

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

Пожарская Елизавета Дмитриевна

**Решения периодических задач теории упругости
со смешанными граничными условиями
в клиновидной области**

1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2025

Диссертационная работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ).

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Соболь Борис Владимирович

Официальные оппоненты:

Беркович Вячеслав Николаевич,

доктор физико-математических наук, доцент,
Северо-Кавказский филиал Ордена трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский технический университет связи и информатики»,
профессор кафедры общенаучной подготовки

Бобылев Александр Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет,
доцент кафедры механики композитов

Защита диссертации состоится «14» октября 2025 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.10 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени Ю.А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21 Ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1341006/>

Автореферат разослан « » августа 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Дударев
Владимир Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Для расчетов зубчатых передач Новикова на контактную прочность ранее использовались модели упругого полупространства, четверти пространства, пространственного клина. Актуальным является дальнейшее уточнение геометрии модели. В диссертации предложена модель зуба в виде клина двугранного угла с ребром конечной длины (кромка зуба) при скользящей заделке боковых усеченных плоскостей. Контакт штампа с таким телом сводится к периодической задаче для клина с бесконечным ребром.

Диссертация посвящена разработке методов решения новых трехмерных периодических смешанных и контактных задач для уравнений Лапласа и Ламе упругого равновесия в области клина. Общее представление решения уравнений Ламе упругого равновесия в форме Папковича–Нейбера сводится к нескольким уравнениям Лапласа со связанными граничными условиями. Контактные задачи теории упругости имеют смешанные граничные условия и важны для расчета контактной прочности сопрягаемых деталей и конструкций. Задачи множественного дискретного контакта возникают также в пальпационной томографии. Периодические рельефы встречаются у современных текстурированных поверхностей после лазерной обработки, что также обуславливает актуальность периодических контактных задач.

В нашей стране сложился ряд крупных научных центров исследования контактных задач. Среди них можно упомянуть Донской государственный технический университет и Южный федеральный университет, Кубанский государственный университет, Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, МГУ им. М.В. Ломоносова и др. Значительный вклад в развитие механики контактных взаимодействий внесли С.М. Айзикович, В.М. Александров, Ю.А. Антипов, И.И. Аргатов, В.А. Бабешко, А.А. Баблюян, А.В. Белоконь, О.А. Беляк, В.Н. Беркович, А.А. Бобылев, Н.М. Бородачев, Ф.М. Бородич, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, Б.А. Галанов, Л.А. Галин, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.Г. Горшков, И.Г. Горячева, В.В. Калининчук, Е.В. Коваленко, В.И. Колесников, А.С. Кравчук, Е.А. Кузнецов, А.А. Ляпин, А.В. Манжиров, Ю.Ю. Маховская, В.И. Моссаковский, С.М. Мхитарян, Д.А. Пожарский, В.Л. Попов, Г.Я. Попов, О.Д. Пряхина, Ю.Н. Работнов, В.Л. Рвачев, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев, И.А. Солдатенков, М.А. Сумбатян, Д.В. Тарлаковский, А.Ф. Улитко, Я.С. Уфлянд, И.Ю. Цуканов, М.И. Чебаков, И.Я. Штаерман, J.R. Barber, V.I. Fabrikant, G.M.L. Gladwell, K.L. Johnson, J.J. Kalker, L.M. Keer и др.

Участие в научных проектах по теме диссертации. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18-01-00017-а «Контактные и смешанные задачи теории упругости для неоднородных цилиндрических, клиновидных и слоистых тел», РФФИ 22-21-00013 «Пространственные периодические контактные задачи» и РФФИ 24-21-00014 «Пространственные задачи множественного контакта при учете геометрических и структурных особенностей тел», стипендии Губернатора Ростовской области аспирантам и премии молодым ученым Ростовской области (2024 г.).

Цель, объект и предмет исследования. Целью диссертационной работы является получение новых знаний о решениях периодических смешанных и контактных задач для уравнений Лапласа и Ламе упругого равновесия. Объектом исследования является модель тела в форме клина, позволяющая учесть геометрические особенности в виде угловой линии. Предметом исследования являются периодические задачи со смешанными граничными условиями для уравнений теории упругости, а также для уравнения Лапласа в области пространственного клина.

Идея работы заключается в сведении периодических смешанных и контактных задач (ось, вдоль которой расположены области смены граничных условий, параллельна ребру клина) к интегральным уравнениям и разбиении ядер на «плоские» и «пространственные» части. В случае, когда «плоская» часть дает расходимость ядра, предлагается модификация постановки задачи путем введения периодической регуляризирующей системы точечных воздействий определенной интенсивности с тем же периодом. В результате получается интегральное уравнение со сходящимся ядром.

Методы исследования базируются на фундаментальных законах математической физики, механики деформируемого твердого тела, теории упругости, теории обобщенных функций, механики контактных взаимодействий, вычислительной математики, функционального и математического анализа. Применяются метод интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева, метод суперпозиции, численный метод Галанова нелинейных граничных интегральных уравнений, использующий метод Ньютона, метод специальной аппроксимации ядра интегрального уравнения, асимптотические методы, метод Винера–Хопфа, метод коллокаций.

Основные научные положения, защищаемые автором:

- решена трехмерная периодическая контактная задача с трением Кулона в заранее неизвестной области контакта для упругого клина, одна грань которого находится в условиях жесткой заделки;
- решены трехмерные периодические контактные задачи с заранее неизвестной областью контакта для упругого клина, одна грань которого свободна от напряжений или находится в условиях скользящей заделки при действии периодической цепочки сил вне зоны контакта;
- показано, что в плоских контактных задачах для упругого клина учет переменности коэффициента Пуассона по угловой координате может изменять свойства ядра интегрального уравнения и приводить к появлению логарифмических членов в регулярном асимптотическом решении;
- решены периодические задачи о системах жестких включений, а также задачи о паре включений в пространственном упругом клине с использованием регулярного асимптотического метода в предположении связи между двумя безразмерными геометрическими параметрами (относительное расстояние между включениями и их относительная удаленность от ребра клина);

– решены интегральные уравнения плоских задач о жестких включениях в упругом клине, которые являются предельными случаями уравнений соответствующих периодических задач; для их решения применены регулярный и сингулярный асимптотические методы, а также метод, основанный на специальной аппроксимации ядра.

Научная новизна работы:

– использована модель тела с угловой линией в виде клина двугранного угла при исследовании пространственно периодических физических структур, описываемых трехмерными уравнениями Лапласа и Ламе упругого равновесия со смешанными граничными условиями;

– периодические смешанные и контактные задачи для уравнений Лапласа и Ламе в пространственном клине сведены к новым интегральным уравнениям, ядра которых разбиты на «плоские» и «пространственные» части; в случае расходимости ядра предложен метод его регуляризации; в периодической контактной задаче для упругого клина с одной жестко заделанной гранью проведен учет сил трения перпендикулярных ребру клина;

– в периодических контактных задачах для упругого клина с неизвестной областью контакта показана возможность перколяции (слияния соседних зон контакта) при усилении контакта; на линиях возможной перколяции возникают новые интегрируемые особенности ядер интегральных уравнений, требующие регуляризации при численном методе решения;

– в плоских контактных задачах для упругого клина с переменным по угловой координате коэффициентом Пуассона получены новые асимптотические решения по сравнению со случаем однородного клина;

– получены новые интегральные уравнения периодических задач о жестких включениях, а также о паре включений, в упругом клине и найдены их регулярные асимптотические решения;

– впервые получены асимптотические решения плоских задач о включении в упругом клине, а также замкнутое решение при помощи специальной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения.

Обоснованность и достоверность результатов обеспечивается постановками решаемых задач с учетом регуляризации, применением строгих математических численных и асимптотических методов решения, совпадением результатов при применении для решения одной и той же задачи разных методов, совпадением результатов в частных случаях с известными результатами. Например, ядра интегральных уравнений периодических задач, разбитые на «плоскую» и «пространственную» части сравнивались в частных случаях (полупространство, четверть пространства) с ядрами в форме без квадратур.

