r, z)} \left[ 1 - \frac{A}{\lambda D} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right], \quad L(r, z) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2} - z^2}, \quad (3.12)$$

$$D = S_{00} - \frac{S_{10}}{\kappa_1}, \quad S_{00} = K, \quad S_{10} = \frac{K - E}{e^2},$$

$$S_{km} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2k} t \sin^{2m} t}{(1 - e^2 \sin^2 t)^{k+m+1/2}} dt, \quad e^2 = 1 - c^2,$$

где  $K=K(e)$  и  $E=E(e)$  — полные эллиптические интегралы.

На основе формул (3.12) найдем интегральную характеристику (3.2)

$$T = \iint_{\Omega} \tau(x, y) dx dy = \frac{2\pi\delta}{D} T_0, \quad T_0 = 1 - \frac{A}{\lambda D} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (\lambda \rightarrow \infty). \quad (3.13)$$

Асимптотики (3.12) и (3.13) эффективны как для пары включений, так и для единичного включения для относительно удаленных от ребра клина областей контакта.

### 3.1.2. Периодические системы включений

Пусть срединная полуплоскость клина  $\varphi=0$  контактирует с периодической системой тонких жестких эллиптических включений (с полуосями  $b$  и  $c$ ,  $b \geq c$ ), ориентированных вдоль ребра (рис. 3.1). Ось системы находится на расстоянии  $a > c$  от ребра, период  $2l$  ( $l > b$ ). По-прежнему наружные грани тела крепятся жесткой или скользящей заделкой (соответственно задачи С5 и С6). В размерных обозначениях периодические задачи сводятся к интегральному уравнению (3.3), в котором следует взять

$$C(\beta y, \beta z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2kl)). \quad (3.14)$$

Сходимость ряда в ядре уравнения (3.3), (3.14) обеспечивается поведением функций-символов  $L(u)$  типа тангенса гиперболического, которые в задачах С5 и С6 такие же, как соответственно в задачах С1, С3 и С2, С4. Исключим из рассмотрения значение  $\alpha = \pi$  в задаче F, когда  $L(u) = \text{cth}(\pi u)$  (периодическая система включений в упругом пространстве, ряд в ядре расходится). Значение  $\alpha = \pi/2$  в задаче С6 ( $L(u) = \text{th}(\pi u/2)$ ) соответствует самоуравновешенной системе двух параллельных периодических цепочек включений в упру-

гом пространстве (рис. 3.2, условия скользящей заделки возникают на пунктирной линии). В этом случае ядро представляется сходящимся рядом

$$K(x, y, r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k} - \frac{(z-y+2kl)^2}{\kappa_1 R_k^3} - \frac{1}{P_k} + \frac{(z-y+2kl)^2}{\kappa_1 P_k^3} \right], \quad (3.15)$$

$$R_k = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y+2kl)^2}, \quad P_k = \sqrt{(r+x)^2 + (z-y+2kl)^2}.$$

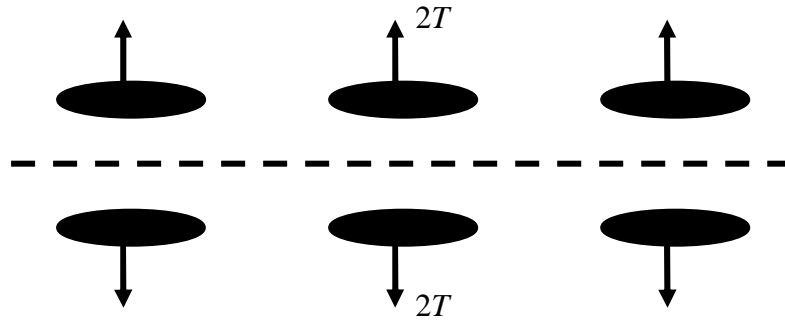


Рис. 3.2 — Самоуравновешенная система двух параллельных периодических цепочек включений в упругом пространстве

Для выделения главных членов ядра уравнения (3.3), (3.14) применим известную методику, основанную на замене тригонометрического ряда (3.14) рядом обобщенных функций [8,33,44,133] и вычислении пределов и интегралов [68,69]. В результате представим ядро в форме ( $C$  — постоянная Эйлера)

$$\begin{aligned} K(x, y, r, z) = & \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R^3} + \frac{\theta}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \frac{\theta C}{l} - \frac{1}{\kappa_1 l} + \\ & + \frac{\theta}{l} \int_0^{\infty} \left\{ [L(u) - 1] \cos \left( u \ln \frac{r}{x} \right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \theta \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \\ & + \frac{(r-x)^2}{\kappa_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(R_k^+)^3} + \frac{1}{(R_k^-)^3} \right] + \frac{4\theta}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W_*(u) \Sigma(u) du, \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$R_k^{\pm} = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2},$$

$$W_*(u) = S_1^*(u) - \kappa^{-1} S_2^*(u) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2} S_3(u) x r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r},$$

$$\Sigma(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu} \left( \frac{\pi k}{l} x \right) K_{iu} \left( \frac{\pi k}{l} r \right) \cos \left( \frac{\pi k}{l} (z - y) \right).$$

В (3.16) повышена сходимость интегралов с использованием поведения символов на бесконечности. Заметим, что ядро (3.16) содержит слагаемые, участвующие в ядрах интегральных уравнений трехмерных и плоских задач о единичном включении в клине; переходя в пределе  $l \rightarrow \infty$  к известному ядру для единичного включения. Логарифмическая особенность двумерной задачи в (3.16) при  $r=x$  является устранимой ( $x>0$ ):

$$\lim_{r \rightarrow x} \ln \frac{|r-x|}{|\ln(r/x)|} = \ln|x|. \quad (3.17)$$

Проверку эквивалентности форм (3.15) и (3.16) для задачи С6 при  $\alpha=\pi/2$  проведем, отбрасывая главные члены, в частном случае  $r=x \neq 0, z=y, l=1$ . При учете предела (3.17) и соотношений [69]

$$\int_0^{\infty} K_{iu}^2(x) du = \frac{\pi}{2} K_0(2x), \quad \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x)$$

можно численно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{4} + C - \frac{1}{\kappa} + \int_0^{\infty} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} - 1 + \exp(-u) \right] \frac{du}{u} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ K_0(2\pi kx) + \frac{4\pi kx}{\kappa} K_1(2\pi kx) \right] = \\ = -\frac{1}{2\theta x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k} - \frac{k^2 + \theta^{-1}x^2}{(k^2 + x^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

Для решения интегрального уравнения (3.3) с ядром (3.16) снова применим регулярный асимптотический метод [6,140], вводя безразмерные обозначения (3.7), (3.8). Придем к уравнению (3.9) с ядром (3.11), в котором следует положить

$$\begin{aligned} A = \frac{\theta}{\gamma} \ln \frac{1}{4\gamma} + \frac{\theta C}{\gamma} - \frac{1}{\kappa_1 \gamma} + \frac{\theta}{\gamma_0} \int_0^{\infty} [L(u) - 1 + \exp(-u)] \frac{du}{u} - \\ - \frac{2\theta}{\pi \gamma} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi w) \cos(ws) \cos(wt) \left[ S_1^*(w) \frac{\exp(-\pi(\operatorname{ch}s + \operatorname{ch}t)\gamma^{-1}) - 1}{\operatorname{ch}(\pi(\operatorname{ch}s + \operatorname{ch}t)\gamma^{-1}) - 1} - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{\gamma \kappa} S_2^*(w) \frac{\operatorname{ch}s + \operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}(\pi(\operatorname{ch}s + \operatorname{ch}t)\gamma^{-1}) - 1} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi^2}{\gamma^2 \kappa^2} S_3(w) \frac{\text{sh}(\pi(\text{ch } s + \text{ch } t)\gamma^{-1}) \text{ch } s \text{ch } t}{[\text{ch}(\pi(\text{ch } s + \text{ch } t)\gamma^{-1}) - 1]^2} \Big] ds dt dw.$$

В результате получим асимптотики вида (3.12) и (3.13), справедливые при достаточно больших значениях  $\lambda$ .

### 3.1.3. Численный анализ

В табл. 3.1 для разных углов клина  $2\alpha$  приведены значения величины  $A$  в асимптотиках (3.12), (3.13) для шести задач, рассчитанные при  $\nu=0.25$  (для задач С1, С2 и С5, С6 брали  $\gamma=0.5$ ). В табл. 3.2 даны значения приведенной интегральной характеристики  $T_0$  (3.13), рассчитанные для круговых включений при  $\nu=0.25$ ,  $c=1$ ,  $\lambda=4$  и разных  $\gamma$ . Значение  $T_0=1$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  соответствует единичному включению в упругом пространстве (задача С4 при  $\alpha=\pi$ ). При сближении включений в задачах С1, С2 и С5, С6 (уменьшении  $\gamma$ ) значение сдвигающей силы уменьшается. При жесткой заделке граней клина (задачи С1, С3 и С5) включения сдвинуть труднее, чем в соответствующих случаях при скользящей заделке (задачи С2, С4 и С6). Как видно из табл. 3.2, периодическую систему включений (задачи С5 и С6) сдвинуть легче, чем пару включений (задачи С1 и С2), которую, в свою очередь, легче сместить, чем единичное включение (задачи С3 и С4). Как показывают расчеты, эллиптические включения ( $c<1$ ) сдвинуть легче, чем круговые ( $c=1$ ).

В табл. 3.3 для четырех задач приведены значения  $T_0$  при различных коэффициентах Пуассона  $\nu$  ( $\alpha=\pi/2$ ,  $c=1$ ,  $\lambda=4$ ). Требуемая для сдвига включений сила возрастает с ростом  $\nu$ . Как видно из табл. 3.3, для несжимаемого материала периодическую систему включений сдвинуть труднее, чем пару включений, хотя для сжимаемого материала ситуация противоположная. В первом приближении концентрация напряжений на границе сопряжения клина с включением, описываемая коэффициентом при корневой особенности в асимптотическом разложении (3.12), снижается с увеличением числа

или плотности включений и повышается при росте коэффициента Пуассона, а также при уменьшении угла клина.

