МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Ашихмин Сергей Сергеевич

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ И РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА И МОРРИ

1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону

2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» (в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений).

Научный руководитель: **Авсянкин Олег Геннадиевич**
доктор физико-математических наук,
доцент, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
г. Ростов-на-Дону

Официальные оппоненты: **Пасенчук Александр Эдуардович**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (Новочеркасский политехнический институт) им. М. И. Платова», г. Новочеркасск

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
доктор физико-математических наук,
доцент, ФГБУН «Комплексный научно-исследовательский институт им. Х. И. Ибрагимова Российской академии наук»,
г. Грозный

Защита диссертации состоится 2 сентября 2025 года в 17:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге 21ж, и на сайте ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу `https://hub.sfedu.ru/diss/show/1339250/`

Автореферат разослан “___”__________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кряквин В. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В данной диссертационнной работе основными объектами исследования являются интегральные операторы типа свертки в пространствах Морри и интегральные операторы с однородными ядрами в пространствах Лебега и Морри.

Теория интегральных операторов типа свертки имеет богатую историю. Ее истоки зародились еще в начале XIX века в связи с исследованиями линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, а первые результаты в исследовании индекса, нетеровости и разрешимости таких операторов связаны с именами Н. Винера и Э. Хопфа.

Приложения теории интегральных операторов типа свертки весьма разнообразны. Такие операторы широко применяются в теории обработки сигналов и изображений, где они используются для описания различных фильтров, сглаживания, выделения контуров и других преобразований, связанных с изменением состояния пикселей изображения в зависимости от его соседей. В теории вероятностей и статистике операторы свертки используются для изучения распределений случайных величин. Такие операторы также находят применение в вычислительных методах для моделирования механики сплошной среды (твердого тела или жидкости).

Широта применений уравнений типа свертки как в практических задачах естественных наук (среди которых теория переноса нейтронов, некоторые задачи астрофизики и биологии), так и в чистой математике обусловила глубокое и широкое развитие теории таких уравнений. Свою лепту в нее внесли как зарубежные математики, например А. Кальдерон, И. Стейн, Л. Хёрмандер, так и отечественные — Ф. Д. Гахов, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн и другие. Большой вклад в становление этой теории внесли ростовские математики — А. В. Козак, А. Э. Пасенчук, В. С. Рабинович, И. Б. Симоненко, Б. Я. Штейнберг.

В математике очень важную роль играют пространства Лебега. Поэтому именно в этих пространствах, в первую очередь, получила развитие теория операторов свертки. К настоящему времени для операторов свертки в L_p–пространствах имеется вполне завершенная теория.

В последние три десятилетия активно развивается теория пространств

Морри. Исследования этих пространств восходят к работе Ч. Морри[1] и продолжаются в наши дни. Пространства Морри оказались весьма полезным инструментом для исследования регулярности решений различных типов уравнений в частных производных. Развитие теории пространств типа Морри дало импульс изучению интегральных операторов в этих пространствах. В основном рассматривались классические операторы анализа, такие как максимальный оператор, потенциал Рисса, сингулярный интегральный оператор. В последнее десятилетие значительное внимание было уделено интегральным операторам свертки (В. И. Буренков, Т. В. Тарарыкова, О. Г. Авсянкин).

В представленной диссертационной работе в пространствах типа Морри исследуются композиции интегральных операторов свертки и операторов умножения на существенно ограниченную функцию, а также операторы свертки с характеристикой.

Другим важным классом интегральных операторов являются операторы с однородными ядрами. Свои основы теория этих операторов (одномерный случай) берет в работах Г. Харди и Дж. Литтлвуда. В 60–е годы Л. Г. Михайлов не только продолжил эти исследования, но и инициировал изучение качественно отличающегося многомерного обобщения. Дальнейшее развитие теория многомерных операторов с однородными ядрами получила в работах О. Г. Авсянкина, В. М. Деундяка, Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, С. М. Умархаджиева и других авторов.

