Отзыв

официального оппонента на диссертацию Ашихмина Сергея Сергеевича «Некоторые классы интегральных операторов с однородными и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Основными объектами исследования представленной диссертации являются интегральные операторы с разностными и однородными ядрами. Задачами являются получение достаточных условий на ядра и характеристики этих операторов, обеспечивающих их ограниченность и компактность из пространства Лебега и из модифицированного пространства Морри в пространство Морри. Кроме того, исследуются условия нетеровости операторов из C^*-алгебры, порожденной некоторыми каноническими интегральными операторами.

Интегральные операторы с однородными и разностными ядрами с момента своего появления и до наших дней остаются важным объектом исследований. Их значимость обусловлена фундаментальной ролью в различных разделах математики: гармоническом анализе, теории линейных операторов, теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также обширными приложениями. Ранее такие операторы исследовались в пространствах Лебега и Морри, для них в трудах С.Г. Самко, Н.К. Карапетянца, В.И. Буренкова, Н.Г. Самко, О.Г. Авсянкина и др. построена достаточно полная теория.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, перечня условных обозначений и списка литературы. Объем работы — 110 страниц.

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, формулируются цели и задачи исследования, приводятся основные положения, выносимые на защиту, а также дается краткое описание работы.

Первая глава, по существу, состоит из двух частей. В первой части в классических пространствах Морри рассматриваются интегральные операторы вида

$$(\mathscr{C}_b\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x,y)c(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Установлены условия на характеристику $b(x,y)$, при которых оператор $\mathscr{C}_b$ является ограниченным и компактным. Как следствие, получен критерий нетеровости операторов вида $\alpha I + \mathscr{C}_b$. Во второй части этой главы рассматриваются операторы типа свертки, действующие из пространства Лебега в пространство Морри и из модифицированного пространства Морри в пространство Морри. Получены достаточные условия компактности произведения оператора свертки и оператора умножения на функцию, а также коммутатора таких операторов.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию компактности в локальных пространствах Морри операторов вида $M_a\mathscr{K}M_b$, где $\mathscr{K}$ — интегральный оператор, ядро которого однородно степени $(-n)$ и инвариантно относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$, а M_a и M_b — операторы умножения на ограниченные функции a и b соответственно. Также исследована компактность оператора с однородным ядром и характеристикой $c(x,y)$, являющегося естественным обобщением оператора $M_a\mathscr{K}M_b$. Во втором параграфе этой главы аналогичные вопросы исследованы для операторов, действующих из весового пространства Лебега со степенным весом в локальное пространство Морри.

Третья глава посвящена исследованию C^*-алгебры, порожденной каноническими интегральными операторами с однородными ядрами, опера-

торами умножения на радиально слабо осциллирующие функции и операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}$. Для нее строится операторное символьное исчисление, которое позволяет доказать критерий нетеровости операторов этой алгебры. Кроме этого, выделен специальный класс операторов, для которых критерий нетеровости выражается в скалярной форме и приводится формула для вычисления их индекса.

Результаты, полученные в данной диссертации, строго обоснованы с использованием современных математических методов. Доказательства всех утверждений достаточно подробны и математически корректны. Положения и выводы диссертации прошли серьезную апробацию на международных конференциях и научных семинарах. Таким образом, справедливость результатов диссертационного исследования сомнений не вызывает.

Результаты диссертации носят теоретический характер. Их научная ценность заключается в том, что они вносят существенный вклад в теорию интегральных операторов. Эти результаты могут быть применены для исследования соответствующих классов интегральных уравнений, а также в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Имеются следующие замечания к диссертации:

1. В теоремах 1.2.2 и 1.2.3 получены два достаточных условия на характеристику $b(x,y)$, при выполнении которых оператор $\mathscr{C}_b$ компактен в пространстве Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. В диссертации не проведено сравнение этих условий.

2. На странице 22 отсутствует объяснение или ссылка по поводу плотности множества $\mathcal{S}$ функций вида (1.11) в $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

3. На странице 49 написано: "Известно (см. [76]), что именно в локальных пространствах Морри эти операторы ограничены". Выбор слова "именно" не удачен, т.к. фраза звучит так, как будто только в локальных пространствах Морри можно получать результаты об ограниченности. В [76] доказана ограниченность в глобальных пространствах Морри некото-

рого подкласса таких операторов.
Отметим, что диссертант потерял возможность исследовать компактность операторов в глобальных пространствах Морри в случае "радиальных" ядер, например, для многомерного оператора Харди и двойственного к нему.

Эти замечания не снижают значимость научных результатов диссертации С.С. Ашихмина, которая является законченным научным исследованием достаточно высокого уровня. Основные научные положения диссертации отражены в 4 статьях, среди которых одна статья опубликована в журнале «Математические заметки», входящем в базы данных Scopus и Web of Science, одна статья – в журнале «Journal of Mathematical Sciences», входящем в базу данных Scopus и 2 статьи – в журнале «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки», входящем в список ВАК. Также имеются тезисы докладов трех международных конференций.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. В нем четко прописаны основные положения, выносимые на защиту, научная новизна и значимость полученных результатов

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Ашихмина Сергея Сергеевича «Некоторые классы интегральных операторов с однородными и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри» отвечает всем требованиям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет», и паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Диссертация оформлена в соответствии с пп. 3.1–3.2 Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет».

Таким образом, соискатель Ашихмин Сергей Сергеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
заведующий лабораторией прикладной математики
Комплексного научно-исследовательского
института им. Х. И. Ибрагимова РАН,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
доцент

Умархаджиев Салаудин Мусаевич

11 августа 2025 г.

364020, г. Грозный, В. Алиева
(Старопромысловское шоссе), 21 а
Комплексный научно-исследовательский
институт им. Х. И. Ибрагимова РАН
https://kniiran.ru/
8 (8712) 22 26 28
kniiran@mail.ru

Подпись Умархаджиева С. М.
заверяю
Ученый секретарь КНИИ РАН
Джамбулатов Р. Р.
12.08.2025