Научное и теоретическое значение результатов исследований. Развитый метод регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения может быть применен и в других аналогичных задачах со смешанными граничными условиями. Результаты расчетов могут быть использованы для контроля точности

прямых методов типа метода конечных элементов при наличии у тела угловой линии.

Практическая ценность работы. Рассмотренные периодические задачи для клина в силу симметрии эквивалентны непериодическим смешанным задачам для клина усеченного двумя перпендикулярными ребру плоскостями. В контактных задачах на таких плоскостях следует ставить условия скользящей заделки. Модель усеченного клина конечной длины вдоль ребра более соответствует практическим задачам, чем клин с бесконечным ребром. Результаты могут также быть востребованы для прочностного анализа тел с угловой линией и периодическим рельефом поверхности после лазерной обработки.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на XVIII и XXI международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016 и 2023 г.), на XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023 г.), на Всероссийской школе «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 2024 г.), на Всероссийской конференции «Актуальные проблемы науки и техники» (Ростов-на-Дону, 2024 г.), на международной конференции «Интеллектуальные информационные технологии и математическое моделирование 2024» (Дивноморское, 2024 г.).

Публикации. Основные материалы диссертации опубликованы в 11 работах, в том числе в 4 статьях в журналах, входящих в Перечень ВАК, Scopus, Web of Science.

Личный вклад автора. В работах [1,2,4,6,11] постановки задач и рекомендации по выбору методов решения принадлежат соавторам в равной степени, аналитические и численные исследования и основные результаты — автору диссертационной работы. В [3] исследование задачи с трением вдоль ребра клина принадлежит соавторам, а задачи с трением перпендикулярно ребру клина — автору диссертации. В [7–10] исследования задач для слоя или полупространства принадлежат соавторам, а задач для клина — автору диссертации.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3-х глав, заключения, библиографического списка и приложения. Общий объем работы составляет 131 страницу, включая 31 рисунок, 15 таблиц, список литературы из 142 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность тематики диссертационной работы, определяется цель исследования, излагается научная новизна и практическая ценность работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту, приводятся сведения об апробации работы и публикациях.

В первой главе рассматриваются периодические задачи A_1 , A_2 со смешанными граничными условиями для трехмерного уравнения Лапласа в цилиндрических координатах относительно $u(r, \varphi, z)$ в клине $\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \alpha, |z| < \infty\}$:

$$\varphi = \alpha: u = f(r, z), (r, z) \in \Omega^*; \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, (r, z) \notin \Omega^*; \varphi = 0: A1) u = 0; A2) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (1)$$

Здесь область Ω^* — периодическая по z с периодом $2l$, состоящая из бесконечного числа конечных выпуклых областей Ω_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с гладкой границей, расположенных вдоль ребра клина, не касаясь его, причем $\Omega = \Omega_0$ симметрична по z с центром на полуоси r , который удален от ребра клина на расстояние c . Ось, проходящая через центры областей Ω_k , параллельна ребру клина. Функция $f(r, z)$ — гладкая и периодическая по z с периодом $2l$, имеет максимум в точке $(c, 0)$ в области Ω . Должна существовать подобласть Ω , где $f(r, z) > 0$. Для определенности предположим, что $f(r, z) = \delta - A(r - c)^2 - Bz^2$. Пусть область Ω неизвестна и выполняются условия

$$\varphi = \alpha: \frac{k_*}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = q(r, z) \geq 0, (r, z) \in \Omega; \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, (r, z) \in \partial\Omega; u > f(r, z), (r, z) \in S \setminus \Omega, \quad (2)$$

где $S = \{|r - c| \leq d, |z| \leq l\}$ — прямоугольник, содержащий область Ω ($a < c$), k_* — размерный коэффициент (например, теплопроводности, тогда $q(r, z)$ — плотность теплового потока). При заданной функции $f(r, z)$ и значениях α, d, k_*, l требуется определить функцию $q(r, z), (r, z) \in \Omega$ и область Ω . Интегральная характеристика искомой функции будет $\iint_{\Omega} q(r, z) dr dz = Q$. При помощи метода интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева задачи (1) сводятся к интегральным уравнениям ($K_{iu}(x)$ — функции Макдональда)

$$\iint_{\Omega} q(x, y) K(x, y, r, z) dx dy = 2\pi k_* f(r, z), (r, z) \in \Omega, \quad (3)$$

$$K(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2lk)) du d\beta,$$

$$A) W(u) = \text{th}(\alpha u), \quad B) W(u) = \text{cth}(\alpha u).$$

Для задачи A1 ряд в ядре уравнения (3) сходится, а для задачи A2 — расходится. В случае задачи теплопроводности расходимость можно интерпретировать как перегрев грани клина от притока тепла при нулевом оттоке на другой грани. В случае расходимости предлагается регуляризация краевой задачи и интегрального уравнения.

При заранее неизвестной области смены граничных условий для решения интегральных уравнений с учетом условий (2) используется численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений, предложенный Б.А. Галановым. Вводятся специальные нелинейные операторы, позволяющие учесть неравенства (2). Периодичность дает новые интегрируемые особенности ядер интегральных уравнений. Доказывается существование и единственность решения. Для решения нелинейных интегральных уравнений применяется модифицированный метод Ньютона. Вводятся безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r - c}{l}, z' = \frac{z}{l}, A = \frac{A'}{l}, B = \frac{B'}{l}, \lambda = \frac{c}{l}, h' = \frac{h}{l}, q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi k_*}, \varepsilon = \frac{d}{l}, \delta' = \frac{\delta}{l}, Q' = \frac{Q}{2\pi k_* l^2}.$$

Интегральная характеристика Q с ростом угла клина убывает в задаче А1 и возрастает в задаче А2 (рис. 1). В задаче А1 площадь области Ω при $\alpha=\pi/2$ больше, чем при $\alpha=3\pi/2$, а в задаче А2 — наоборот ($A=\varepsilon=1$, $B=0.2$, $\delta=\lambda=2$, $h=10$). В обеих задачах с ростом δ начинается перколяция (слияние соседних областей смены граничных условий).

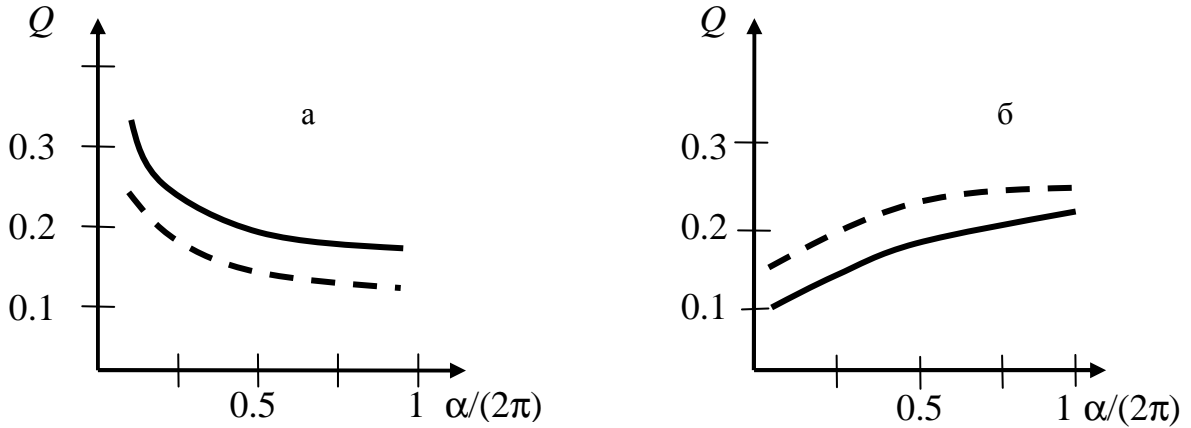


Рис. 1 — Графики $Q(\alpha)$ в задачах А1 (а) и А2 (б) при $\delta=A=B=\varepsilon=1$, $h=10$, $\lambda=2$ (сплошные) и $\lambda=4$ (пунктир)

Развитый подход применим и к системам уравнений Лапласа со связанными граничными условиями, которые возникают в представлении Папковича–Нейбера общего решения уравнений Ламе упругого равновесия. В случае периодических задач для упругого клина возникают аналогичные интегральные уравнения с более сложными ядрами, но главные части ядер такие же, как в интегральных уравнениях главы 1.