Таблица 3.1 — Значения величины  $A$  в асимптотиках (3.12), (3.13) при  $\nu=0.25$

| Задача          | C1      | C2     | C3     | C4     | C5      | C6     |
|-----------------|---------|--------|--------|--------|---------|--------|
| $\alpha=\pi/4$  | -0.805  | -0.615 | -0.895 | -0.736 | -0.693  | -0.564 |
| $\alpha=\pi/2$  | -0.376  | -0.251 | -0.583 | -0.500 | -0.0638 | 0.103  |
| $\alpha=3\pi/4$ | -0.0757 | 0.196  | -0.398 | -0.249 | 0.478   | 1.790  |
| $\alpha=\pi$    | 0.0667  | 0.667  | -0.318 | 0      | 1.027   | —      |

Таблица 3.2 — Значения величины  $T_0$  (3.13) при  $\nu=0.25$ ,  $c=1$ ,  $\lambda=4$

| Задача          | C1    | C2    | C3    | C4    | C5    | C6    |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\gamma=0.5$    |       |       |       |       |       |       |
| $\alpha=\pi/4$  | 1.153 | 1.117 | 1.171 | 1.141 | 1.132 | 1.108 |
| $\alpha=\pi/2$  | 1.072 | 1.048 | 1.111 | 1.095 | 1.012 | 0.980 |
| $\alpha=3\pi/4$ | 1.014 | 0.963 | 1.076 | 1.048 | 0.909 | 0.658 |
| $\alpha=\pi$    | 0.987 | 0.873 | 1.061 | 1.000 | 0.804 | —     |
| $\gamma=0.4$    |       |       |       |       |       |       |
| $\alpha=\pi/4$  | 1.137 | 1.096 | 1.171 | 1.141 | 1.094 | 1.063 |
| $\alpha=\pi/2$  | 1.047 | 1.021 | 1.111 | 1.095 | 0.944 | 0.904 |
| $\alpha=3\pi/4$ | 0.986 | 0.932 | 1.076 | 1.048 | 0.815 | 0.502 |
| $\alpha=\pi$    | 0.958 | 0.841 | 1.061 | 1.000 | 0.684 | —     |

Таблица 3.3 — Значения величины  $T_0$  при  $\alpha=\pi/2$ ,  $c=1$ ,  $\lambda=4$  и разных  $\nu$

| $\nu$     | 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Задача C1 | 1.043 | 1.052 | 1.064 | 1.082 | 1.111 | 1.165 |
| Задача C2 | 1.032 | 1.037 | 1.044 | 1.053 | 1.066 | 1.085 |
| Задача C5 | 0.949 | 0.968 | 0.995 | 1.033 | 1.092 | 1.195 |
| Задача C6 | 0.933 | 0.949 | 0.968 | 0.995 | 1.032 | 1.090 |

### 3.1.4. Выводы

Показана связь интегральных уравнений пространственных и плоских задач о включениях в упругом клине. В пространственном случае важно привести ядра интегральных уравнений к симметричной форме по радиальной координате. Закрепление наружной поверхности трехмерного упругого клина жесткой или скользящей заделкой дает возможность выписать корректные интегральные уравнения задач о периодических цепочках жестких включений, контактирующих с упругим материалом в

серединной полуплоскости клина. Структура ядер интегральных уравнений пространственных линейно-периодических задач о системах включений в клине аналогична структуре ядра интегрального уравнения контактной задачи о вдавливании периодической системы штампов в грань клина, другая грань которого жестко заделана [133].

Изученные выше периодические задачи о включениях в клине эквивалентны соответствующим непериодическим задачам для усеченного клина плоскостями  $z=\pm l$  перпендикулярными ребру, когда имеется единичное включение, а при  $z=\pm l$  поставлены условия скользящей заделки.

### 3.2. Плоские задачи

Плоские задачи о включениях являются предельными случаями периодических задач из п. 3.1 и, как показывает анализ литературы, не были изучены ранее. В двумерной постановке решаются задачи теории упругости об абсолютно тонком жестком конечном включении в середине клина. Между упругим материалом клина и включением предполагается полное сцепление. Наружные грани клина подчиняются условиям жесткой или скользящей заделки. Задачи симметричны по угловой координате. На включение действует тангенциальная сила, смещающая его на известную величину в направлении биссектрисы клина. Интегральное преобразование Меллина позволяет свести смешанные граничные задачи о включении к интегральным уравнениям, из которых требуется найти тангенциальные контактные напряжения. В предельном случае интегральное уравнение дает известное для включения в полосе. Выделяется безразмерный параметр, описывающий положение включения относительно угловой точки. Для решения интегрального уравнения берутся три метода. Сперва находится решение в замкнутой форме, базирующееся на специальной аппроксимации символа ядра. Во вторых строится регулярное асимптотическое разложение по степеням малого параметра, работающее для относительно далеких от угла зон контакта. Третий подход посвящен построению сингулярного асимптотического решения, предполагающего решение интегральных уравнений Винера–Хопфа, суперпозицию пограничных слоев по краям вырожденного решения. Данный подход хорошо зарекомендовал себя для зон контакта, которые подходят достаточно близко к вершине клина. На основе трех вариантов решений проведен анализ механических характеристик при варьировании краевых условий, угла тела, пуассоновского коэффициента и безразмерного геометрического параметра.

### 3.2.1. Специальная аппроксимация символа ядра

Плоский упругий клин опишем неравенствами  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$  ( $r$ ,  $\varphi$  — полярные координаты). При  $\varphi=0$  в области  $r \in [a, b]$  клина имеется тонкое жесткое включение, которое полностью с упругим материалом в зоне контакта. На включение действует тангенциальная сила  $2T$ , направление которой совпадает с полuosью  $r$  (рис. 3.3). При воздействии силы включение смещается на величину  $\delta$ . Наружные грани упругого тела находятся в условиях жесткой или скользящей заделки (соответственно задачи С7 и С8). Упругий материал характеризуется параметрами: модулем сдвига  $G$  и пуассоновским коэффициентом  $\nu$ .

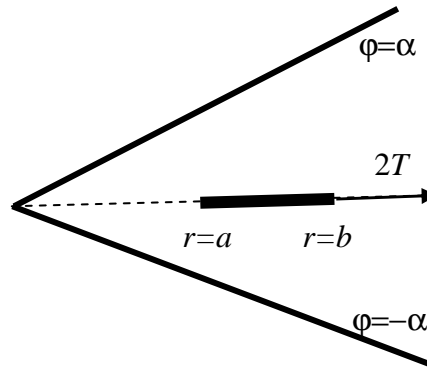


Рис. 3.3 — Включение в плоском клине

Предполагая симметрию по  $\varphi$ , сфокусируемся на отрезке  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ , на границе которого выпишем следующие смешанные условия:

$$\varphi = 0: u_\varphi = 0; u_r = \delta \quad (a \leq r \leq b); \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad (0 < r < a, b < r < \infty);$$

$$\varphi = \alpha: \text{С7) } u_r = u_\varphi = 0; \quad \text{С8) } u_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0.$$

Метод интегрального преобразования Меллина позволяет вывести следующее интегральное уравнение для тангенциального напряжения  $\tau_{r\varphi} = -\tau(r)$ ,  $a \leq r \leq b$ ,  $\varphi=0$  ( $\theta = G4(1-\nu)\kappa^{-1}$ ,  $\kappa = 3-4\nu$ ):

$$\int_a^b \tau(\rho) k\left(\ln \frac{\rho}{r}\right) d\rho = \pi\theta\delta \quad (a \leq r \leq b), \quad k(s) = \int_0^\infty \frac{L(y)}{y} \cos(ys) dy,$$

$$C7) L(y) = \frac{\kappa^2 (\operatorname{ch}(2\alpha y) - 1) - 2y^2 \sin^2 \alpha}{\kappa^2 \operatorname{sh}(2\alpha y) - \kappa \sin(2\alpha)}, \quad (3.18)$$

$$C8) L(y) = \frac{\kappa \operatorname{sh}(2\alpha y) - y \sin(2\alpha)}{\kappa \operatorname{ch}(2\alpha y) - \kappa \cos(2\alpha)}.$$

После нахождения контактного напряжения можно найти соотношение между силой  $T$  и смещением  $\delta$  на основе условия равновесия включения

$$\int_a^b \tau(\rho) d\rho = T.$$

Другой способ вывода уравнений (3.18) основан на специальном предельном переходе из уравнений пространственных задач, рассмотренных в п. 3.1. Устремляя  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha y = t$ , получим совпадение символа ядра  $L(y)$  (3.18) в задаче C8 с известным символом в аналогичной задаче о включении в упругой полосе ([6], формула (3.11)).

При решении уравнения (3.18) необходимо учитывать следующую асимптотику символов ядра:

$$L(y) = Ay + O(y^3) \quad (y \rightarrow 0), \quad L(y) = 1 + O(y^n \exp(-2\alpha y)) \quad (y \rightarrow \infty),$$

$$C7) A = \frac{2\kappa^2 \alpha^2 - 2 \sin^2 \alpha}{2\kappa^2 \alpha - \kappa \sin(2\alpha)}, \quad n = 2, \quad (3.19)$$

$$C8) A = \frac{2\kappa \alpha - \sin(2\alpha)}{\kappa(1 - \cos(2\alpha))}, \quad n = 1, \quad \alpha \neq \pi.$$

При  $\alpha = 180^\circ$ ,  $L(y) = \operatorname{cth}(\pi y)$ , случай C8 соответствует случаю включения во всей плоскости. Тогда интегральное уравнение (3.18) преобразуется к уравнению контактной задачи о внедрении жесткого индентора в упругую полуплоскость, у которого имеется точное решение ([5], формула (6.96)).

Далее используем безразмерные величины

$$x + 1 = \lambda \ln(r/a), \quad \xi + 1 = \lambda \ln(\rho/a), \quad \lambda = 2[\ln(b/a)]^{-1}, \quad \delta_0 = \lambda \delta a^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\varphi(\xi) = \rho \tau(\rho) (a\theta)^{-1}, \quad T_0 = T (a\theta)^{-1}.$$

Расположение включения относительно угловой точки характеризуется параметром  $\lambda$ . В обозначениях (3.20) уравнение (3.18) перепишем так:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi\delta_0 \quad (|x| \leq 1). \quad (3.21)$$

Приближенное решение уравнения (3.21) получим, учитывая поведение (3.19), при использовании аппроксимации [5]

$$L(y) \approx \text{th}(Ay) \quad (-\infty < y < \infty). \quad (3.22)$$

Беря интеграл [32]

$$\int_0^\infty \frac{\text{th}(Ay)}{y} \cos(ys) dy = -\ln \left| \text{th} \frac{\pi s}{4A} \right|$$

в ядре уравнения (3.21), вводя новые переменные [2], приходим к интегральному уравнению Штаермана о внедрении двух одинаковых инденторов в полуплоскость, которое имеет точное решение [86]. Окончательно найдем

$$\varphi(x) = \frac{\pi\delta_0 \exp(\pi(2A\lambda)^{-1})}{2A\lambda K(\exp(-\pi(A\lambda)^{-1})) \sqrt{2[\text{ch}(\pi(A\lambda)^{-1}) - \text{ch}(\pi x(A\lambda)^{-1})]}}, \quad (3.23)$$

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{\delta_0 K(\sqrt{1 - \exp(-2\pi(A\lambda)^{-1})})}{\lambda K(\exp(-\pi(A\lambda)^{-1}))},$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл. Относительная погрешность решения (3.23) не превышает относительной погрешности  $\varepsilon$  аппроксимации (3.22) [5]. Решение (3.23) будет точным в задаче С7 при  $\alpha=180^\circ$ ,  $L(y)=\text{th}(\pi y)$  (включение во всей плоскости с жесткой заделкой по лучу), а также в задаче С8 при  $\alpha=90^\circ$ ,  $L(y)=\text{th}(\pi y/2)$  (два симметричных включения во всей плоскости). Величина погрешности  $\varepsilon$  существенно зависит от коэффициента Пуассона (рис. 3.4).

Для задачи С7 при всех углах  $\alpha \leq 180^\circ$  значения  $\varepsilon < 6\%$  при  $\nu=1/4$  и  $\varepsilon < 4\%$  при  $\nu=1/2$ . Для случая С8 при  $\alpha \rightarrow 180^\circ$  величина  $\varepsilon$  значительно увеличивается независимо от  $\nu$ . Делаем вывод: аппроксимация (3.22) дает приемлемую погрешность не для всех  $\alpha$  и  $\nu$ , значит, требуются другие подходы.

