МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Ашихмин Сергей Сергеевич

Некоторые классы интегральных операторов с однородными и разностными ядрами в пространствах Лебега и Морри

Специальность 1.1.1. — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация
на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Авсянкин О. Г.

Ростов-на-Дону — 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В данной диссертационнной работе основными объектами исследования являются интегральные операторы типа свертки в пространствах Морри и интегральные операторы с однородными ядрами в пространствах Лебега и Морри.

Теория интегральных операторов типа свертки имеет богатую историю. Ее истоки зародились еще в начале XIX века в связи с исследованиями линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (см., например, обзор Н. Бурбаки [17]), а первые результаты в исследовании индекса, нетеровости и разрешимости таких операторов связаны с именами Н. Винера и Э. Хопфа.

Приложения теории интегральных операторов типа свертки весьма разнообразны. Такие операторы широко применяются в теории обработки сигналов и изображений, где они используются для описания различных фильтров, сглаживания, выделения контуров и других преобразований, связанных с изменением состояния пикселей изображения в зависимости от его соседей ([63]). В теории вероятностей и статистике операторы свертки также часто используются для изучения распределений случайных величин, особенно в контексте свертки функций плотности вероятности ([62], [61]). Операторы свертки находят применение в вычислительных методах для моделирования механики сплошной среды (твердого тела или жидкости, см. [70]).

Широта применений уравнений типа свертки как в практических задачах естественных наук (среди которых теория переноса нейтронов, некоторые задачи астрофизики и биологии; подробнее см. в [31]), так и в чистой математике обусловила глубокое и широкое развитие теории таких уравнений. Свою лепту в нее внесли как зарубежные математики, например А. Кальдерон [51], И. Стейн [79], Л. Хёрмандер [67], так и отечественные — Ф. Д. Гахов [21], И. Ц. Гохберг [22], М. Г. Крейн [32] и другие. Большой вклад в становление этой теории внесли ростовские математики — А. В. Козак [30], А. Э. Пасенчук [38], В. С. Рабинович [39], И. Б. Симоненко [40, 41], Б. Я. Штейнберг [45].

В математике очень важную роль играют пространства Лебега. Поэтому именно в этих пространствах, в первую очередь, получила развитие теория операторов свертки. К настоящему времени для операторов свертки в L_p–пространствах имеется вполне завершенная теория. Не претендуя на полноту, помимо упомянутой выше монографии Ф. Д. Гахова, укажем монографии [23] и [53, 54], в которых отражены основные аспекты теории таких операторов.

Теория пространств Морри берет свое начало в работе американского математика Ч. Морри (младшего) [71], и продолжает активно развиваться в наши дни. Напомним, что (глобальное) пространство Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, определяется как совокупность всех локально суммируемых с p–ой степенью на $\mathbb{R}^n$ функций $\varphi(y)$ таких, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda}\left(\int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} |\varphi(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Основные сведения об этих пространствах можно почерпнуть в [47], [74] и [75].

Пространства Морри оказались весьма полезным инструментом для исследования регулярности решений различных типов уравнений в частных производных (см. [73]). В становлении теории пространств Морри и их обобщений заметную роль сыграли исследования интегральных операторов. Первоначально изучалась ограниченность классических операторов анализа — максимального оператора, потенциала Рисса, сингулярного интегрального оператора (см., например, [72], [19, 20, 55, 56] и обзор В. И. Буренкова [57, 57], а также двухтомную монографию [77] - [78]). В последние десятилетия внимание обратилось к операторам свертки в пространствах типа Морри. Им посвящены работы [3], [5], [8], [18].

В представленной диссертационной работе в пространствах типа Морри исследуются композиции интегральных операторов свертки и операторов умножения на существенно ограниченную функцию, а также операторы свертки с характеристикой.