Во второй главе в п. 2.1 рассматривается периодическая с периодом $2l$ контактная задача В1 для трехмерного упругого клина двухгранного угла α при учете перпендикулярных ребру клина сил трения Кулона с коэффициентом μ в неизвестной области контакта. Грань клина $\varphi=0$ жестко закреплена, а грань $\varphi=\alpha$ взаимодействует с бесконечной прямолинейной цепочкой одинаковых жестких штампов, ось цепочки параллельна ребру клина (рис. 2; Ω — единичная область контакта, априори содержащаяся в прямоугольнике S со сторонами $2l$ и $2a$; точки начального касания удалены от ребра на расстояние c ; к штампам приложены нормальные силы P и касательные силы T).

Граничные условия для уравнений Ламе упругого равновесия имеют вид (Ω^* — объединенная область контакта, δ — осадка штампов, форма основания штампов описывается функцией $f(r, z) = (r - c)^2 / (2R_1) - z^2 / (2R_2)$)

$$\varphi = \alpha : u_\varphi = -(\delta - f(r, z)), (r, z) \in \Omega^*; \sigma_\varphi = 0, (r, z) \notin \Omega^*; \tau_{r\varphi} = \mu\sigma_\varphi, \tau_{\varphi z} = 0; \varphi = 0 : u_\varphi = u_r = u_z = 0.$$

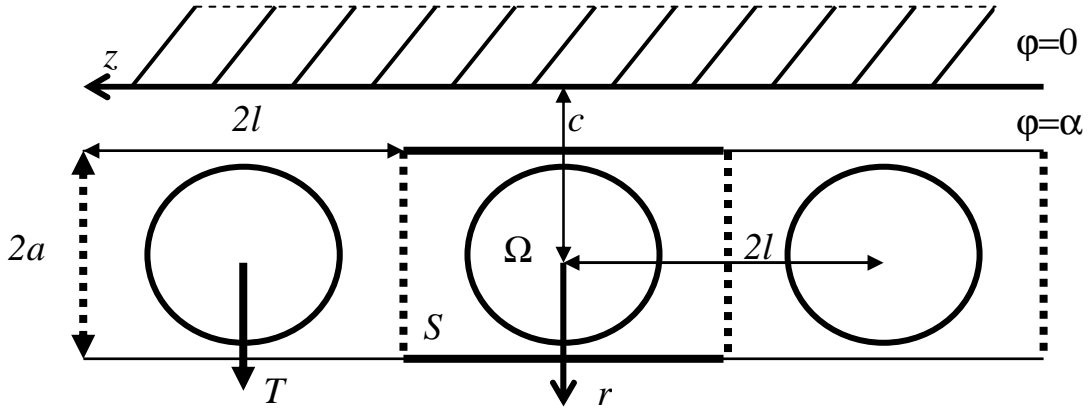


Рис. 2 — Схема контакта на грани $\varphi=\alpha$. Грани $\varphi=0$ жестко заделана (задача В1)

При заданных параметрах упругости G (модуль сдвига), ν (коэффициент Пуассона), величинах α , a , c , l , δ , μ и функции $f(r,z)$ требуется определить область контакта Ω , контактное давление $\sigma_{\varphi}(r,\alpha,z)=-q(r,z)$, $(r,z)\in\Omega$, интегральную характеристику P . На основе фундаментальных решений выведено интегральное уравнение ($\theta=G/(1-\nu)$, $n=0,1$):

$$\iint_{\Omega} q(x,y)K(x,y,r,z)dx dy = 2\pi\theta[\delta - f(r,z)], \quad (r,z)\in\Omega, \quad (4)$$

$$K(x,y,r,z) = K_0(x,y,r,z) - \mu K_1(x,y,r,z),$$

$$K_n(x,y,r,z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta r) \left\{ \theta_n(u, \beta x) + \frac{\Psi_n(u, \beta x)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z-y+2lk)) du d\beta,$$

$$W(u) = \frac{2\Delta(u)}{2\kappa \text{ch}(2\alpha u) + 4u^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 + 1}, \Delta(u) = \kappa \text{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha), \kappa = 3 - 4\nu,$$

$$\theta_0(u, \beta x) = K_{iu}(\beta x), \quad \theta_1(u, \beta x) = \frac{h_0(u)}{u} K_{iu}(\beta x) - \nu_* \int_0^{\infty} h(t) \frac{\text{sh}(\pi t) K_{it}(\beta x) dt}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)}, \quad \nu_* = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

$$h_0(u) = \frac{2u^2 \sin^2 \alpha}{\Delta(u)}, \quad h(t) = \frac{2\kappa \text{sh}^2(\alpha t)}{\Delta(t)} - \frac{h_0(t)}{1-2\nu}.$$

Функции $\Psi_n(u, \beta x)$ при фиксированном значении βx удовлетворяют вспомогательным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Для сходимости ряда в ядре $K(x,y,r,z)$ важно, что его символ $W(u)$ типа тангенса гиперболического. Для упрощения ядра используем формулу ($\delta(x)$ — δ -функция Дирака)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z-y+2lk)) = 2\pi \cos(\beta(z-y)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\beta l - 2\pi k).$$

В результате представим ядро (4) в форме (C — постоянная Эйлера)

$$K_0(x,y,r,z) = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \frac{C}{l} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left\{ [W(u) - 1] \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \frac{1}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ [W(u) - \text{cth}(\pi u)] \Sigma(u, u) + \frac{W(u) \Sigma_0(u)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right\} du, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
K_1(x, y, r, z) = & \frac{\pi v_* \operatorname{sh}(\pi(r-x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} + \frac{v_*}{l} \int_0^\infty [W(u)h(u) - 1] \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) \frac{du}{u} + \\
& + \frac{4}{\pi l} \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) W(u) \left[\frac{h_0(u)}{u} \Sigma(u, u) + \frac{\Sigma_1(u)}{\operatorname{ch}(\pi u / 2)} \right] du - \\
& - \frac{4v_*}{\pi l} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u)h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t) - U(t, u)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \Sigma(t, u) dt du, \quad U(t, u) = \operatorname{ch}(\pi t) \operatorname{ch}(\pi u) - 1, \\
\Sigma(t, u) = & \sum_{k=1}^\infty K_{it}(\pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) \cos(\pi_k(z-y)), \quad \Sigma_n(u) = \sum_{k=1}^\infty \Psi_n(u, \pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) \cos(\pi_k(z-y)), \\
R = & \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_k^\pm = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad \pi_k = \pi k / l.
\end{aligned}$$

Здесь выделены главные члены; ряд, порожденный компонентами Черрути вклада сил трения, точно просуммирован.

Для решения периодической контактной задачи В1 используем метод Б.А. Галанова, позволяющий определить область контакта и давления одновременно. Интегрирование в уравнении (5) распространяется на прямоугольник S . Отсутствие контакта и обращения в нуль давления в области $S \setminus \Omega$ приводит к системе интегрального уравнения и неравенства

$$\int_S q(N) K(N, M) dN = d(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega, \quad (6)$$

$$\int_S q(N) K(N, M) dN > d(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in S \setminus \Omega, \quad (7)$$

где $N = x, y$, $M = r, z$, $d(M) = 2\pi\theta[\delta - f(M)]$. Вводя нелинейные операторы

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и представляя искомое давление в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M),$$

сведем систему (6), (7) к решению нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна ($p = p(M)$, $p^\pm = p^\pm(M)$, $d = d(M)$)

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d, \quad (8)$$

$$Kp^+ = \int_S p^+(N) K(N, M) dN.$$

Интегральное неравенство (7) удовлетворяется автоматически. Система (6), (7) эквивалентна уравнению (8). Для численного решения уравнения (8) применяется модифицированный метод Ньютона, который базируется на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p_n - (F'/p_n)^{-1} \Theta p_n, \quad p_n = p_n(M), \quad n = 0, 1, \dots, \quad p_0 = d,$$

где F — дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор Θ в равномерной метрике.