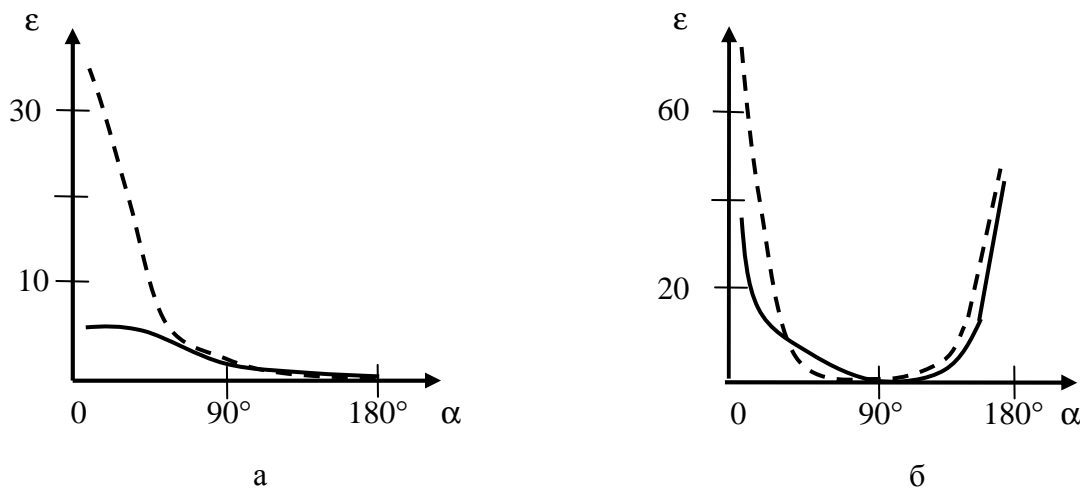


Рис. 3.4 — Погрешность  $\varepsilon(\%)$  в зависимости от  $\alpha(^{\circ})$ , задачи C7 (а) и C8 (б), сплошные кривые для  $\nu=0.25$  и пунктирные для  $\nu=0.45$

### 3.2.2. Регулярные асимптотики

Пусть включение расположено относительно далеко от угла клина ( $\lambda$  достаточно велико). Будем искать решение в форме ряда по степеням малого параметра  $\lambda^{-1}$ , используя лемму [4,5,29]:

*Лемма.* При  $0 \leq s < \infty$  из ядра  $k(s)$  (3.18) можно выделить главную часть

$$k(s) = -\ln s + F(s), \quad F(s) = \int_0^{\infty} \frac{[L(y) - 1] \cos(ys) + \exp(-y)}{y} dy, \quad (3.24)$$

а гладкая функция  $F(s)$  при  $|s| < 2\alpha$  разложима в абсолютно сходящийся ряд

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^{2n},$$

$$b_0 = \int_0^{\infty} \frac{L(y) - 1 + \exp(-y)}{y} dy, \quad (3.25)$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} [L(y) - 1] y^{2n-1} dy \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для доказательства леммы следует разложить  $\cos(ys)$  в ядре (3.18) в ряд Тейлора, принять во внимание значение интеграла ([38], формула 3.951.8)

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-y) - \cos(ys)}{y} dy = \ln s$$

и принять во внимание формулы (3.19). На основании леммы можно заключить: асимптотический метод «больших  $\lambda$ » можно применять при  $\lambda > 1/\alpha$ . Коэффициенты  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  занесены в табл. 3.4.

Таблица 3.4 — Коэффициенты (3.25) в зависимости от  $\alpha$  и  $\nu$

| $\alpha$           | 45°           | 90°  | 135° | 45°           | 90°  | 135°   |
|--------------------|---------------|------|------|---------------|------|--------|
| Задача             | C7, $\nu=0.3$ |      |      | C8, $\nu=0.3$ |      |        |
| $b_0 \times 10^3$  | 73.4          | 539  | 958  | 138           | 693  | 1977   |
| $b_1 \times 10^3$  | 405           | 122  | 49.1 | 361           | 83.3 | -1.03  |
| $-b_2 \times 10^3$ | 175           | 11.3 | 1.68 | 121           | 4.86 | -0.416 |
| Задача             | C7, $\nu=0.4$ |      |      | C8, $\nu=0.4$ |      |        |
| $b_0 \times 10^3$  | -55.9         | 438  | 910  | -21.1         | 693  | 2030   |
| $b_1 \times 10^3$  | 556           | 147  | 53.8 | 440           | 83.3 | -3.97  |
| $-b_2 \times 10^3$ | 283           | 15.5 | 1.99 | 154           | 4.86 | 0.552  |

Если искать решение уравнения (3.21), (3.24) в форме ряда по степеням  $1/\lambda$ , приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $1/\lambda$ , будем иметь цепь интегральных уравнений с логарифмическими ядрами, имеющих точное решение. Ограничиваясь асимптотической точностью  $O(1/\lambda^6)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , выведем к регулярную асимптотику

$$\varphi(x) = \frac{T_0 \lambda}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[ 1 + \frac{b_1}{\lambda^2} (1-2x^2) + \frac{b_2 (7-8x^2-8x^4)}{2\lambda^4} + O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right) \right], \quad (3.26)$$

$$T_0 = \frac{\pi \delta_0}{\lambda} \left[ \ln(2\lambda) + b_0 + \frac{b_1}{\lambda^2} - \frac{b_1^2 - 9b_2}{4\lambda^4} + O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right) \right].$$

На основании расчетов можно сделать вывод, что погрешность асимптотики (3.26) при  $\lambda \geq 2/\alpha$  не более 5% (аналогичный вывод был сделан ранее для задачи о внедрении индентора в грань клина [5]). В табл. 3.5 решение (3.26) для интегральной характеристики

$$T_1 = \lambda T_0 / \delta_0 \quad (3.27)$$

сопоставляется с точным решением (3.23) для случая С8 при  $\alpha=90^\circ$  и произвольном  $\nu$ . Для этого угла  $\alpha$  решение (3.23) задачи С8 точное, а погрешность асимптотики при  $\lambda \geq 4/\pi$  не превышает 1%.

Таблица 3.5 — Характеристика (3.27), задача С8,  $\alpha=90^\circ$

| $\lambda$             | 0.6  | 1.2  | 1.8  | 2.4  | 3.0  |
|-----------------------|------|------|------|------|------|
| Решение (3.26)        | 3.11 | 1.94 | 1.57 | 1.38 | 1.26 |
| Точная формула (3.23) | 3.00 | 1.94 | 1.57 | 1.38 | 1.26 |

### 3.2.3. Сингулярные асимптотики

Пусть теперь включение расположено относительно близко к угла клина ( $\lambda$  достаточно мало). Построим сингулярные асимптотики по методу «малых  $\lambda$ » [4,5,29]. Устремляя в (3.21)  $\lambda \rightarrow 0$  и интегрируя по всей действительной оси, найдем так называемое вырожденное решение

$$\varphi(x) = \delta_0 (A\lambda)^{-1}, \quad (3.28)$$

описывающее поведение искомого напряжения на удалении от концов контактного отрезка  $x = \pm 1$ . Асимптотику для малых  $\lambda$  можно также строить путем суперпозиции пограничных слоев, имеющих корневые особенности в точках  $x = \pm 1$ . Они находятся из уравнений Винера–Хопфа [57]. Для удобства при решениях уравнений Винера–Хопфа привлекается легко факторизуемая аппроксимация символа на вещественной оси

$$L(t) \approx \frac{t\sqrt{t^2 + D^2}(t^2 + E^2)}{(t^2 + C^2)(t^2 + F^2)}, \quad \frac{DE^2}{C^2F^2} = A. \quad (3.29)$$

Проделав это, запишем асимптотику при малых  $\lambda$  в форме

$$\varphi(x) = \frac{\delta_0}{2\lambda} \left[ \zeta\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \zeta\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \right],$$

$$\zeta(t) = \frac{\exp(-Dt)}{\sqrt{\pi A t}} + \frac{\operatorname{erf} \sqrt{Dt}}{A} + \frac{S \exp(-Et)}{\sqrt{A(D-E)}} \operatorname{erf} \sqrt{(D-E)t}, \quad (3.30)$$

$$S = -(C-E)(F-E)/E,$$

где  $\text{erf}(x)$  — интеграл вероятности.

Используя (3.30), получим интегральную характеристику

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^1 \varphi(x) dx = \frac{\delta_0}{\lambda} \left[ \left( \frac{S+E}{E\sqrt{AD}} + \frac{2}{A\lambda} - \frac{1}{2AD} \right) \text{erf} \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} + \frac{\sqrt{2} \exp(-2D\lambda^{-1})}{A\sqrt{\pi\lambda D}} - \frac{S \exp(-2E\lambda^{-1})}{E\sqrt{A(D-E)}} \text{erf} \sqrt{\frac{2(D-E)}{\lambda}} \right]. \quad (3.31)$$

Главный член характеристики (3.31) при  $\lambda \rightarrow 0$  будет

$$T_0 \approx 2\delta_0 (A\lambda^2)^{-1},$$

он же получается из вырожденного решения (3.28).

В табл. 3.6 табулированы константы  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и относительная погрешность аппроксимации (3.29) ( $F$  можно вычислить по второй формуле (3.29)).

Таблица 3.6 — Константы аппроксимации (3.29), ее погрешность  $\varepsilon_0$  (%)

| $\alpha$        | 45°           | 90°   | 135°  | 45°           | 90°  | 135°  |
|-----------------|---------------|-------|-------|---------------|------|-------|
| Задача          | C7, $\nu=0.3$ |       |       | C8, $\nu=0.3$ |      |       |
| $C$             | 3.39          | 0.990 | 0.760 | 0.920         | 1.00 | 0.330 |
| $D$             | 4.24          | 1.60  | 1.34  | 3.16          | 3.30 | 0.726 |
| $E$             | 2.20          | 1.10  | 1.60  | 1.20          | 2.00 | 0.800 |
| $\varepsilon_0$ | 0.2           | 0.2   | 0.2   | 0.4           | 0.1  | 0.5   |
| Задача          | C7, $\nu=0.4$ |       |       | C8, $\nu=0.4$ |      |       |
| $C$             | 1.24          | 0.690 | 0.800 | 0.850         | 1.00 | 3.30  |
| $D$             | 4.63          | 1.74  | 1.80  | 3.27          | 3.30 | 0.730 |
| $E$             | 1.80          | 0.700 | 1.50  | 1.00          | 2.00 | 0.900 |
| $\varepsilon_0$ | 0.5           | 0.5   | 0.3   | 0.6           | 0.1  | 0.5   |

В табл. 3.7 табулированы значения характеристики  $10T_1$  (3.27), вычисленные тремя методами.

Таблица 3.7 — Значения  $10T_1$  (3.27), задача C7, при  $\alpha=45^\circ$ ,  $\nu=1/2$

| $\lambda$      | 1/2   | 1    | 2    | 3    |
|----------------|-------|------|------|------|
| Формула (3.23) | 106.5 | 57.7 | 33.2 | 25.1 |
| Формула (3.26) | —     | —    | 34.0 | 24.8 |
| Формула (3.31) | 101.9 | 53.0 | —    | —    |

Зависимость характеристики (3.27) от  $\alpha$  проиллюстрирована на рис. 3.5. Наименьшее отличие между случаями жесткой и скользящей заделкой граней

клина отмечается вблизи угла  $2\alpha=135^\circ$ . Расхождение решений задач С7 и С8 увеличивается при  $\alpha \rightarrow 0$ , а также при  $\alpha \rightarrow \pi$  (при  $\alpha=180^\circ$  в задаче С8 тип символа ядра изменяется на котангенс гиперболический).