Другим важным классом интегральных операторов являются операторы с однородными ядрами. Свои основы теория этих операторов (одномерный случай) берет в работах Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. [66]). В 60–е годы Л. Г. Михайлов не только продолжил эти исследования ([34], [36]), но и инициировал изучение качественно отличающегося многомерного обобщения ([35], [37]). Дальнейшее формирование теории многомерных операторов с однородными ядрами происходило в работах О. Г. Авсянкина, В. М. Деундяка, Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, С. М. Умархаджиева и других авторов (см. [1], [2], [9], [10], [11], [24], [69], [68], [27], [28], [42], [43] и цитированную в них литературу).

Наиболее важным является подкласс многомерных интегральных операторов, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$. При этом предполагается, что ядро удовлетворяют некоторому условию суммируемости, обеспечивающему ограниченность соответствующего оператора. Следуя работе [49], операторы этого подкласса будем называть *каноническими.* В настоящее время для канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в L_p–пространствах имеется достаточно полная теория.

В данной работе в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ исследуются канонические многомерные интегральные операторы с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами сложной структуры, а также изучаются операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами в локальных пространствах Морри.

Цели работы. *Целью* диссертационной работы является исследование ограниченности и компактности интегральных операторов с разностными и однородными ядрами в пространствах типа Морри, а также исследование нетеровости канонических интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие *задачи*.

1. Исследовать условия ограниченности и компактности интегральных операторов свертки с характеристикой в пространствах Морри.

2. Исследовать условия компактности интегральных операторов типа свертки, действующих из пространства Лебега в пространство Морри и из модифицированного пространства Морри в пространство Морри.

3. Изучить компактность канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами в локальных пространствах Морри.

4. Найти условия ограниченности канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами, действующих из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри, и исследовать компактность таких операторов с переменными коэффициентами.

5. Исследовать C^*-алгебру, порожденную каноническими многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и радиальными осциллирующими коэффициентами различных типов.

Объект исследования — интегральные операторы типа свертки и канонические многомерные интегральные операторы с однородными ядрами.

Предмет исследования — условия ограниченности и компактности интегральных операторов типа свертки в пространствах типа Морри, условия ограниченности и компактности канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри, критерии нетеровости канонических многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами.

Методы исследования. Используются методы функционального анализа, теории операторов и теории банаховых алгебр.

Научная новизна исследования. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическое значение исследования. Полученные результаты относятся к области фундаментальных исследований.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы для построения решений уравнений, содержащих интегральные операторы с разностными и однородными ядрами. Такие уравнения находят свое применение в моделировании некоторых механических и биологических процессов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Получены условия ограниченности и компактности в пространстве Морри интегрального оператора свертки с характеристикой.

2. Получены достаточные условия компактности операторов типа свертки в случае, когда ядро этого оператора принадлежит модифицированному пространству Морри, а сам оператор действует из пространства Лебега в пространство Морри, и в случае, когда ядро принадлежит пространству Лебега, а оператор действует из модифицированного пространства Морри в пространство Морри.

3. Найдены классы существенно ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых произведение канонического многомерного интегрального оператора с однородным ядром и операторов умножения на такие функции является компактным оператором в локальном пространстве Морри.

4. Установлены достаточные условия ограниченности канонических интегральных операторов с однородными ядрами, действующих из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри, и получены условия компактности таких операторов с переменными коэффициентами.

5. Получен критерий нетеровости операторов из C^*-алгебры, порожденной каноническими интегральными операторами с однородными ядрами и операторами умножения на радиальные осциллирующие функции различных типов.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, выступлениями на конференциях и семинарах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях.

Апробация результатов. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих конференциях.

• XXVII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование», XII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2022);

• Международная научная конференция «OTHA: Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и функционального анализа» (Ростов-на-Дону, 2022, 2024);

• XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам (Кача (Севастополь), 2023);

• XIX Владикавказская молодежная математическая школа (Владикавказ, 2024);

• Семинар кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (руководители семинара — О. Г. Авсянкин и А. Н. Карапетянц).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 научных публикациях: [6], [7], [13], [14], [15], [16], [48]. Работы [6], [14] опубликованы в журнале, входящем в Перечень ВАК РФ. Статья [48] входит в международную базу данных Scopus, а статья [7] входит в базы данных Scopus и Web of Science. Статьи [13], [15] и [16] опубликованы в материалах конференций.