В отличие от задач для одного штампа ядро (6) в S имеет не только классическую особенность R^{-1} , но и дополнительные интегрируемые особенности $(R_1^\pm)^{-1}$ в точках $r = x, z - y = \pm 2l$ на сторонах S , обозначенных

точками на рис. 2. При расчете значений ядра особенности сглаживались по формуле ($k=0;1$)

$$(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2 \rightarrow (r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2 + h_1 h_2 / 16,$$

где h_1 и h_2 — шаги сетки соответственно по осям r и z .

Вводятся безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r-c}{l}, z' = \frac{z}{l}, A_0 = \frac{l}{2R_1}, B_0 = \frac{l}{2R_2}, \lambda = \frac{c}{l}, q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi\theta}, \varepsilon = \frac{a}{l}, \delta' = \frac{\delta}{l}, P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}. \quad (9)$$

Рассчитаны механические характеристики, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта бесконечной длины (перколяция). На рис. 3 показаны зависимости (а) $\min\delta(\lambda)$ и (б) $\min P(\lambda)$, при которых начинается слияние областей контакта ($\nu=0.5, A_0=\varepsilon=1, B_0=\mu=0.2$; сплошные линии для $\alpha=3\pi/2$, пунктир — $\alpha=\pi$, точки — $\alpha=\pi/2$). Значения $\min P(\lambda)$ при $\alpha=\pi$ и $\alpha=\pi/2$ отличаются от соответствующих значений при $\alpha=3\pi/2$ не более, чем на 2%, и не показаны на рис. 3б. При уменьшении угла раствора клина снижается осадка, при которой наступает перколяция. При отдалении цепочки штампов от ребра клина указанная осадка, наоборот, возрастает. При этом вдавливающая сила меняется незначительно.

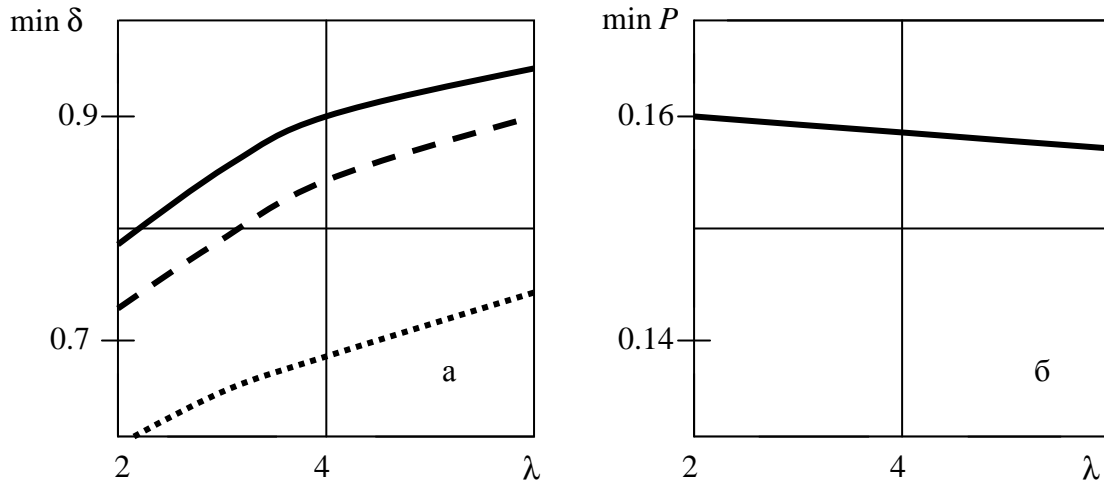


Рис. 3 — Зависимости (а) $\min\delta(\lambda)$ и (б) $\min P(\lambda)$ для начала перколяции (задача В1)

В п. 2.2 и 2.3 соответственно исследуются пространственные контактные задачи нормального контакта для упругого клина с одной свободной от напряжений (задача В2) или закрепленной скользящей заделкой гранью (задача В3). Другая грань клина взаимодействует с бесконечной периодической прямолинейной системой жестких штампов, расположенных вдоль ребра клина (двухгранного угла). Система штампов вызывает бесконечное нормальное смещение грани клина (кроме случая полупространства со скользящей заделкой по полуплоскости). Для регуляризации расходящегося ядра интегрального уравнения относительно контактных давлений берется дополнительная периодическая система нормальных сил, действующих вне области контакта. Эта система параллельна цепочке штампов и имеет тот же период. Силы в регуляризующей цепочке равны по модулю и направлены противоположно

силам, приложенным к штампам. Метод регуляризации эквивалентен известному подходу, связанному с введением относительного смещения. Для клина рассматриваются два случая регуляризации: цепочка сил приложена вне ребра (первый случай) или на ребре (второй случай). Ядра интегральных уравнений периодических задач содержат слагаемые, возникающие в соответствующих плоских контактных задачах, в задаче Герца и дополнительные члены. Рассмотренный в п. 2.1 случай жесткой заделки грани клина не требует регуляризации, поскольку в «плоской» части ядра возникает символ типа $\text{th}(Au)/u$, обеспечивающий сходимость интеграла при $u \rightarrow 0$. Такого же типа символ возникает и в случае полупространства, половина границы которого подчинена связи в виде жесткой или скользящей заделки. В отличие от этих случаев для свободной от напряжений или закрепленной скользящей заделкой грани в «плоской» части ядра интегрального уравнения возникает символ типа $\text{cth}(Au)/u$. В аналогичных плоских контактных задачах для клина применяется почленное дифференцирование интегрального уравнения. Для пространственных контактных задач дифференцирование двумерного интегрального уравнения по одному из аргументов требует последующего нахождения уже не произвольной постоянной, а произвольной функции. Поэтому здесь используется другой подход, связанный с введением относительного смещения в условие контакта.

В п. 2.2 изучается периодическая контактная задача В2 о линейной цепочке одинаковых жестких штампов (период $2l$, ось цепочки параллельна ребру клина и удалена от нее на расстояние c) внедренных в грань $\varphi = \alpha$ на величину δ без перекоса. Задача симметрична по координате z . К штампам приложены нормальные силы P на расстоянии H от ребра клина. В силу периодичности достаточно рассматривать единичную область контакта Ω симметричную относительно полуоси r . Граничные условия задачи В2 имеют вид (Ω^* — объединенная область контакта, форма основания штампов описывается функцией $f(r, z) = (r - c)^2 / (2R_1) - z^2 / (2R_2)$)

$$\varphi = \alpha : u_\varphi = -(\delta - f(r, z)), (r, z) \in \Omega^*; \sigma_\varphi = 0, (r, z) \notin \Omega^*; \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0; \varphi = 0 : \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0.$$

Ядро ИУ относительно контактного давления $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$, содержит расходящийся ряд-интеграл. Для регуляризации ядра заменим первое граничное условие выше на

$$\varphi = \alpha : u_\varphi - u_\varphi^* = -(\delta - f(r, z)), (r, z) \in \Omega^*,$$

где u_φ^* — упругое перемещение грани клина под действием бесконечной периодической системы (период $2l$) нормальных сил P , приложенных на грани $\varphi = \alpha$ вне области контакта на оси $r = h$ параллельной ребру клина. При $h = 0$ силы приложены на ребре клина (рис. 4).

