

ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертацию Ашихмина Сергея Сергеевича

«Некоторые классы интегральных операторов с однородными

и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри»,

представленную на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный,

комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы исследования

Диссертация С.С. Ашихмина посвящена изучению интегральных операторов типа свертки и интегральных операторов с однородными ядрами в банаховых пространствах функций, суммируемых со степенью p , и связанных с ними пространствах Морри. Интегральные операторы неизменно являются объектом повышенного внимания со стороны исследователей ввиду того, что наряду с дифференциальными операторами они являются одним из основных средств описания многих физических, биологических, социологических... процессов. Несмотря на значительные успехи, достигнутые в известных классических исследованиях, проведенных в работах Фредгольма, Нетера, Хермандера, а также их многочисленных последователей и учеников, имеется еще достаточно много открытых вопросов в теории интегральных операторов. В частности, это касается исследования многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами. С другой стороны, в современном анализе все большую роль играют пространства типа Морри. Эти пространства, возникшие в работах американского математика Ч. Морри, стали мощным инструментом для изучения нелинейных уравнений в частных производных. Большой вклад в изучение этих пространств внесли В.И. Буренков, В.С. Гулиев, С.Г. Самко, Н. Rafeiro, Y. Sawano и другие. В настоящей работе в пространствах типа Морри изучаются интегральные операторы с разностными и однородными ядрами и переменными коэффициентами, а также операторы с такими ядрами и нетривиальной характеристикой. Таким образом, тема диссертационного исследования С.С. Ашихмина «Некоторые классы интегральных операторов с однородными и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри» безусловно является актуальной.

Содержание диссертации

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, перечня условных сокращений и списка литературы, содержащего 79 наименований. Объем работы составляет 110 страниц.

Во введении дана общая характеристика диссертационной работы.

В *первой главе* исследуются операторы вида

$$(\mathcal{C}_b \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) c(x - y) \varphi(y) dy,$$

где $c \in L_1$. В терминах характеристики $b(x, y)$ получены условия ограниченности и компактности оператора \mathcal{C}_b , в пространстве Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Далее, рассматриваются операторы вида $M_a \mathcal{C}$, $\mathcal{C} M_a$, и $M_a \mathcal{C} - \mathcal{C} M_a$, где

$$(\mathcal{C} \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(x - y) \varphi(y) dy,$$

а M_a есть оператор умножения на функцию $a(x)$. Устанавливаются условия их компактности при действии из пространства Лебега в пространство Морри, и при действии из модифицированного пространства Морри в классическое пространство Морри. Эти результаты обобщаются на случай оператора \mathcal{C}_b .

Во *второй главе* основными объектами исследования являются интегральные операторы вида

$$(\mathcal{K}_c \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(x, y) k(x, y) \varphi(y) dy \text{ и } (\mathcal{K} \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) \varphi(y) dy,$$

где ядро $k(x, y)$ однородно степени $(-n)$, инвариантно относительно всех вращений и удовлетворяет некоторому условию суммируемости. Для достаточно широкого класса функций $a(x)$, $b(x)$ и $c(x, y)$ доказана компактность операторов $M_a \mathcal{K} M_b$ и \mathcal{K}_c , действующих в локальном пространстве Морри. Кроме того, исследована ограниченность оператора \mathcal{K} при действии из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри, и компактность соответствующих операторов $M_a \mathcal{K} M_b$ и \mathcal{K}_c .

В *третьей главе* исследуется C^* -алгебра \mathfrak{B} , которая порождается операторами \mathcal{K} (действующими в L_2) и операторами умножения на радиально слабо осциллирующие функции и на функции вида $|x|^{i\alpha}$. Важно подчеркнуть, что и алгебра \mathfrak{B} , и фактор-алгебра \mathfrak{B}/\mathcal{F} , где \mathcal{F} – идеал компактных операторов, не коммутативны. Опираясь на специальный метод А.Б.Антоневича, для C^* -алгебры \mathfrak{B} строится операторное символическое исчисление. С его помощью устанавливается критерий нетеровости операторов из алгебры \mathfrak{B} . В заключительном параграфе указан подкласс операторов из C^* -алгебры \mathfrak{B} , для которых получено скалярное условие нетеровости и найдена формула для вычисления индекса.

Все вышеуказанные результаты являются новыми. Их достоверность обеспечивается строгими математическими доказательствами.

Значимость результатов диссертации для науки и практики

Результаты диссертации имеют теоретический характер и относятся к теории интегральных операторов. Они могут быть применены при разработке

методов решения уравнений, содержащих интегральные операторы типа свертки и интегральные операторы с однородными ядрами.

Рекомендации по использованию результатов диссертации

Результаты диссертации могут быть использованы в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Российском университете дружбы народов, Ярославском государственном университете, Воронежском государственном университете, Южном федеральном университете, а также в других научных и образовательных учреждениях, практикующих исследования по теории операторов и применение таких исследований к прикладным задачам.

Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати

Основные научные результаты изложены в 7 публикациях, в том числе: две статьи в журнале из Перечня ВАК, одна статья в журнале, индексируемом в базе данных Scopus и одна статья, в журнале, индексируемом в базах данных Scopus и Web of Science. Результаты исследования прошли серьезную научную апробацию на международных конференциях и научных семинарах. Все опубликованные в указанных работах результаты принадлежат автору диссертации.

Соответствие автореферата основным положениям диссертации

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. В нем обоснована актуальность темы исследования, изложены основные положения, выносимые на защиту и отмечена значимость полученных результатов.

Замечания по работе

Серьезных замечаний к диссертации С.С.Ашихмина «Некоторые классы интегральных операторов с однородными и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри» нет. Имеются некоторые шероховатости изложения. Приведем пару примеров таких шероховатостей:

1. В замечании на стр. 19 сказано буквально следующее «Подчеркнем, что в локальных пространствах Морри оператор свертки неограничен. Соответствующий пример можно найти, например, в статье [18]». Разве пример доказывает высказанное общее утверждение? Разумеется, это утверждение в приведенной форме неверно.

2. На стр. 24, строка 7 снизу написано «Так как оператор S не компактен, то $b_\infty = 0$ ». Фраза противоречива. На самом деле автор пользуется тем, что оператор S компактен тогда и только тогда, когда $b_\infty = 0$.

Однако отмеченные неточности изложения немногочисленны и не влияют на общий высокий уровень работы и достоверность результатов, полученных ее автором.

Заключение

Диссертационная работа С.С. Ашихмина является законченной научно-квалификационной работой на актуальную тему. Работа написана на высоком научном уровне и содержит ряд новых научных результатов. Каждый из этих результатов представляют собой решение актуальной научной задачи теории интегральных операторов. Текст диссертации за небольшими исключениями, отраженными в замечаниях, отличается четкостью изложения и грамотным оформлением.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Ашихмина Сергея Сергеевича «Некоторые классы интегральных операторов с однородными и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри» отвечает всем требованиям пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» и паспорту специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Диссертация оформлена в соответствии с пп. 3.1-3.2 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет». Таким образом, соискатель Ашихмин Сергей Сергеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

профессор кафедры «Прикладная математика»
ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный
политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова»,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ),
профессор



Пасенчук Александр Эдуардович
« 23» июля 2025 г.

Подпись Пасенчука А.Э. заверяю
Ученый секретарь Совета вуза

Холодкова Н.Н.

346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132 ЮРГПУ (НПИ)

<https://www.npi-tu.ru> тел. 8-863-525-53-09

e-mail: pasenchuk@mail.ru