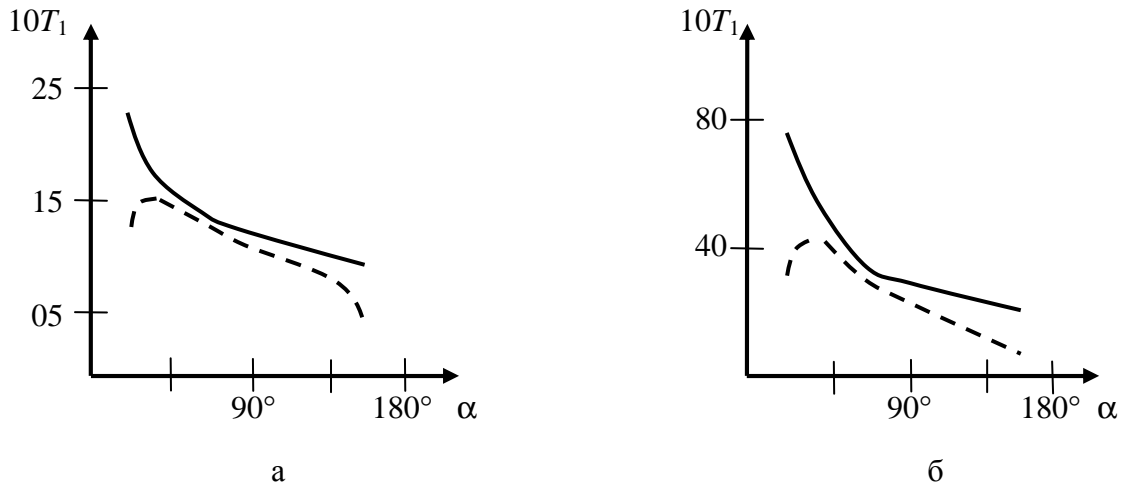


Рис. 3.5 — Зависимости  $10T_1(\alpha)$ ,  $\nu=1/4$ ,  $\lambda=3$  (а) и  $\lambda=0.5$  (б), сплошные кривые для задачи С7, пунктирные для задачи С8

На рис. 3.6 начерчены зависимости величины

$$T_2 = T_1 4(1-\nu)\kappa^{-1} = \lambda T (a\delta_0 G)^{-1} \quad (3.32)$$

от коэффициента Пуассона  $\nu$  (в (3.32)  $T$  — размерная сила). Наименьшее отличие между случаями жесткой и скользящей заделкой грани отмечается вблизи значения  $\nu=0.4$ .

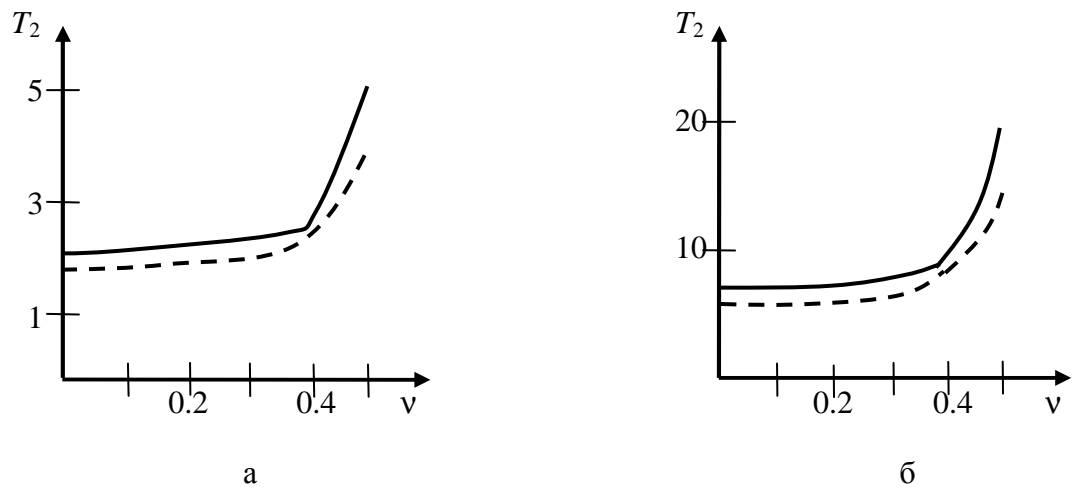


Рис. 3.6 — Зависимости  $T_2(\nu)$ ,  $\alpha=\pi/4$ ,  $\lambda=3$  (а) и  $\lambda=0.5$  (б), сплошные кривые для задачи С7, пунктирные для задачи С8

### 3.2.4. Выводы

В рассмотренных задачах применимость метода специальной аппроксимации символа ядра зависит от  $\alpha$  и  $\nu$ , а область эффективности двух асимптотических методов определяется значениями  $\lambda$  и  $\alpha$ . Когда включение приближается к углу клина ( $\lambda$  уменьшается), контактные напряжения и сдвигающая сила увеличиваются (смещение считается заданным). Для случая жестко зафиксированных граней тела (С7) напряжения в контакте и сила больше, чем для варианта скользящей заделки (С8). Для некоторых углов и коэффициентов Пуассона расхождение интегральных характеристик решений задач С7 может иметь минимум. Для несжимаемого упругого материала ( $\nu=1/2$ ) сдвинуть включение труднее, чем для сжимаемого материала. С уменьшением угла клина интегральная характеристика увеличивается в случае С7, а в случае С8 имеет максимум при некотором остром угле  $\alpha$ .

## Заключение

В диссертационной работе решены новые периодические задачи со смешанными граничными условиями для уравнения Лапласа и уравнений Ламе теории упругости в области трехмерного клина двухгранного угла. В силу периодичности полученные решения применимы для клина с ребром конечной длины (на плоскостях усечения ребра ставятся условия Неймана для уравнения Лапласа; условия скользящей заделки для контактных задач). Для задач выведены интегральные уравнения, в которых ядра расщеплены на «плоские» и «пространственные» компоненты. В предельных и частных случаях эти ядра совпадают с известными для соответствующих плоских и пространственных задач с единичной областью смены граничных условий.

Обнаружена возможность расходимости «плоской» части ядра, наступление которой зависит от поведения функции-символа. Предложена регуляризация ядра, основанная на модификации постановки задачи при помощи добавления периодической системы дискретных воздействий определенной интенсивности.

Получено численное решение трехмерной периодической контактной задачи теории упругости с кулоновским трением в неизвестной области контакта для клина, одна грань которого жестко зафиксирована.

На основе регуляризации построены численные решения пространственных периодических контактных задач теории упругости без трения с неизвестной областью контакта для клина, когда на одной грани клина отсутствуют напряжения или она лежит без трения на недеформируемом основании.

Установлено, что в плоских контактных задачах для упругого клина учет переменности коэффициента Пуассона по угловой координате может изменять свойства ядра интегрального уравнения. Модифицировано регулярное асимптотическое решение по сравнению со случаем однородного материала.

В периодических задачах о системах жестких включений, а также о паре включений в пространственном упругом клине получены регулярные асимптотические решения в предположении связи между двумя безразмерными геометрическими параметрами (относительным расстоянием между включениями и их относительной удаленности от ребра клина).

Показано, что интегральные уравнения плоских задач о жестких включениях в упругом клине являются предельными случаями уравнений соответствующих периодических задач. Для плоских задач о включениях построены регулярные и сингулярные асимптотические решения, а также решение, основанное на специальной аппроксимации ядра.

Научная и теоретическая ценность результатов состоит в том, что развитый метод регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения может быть применен и в других аналогичных задачах со смешанными граничными условиями. Результаты расчетов можно использовать для контроля точности метода конечных элементов для тел с угловой линией.

Результаты могут быть востребованы в машиностроении, при проведении расчетов контактной прочности деталей, конструкций с угловыми линиями в условиях периодического контакта, для тел с периодическим текстурированным рельефом поверхности после лазерной обработки. Решения могут иметь практическое значение при расчетах упругого контакта зубьев зубчатой передачи Новикова при учете конечной длины кромки зубьев.

Развитие исследований в данной области возможно в направлении учета сил трения в периодических контактных задачах для трехмерного упругого клина при отсутствии напряжений на одной грани либо для случая, когда одна грань лежит без трения на абсолютно жестком основании.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзикович, С.М.** Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белоконь, Л.И. Кренин, И.С. Трубочник. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 240 с.
2. **Айзикович, С.М.** Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.С. Васильев, Л.И. Кренин, И.С. Трубочник. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 192 с.
3. **Александров, В.М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. В.М. Александров, С.М. Мхитарян. — М.: Наука, 1983. — 488 с.
4. **Александров, В.М.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В.М. Александров, Е.В. Коваленко. — М.: Наука, 1986. — 336 с.
5. **Александров, В.М.** Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис. — М.: Машиностроение, 1986. — 176 с.
6. **Александров, В.М.** Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. — М.: Наука, 1993. — 224 с.
7. **Александров, В.М.** Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В.М. Александров, Д.А. Пожарский. — М.: Факториал, 1998. — 288 с.
8. **Александров, В.М.** Двойкопериодические контактные задачи для упругого слоя / В.М. Александров // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, вып. 2. — С. 307–315.
9. **Александров, В.М.** Задача о включении в трехмерном упругом клине / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, вып. 4. С. 635–646.
10. **Александров, В.М.** Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров, М.И. Чебаков. — М.: Физматлит, 2004. — 301 с.
11. **Александров, В.М.** Пространственная задача о тонком включении в составном упругом клине / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2011. — Т. 75, вып. 5. — С. 843–849.
12. **Аргатов, И.И.** Асимптотические модели упругого контакта / И.И. Аргатов. — М.: Наука, 2005. — 448 с.
13. **Арутюнян, Н.Х.** Контактные задачи механики растущих тел / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров, В.Э. Наумов. — М.: Наука, 1991. — 176 с.

14. **Бабешко, В.А.** Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. — М.: Наука, 1989. — 344 с.
15. **Бабешко, В.А.** Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 5. — С. 628–637.
16. **Бабешко, В.А.** Точное решение задачи об акустике в произвольной многослойной среде при контактном взаимодействии с клиновидным штампом / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2023. — № 4. — С. 5–11.
17. **Беркович, В.Н.** О точном решении одного класса интегральных уравнений смешанных задач упругости и математической физики / В.Н. Беркович // Доклады академии наук СССР. — 1982. — Т. 267, № 2. — С. 327–330.
18. **Беркович, В.Н.** Метод граничных интегральных уравнений в смешанных задачах динамической теории упругости для клиновидных областей / В.Н. Беркович. — Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, Ростовский филиал федерального Московского государственного университета технологий и управления, 2011. — 457 с.
19. **Беркович, В.Н.** Особенности концентрации напряжений в неоднородных упругих клиновидных средах / В.Н. Беркович // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2011. — № 2. — С. 9–11.
20. **Бобылев, А.А.** Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости / А.А. Бобылев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2022. — № 2. — С. 135–153.
21. **Бобылев, А.А.** Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы / А.А. Бобылев // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 3. — С. 404–423.
22. **Бобылев, А.А.** Бобылев А.А. Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы / А.А. Бобылев // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 1. — С. 115–129.
23. **Бобылев, А.А.** Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя / А.А. Бобылев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2023. — № 2. — С. 70–89.