При $h \neq 0$ регуляризованное уравнение будет иметь вид (первый вариант регуляризации)

$$\iint_{\Omega} q(x, y) T(x, y, r, z) dx dy = 2\pi\theta[\delta - f(r, z)], (r, z) \in \Omega, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
T(x, y, r, z) &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R_h} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{1}{R_k^+(h, 0)} - \frac{1}{R_k^-(h, 0)} \right] + \\
&+ \frac{A_*}{2l} \ln \frac{x}{h} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} W_*(u) \left[\cos \left(u \ln \frac{x}{r} \right) - \cos \left(u \ln \frac{h}{r} \right) \right] \frac{du}{u} + \\
&+ \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma(u) + \frac{W_+(u) \Sigma_+(u) - W_-(u) \Sigma_-(u)}{2 \text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad R_h = \sqrt{(r-h)^2 + z^2}, \quad (11) \\
R_k^{\pm}(x, y) &= \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad A_* = 1 - \pi A^{-1}, \quad W_*(u) = W(u) - \text{cth}(\pi u), \\
W_{\pm}(u) &= \pm \frac{\text{ch}(\alpha u) \mp \cos \alpha}{\text{sh}(\alpha u) \pm u \sin \alpha}, \quad W(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u) + u \sin(2\alpha)}{\text{ch}(2\alpha u) - 1 - 2u^2 \sin^2 \alpha}, \quad \frac{1}{A} = \lim_{u \rightarrow 0} u W(u), \\
\Sigma(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [K_{iu}(\pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - K_{iu}(\pi_k h) \cos(\pi_k z)], \quad \pi_k = \frac{\pi k}{l}, \\
\Sigma_{\pm}(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [\Psi_{\pm}(u, \pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - \Psi_{\pm}(u, \pi_k h) \cos(\pi_k z)].
\end{aligned}$$

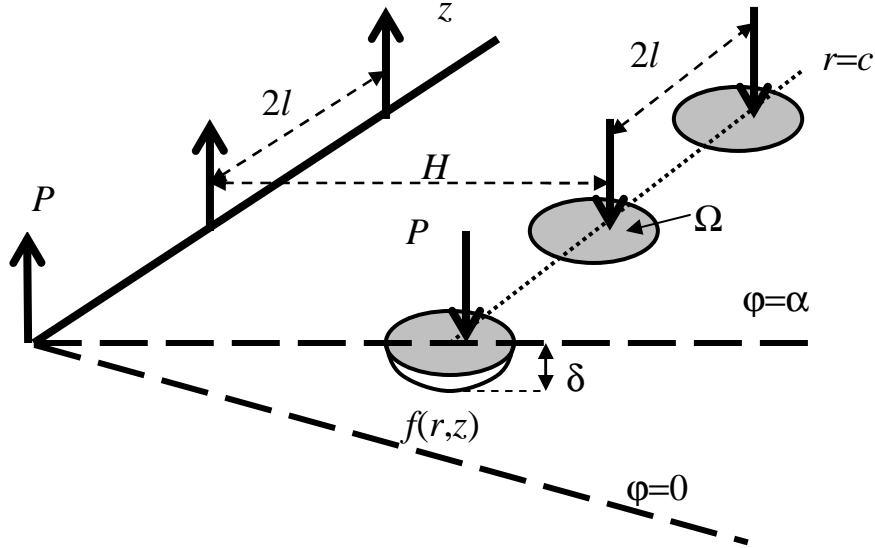


Рис. 4 — Периодическая система штампов и система сил на ребре клина ($h=0$)

Во втором варианте регуляризации ($h=0$) ядро принимает вид

$$\begin{aligned}
T(x, y, r, z) &= \frac{1}{R} - \frac{\pi}{AR_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{\pi}{AR_k^+(0, 0)} - \frac{\pi}{AR_k^-(0, 0)} - \frac{A_*}{kl} \right] + \\
&+ \frac{A_*}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \frac{A_* C}{l} + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left[(W^*(u) - A_*) \cos \left(u \ln \frac{x}{r} \right) + A_* \exp(-u) \right] \frac{du}{u} + \\
&+ \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \left\{ W_*(u) \Sigma_0(u) + \frac{W_+(u) \Sigma_+^*(u) - W_-(u) \Sigma_-^*(u)}{2 \text{ch}(\pi u / 2)} \right\} du, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$R_0 = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad W^*(u) = W(u) - \pi A^{-1} \text{cth}(\pi u), \quad \Sigma_0(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) K_{iu}(\pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)),$$

$$\Sigma_{\pm}^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{iu}(\pi_k r) [\Psi_{\pm}(u, \pi_k x) \cos(\pi_k(z-y)) - \Psi_{\pm}^*(u) \cos(\pi_k z)].$$

Функция-символ $W(u)$ является функцией типа $\text{cth}(Au)$; функции $\Psi_{\pm}(u, x)$, $\Psi_{\pm}^*(u)$ удовлетворяют вспомогательным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. При $\alpha=\pi$ ядра (11), (12) отвечают регуляризованной периодической контактной задаче Герца для полупространства. Аналогичные регуляризации ядер проведены в п. 2.3 для скользящей заделки одной грани клина (задача В3). Здесь случай $\alpha=\pi/2$ может давать симметричную периодическую задачу Герца для полупространства (рис. 5).

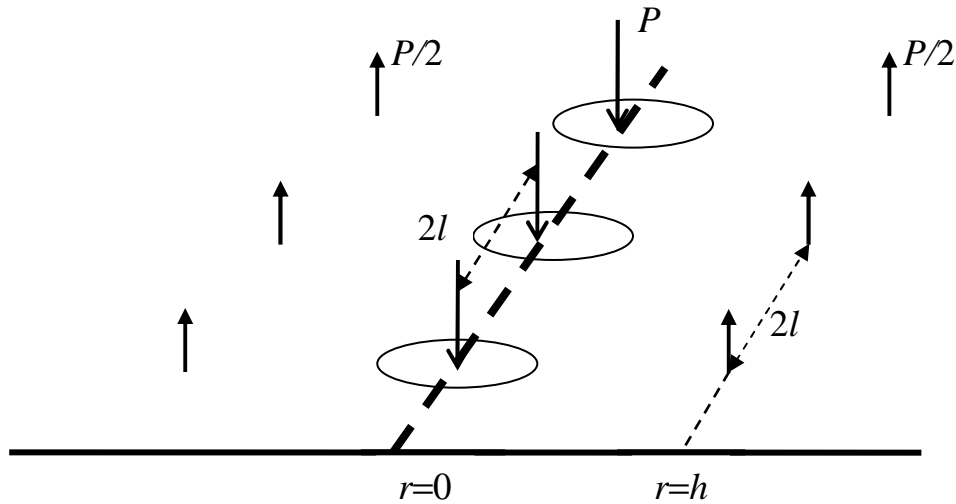


Рис. 5 — Симметричная по r периодическая система штампов на полупространстве (В3)

В этом случае ядро имеет вид

$$T(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{0.5}{R_h} - \frac{0.5}{R_{-h}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R_k^+(x, y)} + \frac{1}{R_k^-(x, y)} - \frac{0.5}{R_k^+(h, 0)} - \frac{0.5}{R_k^-(h, 0)} - \frac{0.5}{R_k^+(-h, 0)} - \frac{0.5}{R_k^-(-h, 0)} \right]. \quad (13)$$

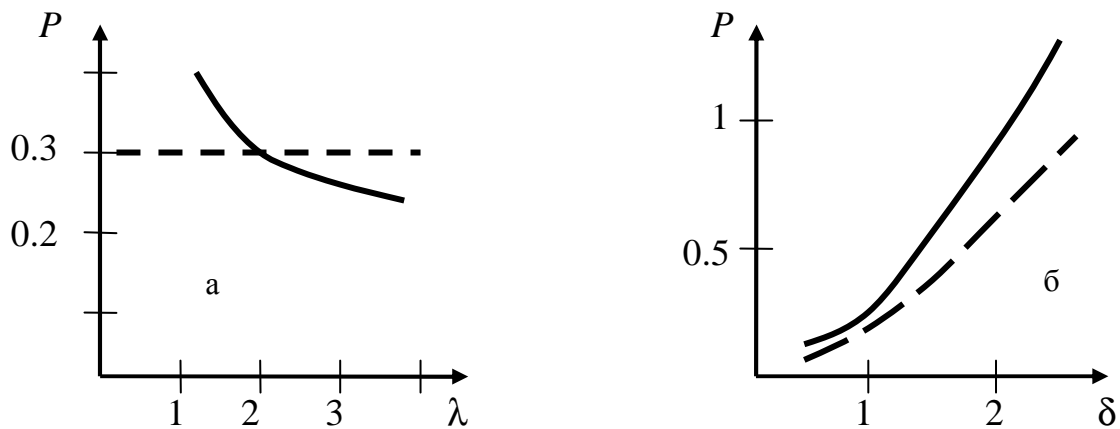


Рис. 6 — Графики (а) $P(\lambda)$ (сплошная линия для периодической цепочки) и (пунктир для точного решения задачи Герца) и (б) $P(\delta)$ при $\lambda=2$ (сплошная линия) и $\lambda=4$ (пунктир) (В2)