Наиболее важным является подкласс многомерных интегральных операторов, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$. При этом предполагается, что ядро удовлетворяют некоторому условию суммируемости, обеспечивающему ограниченность соответствующего оператора. Операторы этого подкласса называются *каноническими*. В настоящее время для канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в L_p–пространствах имеется достаточно полная теория.

В данной работе в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ исследуются канонические многомерные интегральные операторы с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами сложной структуры, а также изучаются операто-

[1]**Morrey, C. B.** On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations / C. B. Morrey jun. // Trans. Am. Math. Soc. - 1938. -43 - P. 126 –166.

ры с однородными ядрами и переменными коэффициентами в локальных пространствах Морри.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование ограниченности и компактности интегральных операторов с разностными и однородными ядрами в пространствах типа Морри, а также исследование нетеровости канонических интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие *задачи.*

1. Исследовать условия ограниченности и компактности интегральных операторов свертки с характеристикой в пространствах Морри.

2. Исследовать условия компактности интегральных операторов типа свертки, действующих из пространства Лебега в пространство Морри и из модифицированного пространства Морри в пространство Морри.

3. Изучить компактность канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами в локальных пространствах Морри.

4. Найти условия ограниченности канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами, действующих из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри, и исследовать компактность таких операторов с переменными коэффициентами.

5. Исследовать C^*-алгебру, порожденную каноническими многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и радиальными осциллирующими коэффициентами различных типов.

Объект исследования — интегральные операторы типа свертки и канонические многомерные интегральные операторы с однородными ядрами.

Предмет исследования — условия ограниченности и компактности интегральных операторов типа свертки в пространствах типа Морри, условия ограниченности и компактности канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри, критерии нетеровости канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами.

Методы исследования. Используются методы функционального анализа, теории операторов и теории банаховых алгебр.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Получены условия ограниченности и компактности в пространстве Морри интегрального оператора свертки с характеристикой.

2. Получены достаточные условия компактности операторов типа свертки в случае, когда ядро этого оператора принадлежит модифицированному пространству Морри, а сам оператор действует из пространства Лебега в пространство Морри, и в случае, когда ядро принадлежит пространству Лебега, а оператор действует из модифицированного пространства Морри в пространство Морри.

3. Найдены классы существенно ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых произведение канонического многомерного интегрального оператора с однородным ядром и операторов умножения на такие функции является компактным оператором в локальном пространстве Морри.

4. Установлены достаточные условия ограниченности канонических интегральных операторов с однородными ядрами, действующих из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри, и получены условия компактности таких операторов с переменными коэффициентами.

5. Получен критерий нетеровости операторов из C^*-алгебры, порожденной каноническими интегральными операторами с однородными ядрами и операторами умножения на радиальные осциллирующие функции различных типов.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Полученные результаты относятся к области фундаментальных исследований. Они могут быть использованы для построения решений уравнений, содержащих интегральные операторы с разностными и однородными ядрами. Такие уравнения находят свое применение в моделировании некоторых механических и биологических процессов.

Апробация работы. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих конференциях.

• XXVII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование», XII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2022);

• Международная научная конференция «ОТНА: Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и функционального анализа» (Ростов-на-Дону, 2022, 2024);

• XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам (Кача (Севастополь), 2023);

• XIX Владикавказская молодежная математическая школа (Владикавказ, 2024);

• Семинар кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (руководители семинара — О. Г. Авсянкин и А. Н. Карапетянц).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 научных публикациях. Статьи [1, 2] опубликованы в журнале, входящем в Перечень ВАК РФ. Статья [3] входит в международную базу данных Scopus, а статья [4] входит в базы данных Scopus и Web of Science. Статьи [5, 6, 7] опубликованы в материалах конференций.

Статьи [1, 3, 4] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. В этих работах О. Г. Авсянкину принадлежат постановка задач, указание методов исследования и общее руководство. Автору диссертации принадлежат формулировки и доказательства всех результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы, содержащего 79 наименований. Объем работы составляет 110 страниц.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Олега Геннадиевича Авсянкина за чуткое наставничество, создание исключительно дружелюбной атмосферы общения и теплую поддержку.

Диссертационная работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России № 075-02-2025-1720.