24. **Бобылев, А.А.** Задача одностороннего дискретного контакта для функционально-градиентной упругой полосы / А.А. Бобылев // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2024. — № 2. — С. 58–69.
25. **Ватульян, А.О.** Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя / А.О. Ватульян // Прикладная математика и механика. — 1977. — Т.41, вып.4. — С. 727–734.
26. **Ватульян, А.О.** О действии жесткого штампа на ортотропный слой / А.О. Ватульян // Известия академии наук Армянской ССР. Механика. — 1978. — Т. 31, № 4. — С. 31–42.
27. **Ватульян, А.О.** О действии жесткого штампа на анизотропное полупространство / А.О. Ватульян // В сборнике: Статические и динамические смешанные задачи теории упругости / Под редакцией И.И. Воровича. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. — С. 112–115.
28. **Ватульян, А.О.** Коэффициентные обратные задачи механики / А.О. Ватульян. — М.: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2018. — 272 с.
29. **Ворович, И.И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
30. **Ворович, И.И.** Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И.И. Ворович, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхина. — М. Наука 1999. — 246 с.
31. **Галанов, Б.А.** Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б.А. Галанов / Прикладная математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 5. — С. 827–835.
32. **Галин, Л.А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. — М.: Наука, 1980. — 303 с.
33. **Гельфанд, И.М.** Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1959. — 486 с.
34. **Горшков, А.Г.** Динамические контактные задачи с подвижными границами / А.Г., Горшков, Д.В. Тарлаковский. — М.: Наука, 1995. — 352 с.
35. **Горячева, И.Г.** Периодическая контактная задача для упругого полупространства / И.Г. Горячева // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т. 62, вып. 6. — С. 1036–1044.
36. **Горячева, И.Г.** Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. — М.: Наука, 2001. — 478 с.
37. **Горячева, И.Г.** Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений и изнашивания в контакте неидеально гладких поверхностей / И.Г. Горячева, А.Р. Мещерякова // Физическая мезомеханика. — 2022. — Т.25, №4. — С. 44–53.

38. **Градштейн, И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
39. **Грилицкий, Д.В.** Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями / Д.В. Грилицкий, Г.Т. Сулим // Прикладная математика и механика. — 1975. — Т. 39, вып. 3. — С. 520–529.
40. **Грилицкий, Д.В.** Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением / Д.В. Грилицкий, А.А. Евтушенко, Г.Т. Сулим // Прикладная математика и механика. — 1979. — Т. 43, вып. 3. — С. 542–549.
41. **Давтян, Д.Б.** Методы расчета напряженного состояния в области контакта пространственного трансверсально изотропного тела / Д.Б. Давтян. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. — Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2014. — 127 с.
42. **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 510 с.
43. **Журина, М.И.** Таблицы модифицированных функций Бесселя с мнимым индексом  $K_{it}(x)$  / М.И. Журина, Л.Н. Кармазина. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — 342 с.
44. **Золотов, Н.Б.** Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей / Н.Б. Золотов, Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 3. — С. 394–403.
45. **Калинчук, В.В.** Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел / В.В. Калинчук, Т.И. Белянкова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 240 с.
46. **Калинчук, В.В.** Динамика поверхности неоднородных сред / В.В. Калинчук, Т.И. Белянкова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 312 с.
47. **Колесников, В.И.** Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов / В.И. Колесников, О.А. Бемяк. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. — 265 с.
48. **Кондратьев, В.А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками / В.А. Кондратьев // Труды Московского математического общества. — 1967. — Т. 16. — С. 209–292.
49. **Короткин, В.И.** Зубчатые передачи Новикова. Достижения и развитие / В.И. Короткин, Н.П. Онишков, Ю.Д. Харитонов — М.: Изд-во Машиностроение-1, 2007. — 384 с.
50. **Кузнецов, Е.А.** Периодическая контактная задача для полуплоскости с учетом сил трения / Е.А. Кузнецов // Прикладная механика. — 1976. — Т. 12, № 10. — С. 37–44.
51. **Кузнецов, Е.А.** Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа / Е.А. Кузнецов // Известия академии наук СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 1. — С. 84–93.

52. **Лебедев, Н.Н.** Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 380 с.
53. **Лурье, А.И.** Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 491 с.
54. **Лурье, А.И.** Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
55. **Ляпин, А.А.** Динамическая контактная задача для двухслойного полупространства со сферической полостью / А.А. Ляпин, А.Н. Румянцев, М.Г. Селезнев // Прикладная механика и техническая физика. — 1991. — Т. 32, № 3. — С. 125–129.
56. **Маховская, Ю.Ю.** Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии / Ю.Ю. Маховская // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2003. — № 2. — С. 49–60.
57. **Нобл, Б.** Метод Винера–Хопфа / Б. Нобл. — М., Л.: Изд-во иностранной литературы, 1962. — 276 с.
58. **Пожарский, Д.А.** Пространственная контактная задача с трением для упругого клина / Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2008. — Т. 72, вып. 5. — С. 852–860.
59. **Пожарский, Д.А.** Периодическая контактная задача для упругого клина / Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2015. — Т. 79, вып. 6. — С. 864–872.
60. **Пожарский, Д.А.** Упругое равновесие неоднородного клина с переменным коэффициентом Пуассона / Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2016. — Т. 80, вып. 5. — С. 614–621.
61. **Пожарский, Д.А.** К одной задаче Я.С. Уфлянда / Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 4. — С. 643–652.
62. **Пожарский, Д.А.** Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения / Д.А. Пожарский. — Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2019. — 312 с. — <https://www.rfbr.ru/library/books/2830>.
63. **Пожарский, Д.А.** Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) / Д.А. Пожарский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2021. — № 2. — С. 22–33.
64. **Пожарский, Д.А.** Периодические контактные задачи для трансверсально-изотропного слоя / Д.А. Пожарский, Н.Б. Золотов // Прикладная механика и техническая физика. — 2022. — Т. 63, № 6. — С. 182–190.
65. **Попов, В.Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений / В.Л. Попов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с.

66. **Попов, Г.Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
67. **Попова, Т.С.** Задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в упругом теле / Т.С. Попова // Математические заметки Северо-восточного федерального университета. — 2023. — Т. 30, № 2. — С. 40–55.
68. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1981. — 798 с.
69. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
70. Развитие теории контактных задач в СССР / Под редакцией Л.А. Галина. — М.: Наука, 1976. — 493 с.
71. **Самарский, А.А.** Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
72. Сборник научных программ на ФОРТРАНе. Вып. 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. — М.: Статистика, 1974. — 224 с.
73. **Солдатенков, И.А.** Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления / И.А. Солдатенков // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, вып. 2. — С. 337–351.
74. **Солдатенков, И.А.** Пространственная контактная задача для упругого слоя и волнистого штампа при наличии трения и износа / И.А. Солдатенков // Прикладная математика и механика. — 2014. — Т. 78, вып. 1. — С. 145–155.
75. Справочник по специальным функциям / Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
76. **Сумбатьян, М.А.** Плоская контактная задача для упругого слоя при высоких частотах колебания / М.А. Сумбатьян // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54, вып. 2. — С. 307–311.
77. **Сушинов, А.И.** Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика / А.И. Сушинов, А.Е. Чистяков, Ю.В. Белова, И.Ю. Кузнецова // Математическое моделирование. — 2024. — Т.36, № 3. — С. 95–114.
78. **Сушинов, А.И.** Использование параллельных вычислений при оценке процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах / А.И. Сушинов, А.Е. Чистяков, В.В. Сидорякина, И.Ю. Кузнецова, А.М. Атаян // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2024. — № 2. — С. 298–315.

79. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
80. **Тихонов, А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 799 с.
81. **Улитко, А.Ф.** Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улитко. — Киев: Наукова думка, 1979. — 263 с.
82. **Уфлянд, Я.С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 367 с.
83. **Хан, Х.Г.** Теория упругости / Х.Г. Хан. — М.: Мир, 1988. — 343 с.
84. **Цуканов, И.Ю.** К вопросу о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости / И.Ю. Цуканов // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 5. — С. 685–694.
85. **Цуканов, И.Ю.** Контактные задачи для упругих тел с регулярным рельефом поверхностей / И.Ю. Цуканов. — Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 2024. — 190 с.
86. **Штаерман, И.Я.** Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. — 270 с.
87. **Яковенко, А.А.** Моделирование дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел / А.А. Яковенко. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — М.: Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 2022. — 127 с.
88. **Alexandrov, V.M.** Three-dimensional contact problems / V.M. Alexandrov, D.A. Pozharskii. — Dordrecht: Kluwer, 2001. — 406 p.
89. **Antipov, Y.A.** Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion / Y.A. Antipov // International Journal of Solids and Structures. — 2000. — Vol. 37, No. 15. — P. 2093–2125.
90. **Argatov, I.** Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives / I. Argatov, Q. Li, V.L. Popov // Archive of Applied Mechanics. — 2019. — V. 89. — P. 1447–1472.
91. **Argatov, I.I.** A macro model for electroadhesive contact of a soft finger with a touchscreen / I.I. Argatov, F.M. Borodich // IEEE Transactions on Haptics. — 2020. — Vol. 13, No. 3. — P. 504–510.

92. **Argatov, I.I.** Collective indentation as a novel strategy for mechanical palpation tomography / I.I. Argatov, X.Q. Jin, L.M. Keer // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 2020. — Vol. 143. — P. 104063.
93. **Argatov, I.I.** Comparison of general solutions to the non-axisymmetric frictionless contact problem with a circular area of contact: when the symmetry does not matter / I.I. Argatov // *Symmetry*. — 2022. — Vol. 14. — P. 1083.
94. **Barber, J.R.** Contact mechanics / J.R. Barber. — Berlin: Springer, 2018. — 585 p.
95. **Block, J.M.** Periodic contact problems in plane elasticity / J.M. Block, L.M. Keer // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. — 2008. — Vol. 3. — P. 1207–1237.
96. **Borodachev, A.N.** Elastic equilibrium in a layer inhomogeneous with depth / A.N. Borodachev // *International Applied Mechanics*. — 1988. — Vol. 24, No. 8. — P. 753–758.
97. **Brenner, S.C.** The mathematical theory of finite element methods / S.C. Brenner, L.R. Scott. — New York: Springer, 2002. — 361 p.
98. **Chebakov, M.I.** Contact interaction of a stamp and a poroelastic strip lying on a Winkler base / M.I. Chebakov, E.M. Kolosova // *Mechanics of Composed Materials*. — 2024. — Vol. 59, No. 6. — P. 1169–1180.
99. **Fabrikant, V.I.** Contact and crack problems in linear elasticity / V.I. Fabrikant. — Sharjah: Bentham, 2010. — 1030 p.
100. **Gladwell, G.M.L.** Contact problems in the classical theory of elasticity / G.M.L. Gladwell. — Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. — 736 p.
101. **Goryacheva, I.G.** Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters / I.G. Goryacheva, E.V. Torskaya // *Wear*. — 2010. — Vol. 268, No. 11-12. — P. 1417–1422.
102. **Goryacheva, I.G.** Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies / I.G. Goryacheva, Y. Makhovskaya // *Friction*. — 2017. — Vol. 5, No. 3. — P. 339–350.
103. **Goryacheva, I.G.** Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account / I.G. Goryacheva, I.Y. Tsukanov // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2018. — Vol. 991, No. 1. — P. 012028.
104. **Goryacheva, I.G.** Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies / I.G. Goryacheva, I.Yu. Tsukanov // *Mechanics of Solids*. — 2020. — Vol. 55, No. 8. — P. 1441–1462.
105. **Goryacheva, I.** The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space / I. Goryacheva, A. Yakovenko // *Tribology International*. — 2021. — Vol. 161. — P. 107078.