Для решения регуляризованного уравнения (10) с неизвестной областью Ω применяется численный метод Б.А. Галанова. Используем обозначения (9) и $h' = h/l$ (штрих далее опускаем). На рис. 6 для случая полупространства (ядро (12) при $\alpha=\pi$, $A_0=B_0=\varepsilon=1$, $h=0$) показана зависимость (а) $P(\lambda)$ при $\delta=1$ (сплошная линия). Пунктир соответствует точному решению задачи Герца для единичного штампа; при $\lambda > 2.2$ легче вдавить цепочку штампов с пригрузкой, чем единичный штамп, а при $\lambda < 2.2$ — наоборот. На рис. 6б приведены графики $P(\delta)$ при $\lambda=2$ (сплошная линия) и $\lambda=4$ (пунктир).

На рис. 7 показаны границы половинок симметричных по z областей контакта Ω (ядро (12)) при $\alpha=\pi/2$, $A_0=\varepsilon=1$, $B_0=0.2$, $\nu=0.5$; $h=0$, $\lambda=4$, $\delta=0.5$ (сплошная линия) и $\delta=0.2$ (точки). Перколяция возникает с ростом осадки на линии $z=1$. Область контакта смещается в сторону действия пригрузки.

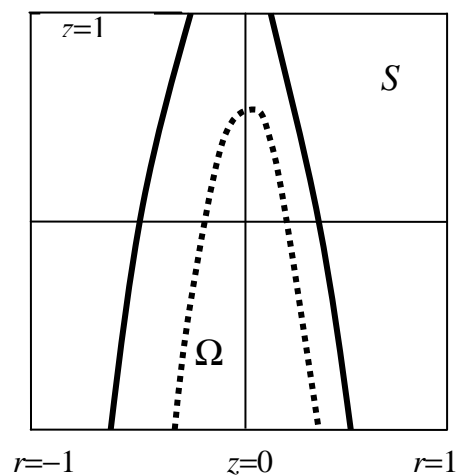


Рис. 7 — Границы половинок областей Ω при $\delta=0.5$ (сплошная линия) и $\delta=0.2$ (точки) (B2)

В табл. 1 внесены значения силы $P(h)$ (ядро (11)) при $\delta=A_0=B_0=\varepsilon=1$, $\lambda=2$, $\nu=0.5$ и разных углах клина α . Видно, что при отдалении регуляризирующей системы сил от цепочки штампов интегральная характеристика контактных давлений P снижается. При этом величина P возрастает с ростом угла клина.

Таблица 1 — Значения $P(h)$ при разных α (задача B2)

| h | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha=\pi/2$ | 0.220 | 0.154 | 0.130 | 0.116 | 0.106 |
| $\alpha=\pi$ | 0.318 | 0.236 | 0.209 | 0.194 | 0.183 |
| $\alpha=3\pi/2$ | 0.335 | 0.252 | 0.225 | 0.210 | 0.199 |

На рис. 8 для ядра (13), $A_0=B_0=\varepsilon=1$, начерчены зависимости (а) $P(h)$ при $\delta=1$ (сплошная линия; пунктир для точного решения задачи Герца) и (б) $P(\delta)$ для $h=2$ (сплошная линия) и $h=4$ (пунктир). При $h=2.2$ сила для цепочки штампов с сим-

метричной пригрузкой совпадает с силой для единичного штампа. Рис. 9 иллюстрирует развитие процесса перколяции в случае ядра (13) (слияние соседних областей контакта на линии $z=1$) при возрастании осадки δ .

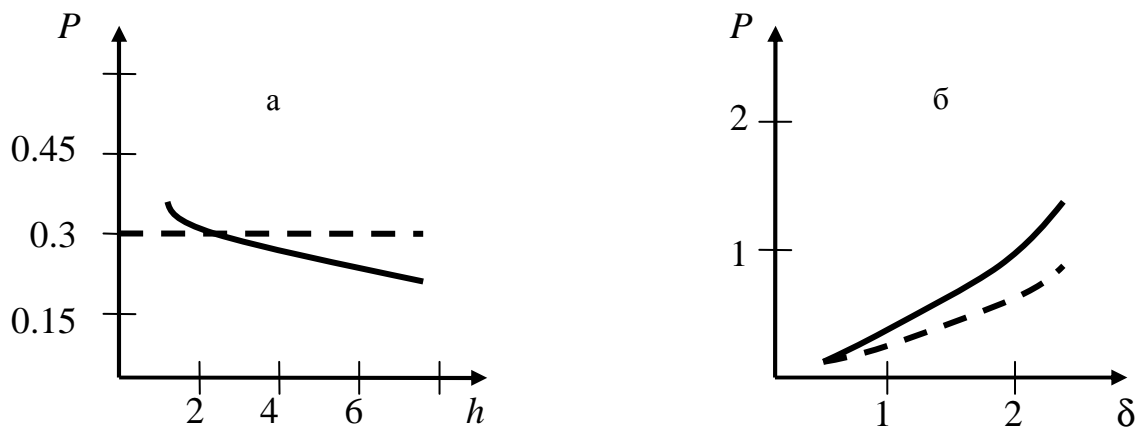


Рис. 8 — Графики для ядра (13): (а) $P(h)$ (пунктир для точного решения задачи Герца) и (б) $P(\delta)$ при $h=2$ (сплошная линия) и $h=4$ (пунктир) (задача В3)

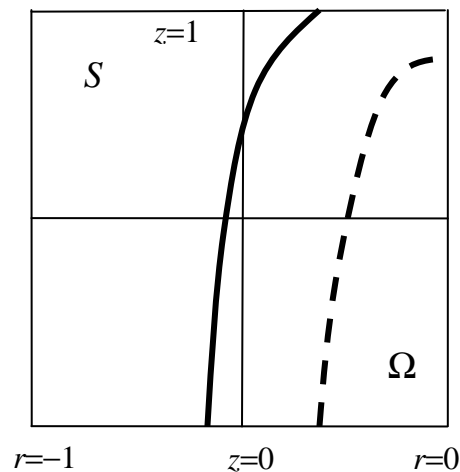


Рис. 9 — Границы четвертей симметричных по r, z областей Ω (ядро (13)); $h=4, A_0=\varepsilon=1, B_0=0.2, \delta=0.5$ (пунктир) и $\delta=1$ (сплошная линия, перколяция) (В3)

В п. 2.4 изучаются плоские контактные задачи для упругого клина с переменным по угловой координате коэффициентом Пуассона. На одной грани клина задана конечная область контакта, не выходящая на угловую точку, а другая грань жестко заделана либо свободна от напряжений. Задачи сведены к интегральным уравнениям относительно контактного давления, получены точные формулы для ядер. Для решения применяется регулярный асимптотический метод В.М. Александрова, эффективный для областей контакта относительно удаленных от угловой точки. Показано, что для неоднородного материала в асимптотических решениях появляются логарифмические члены, отсутствующие в известных асимптотиках для однородного материала.

В третьей главе в п. 3.1 рассматриваются контактные задачи о системах тонких жестких эллиптических включений (полуоси эллипсов b и c , два одинаковых включения, периодическая система включений, рис. 10) в трехмерном упругом клине двухгранного угла, внешние грани которого подчинены условиям жесткой или скользящей заделки (соответственно задачи С1 и С2 (пара включений), С3 и С4 (одно включение), С5 и С6 (периодическая система включений)). К включениям приложены силы $2T$, действующие в полуплоскости $\varphi=0$ перпендикулярно ребру клина. Включения смещаются на величину δ в направлении действия сил. Требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_{r\varphi}(r,0,z) = -\tau(r,z)$ в области эллипсов.