Содержание работы

Первая глава диссертации посвящена вопросам ограниченности и компактности интегральных операторов типа свертки в пространствах Морри и состоит из четырех параграфов. Основной объект исследования этой главы — интегральный оператор типа свертки вида

$$(\mathscr{C}_b\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x,y)c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где ядро $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Функция $b(x,y)$ называется *характеристикой.*

В §1.1 даются определения основных функциональных пространств и классов функций, которые будут использоваться в этой и последующих главах.

Будем говорить, что $\varphi \in L_p^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если $\varphi \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Пространство Морри* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *— это пространство всех функций* $\varphi \in L_p^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *таких что*

$$\|\varphi\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|\varphi\|_{p,\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty,$$

где $\mathbb{B}(x,r)$ *— открытый шар в* $\mathbb{R}^n$ *радиуса* r *с центром в точке* x.

Отметим, что пространство $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ нетривиально в том и только том случае, когда $\lambda \in [0, n/p]$, причем $L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, $L_{p,n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Локальный вариант пространства Морри определяется следующим образом.

Определение 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\lambda \geqslant 0$. *Локальное пространство Морри* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *— это пространство всех функций* $\varphi \in L_p^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *таких что*

$$\|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}} = \sup_{r>0} \frac{\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,r))}}{r^\lambda} < \infty.$$

Кроме того, рассматривается модифицированное пространство Морри $\widehat{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, которое является пересечением пространств $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Ниже будут использоваться следующие классы функций.

Определение 3. *Будем говорить, что функция* $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит классу* $B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, *если существует такое число* a_∞, *что*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|t|>N} |a(t) - a_\infty| = 0.$$

Если $a_\infty = 0$, *то будем говрить, что* $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 4. *Будем говорить, что функция* $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *принадлежит классу* $B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, *если существует такая постоянная* a_∞, *что*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N,|y|>N} |a(x,y) - a_\infty| = 0.$$

Если $a_\infty = 0$, *то будем говорить, что* $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

§1.2 состоит из двух разделов. В разделе 1.2.1 устанавливается теорема об ограниченности интегрального оператора $\mathscr{C}_b$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\beta = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x, x-y)|^{p'} |c(y)|\, dy < \infty.$$

Тогда оператор $\mathscr{C}_b$ *ограничен в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *причем для любой функции* $\varphi \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \beta^{1/p'} \|c\|_1^{1/p} \|\varphi\|_{p,\lambda}.$$

В разделе 1.2.2 в терминах характеристики $b(x,y)$ получены условия компактности оператора $\mathscr{C}_b$ в пространстве Морри. Именно

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

1) если $b \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, *то оператор* $\mathscr{C}_b$ *компактен в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *и оператор* $\mathscr{C}_b$ *является компактным в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *то* $b_\infty = 0$.

В качестве следствия получен критерий нетеровости оператора вида $\alpha I + \mathscr{C}_b$. Назовем символом этого оператора функцию

$$\sigma(\xi) = \alpha + b_\infty \widehat{c}(\xi) = \alpha + b_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x) e^{i\xi\cdot x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и* $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Для того чтобы оператор* $\mathscr{A}$ *был нетеровым в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию*

$$\sigma(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n, \tag{1}$$

где $\dot{\mathbb{R}}^n$ *— компактификация* $\mathbb{R}^n$ *одной бесконечно удаленной точкой. Если условие (1) выполнено, то* $\operatorname{ind}(\mathscr{A}) = 0$.

Кроме того, установлено еще одно условие компактности оператора $\mathscr{C}_b$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и функция* $b(x,y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{mes}\{y\colon |y| > N, \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |b(x,y)| > \varepsilon\} = 0.$$

Тогда оператор $\mathscr{C}_b$ *компактен в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

§1.3 состоит из трех разделов, в которых исследуются интегральные операторы свертки

$$(\mathscr{C}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $c(x)$ принадлежит модифицированному пространству Морри $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Предполагается, что $\mathscr{C}\colon L_q(\mathbb{R}^n) \to L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$1 < q, s < p < \infty, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + 1, \quad 0 < \lambda < \frac{n}{p} \tag{2}$$

В разделе 1.3.1 исследована компактность оператора $M_a\mathscr{C}$, где M_a — оператор умножения на существенно ограниченную функцию $a(x)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (2) и* $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

1) если $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, *то* $M_a\mathscr{C}$ *есть компактный оператор, действующий из* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ *и оператор* $M_a\mathscr{C}$ *является компактным из* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *то* $a_\infty = 0$.