Статьи [6], [7] и [48] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. В этих работах О. Г. Авсянкину принадлежат постановка задач, указание методов исследования и общее руководство. Автору диссертации принадлежат формулировки и доказательства всех результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы, содержащего 79 наименований. Объем работы составляет 110 страниц.

Первая глава диссертации посвящена вопросам ограниченности и компактности интегральных операторов типа свертки в пространствах Морри и состоит из четырех параграфов. Основной объект исследования этой главы — интегральный оператор типа свертки вида

$$(\mathscr{C}_b\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x,y)c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где ядро $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Функция $b(x,y)$ называется *характеристикой.*

В параграфе 1.1 даются определения основных классов функций и функциональных пространств, которые будут использоваться в этой и последующих главах.

Параграф 1.2 состоит из двух разделов. В разделе 1.2.1 устанавливается теорема об ограниченности интегрального оператора $\mathscr{C}_b$. В разделе 1.2.2 в терминах характеристики $b(x,y)$ получены достаточные условия компактности оператора $\mathscr{C}_b$ в пространстве Морри. Также показано, что если оператор $\mathscr{C}_b$ компактен, то его характеристика $b(x,y)$ имеет равный нулю предел на бесконечности. В качестве следствия получено условие нетеровости оператора вида $\alpha I + \mathscr{C}_b$ в терминах его символа.

Параграф 1.3 состоит из трех разделов. В нем исследуются интегральные операторы свертки

$$(\mathscr{C}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $c(x)$ принадлежит модифицированному пространству Морри. Предполагается, что оператор $\mathscr{C}$ действует из пространства Лебега в определенным образом связанное с ним пространство Морри.

В разделе 1.3.1 устанавливаются достаточные условия компактности оператора $M_a\mathscr{C}$, где M_a — оператор умножения на существенно ограниченную функцию $a(x)$. В качестве следствия доказана компактность произведения $P_D\mathscr{C}$, где P_D — оператор умножения на характеристическую функцию ограниченного измеримого множества D. В разделе 1.3.2 изучается коммутатор

$$([M_a, \mathscr{C}]\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y))c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

операторов $\mathscr{C}$ и M_a. Показано, что если функция $a(x)$ принадлежит классу функций типа слабо осциллирующих на бесконечности, то этот коммутатор является компактным оператором, действующим из пространства Лебега в пространство Морри. С помощью этого результата получены достаточные условия компактности оператора $\mathscr{C}M_a$. В разделе 1.3.3 рассматривается оператор $\mathscr{C}_b$ с ограниченной характеристикой $b(x,y)$. Получены условия компактности оператора $\mathscr{C}_b$ в терминах поведения его характеристики на бесконечности, а также условия, при которых эта характеристика имеет на бесконечности предел равный нулю.

В параграфе 1.4 оператор свертки $\mathscr{C}$ рассматривается с другого ракурса — предполагается, что его ядро $c(x)$ принадлежит пространству Лебега, а сам оператор действует из модифицированного пространства Морри в (глобальное) пространство Морри. Результаты этого параграфа по формулировке аналогичны результатам предыдущего.

Вторая глава диссертации содержит четыре параграфа. Основной объект исследования этой главы — действующий в локальном пространстве Морри интегральный оператор

$$(\mathscr{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $k(x, y)$ удовлетворяет условиям однородности степени $(-n)$, инвариантности относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$ и определенному условию суммируемости.

Исследование компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами и переменными коэффициентами в локальных пространствах Морри значительно отличается от исследования таких операторов в L_p–пространствах. В L_p–пространствах существенным образом использовался прием перехода к сопряженному оператору, действующему в пространстве $L_{p'}$. При таком переходе внутренний коэффициент «переходил» во внешний и наоборот. При работе с пространствами Морри такой прием невозможен, поскольку пространство, сопряженное к пространству Морри является пространством другой природы. Поэтому в данной главе основным объектом исследования является оператор вида $M_a\mathscr{K}M_b$.