106. **Goryacheva, I.** Discrete contact mechanics with applications in tribology / I. Goryacheva, Y. Makhovskaya. — Amsterdam: Elsevier, 2022. — 220 p.
107. **Goryacheva, I.G.** Dynamics of deformable contacting bodies with sliding, rolling and spinning / I.G. Goryacheva, A.A. Zobova // International Journal of Mechanical Sciences. — 2022. — Vol. 216. — P. 106981.
108. **Gurtin, M.E.** The linear theory of elasticity / M.E. Gurtin. — Handbuch der Physik. — Vol. VIa/2. — Berlin: Springer, 1972. — P. 1–295.
109. **He, X.** Simulation of adhesive contact of soft microfibrils / X. He , Q. Li , V.L. Popov // Lubricants. — 2020. — Vol. 8, No. 10. — P. 94.
110. **He, X.** Strength of adhesive contact between a rough fibrillar structure and an elastic body: influence of fibrillar stiffness / X. He , Q. Li , V.L. Popov // Journal of Adhesion. — 2021. — Vol. 98. Published online June 2021. — P. 1–14. — DOI: 10.1080/00218464.2021.1939017
111. **Johnson, K.L.** The contact of elastic regular wavy surfaces / K.L. Johnson, J.A. Greenwood, J.G. Higginson // International Journal of Mechanical Sciences. — 1985. — Vol. 27, No. 6. — P. 383–396.
112. **Kalker, J.J.** Three-dimensional elastic bodies in rolling contact / J.J. Kalker. — Dordrecht: Kluwer, 1990. — 314 p.
113. **Keer, L.M.** Hetenyi's elastic quarter space problem revisited / L.M. Keer, J.C. Lee, T. Mura // International Journal of Solids and Structures. — 1983. — Vol. 19, No. 6. — P. 497–506.
114. **Keer, L.M.** A contact problem for the elastic quarter space Hetenyi's elastic quarter space problem revisited / L.M. Keer, J.C. Lee, T. Mura // International Journal of Solids and Structures. — 1984. — Vol. 20, No. 5. — P. 513–524.
115. **Khludnev, A.M.** On thin inclusions in elastic bodies with defects / A.M. Khludnev // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. — 2019. — Vol. 70, No. 2. — P. 45.
116. **Khludnev, A.M.** Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions / A.M. Khludnev, I.V. Fankina // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2023. — Vol. 46, No. 13. — P. 14214–14228.
117. **Khludnev, A.M.** Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case / A.M. Khludnev, A.A. Rodionov // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2023. — Vol. 28, No. 10. — P. 2141–2154.
118. **Lyubicheva, A.N.** The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies / A.N. Lyubicheva, I.Y. Tsukanov // European Journal of Mechanics, A/Solids. — 2022. — Vol. 91. — P. 104405.
119. **Mindlin, R.D.** Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R.D. Mindlin // Physics. — 1936. — Vol. 7, No. 5. — P. 195–202.

120. **Popov, V.L.** Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction / V.L. Popov, M. Heß. — Berlin: Springer, 2015. — 265 p.
121. **Popov, V.L.** An approximate solution for the contact problem of profiles slightly deviating from axial symmetry / V.L. Popov // *Symmetry*. — 2022. — Vol. 14, No. 2. — P. 390.
122. **Sadowsky, M.** Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie / M. Sadowsky // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 1928. — Vol. 8, No. 2. — P. 107–121.
123. **Sukhinov, A.I.** Parallel numerical implementation of mathematical wave hydrodynamics models taking into account the features of the vertical turbulent exchange using remote sensing data / A.I. Sukhinov, E.A. Protsenko, S.V. Protsenko, N.D. Panasenko // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2024. — Vol 16, No. 2. — P. 267–279.
124. **Tsukanov, I.Y.** An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces / I.Y. Tsukanov // *Tribology Letters*. — 2019. — V. 67, No. 4. — P. 107.
125. **Westergaard, H.M.** Bearing pressures and cracks / H.M. Westergaard // *Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. — 1939. — Vol. 6. — P. 49–52.
126. **Wriggers, P.** Computational contact mechanics / P.Wriggers. — Berlin: Springer, 2006. — 518 p.
127. **Xu, Y.** Periodic contact problems in plane elasticity: the fracture mechanics approach / Y. Xu, R.L. Jackson // *Journal of Tribology. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. — 2018. — Vol. 140, No. 1. — P. 011404.
128. **Yakovenko, A.** The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space / A. Yakovenko, I. Goryacheva // *Tribology International*. — 2021. — Vol. 161. — P. 107078.
129. **Yastrebov, V.A.** Numerical methods in contact mechanics / V.A. Yastrebov. — London, Hoboken: Wiley-ISTE, 2013. — 392 p.
130. **Yastrebov, V.A.** The contact of elastic regular wavy surfaces revisited / V.A. Yastrebov, G.Anciaux, J.-F. Molinari // *Tribology Letters*. — 2014. — Vol. 56. — P. 171–183.
131. **Yastrebov, V.A.** From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area / V.A. Yastrebov, G.Anciaux, J.-F. Molinari // *International Journal of Solids and Structures*. — 2015. — Vol. 52. — P. 83–102.
132. **Пожарский, Д.А.** Контактные задачи для неоднородного упругого клина с переменным коэффициентом Пуассона / Д.А. Пожарский, **Е.Д. Пожарская** // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. — 2021. — № 1. — С. 63–71. — DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.07. K1 [RSCI].

133. **Пожарская, Е.Д.** Периодические контактные задачи для клина с учетом сил трения / Е.Д. Пожарская, Д.А. Пожарский, Б.В. Соболев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2023. — № 5. — С. 170–179. — DOI: 10.31857/S0572329923600056. K1 [RSCI]. [Переводная версия: **Pozharskaya, E.D.** Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account / E.D. Pozharskaya, D.A. Pozharskii, B.V. Sobol // Mechanics of Solids. — 2023. — Vol. 58, No. 5. — P. 1578–1586. — DOI: 10.3103/S0025654423700218].
134. **Пожарская, Е.Д.** Системы включений в пространственном упругом клине / Е.Д. Пожарская, Д.А. Пожарский, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. — 2024. — Т. 88, № 3. — С. 494–504. — DOI: 10.31857/S0032823524030119. K1 [RSCI].
135. Пожарский, Д.А. Контактные задачи о включении в плоском упругом клине / Д.А. Пожарский, **Е.Д. Пожарская**, Б.В. Соболев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2024. — № 4. — С. 35–42. — DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.04. K1 [RSCI].
136. **Пожарская, Е.Д.** Смешанные задачи теории упругости для плоского клина с переменным коэффициентом Пуассона / Е.Д. Пожарская, Д.А. Пожарский // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы докладов XVIII Международной конференции, Ростов-на-Дону, 07–10 ноября 2016 года / Южный федеральный университет. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2016. — С. 137. [РИНЦ].
137. Золотов, Н.Б. Периодические контактные задачи для слоя и клина / Н.Б. Золотов, **Е.Д. Пожарская**, Д.А. Пожарский, Б.В. Соболев // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы докладов XXI Международной конференции, Ростов-на-Дону, 11–13 октября 2023 года. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2023. — С. 52. [РИНЦ].
138. Пожарский, Д.А. Периодические контактные задачи для клина и полупространства / Д.А. Пожарский, Б.В. Соболев, **Е.Д. Пожарская**, Н.Б. Золотов // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Сборник тезисов докладов: в 4 т., Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 года / Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Том 3. — Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2023. — С. 774–775. [РИНЦ].
139. **Pozharskaya, E.D.** Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge / E.D. Pozharskaya // Тенденции развития науки и образования. 2023. — No. 96-9. — P. 177–180. — DOI: 10.18411/trnio-04-2023-501. [РИНЦ].

140. Золотов, Н.Б. Пространственные задачи множественного контакта для слоя и клина / Н.Б. Золотов, Д.А. Пожарский, **Е.Д. Пожарская** // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: Сборник тезисов докладов XVIII Всероссийской школы, пос. Дивноморское, 27–31 мая 2024 года. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2024. — С. 41. [РИНЦ].
141. Пожарский, Д.А. Пространственные задачи множественного контакта для упругих тел с геометрическими или структурными особенностями / Д.А. Пожарский, **Е.Д. Пожарская**, Н.Б. Золотов // Актуальные проблемы науки и техники. 2024: Материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции, Ростов-на-Дону, 19–21 марта 2024 года. — Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2024. — С. 764. — <https://ntb.donstu.ru/conference2024>. [РИНЦ].
142. Пожарский, Д.А. Периодические смешанные задачи для уравнения Лапласа и уравнений теории упругости в клине / Д.А. Пожарский, **Е.Д. Пожарская**, Б.В. Соболев // Интеллектуальные информационные технологии и математическое моделирование: Труды Международной научно-практической конференции ИИТ&ММ-2024, пос. Дивноморское, г. Геленджик, 24–30 августа 2024 года. — Ростов-на-Дону: Общество с ограниченной ответственностью "ДГТУ-ПРИНТ", 2024. — С. 87–89. [РИНЦ].

## Приложение. Фрагмент программы для ЭВМ

Для проведения расчетов составлены программы на языке Фортран. Основная программа метода Б.А. Галанова опубликована [41], как и подпрограмма решения систем линейных алгебраических уравнений [72]. Поэтому ниже приводится фрагмент программы расчета безразмерного ядра (2.35) интегрального уравнения пространственно-периодической контактной задачи для клина, одна грань которого свободна от напряжений, с учетом регуляризации периодической системой сил, действующих при  $r=h$ .

c Ядро интегрального уравнения для клина  $KK1(\xi, \eta, x, y)$  без члена  $1/R$

```
REAL*4 FUNCTION KK1(xi,eta,xx,yy)
```

```
REAL*4 xi,eta,xx,yy,la,delz,h,al,nu
```

c  $la=\lambda$ ,  $delz$  – параметр регуляризации особенности ядра (связан с шагами

c сетки),  $h=h$ ,  $al=\alpha$ ,  $nu=v$  (определяются в основной программе,  $\alpha \geq \pi/4$ )

```
REAL*8 x,y,r,z,Rh,Rp,Rm,Rhp,Rmp,lam,hh,alf
```

```
REAL*8 a0,pi,nu1,b,tet,A,Az,a1,a2,a3,a4,pk,rk,rk1,rk2,kk
```

```
INTEGER*2 nn,n1
```

```
REAL*8 u,t,vv,L1,L2,WW,Wp,Wm,s1,s2
```

```
REAL*8 c1(32,33),z1(32),c2(32,33),z2(32)
```

```
REAL*8 d0(32),q(32),Psi1(32,4),Psi2(32,4),Psi3(32,4),Psi4(32,4)
```

```
EXTERNAL L1,L2,WW,Wp,Wm
```

```
COMMON/q0/la,delz,h
```

```
COMMON/q2/al,nu
```

c  $d0(32)$ ,  $q(32)$  - узлы и веса квадратурной формулы Гаусса,  $n=32$  [75]

```
COMMON/q7/d0,q
```

```
nu1=DBLE(nu)
```

```
x=DBLE(xi)
```

```
y=DBLE(eta)
```

```
r=DBLE(xx)
```

```

z=DBLE(yy)
pi=3.14159265358979D0
lam=DBLE(la)
hh=DBLE(h)
alf=DBLE(al)
A=2.D0*(alf*alf-DSIN(alf)**2.D0)/(2.D0*alf+DSIN(2.D0*alf))
Az=1.D0-pi/A
nn=32
n1=nn+1
b=25.D0
tet=1.D0-2.D0*nu1
Rh=DSQRT((r+lam-hh)**2.D0+z**2.D0)
Rp=DSQRT((r-x)**2.D0+(z-y+2.D0)**2.D0+delz)
Rm=DSQRT((r-x)**2.D0+(z-y-2.D0)**2.D0+delz)
Rhp=DSQRT((r+lam-hh)**2.D0+(z+2.D0)**2.D0)
Rhm=DSQRT((r+lam-hh)**2.D0+(z-2.D0)**2.D0)
a1=-1.D0/Rh+1.D0/Rp+1.D0/Rm-1.D0/Rhp-1.D0/Rhm+
! Az/2.D0*DLOG((x+lam)/hh)
DO 5 i=2,2000
kk=DBLE(i)
Rp=DSQRT((r-x)**2.D0+(z-y+2.D0*kk)**2.D0)
Rm=DSQRT((r-x)**2.D0+(z-y-2.D0*kk)**2.D0)
Rhp=DSQRT((r+lam-hh)**2.D0+(z+2.D0*kk)**2.D0)
Rhm=DSQRT((r+lam-hh)**2.D0+(z-2.D0*kk)**2.D0)
a1=a1+1.D0/Rp+1.D0/Rm-1.D0/Rhp-1.D0/Rhm
5 CONTINUE
a2=0.0D0
rk=DLOG((x+lam)/(r+lam))
rk1=DLOG(hh/(r+lam))
DO 10 i=1,nn