В качестве следствия доказана компактность оператора $P_D\mathscr{C}$, где P_D — оператор умножения на характеристическую функцию ограниченного измеримого множества D.

В разделе 1.3.2 изучается коммутатор $[M_a, \mathscr{C}]$ операторов $\mathscr{C}$ и M_a:

$$[M_a, \mathscr{C}] = M_a\mathscr{C} - \mathscr{C}M_a.$$

Обозначим через $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех функций $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, таких что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ функция

$$A(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in K} |a(x) - a(x-t)|$$

принадлежит классу $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. Функции из класса $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ называются функциями *типа слабо осциллирующих на бесконечности.*

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (2), $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ и $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда коммутатор $[M_a, \mathscr{C}]$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

С помощью этого результата получены достаточные условия компактности оператора $\mathscr{C} M_a$, аналогичные теореме 4.

В разделе 1.3.3 рассматривается оператор $\mathscr{C}_b$ с ограниченной характеристикой $b(x,y)$. Используя результаты предыдущих разделов, получены условия компактности оператора $\mathscr{C}_b$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (2) и $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1) если $b \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то $\mathscr{C}_b$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и оператор $\mathscr{C}_b$ является компактным из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то $b_\infty = 0$.

В §1.4 оператор свертки $\mathscr{C}$ рассматривается с другого ракурса — предполагается, что его ядро $c(x)$ принадлежит пространству $L_q(\mathbb{R}^n)$, а сам оператор действует из $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (связи между параметрами λ, q, p и s так же определяются из условий (2)). Результаты этого параграфа по формулировке аналогичны результатам предыдущего. Среди них главное место занимает

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (2) и $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1) если $b \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то $\mathscr{C}_b$ есть компактный оператор, действующий из $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и оператор $\mathscr{C}_b$ компактен, то $b_\infty = 0$.

Вторая глава диссертации содержит четыре параграфа. Основной объект исследования этой главы — действующий в локальном пространстве Морри интегральный оператор

$$(\mathscr{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее предполагается, что $n \geqslant 2$), измерима и удовлетворяет условиям:

1° однородности степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y), \quad \forall\, \alpha > 0;$$

2° инвариантности относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x),\omega(y)) = k(x,y), \quad \forall\, \omega \in SO(n);$$

3° суммируемости, т. е.

$$\varkappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)||y|^{-n/p+\lambda}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'-\lambda}\, dx < \infty.$$

Операторы вида (3), ядра которых удовлетворяют условиям 1° и 2°, называют *каноническими* интегральными операторами с однородными ядрами.

Исследование компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами в локальных пространствах Морри значительно отличается от исследования таких операторов в L_p–пространствах. В L_p–пространствах существенным образом использовался прием перехода к сопряженному оператору, действующему в пространстве $L_{p'}$. При таком переходе внутренний коэффициент «переходил» во внешний и наоборот. При работе с пространствами Морри такой прием невозможен, поскольку пространство, сопряженное к пространству Морри является пространством другой природы. Поэтому в данной главе основным объектом исследования является оператор вида $M_a\mathscr{K}M_b$.

В §2.1 содержится постановка задачи. В §2.2 доказывается важное вспомогательное утверждение. А именно доказано, что оператор $M_a\mathscr{K}M_b$ компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, если коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ являются непрерывными на $\mathbb{R}^n$ финитными функциями, носитель которых не содержит точку $x = 0$.