В параграфе 2.1 содержится постановка задачи. В параграфе 2.2 доказываются два важных вспомогательных утверждения. Во-первых, здесь получена оценка нормы

$$\|(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t) - (\mathscr{K}M_b\varphi)(x)\|_{L_p(S(R_1,R_2))},$$

где $S(R_1, R_2)$ — n-мерный сферический слой с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2. Во-вторых, доказана основная лемма о компактности оператора $M_a\mathscr{K}M_b$ в случае, когда $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные финитные функции, носитель которых не содержит начало координат.

В параграфе 2.3 достаточные условия компактности оператора $M_a\mathscr{K}M_b$ получены для существенно более широкого класса коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$. Из этого результата выводятся следствия, которые применяются к доказательству компактности оператора вида $\mathscr{K}_c$ с характеристикой $c(x, y)$.

В параграфе 2.4 рассматривается оператор $\mathscr{K}$, действующий из весового пространства Лебега со степенным весом $|y|^{-\alpha}$ в локальное пространство Морри. Доказывается ограниченность этого оператора, а также исследуется компактность операторов вида $M_a\mathscr{K}M_b$ и $\mathscr{K}_c$.

В третьей главе диссертации изучается C^*-алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная всеми каноническими интегральными операторами с однородными ядрами, операторами умножения на радиально слабо осциллирующие функции и операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}(= e^{i\alpha \ln |x|})$. Эта алгебра существенно некоммутативна, т. е. фактор-алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — идеал компактных операторов, не является коммутативной. Для исследования алгебры $\mathfrak{B}$ применяется метод А. Б. Антоневича, позволяющий построить для нее операторное символическое исчисление, в терминах которого получен критерий нетеровости операторов из этой алгебры. Данная глава состоит из пяти параграфов.

В параграфе 3.1 приводятся основы метода А. Б. Антоневича исследования C^*-алгебр. В параграфе 3.2 вводится C^*-алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная каноническими интегральными операторами с однородными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами. Доказываются некоторые свойства операторов из этой алгебры.

В параграфе 3.3 рассматривается C^*-алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная всеми операторами A из алгебры $\mathfrak{A}$ и всеми операторами $M_{|x|^{i\alpha}}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Описана структура фактор–алгебры $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$. А именно показано, что C^*-алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ и унитарным представлением τ_M группы $\mathbb{R}$, которое задается следующим образом:

$$\tau_M : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}, \quad \alpha \mapsto M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}.$$

Также доказана лемма о топологически свободном действии группы $\mathbb{R}$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ автоморфизмами, сопоставляющими каждому элементу $A + \mathcal{F}$ элемент $M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

В параграфе 3.4 для C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ строится операторное символическое исчисление, в терминах которого формулируется и доказывается основная теорема — критерий нетеровости операторов из этой алгебры.

В заключительном параграфе выделен класс операторов из алгебры $\mathfrak{B}$, для которых условие нетеровости получено в скалярной, а не в операторной форме. Кроме того, найдена формула для вычисления индекса таких операторов.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Олега Геннадиевича Авсянкина за чуткое наставничество, создание исключительно дружелюбной атмосферы общения и теплую поддержку.

Диссертационная работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России № 075-02-2025-1720.

Глава 1

Интегральные операторы типа свертки в пространствах Морри

§1.1 Предварительные сведения

Приведем основные сведения о пространствах Морри, которыми будем пользоваться во всем дальнейшем тексте. Более подробную информацию можно найти, например, в книгах [47], [74].

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Обозначим через $L_p(D)$ пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_D |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \; 1 \leqslant p < \infty; \quad \|\varphi\|_{L_\infty(D)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |\varphi(x)|.$$

В случае $D = \mathbb{R}^n$ будем использовать обозначение $\| \cdot \|_p$ вместо $\| \cdot \|_{L_p(D)}$. Далее, будем говорить, что $\varphi \in L_p^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если $\varphi \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Говорят, что функция* $\varphi \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *если* $\varphi \in L_p^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|\varphi\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|\varphi\|_{p,\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{B}(x,r)$ *— шар в* $\mathbb{R}^n$ *радиуса* r *с центром в точке* x.