```

```

u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
a2=a2+b*0.5D0*q(i)*(WW(u)-1.D0/DTANH(pi*u))*
! (DCOS(u*rk)-DCOS(u*rk1))/u
10 CONTINUE
a3=0.0D0
DO 11 j=1,4
pk=pi*DBLE(j)
DO 11 i=1,nn
u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
c Вызов функции Макдональда
CALL FMACDO(u,pk*(r+lam),rk)
CALL FMACDO(u,pk*(x+lam),rk1)
CALL FMACDO(u,pk*hh,rk2)
a3=a3+b*2.D0*q(i)/pi*(DSINH(pi*u)*WW(u)-DCOSH(pi*u))*
! rk*(rk1*DCOS(pk*(z-y))-rk2*DCOS(pk*z))
11 CONTINUE
IF (nu1.EQ.0.5D0) a4=0.0D0
IF (nu1.EQ.0.5D0) GO TO 20
DO 12 jj=1,4
pk=pi*DBLE(jj)
DO 1 i=1,nn
u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
DO 1 j=1,nn
t=(d0(j)+1.D0)*0.5D0*b
vv=0.0D0
IF (i.EQ.j) vv=1.D0
c1(i,j)=vv-tet*L1(u,t)*b*0.5D0*q(j)
1 c2(i,j)=c1(i,j)
DO 2 i=1,nn
u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b

```

```

s1=0.0D0
s2=0.0D0
DO 3 j=1,nn
t=(d0(j)+1.D0)*0.5D0*b
CALL FMACDO(t,pk*(x+lam),rk1)
CALL FMACDO(t,pk*hh,rk2)
s1=s1+b*0.5D0*q(j)*tet*L1(u,t)*DCOSH(pi*t/2.D0)*rk1
3 s2=s2+b*0.5D0*q(j)*tet*L1(u,t)*DCOSH(pi*t/2.D0)*rk2
c1(i,n1)=s1
c2(i,n1)=s2
2 CONTINUE

```

- c GAUSS – подпрограмма решения системы линейных алгебраических
- c уравнений методом Гаусса [72]. Применяется для решения
- c вспомогательных интегральных уравнений Фредгольма второго
- c рода методом коллокаций.

```

CALL GAUSS(nn,n1,c1,z1)
CALL GAUSS(nn,n1,c2,z2)
DO 4 i=1,nn
Psi1(i,jj)=z1(i)
4 Psi2(i,jj)=z2(i)
12 CONTINUE
DO 32 jj=1,4
pk=pi*DBLE(jj)
DO 21 i=1,nn
u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
DO 21 j=1,nn
t=(d0(j)+1.D0)*0.5D0*b
vv=0.0D0
IF (i.EQ.j) vv=1.D0
c1(i,j)=vv-tet*L2(u,t)*b*0.5D0*q(j)

```

```

21  c2(i,j)=c1(i,j)
      DO 22 i=1,nn
          u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
          s1=0.0D0
          s2=0.0D0
          DO 23 j=1,nn
              t=(d0(j)+1.D0)*0.5D0*b
              CALL FMACDO(t,pk*(x+lam),rk1)
              CALL FMACDO(t,pk*hh,rk2)
              s1=s1+b*0.5D0*q(j)*tet*L2(u,t)*DCOSH(pi*t/2.D0)*rk1
23  s2=s2+b*0.5D0*q(j)*tet*L2(u,t)*DCOSH(pi*t/2.D0)*rk2
          c1(i,n1)=s1
          c2(i,n1)=s2
22  CONTINUE
      CALL GAUSS(nn,n1,c1,z1)
      CALL GAUSS(nn,n1,c2,z2)
      DO 24 i=1,nn
          Psi3(i,jj)=z1(i)
24  Psi4(i,jj)=z2(i)
32  CONTINUE
      a4=0.0D0
      DO 13 j=1,4
          pk=pi*DBLE(j)
          DO 13 i=1,nn
              u=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
              CALL FMACDO(u,pk*(r+lam),rk)
              a4=a4+b*2.D0*q(i)/pi*DSINH(pi*u/2)*rk*
              ! (Wp(u)*(Psi1(i,j)*DCOS(pk*(z-y))-Psi2(i,j)*DCOS(pk*z))-
              ! Wm(u)*(Psi3(i,j)*DCOS(pk*(z-y))-Psi4(i,j)*DCOS(pk*z)))
13  CONTINUE

```

20 CONTINUE

KK1=REAL(a1+a2+a3+a4)

RETURN

END

c Символ ядра интегрального уравнения контактной задачи

REAL\*8 FUNCTION WW(u)

REAL\*4 al,nu

REAL\*8 u,alf

COMMON/q2/al,nu

alf=DBLE(al)

WW=(DSINH(2.D0\*alf\*u)+u\*DSIN(2.D0\*alf))/

! (DCOSH(2.D0\*alf\*u)-1.D0-2.D0\*u\*u\*DSIN(alf)\*\*2.D0)

RETURN

END

c Первая часть символа ядра интегрального уравнения контактной задачи

REAL\*8 FUNCTION Wp(u)

REAL\*4 al,nu

REAL\*8 u,alf

COMMON/q2/al,nu

alf=DBLE(al)

Wp=(DCOSH(alf\*u)-DCOS(alf))/(DSINH(alf\*u)+u\*DSIN(alf))

RETURN

END

c Вторая часть символа ядра интегрального уравнения контактной задачи

REAL\*8 FUNCTION Wm(u)

REAL\*4 al,nu

REAL\*8 u,alf

```

COMMON/q2/al,nu
alf=DBLE(al)
Wm=-(DCOSH(alf*u)+DCOS(alf))/(DSINH(alf*u)-u*DSIN(alf))
RETURN
END

```

- c Ядро первого вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма  
с второго рода

```

REAL*8 FUNCTION L1(u,t)
REAL*4 al
REAL*8 u,t,pi,alf,b,s,g1,Wp,si,co,y,ch,ss
REAL*8 d0(32),q(32)
EXTERNAL Wp
COMMON/q2/al
COMMON/q7/d0,q
pi=3.14159265358979D0
alf=DBLE(al)
b=20.D0
s=0.0D0
si=DSIN(alf)
co=DCOS(2.D0*alf)
DO 1 i=1,32
y=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
g1=1.D0/DTANH(0.5D0*alf*y)/(DCOSH(alf*y)-co)
ch=DCOSH(pi*y)
ss=DSINH(pi*y)/(ch+DCOSH(pi*u))/(ch+DCOSH(pi*t))
1 s=s+b*0.5D0*q(i)*g1*ss
L1=2.D0*DCOSH(pi*u/2.D0)*DSINH(pi*t/2.D0)*Wp(t)*s*si*si
RETURN
END

```

- c Ядро второго вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма  
 c второго рода

```

REAL*8 FUNCTION L2(u,t)
REAL*4 al
REAL*8 u,t,pi,alf,b,s,g1,Wm,si,co,y,ch,ss
REAL*8 d0(32),q(32)
EXTERNAL Wm
COMMON/q2/al
COMMON/q7/d0,q
pi=3.14159265358979D0
alf=DBLE(al)
b=20.D0
s=0.0D0
si=DSIN(alf)
co=DCOS(2.D0*alf)
DO 1 i=1,32
y=(d0(i)+1.D0)*0.5D0*b
g1=DTANH(0.5D0*alf*y)/(DCOSH(alf*y)+co)
ch=DCOSH(pi*y)
ss=DSINH(pi*y)/(ch+DCOSH(pi*u))/(ch+DCOSH(pi*t))
1  s=s+b*0.5D0*q(i)*g1*ss
L2=2.D0*DCOSH(pi*u/2.D0)*DSINH(pi*t/2.D0)*Wm(t)*s*si*si
RETURN
END

```

- c Вычисление функции Макдональда  $K_i(x)$  [43].

```

SUBROUTINE FMACDO(tau,x,rk)
REAL*8 tau,x,rk,pi,s,c,a,b,xx,s1,rnk,rnk,aa,p
REAL*8 s2,a1,aa1,b1,rf,sl,t,q,tt,grd,gid

```

```

REAL*8 a0(24),h(24)
EXTERNAL sl
COMMON/r/ t,q
COMMON/q5/a0,h
pi=3.14159265358979D00
t=tau
tt=t*t
q=x
ta=REAL(tau)
x1=REAL(x)
IF (x1 .GE. 40.0) GO TO 99
IF (x1 .GE. 2.5 .AND. x1 .LT. 3.5 .AND. ta .LT. 0.6) GO TO 9
IF (x1 .GE. 3.5 .AND. x1 .LT. 4.5 .AND. ta .LT. 1.5) GO TO 9
IF (x1 .GE. 4.5 .AND. x1 .LT. 5.5 .AND. ta.LT. 2.0) GO TO 9
IF (x1 .GE. 5.5 .AND. x1 .LT. 7.0 .AND. ta .LT. 3.25) GO TO 9
IF (x1 .GE. 7.0 .AND. ta .LT. 4.2) GO TO 9
IF (x1 .GE. 10.0 .AND. ta .GE. 15.0) GO TO 99
IF (x1 .GE. 15.0) GO TO 98
s=DSIN(t*DLOG(q*0.5D0))
c=DCOS(t*DLOG(q*0.5D0))
xx=x*x*0.25D0
CALL GAMMAZ(1.,ta,gr,gi,ierr)
grd=DBLE(gr)
gid=DBLE(gi)
b=(s*grd-c*gid)/(grd*grd+gid*gid)
a=(c*grd+s*gid)/(grd*grd+gid*gid)
s1=b
n=55
IF (x1 .LT. 0.06) n=10
IF (x1 .LT. 0.01) n=5