В §2.3 достаточные условия компактности оператора $M_a\mathscr{K}M_b$ получены для существенно более широкого класса коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$. Именно, будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N} |a(x)| = 0.$$

Теорема 8. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ *— оператор вида (3) и функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *принадлежат классу* $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $M_a\mathscr{K}M_b$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Из этого результата выводятся следствия, которые затем применяются к исследованию компактности оператора $\mathscr{K}_c$ вида

$$(\mathscr{K}_c\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x,y)k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $k(x,y)$ удовлетворяет условиям 1°–3°, а $c(x,y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Теорема 9. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}_c$ *— оператор вида (4) и характеристика* $c(x,y)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|>N} |c(x,y)| = 0; \tag{5}$$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|<1/N} |c(x,y)| = 0. \tag{6}$$

Тогда оператор $\mathscr{K}_c$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

В §2.4 рассматривается оператор $\mathscr{K}$, действующий из весового пространства Лебега со степенным весом в локальное пространство Морри. Сначала доказывается ограниченность этого оператора.

Теорема 10. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\lambda > 0$. *Тогда оператор* $\mathscr{K}$ *вида (3) ограничен из пространства* $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ *в пространство* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|\mathscr{K}\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa \|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\varkappa$ *определяется из условия* 3°.

Затем исследуется компактность операторов вида

$$M_a \mathscr{K} M_b \colon L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n) \to L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

Устанавливаются аналоги лемм и теорем предыдущих параграфов, которые используются для доказательства компактности оператора $\mathscr{K}_c$.

Теорема 11. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}_c$ *— оператор вида (4) и характеристика* $c(x,y)$ *удовлетворяет условиям (5) и (6). Тогда оператор* $\mathscr{K}_c$, *действующий из пространства* $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ *в пространство* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *является компактным.*

В **третьей главе** диссертации изучается C^*-алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная всеми каноническими интегральными операторами с однородными ядрами вида (3), операторами умножения на радиально слабо осциллирующие функции и операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}(= e^{i\alpha \ln |x|})$. Эта алгебра существенно некоммутативна, т. е. фактор-алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — идеал компактных операторов, не является коммутативной. Для исследования алгебры $\mathfrak{B}$ применяется метод А. Б. Антоневича, позволяющий построить для нее операторное символическое исчисление, в терминах которого получен критерий нетеровости операторов из этой алгебры. Данная глава состоит из пяти параграфов.

В §3.1 приводятся некоторые сведения из теории C^*-алгебр и излагаются основы метода А. Б. Антоневича.

§3.2 посвящен C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ интегральных операторов с однородными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами.

Пусть $\Omega(\mathbb{R}_+)$ — замкнутая подалгебра C^*-алгебры $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, состоящая из всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций f, которые для любого компакта $X \subset \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям:

$$\lim_{t\to 0} \sup_{h\in X} |f(t) - f(ht)| = 0, \quad \lim_{t\to +\infty} \sup_{h\in X} |f(t) - f(ht)| = 0.$$

Обозначим через $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ множество всех заданных на $\mathbb{R}^n$ функций $a(x)$ таких, что $a(x) = a_0(|x|)$, где $a_0 \in \Omega(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Функции из класса $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *радиально слабо осциллирующими* функциями.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор вида (3) где функция $k(x, y)$ по–прежнему удовлетворяет условиям 1° и 2°, а условие 3° заменяется условием

$$\hat{3}^\circ \quad \varkappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)||y|^{-n/2}\, dy < \infty, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathfrak{A}$, являющуюся наименьшей C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы A вида

$$A = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} \mathscr{K}_j + F,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a_j \in \Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{K}_j$ — оператор вида (3) с ядром $k_j(x, y)$, а F — компактный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор.

Положим $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\Omega \setminus \mathbb{R}$, где $\mathcal{M}_\Omega$ — пространство максимальных идеалов алгебры $\Omega(\mathbb{R})$ непрерывных на $\mathbb{R}$ слабо осциллирующих на бесконечности функций[2]. Обозначим через $\mathfrak{M}$ компактификацию локально компактного пространства $\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой.