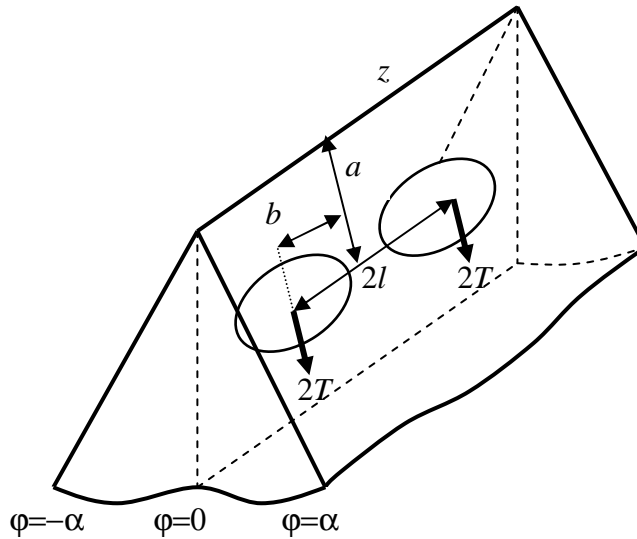


Рис. 10 — Эллиптические включения в клине

При помощи известных фундаментальных решений задачи сведены к интегральным уравнениям с симметричными ядрами, которые в обозначениях

$y = y'+l, z = z'+l, \Omega = \{(r-a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1\}, \theta = \kappa/\kappa_1, \kappa = 3-4\nu, \kappa_1 = 4-4\nu$ принимают вид (в отличие от глав 1 и 2 здесь область Ω задана)

$$\iint_{\Omega} \tau(x,y)K(x,y,r,z)dxdy = 2\pi G\delta, \quad (r,z) \in \Omega, \quad (14)$$

$$K(x,y,r,z) = \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u)W(u)K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)C(\beta y,\beta z)dud\beta,$$

$$W(u) = S_1(u) - \kappa^{-1}S_2(u)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \kappa^{-2}S_3(u)xr\frac{\partial^2}{\partial x\partial r},$$

$$\text{A) } S_1(u) = \frac{f_+(u)}{g_+(u)} - S_3(u), \quad S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_+(u)} - S_3(u), \quad S_3(u) = \frac{4\text{sh}^2(\alpha u)\sin^2\alpha}{g_+(u)f_-(u)}$$

$$\text{B) } S_1(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)}, \quad S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_-(u)}, \quad S_3(u) = 0,$$

$$f_{\pm}(u) = \text{sh}(2\alpha u) \pm \kappa^{-1}u \sin(2\alpha), \quad g_{\pm}(u) = \text{ch}(2\alpha u) \pm \cos(2\alpha).$$

Здесь для пары включений

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y - z)) + \cos(\beta(y + z + 2l)),$$

а для периодической системы, ось которой параллельна ребру клина,

$$C(\beta y, \beta z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2kl)).$$

Путем предельного перехода в (14) приходим к интегральным уравнениям соответствующих плоских задач (их можно вывести также при помощи преобразования Меллина)

$$\int_a^b \tau(\rho) k \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) d\rho = \pi G \delta \quad (a \leq r \leq b), \quad k(t) = \theta \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut) du, \quad (15)$$

$$A) \quad L(u) = \frac{2 \operatorname{sh}^2(\alpha u) - 2\kappa^{-2} u^2 \sin^2 \alpha}{f_-(u)}, \quad B) \quad L(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)} = S_1(u).$$

Ядра интегральных уравнений (14) разбиваются на «плоские» и «пространственные» части. Вводятся безразмерные величины (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r-a}{b}, \quad z' = \frac{z}{b}, \quad \delta' = \frac{\delta}{b}, \quad c' = \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \mu = \frac{l}{b}, \quad \tau'(r', z') = \frac{\tau(r, z)}{G}, \quad T' = \frac{T}{Gb^2}, \quad \Omega \rightarrow \Omega',$$

где параметры λ и μ характеризуют расположение включений в биссекториальной полуплоскости клина. В предположении линейной связи между параметрами ($\mu = \gamma\lambda$, $\gamma = l/a$) для решения применяется регулярный асимптотический метод В.М. Александрова (разложение по степеням малого параметра $1/\lambda$). Асимптотика для двух включений сравнивается с соответствующими решениями для единичного включения в клине и для периодической цепочки. Расчеты показывают, что при сближении включений в задачах (уменьшении γ) значение сдвигающей силы уменьшается. При жесткой заделке граней клина включения сдвинуть труднее, чем в соответствующих случаях при скользящей заделке. Периодическую систему включений сдвинуть легче, чем пару включений, которую, в свою очередь, легче сместить, чем единичное включение. Эллиптические включения ($c < 1$) сдвинуть легче, чем круговые ($c = 1$).

В п. 3.2 рассматриваются плоские задачи для упругого клина, на биссектрисе которого расположено тонкое жесткое включение конечной длины, которое сдвигается вдоль биссектрисы. Внешние грани клина находятся в условиях жесткой (задача С7) или скользящей (задача С8) заделки. Задачи сводятся к уравнениям (15) относительно касательных напряжений. Вводится основной безразмерный геометрический параметр, характеризующий относительную удаленность включения от вершины клина. Для решения применяются три метода. Первый метод состоит в получении замкнутого решения, основанного на аппроксимации символа ядра (15) $L(u) \approx \operatorname{th}(Au)$ ($-\infty < u < \infty$), $A = \lim L(u)/u$ ($u \rightarrow 0$) с относительной погрешностью ε (рис. 11). Вводятся безразмерные обозначения

$$x = \lambda \ln(r/a) - 1, \quad \lambda = 2/\ln(b/a), \quad g = \lambda\delta/a, \quad \varphi(\xi) = \rho\tau(\rho)/(a\theta), \quad T_0 = \lambda T/(a\theta)/g.$$

В результате получим ($K(t)$ — полный эллиптический интеграл)

$$\varphi(x) = \frac{\pi g \exp(\pi/(2A\lambda))}{2A\lambda K(\exp(-\pi/(A\lambda)))\sqrt{2[\operatorname{ch}(\pi/(A\lambda)) - \operatorname{ch}(\pi x/(A\lambda))]}}, T_0 = \frac{K(\sqrt{1 - \exp(-2\pi/(A\lambda))})}{K(\exp(-\pi/(A\lambda)))}. \quad (16)$$

Относительная погрешность решения (16) не превосходит ε .

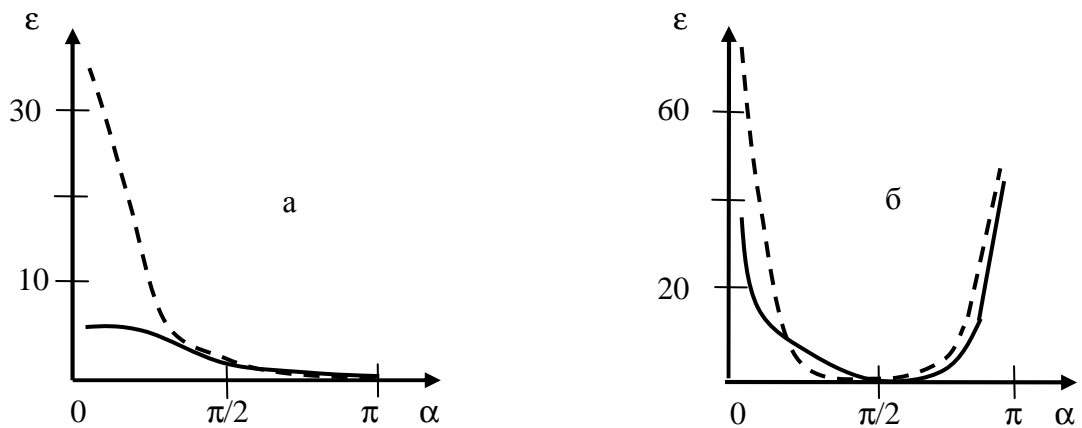


Рис. 11 — Относительная погрешность $\varepsilon(\alpha)$ (%) для задач С7 (а) и С8 (б) при $\nu=0.25$ (сплошные линии) и $\nu=0.45$ (пунктир)

Второй метод, регулярный асимптотический, «больших λ », включает разложение решения по степеням малого параметра $1/\lambda$ и эффективен для включений, относительно удаленных от вершины клина. В табл. 2 дано сравнение величины T_0 , рассчитанной по регулярной асимптотике и по формуле (16) для задачи С8 при $\alpha=\pi/2$ и любом ν , когда решение (16) является точным ($\varepsilon=0$), погрешность асимптотики при $\lambda \geq 4\pi^{-1}$ не превосходит 1%.