Относительно обычных линейных операций и нормы, определяемой формулой (1.1), множество $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ образует банахово пространство, которое называют (глобальным) пространством Морри.

Пространства Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными, т. е. состоят не только из функций, эквивалентных нулю на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$. При $\lambda = 0$ и $\lambda = n/p$ пространства Морри совпадают с L_p–пространствами, а именно

$$L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n), \quad L_{p,n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Пример 1.1.1. *Классическим примером функции, принадлежащей пространству $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, где $0 < \lambda < n/p$, является функция $|x|^{\lambda - \frac{n}{p}}$. Таким образом, пространства Морри содержат важный класс функций, не принадлежащих пространствам $L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Помимо классических пространств Морри, рассматривается локальный вариант этих пространств.

Определение 1.1.2. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\lambda \geqslant 0$. Локальное пространство Морри $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ — это совокупность всех функций $\varphi \in L^{\mathtt{loc}}_p(\mathbb{R}^n)$, таких что*

$$\|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}} = \sup_{r>0} \frac{\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,r))}}{r^\lambda} < \infty. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda = 0$ локальное пространство Морри совпадает с L_p–пространством, т. е. $L^0_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$.

Как отмечено выше, из того, что функция φ принадлежит пространству $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, вообще говоря, не следует, что $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ Поэтому наряду с пространствами Морри возникает необходимость рассматривать пересечение $L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.1.3. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$, $[r]_1 := \min\{1, r\}$. Говорят, что функция $\varphi \in \widehat{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, если $\varphi \in L^{\mathtt{loc}}_p(\mathbb{R}^n)$ и*

$$\|\varphi\|_{\widehat{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|\varphi\|_{\widehat{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{[r]_1^\lambda} < \infty. \tag{1.4}$$

Пространства $\widehat{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ называют *модифицированными пространствами Морри.* Впервые такие пространства были введены и изучены в [26] (см. также [50], [64]).

Ниже нам понадобятся специальные классы существенно ограниченных функций, имеющих конечный предел на бесконечности. Следуя [68, 3.4], сформулируем следующие определения.

Определение 1.1.4. *Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, если существует такое число a_∞, что*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|t|>N} |a(t) - a_\infty| = 0.$$

Если $a_\infty = 0$, то будем говрить, что $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$

Определение 1.1.5. *Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, если существует такая постоянная a_∞, что*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N,|y|>N} |a(x,y) - a_\infty| = 0.$$

Если $a_\infty = 0$, то будем говорить, что $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Заметим, что класс $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ (класс $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$) представляет собой замыкание по L_∞–норме множества всех функций из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$), имеющих компактный носитель.

Обозначим через $C(\mathbb{R}^n)$ пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|,$$

а через $C_0(\mathbb{R}^n)$ — подпространство пространства $C(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Всюду в дальнейшем через M_a будем обозначать оператор умножения на функцию a, т. е.

$$(M_a\varphi)(x) = a(x)\varphi(x). \tag{1.5}$$

В случае, когда $a(x) = \chi_D(x)$, где χ_D — характеристическая функция измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$, будем писать P_D вместо M_{χ_D}, т. е.

$$(P_D\varphi)(x) = \chi_D(x)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \complement D. \end{cases}$$

Здесь и далее $\complement D$ означает дополнение множества D.

Далее, для произвольного банахова пространства X через $\mathcal{L}(X)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве X.