В работе[3] показано, что каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ можно поставить в соответствие определенную функцию $\sigma_A(m, \eta, \xi) \in C(\mathfrak{M})$, которая называется *символом* оператора A. Символ $\sigma_{[A]}(m, \eta, \xi)$ фактор–класса $A + \mathcal{F}$ определяется равенством $\sigma_{[A]}(m, \eta, \xi) = \sigma_A(m, \eta, \xi)$.

В данном параграфе установлены две важных леммы.

Лемма 1. *Отображение*

$$s\colon \mathfrak{A}/\mathcal{F} \to C(\mathfrak{M}), \quad A + \mathcal{F} \mapsto \sigma_{[A]}(m, \eta, \xi) \tag{7}$$

является $*$-изоморфизмом.

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ оператор*

$$A_\alpha = M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}}$$

принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$.

В § 3.3 рассматривается C^*-алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная всеми операторами A из алгебры $\mathfrak{A}$ и всеми операторами $M_{|x|^{i\alpha}}$ умножения на функции $|x|^{i\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Показано, что C^*-алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ и унитарным представлением τ_M группы $\mathbb{R}$, которое задается следующим образом:

$$\tau_M : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}, \quad \alpha \mapsto M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}.$$

Также доказано, что группа $\mathbb{R}$ действует на C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ автоморфизмами $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ вида

$$\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}\colon \mathfrak{A}/\mathcal{F} \to \mathfrak{A}/\mathcal{F}, \quad A + \mathcal{F} \mapsto M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}$$

топологически свободно.

[2] **Штейнберг, Б. Я.** Компактность и нетеровость операторов свертки с измеримыми коэффициентами на локально компактных группах: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Штейнберг Борис Яковлевич. - Ростов-на-Дону, 1982. - 141 с.

[3] **Авсянкин, О. Г.** Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными $SO(n)$-инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами / О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк // Матем. заметки, - 2007. - Т. 82, - вып. 2. - С. 163–176.

В § 3.4 для C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ строится операторное символическое исчисление, в терминах которого формулируется и доказывается основная теорема — критерий нетеровости операторов из этой алгебры.

Рассмотрим C^*-подалгебру $\mathfrak{B}_1$ C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$, порожденную всеми операторами умножения $\mathbb{M}_\sigma$ на функции из $C(\mathfrak{M})$ и всеми операторами сдвига U_α вида

$$(U_\alpha f)(m, \eta, \xi) = f(m, \eta, \xi - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $(\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0$ и $\mathfrak{B}_1^0$ множества всех конечных сумм вида

$$\sum_j A_j M_{|x|^{i\alpha_j}} + \mathcal{F} \quad \text{и} \quad \sum_j \mathbb{M}_{\sigma_j} U_{\alpha_j}$$

соответственно. На множестве $(\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0$ определим отображение

$$\psi_0 \colon (\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0 \to \mathfrak{B}_1^0, \quad \sum_j A_j M_{|x|^{i\alpha_j}} + \mathcal{F} \mapsto \sum_j \mathbb{M}_{\sigma_{[A_j]}} U_{\alpha_j}. \tag{8}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 12. *Соответствие ψ_0, заданное формулой (8), продолжается до $*$-изоморфизма $\psi : \mathfrak{B}/\mathcal{F} \to \mathfrak{B}_1$.*

Канонический $*$-гомоморфизм $p \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}/\mathcal{F}$, сопоставляющий каждому оператору B фактор–класс $B + \mathcal{F}$, позволяет определить $*$-гомоморфизм

$$S = \psi \circ p \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1.$$

Назовем символом оператора $B \in \mathfrak{B}$ его образ $S(B) \in \mathfrak{B}_1$.

Теорема 13. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Оператор B является нетеровым тогда и только тогда, когда его символ $S(B)$ обратим в $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$.*

В заключительном параграфе в алгебре $\mathfrak{B}$ выделен класс операторов вида

$$B = I + A_1 + A_2 M_{|x|^{i\alpha}}, \tag{9}$$

где $\alpha \neq 0$, A_1 и A_2 — операторы из алгебры $\mathfrak{A}$, символы которых удовлетворяют условию $\sigma_{A_1}(\infty) = 0$, $\sigma_{A_2}(\infty) = 0$.