Таблица 2 — Интегральная характеристика T_0 в задаче С8 при $\alpha=\pi/2$

| λ | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|------|------|------|------|------|
| Регулярная асимптотика | 3.82 | 2.16 | 1.50 | 1.26 | 1.13 |
| Решение (16) | 3.43 | 2.15 | 1.50 | 1.26 | 1.13 |

Третий метод, сингулярный асимптотический, «малых λ », эффективен для включений, расположенных относительно близко к вершине клина. При помощи трех методов проводится численный анализ для различных типов граничных условий, значений угла клина, коэффициента Пуассона и основного безразмерного параметра.

Приложение содержит фрагмент программы для ЭВМ (расчет ядра).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решены новые периодические задачи с смешанными граничными условиями для уравнения Лапласа и уравнений Ламе теории упругости в области трехмерного клина двухгранного угла. В силу периодичности полученные решения применимы для клина с ребром конечной длины (на плоскостях усечения ребра ставятся условия Неймана для уравнения Лапласа; условия скользящей заделки для контактных задач). Решения могут

иметь практическое значение при расчетах упругого контакта зубьев зубчатой передачи Новикова с кромкой зуба конечной длины.

1. Получено численное решение трехмерной периодической контактной задачи с трением Кулона в заранее неизвестной области контакта для упругого клина, одна грань которого находится в условиях жесткой заделки.

2. Получены численные решения трехмерных периодических контактных задач с заранее неизвестной областью контакта для упругого клина, одна грань которого свободна от напряжений или находится в условиях скользящей заделки при действии периодической цепочки сил вне зоны контакта.

3. Установлено, что в плоских контактных задачах для упругого клина учет переменности коэффициента Пуассона по угловой координате может изменять свойства ядра интегрального уравнения. Модифицировано регулярное асимптотическое решение по сравнению со случаем однородного материала.

4. В периодических задачах о системах жестких включений, а также о паре включений в пространственном упругом клине получены регулярные асимптотические решения в предположении связи между двумя безразмерными геометрическими параметрами (относительным расстоянием между включениями и их относительной удаленности от ребра клина).

5. Показано, что интегральные уравнения плоских задач о жестких включениях в упругом клине являются предельными случаями уравнений соответствующих периодических задач. Для плоских задач о включениях построены регулярные и сингулярные асимптотические решения, а также решение, основанное на специальной аппроксимации ядра.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах.

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК

1. **Пожарская, Е. Д.** Системы включений в пространственном упругом клине / Е.Д. Пожарская, Д. А. Пожарский, Б. В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 3. – С. 494-504. – DOI 10.31857/S0032823524030119. K1 [RSCI].

Статьи в научных изданиях, входящих в Scopus, Web of Science

2. Пожарский, Д. А. Контактные задачи для неоднородного упругого клина с переменным коэффициентом Пуассона / Д. А. Пожарский, **Е. Д. Пожарская** // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 63-71. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.1.07. K1
3. **Пожарская, Е. Д.** Периодические контактные задачи для клина с учетом сил трения / Е. Д. Пожарская, Д. А. Пожарский, Б. В. Соболев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 5. – С. 170-179. – DOI 10.31857/S0572329923600056. [*Переводная версия: Pozharskaya, E.D.*]

Periodic contact problems for a wedge with friction forces / E. D. Pozharskaya, D. A. Pozharskii, B. V. Sobol // *Mechanics of Solids*. – 2023. – Vol. 58, No. 5. – P. 1578-1586. – DOI 10.3103/S0025654423700218]. К1.

4. Пожарский, Д. А. Контактные задачи о включении в плоском упругом клине / Д. А. Пожарский, **Е. Д. Пожарская**, Б. В. Соболев // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2024. – № 4. – С. 36-43. – DOI 10.15593/perm.mech/2024.4.04. К1.

Статьи в журналах, индексируемых в РИНЦ

5. **Pozharskaya, E. D.** Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge / E. D. Pozharskaya // *Тенденции развития науки и образования*. – 2023. – No 96-9. – P. 177-180. – DOI 10.18411/trnio-04-2023-501.

Публикации в сборниках трудов конференций

6. **Пожарская, Е. Д.** Смешанные задачи теории упругости для плоского клина с переменным коэффициентом Пуассона / Е. Д. Пожарская, Д. А. Пожарский // *Современные проблемы механики сплошной среды : тезисы докладов XVIII Международной конференции, Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 года* / Министерство образования и науки РФ, Федеральное агентство научных организаций, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, Научный совет РАН по комплексной проблеме «Механика», Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Южный федеральный университет, Южный научный центр РАН ; редакторы: А. О. Ватульян, А. В. Наседкин, А. В. Попов. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С. 137. – Режим доступа: http://mcc-conf.ru/d/2016_tesis.pdf (дата обращения 02.06.2025)
7. Периодические контактные задачи для слоя и клина / Н. Б. Золотов, **Е. Д. Пожарская**, Д. А. Пожарский, Б. В. Соболев // *Современные проблемы механики сплошной среды : тезисы докладов XXI Международной конференции, Ростов-на-Дону, 11-13 октября 2023 г.* / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации [и др.] ; редакторы: А. О. Ватульян [и др.]. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2023. – С. 52.
8. Периодические контактные задачи для клина и полупространства / Д. А. Пожарский, Б. В. Соболев, **Е. Д. Пожарская**, Н. Б. Золотов // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 21–25 августа 2023 года, Санкт-Петербург : сборник тезисов докладов в 4 томах. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Российская академия наук, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике.— Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2023. – С. 774-775. – Режим доступа: <https://cloud.mail.ru/public/WLdm/PisZsUx11> (дата обращения 02.06.2025)
9. Золотов, Н. Б. Пространственные задачи множественного контакта для слоя и клина / Н. Б. Золотов, Д. А. Пожарский, **Е. Д. Пожарская** // *Математическое*

моделирование и биомеханика в современном университете : тезисы докладов XVIII Всероссийской школы (пос. Дивноморское, 27–31 мая 2024 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Южный федеральный университет", Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Донской государственный технический университет" ; редакторы: А. О. Ватульян [и др.]. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университет, 2024. – С. 41.

10. Пожарский, Д. А. Пространственные задачи множественного контакта для упругих тел с геометрическими или структурными особенностями / Д. А. Пожарский, **Е. Д. Пожарская**, Н. Б. Золотов // Актуальные проблемы науки и техники. 2024 : материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции (Ростов-на-Дону, 19-21 марта 2024 года). – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2024. – С. 764. – Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_68477593_27645089.pdf (дата обращения 02.06.2025)
11. Пожарский, Д. А. Периодические смешанные задачи для уравнения Лапласа и уравнений теории упругости в клине / Д. А. Пожарский, **Е. Д. Пожарская**, Б. В. Соболев // Интеллектуальные информационные технологии и математическое моделирование (ИИТ&ММ-2024) : труды Международной научно-практической конференции (пос. Дивноморское, г. Геленджик, Краснодарский край, 25-30 августа 2024 года). – Ростов-на-Дону : ДГТУ, 2024. – С. 87-89.

В печать 21.07.2025 г.

Объем 1,34 усл. п. л. Цифровая печать. Формат 60x84/16.

Бумага офсетная. Заказ № 1/07. Тираж 110. Бесплатно

ООО «ДГТУ-ПРИНТ»

Адрес университета и полиграфического предприятия:

344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1