```

```

DO 11 k=1,n
p=DBLE(k)
rmk=xx/(p*p+tt)
rnk=-xx*t/(p*p+tt)/p
aa=a
a=aa*rmk-b*rnk
b=aa*rnk+b*rmk
s1=s1+b
11 CONTINUE
CALL GAMMAZ(1.,-ta,gr,gi,ierr)
grd=DBLE(gr)
gid=DBLE(gi)
b1=(-s*grd-c*gid)/(grd*grd+gid*gid)
a1=(c*grd-s*gid)/(grd*grd+gid*gid)
s2=b1
DO 12 k=1,n
p=DBLE(k)
rmk=xx/(p*p+tt)
rnk=xx*t/(p*p+tt)/p
aa1=a1
a1=aa1*rmk-b1*rnk
b1=aa1*rnk+b1*rmk
s2=s2+b1
12 CONTINUE
rk=pi/DSINH(pi*t)*(s2-s1)*0.5D0
RETURN
9 b=3.D00
CALL INTGA2(s1,b,rf)
rk=rf*DEXP(-x)
RETURN

```

```

99  rk=0.0D00
    RETURN
98  s=1.D00
    a=1.D00
    DO 97 k=1,10
    p=DBLE(k)
    a=-a*(tt+((2.D0*p-1.D0)**2.D0)*0.25D0)/p/(2.D0*x)
    s=s+a
97  CONTINUE
    rk=s*DSQRT(pi*0.5D0/x)*DEXP(-x)
    RETURN
    END

```

```

REAL*8 FUNCTION sl(y)
REAL*8 y,t,q
COMMON/r/ t,q
sl=DEXP((1.D0-DCOSH(y))*q)*DCOS(y*t)
RETURN
END

```

c Вычисление интеграла от функции  $f(x)$ ,  $0 < x < b$ .

c Квадратурная формула Гаусса,  $n=24$  [75].

```

SUBROUTINE INTGA2(f,b,if)
REAL*8 a0(24),h(24),f,b,if,r1,bb
EXTERNAL f
COMMON/q5/a0,h
r1=0.0D00
bb=b*0.5D0
DO 1 i=1,24
r1=r1+f((a0(i)+1.D00)*bb)*h(i)

```

1 CONTINUE

if=r1\*bb

RETURN

END

c Вычисление гамма-функции.

SUBROUTINE GAMMAZ(ZR,ZI,GR,GI,IERR)

COMPLEX Z,ZLOG,ALPHA,GAMLN,ZSQDNM,SUM,FACT,GAM

DIMENSION A(5),ALPHA(5)

DATA (A(I),I=1,5)/ 8.333333333333333E-02,2.777777777777777E-03,7.9365

1079365079E-04,5.95232141666666E-04,8.4175084175084E-04/,TPILG/

20.91893853320467/,ZASY/225.0/

IERR= 1

ERR = 1.0E-07

ZRABS = ABS(ZR)

c TEST IF ABS(Z) .GE. 15.0 FOR ASYMPTOTIC APPROXIMATION.

IF (ZR .LT. -(160.0+ERR)) GO TO 84

IF (ABS(ZI) .GT. ERR) GO TO 5

IF (ZR .GT. ERR) GO TO 5

DR = AINT(ZRABS+0.5) - ZRABS

IF (DR\*\*2 + ZI\*\*2 .LE. ERR\*\*2) GO TO 80

IF (ZI .EQ. 0.0) GO TO 8

5 ZSIZE = ZR\*ZR + ZI\*ZI

IF (ZSIZE - ZASY) 6,60,60

6 IF (ZI) 20,8,40

c CHECK TO SEE IF ARGUMENT IS NEAR ZERO OR A

c NEGATIVE INTEGER

8 IF (ZR .EQ. 1.0) GO TO 55

IF (ZR .GT. 0.0) GO TO 50

16 N = 1.0 - ZR

```

FN = N
ZS = FN + ZR
CALL GAMZ(ZS,ZI,GR,GI)
17 J = 0
18 FJ = J
ZS = ZR + FJ
W = ZS*ZS + ZI*ZI
RE = (ZS*GR + ZI*GI)/W
GI = (ZS*GI - ZI*GR)/W
GR = RE
J = J+1
IF (N-J) 52,52,18
20 ZT = -ZI
IF (ZR) 30,25,25
25 CALL GAMZ(ZR,ZT,GR,GI)
GI = -GI
RETURN
30 N = 1.0 - ZR
FN = N
ZS = FN + ZR
ZT = -ZI
CALL GAMZ(ZS,ZT,GR,GI)
GI = -GI
GO TO 17
40 IF (ZR) 16,50,50
50 CALL GAMZ(ZR,ZI,GR,GI)
52 RETURN
55 GR = 1.0
GI = 0.0
RETURN

```

c ASYMPTOTIC APPROXIMATION.

```
60 ZIABS = ABS(ZI)
   IF (ZR + 160.0) 84,84,63
63 IF (ZR) 64,64,65
64 BOUNDL = 0.006*ZR*ZR + 3.55*ZR + 410.0
   IF (ZIABS - BOUNDL) 75,75,84
65 IF (ZR - 175.0) 66,66,67
66 BOUNDL = 4.52*ZR + 410.0
   IF (ZIABS - BOUNDL) 75,75,84
67 BOUNDL = 5.0*ZR + 360.0
   IF (ZR - 220.0) 68,68,69
68 BOUNDR = -0.108*ZR*ZR + 48.36*ZR - 5050.0
   GO TO 70
69 IF (ZR-320.0) 72,72,73
72 BOUNDR = 5.625*ZR - 810.0
   GO TO 70
73 BOUNDR = 5.867*ZR - 880.0
70 IF (ZIABS - BOUNDL) 71,75,84
71 IF (ZIABS - BOUNDR) 86,75,75
75 Z = CMPLX(ZR,ZI)
   ZLOG = CLOG(Z)
   ZSQDNM = 1./(Z*Z)
   GAMLN = (Z-0.5)*ZLOG -Z + TPILG
   ALPHA(1) = CMPLX(A(1),0.0)
   SUM = ALPHA(1)
   DO 76 I=1,4
   FR = -A(I+1)/A(I)
   FACT = FR*ZSQDNM
   ALPHA(I+1) = FACT*ALPHA(I)
   SUM = SUM + ALPHA(I+1)
```

```

CHECK = CABS(ALPHA(I+1)/SUM)
IF (CHECK - 1.0E-08) 78,78,76
76 CONTINUE
78 GAMLN = GAMLN + SUM/Z
81 GAM = CEXP(GAMLN)
GR = REAL(GAM)
GI = AIMAG(GAM)
IF (ZIABS - 1800.0) 79,79,88
79 RETURN
80 IERR = 2
RETURN
84 IERR = 3
RETURN
86 IERR = 4
RETURN
88 IERR = 5
RETURN
END
SUBROUTINE GAMZ(ZR,ZI,GR,GI)
c TO CALCULATE GAMMA(ZR+I(ZI)),WHERE ZR AND ZI ARE
c POSITIVE
DATA PI/2.50662827463100/
IF (ZI-1.) 1,1,2
1 T1=ZR
T2=ZI
CALL GAMMA1(T1,T2,GR,GI)
RETURN
2 M=ZI
N=M+1
FN=N

```

```

X=ZR/FN
Y=ZI/FN
T1=X
T2=Y
CALL GAMMA1(T1,T2,T3,T4)
S=T3
T=T4
J=1
FJ=J
FJN=FJ/FN
3 X=X+FJN
T1=X
T2=Y
CALL GAMMA1(T1,T2,T3,T4)
U=T3
V=T4
P=S*U-T*V
T=S*V+T*U
S=P
J=J+1
IF (M-J) 4,3,3
4 C1=PI**M*SQRT(FN)
C2=ALOG(FN)
C3=ZR*C2
C4=ZI*C2
5 C5=EXP(C3)/C1
C=C5*COS(C4)
D=C5*SIN(C4)
P=C*S-D*T
GI=C*T+D*S

```

```

GR=P
RETURN
END
SUBROUTINE GAMMA1(X,Y,U,V)
c  TO CALCULATE GAMMA(X+IY),WHERE X IS POSITIVE AND Y IS
c  LESS THAN 1
  IF (X-1.) 1,1,2
1 CALL GAMMA2(X,Y,U,V)
  RETURN
2 N=X
  FN=N
  X=X-FN
  IF (X) 22,21,22
21 N=N-1
  X=X+1.
22 S1=X
  S2=Y
  CALL GAMMA2(S1,S2,S3,S4)
  U=S3
  V=S4
  J=0
3 FJ=J
  P=(X+FJ)*U-Y*V
  V=(X+FJ)*V+Y*U
  U=P
  J=J+1
  IF(N-J) 4,4,3
4 RETURN
  END
SUBROUTINE GAMMA2(X,Y,U,V)

```

```

c  TO CALCULATE GAMMA(X+IY), WHERE X AND Y ARE NOT
c  GREATER THAN ONE
c  BY PADE-POWER APPROXIMATION OF 1/GAMMA(Z)
DIMENSION A(9),B(9)
DATA (A(I),I=1,9)/0.0,1.0,1.2536302998,6.2294126401E-02,
1-1.9367439704E-01,9.5294089001E-03,1.0021677762E-02,-1.7669280217E
2-03,7.9027635693E-05/, (B(I),I=1,9)/1.0,6.7641463495E-01,
33.2773507466E-01,1.0279994528E-01,2.7018504538E-02,5.1647208257E-0
43,8.7521995448E-04,9.5129148083E-05,9.9862892410E-06/
E=A(9)*X+A(8)
F=A(9)*Y
G=B(9)*X+B(8)
H=B(9)*Y
I=7
1 P=E*X-F*Y
F=E*Y+F*X
E=P+A(I)
Q=G*X-H*Y
H=G*Y+H*X
G=Q+B(I)
I=I-1
IF(I)2,2,1
2 W=E*E+F*F
U=(G*E+H*F)/W
V=(E*H-G*F)/W
RETURN
END

```

```

c  Узлы и веса квадратурной формулы Гаусса, n=24 [75]
BLOCK DATA qv24

```

```

REAL*8 a0(24),h(24)
COMMON/q5/a0,h
DATA (a0(i),i=1,24)/-0.995187219997021360180D00,
1 -0.974728555971309498198D00,-0.938274552002732758524D00,
1 -0.886415527004401034213D00,-0.820001985973902921954D00,
1 -0.740124191578554364244D00,-0.648093651936975569252D00,
1 -0.545421471388839535658D00,-0.433793507626045138487D00,
1 -0.315042679696163374387D00,-0.191118867473616309159D00,
1 -0.064056892862605626085D00,0.064056892862605626085D00,
1 0.191118867473616309159D00,0.315042679696163374387D00,
1 0.433793507626045138487D00,0.545421471388839535658D00,
1 0.648093651936975569252D00,0.740124191578554364244D00,
1 0.820001985973902921954D00,0.886415527004401034213D00,
1 0.938274552002732758524D00,0.974728555971309498198D00,
1 0.995187219997021360180D00/
DATA (h(i),i=1,24)/0.012341229799987199547D00,
1 0.028531388628933663181D00,0.044277438817419806169D00,
1 0.059298584915436780746D00,0.073346481411080305734D00,
1 0.086190161531953275917D00,0.097618652104113888270D00,
1 0.107444270115965634783D00,0.115505668053725601353D00,
1 0.121670472927803391204D00,0.125837456346828296121D00,
1 0.127938195346752156974D00,0.127938195346752156974D00,
1 0.125837456346828296121D00,0.121670472927803391204D00,
1 0.115505668053725601353D00,0.107444270115965634783D00,
1 0.097618652104113888270D00,0.086190161531953275917D00,
1 0.073346481411080305734D00,0.059298584915436780746D00,
1 0.044277438817419806169D00,0.028531388628933663181D00,
1 0.012341229799987199547D00/
END

```