Для таких операторов условие нетеровости получено в скалярной, а не в операторной форме. Кроме того, найдена формула для вычисления индекса таких операторов. Этот результат представлен в следующей теореме.

Теорема 14. *Для того чтобы оператор B вида (9) являлся нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$1 + \sigma_{A_1}(m, \eta, \xi) \neq 0, \quad \forall\, (m, \eta, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}. \tag{10}$$

Если условие (10) выполнено, то

$$\operatorname{ind} B = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_-, \xi)}{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_+, \xi)}, \tag{11}$$

где $\eta_\pm \in \mathcal{M}_\pm(\mathbb{R})$ — произвольные фиксированные точки, а $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m.

Подчеркнем, что начиная с некоторого значения $m^* \in \mathbb{Z}_+$, все слагаемые в формуле (11) равны нулю, а потому правая часть этой формулы фактически представляет собой конечную сумму.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе:

1. В классических пространствах Морри рассмотрены интегральные операторы свертки с характеристикой. В терминах этой характеристики получены условия ограниченности и компактности таких операторов.

2. Получены достаточные условия компактности интегральных операторов свертки с переменными коэффициентами, действующих из пространства Лебега в модифицированное пространство Морри и наоборот. Исследована компактность коммутатора оператора свертки и оператора умножения на функцию.

3. В локальных пространствах Морри рассмотрены канонические интегральные операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами. Найдены условия на коэффициенты, обеспечивающие компактность таких операторов. Также установлены условия ограниченности и компактности таких операторов, действующих из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри.

4. Построено операторное символическое исчисление для C^*-алгебры, порожденной каноническими интегральными операторами с однородными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами, а так же операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}$. В терминах построенного исчисления сформулирован и доказан критерий нетеровости операторов этой алгебры.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК

1. Авсянкин, О. Г. Об ограниченности и компактности одного класса операторов типа свертки в пространствах Морри / О. Г.Авсянкин, С. С. Ашихмин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, - 2022. - №3 (215). - С. 4–10. - DOI: 10.18522/1026-2237-2022-3-4-10.
2. Ашихмин, С. С. Об операторах типа свертки с ядрами из модифицированных пространств Морри / С. С. Ашихмин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. - 2024. - №2 (222). - С. 4–11. - DOI: 10.18522/1026-2237-2024-2-4-11.

Статьи в научных изданиях, входящих в Scopus, Web of Science, RSCI

3. Avsyankin, O. G. C*-algebra generated by integral operators with homogeneous kernels and oscillating coefficients of various types / O. G. Avsyankin, S. S. Ashikhmin // Journal of Mathematical Sciences. 2022. - V. 266. -№ 1. - P. 66–76. - DOI: 10.1007/s10958-022-05873-1.
4. Авсянкин, О.Г. О компактности интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри / О. Г. Авсянкин, С. С. Ашихмин // Матем. заметки, - 2024. - 116:3 - С. 327–338. - DOI: 10.4213/mzm14186.

Публикации в сборниках трудов конференций

5. Ашихмин, С. С. Критерии нетеровости интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами / С. С. Ашихмин // XXVIII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". XI Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Ростов н/Д - 2022. - С. 31. - Режим доступа: `https://conf-symp.sfedu.ru/2022_thesis.pdf` (дата обращения: 29.04.2025).
6. Ашихмин, С. С. О компактности операторов типа свертки с ядрами из модифицированных пространств Морри / С. С. Ашихмин // В сборнике: XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам. КРОМШ-2023. Сборник материалов международной конференции. Симферополь, 2023. - С. 28–29. - Режим доступа: `https://kromsh.site/materials/kromsh_abstracts/a2023/` (дата обращения: 29.04.2025).
7. Ашихмин, С. С. Достаточные условия компактности интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри / С. С. Ашихмин // В сборнике: Сборник материалов XIX Владикавказской молодежной математической школы (онлайн, 24-28 июня 2024 г.). -Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2024. - С. 43–44. - Режим доступа: `https://smath.ru/upload/iblock/001/Sborka_Tez_VMMSH_2024.pdf` (дата обращения: 29.04.2025).