Определение 1.1.6. *Пусть X — банахово пространство. Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ называется нетеровым, если его образ* $\mathrm{Im}(A)$ *замкнут и*

$$\alpha = \dim \mathrm{Ker}(A) < \infty, \quad \beta = \dim \mathrm{Ker}(A^*) < \infty.$$

Число $\mathrm{ind}(A) = \alpha - \beta$ *называется индексом оператора A.*

§1.2 Интегральные операторы типа свертки с характеристикой в пространствах Морри

В пространстве Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим интегральные операторы вида

$$(\mathscr{C}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

и

$$(\mathscr{C}_b\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x,y)c(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

где $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Оператор $\mathscr{C}$ — это классический оператор свертки, а оператор $\mathscr{C}_b$ будем называть оператором свертки с *характеристикой* $b(x,y)$. Известно (см. [8]), что оператор $\mathscr{C}$ ограничен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем для любой функции $\varphi \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|c\|_1 \|\varphi\|_{p,\lambda}.$$

Иначе,

$$\|\mathscr{C}\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|c\|_1.$$

Замечание. Подчеркнем, что в локальных пространствах Морри оператор свертки не ограничен. Соответствующий контрпример можно найти, например, в статье [18].

Очевидно, что если характеристика $b(x, y)$ является ограниченной, то оператор $\mathscr{C}_b$ ограничен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\|\mathscr{C}\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|b\|_\infty \|c\|_1.$$

Цель данного параграфа — получить достаточные условия ограниченности оператора $\mathscr{C}_b$ в случае неограниченной функции $b(x, y)$, а также показать, что если функция $b(x, y)$ стремится к нулю на бесконечности, то оператор $\mathscr{C}_b$ будет компактным в пространствах Морри.

Так как операторы свертки в L_p–пространствах хорошо изучены, то, учитывая равенства (1.2), в дальнейшем мы исключаем из рассмотрения случаи $\lambda = 0$ и $\lambda = n/p$.

1.2.1 Теорема об ограниченности

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор $\mathscr{C}_b$ вида (1.7). Прежде всего установим одно достаточное условие ограниченности этого оператора в пространстве Морри.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\beta = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x, x - y)|^{p'} |c(y)| \, dy < \infty. \tag{1.8}$$

Тогда оператор $\mathscr{C}_b$ *ограничен в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *причем для любой функции* $\varphi \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathscr{C}_b \varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \beta^{1/p'} \|c\|_1^{1/p} \|\varphi\|_{p,\lambda}. \tag{1.9}$$

Доказательство. С помощью замены переменной $x - y = t$ запишем оператор $\mathscr{C}_b$ в виде

$$(\mathscr{C}_b\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x, x-y)c(y)\varphi(x-y)dy.$$

Тогда, учитывая равенство

$$|b(x, x-y)c(y)\varphi(x-y)| = \big(|b(x, x-y)||c(y)|^{1/p'}\big)\big(|c(y)|^{1/p}|\varphi(x-y)|\big),$$

и применяя неравенство Гельдера, получим

$$|(\mathscr{C}_b\varphi)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x, x-y)||c(y)||\varphi(x-y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x, x-y)|^{p'}|c(y)|\, dy\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)||\varphi(x-y)|^p\, dy\Bigg)^{1/p}.$$

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x, x-y)|^{p'}|c(y)|\, dy \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x, x-y)|^{p'}|c(y)|\, dy = \beta,$$

то приходим к неравенству

$$|(\mathscr{C}_b\varphi)(x)| \leqslant \beta^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)||\varphi(x-y)|^p\, dy\Bigg)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} \leqslant \beta^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)||\varphi(t-y)|^p\, dy\Bigg)^{1/p}.$$

Изменим порядок интегрирования и во внутреннем интеграле сделаем замену $z = t - y$. Тогда

$$\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} \leqslant \beta^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)|\, dy \int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} |\varphi(t-y)|^p\, dt\Bigg)^{1/p} =$$

$$= \beta^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)|\, dy \int\limits_{\mathbb{B}(x-y,r)} |\varphi(z)|^p\, dz\Bigg)^{1/p} =$$

$$= \beta^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)|\, \|\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(x-y,r))}\, dy\Bigg)^{1/p}.$$

Используя определение нормы в пространстве Морри, получим

$$\begin{aligned}\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{p,\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda}\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} \leqslant\\ \leqslant \beta^{1/p'} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)|\,\|\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(x-y,r))}\,dy\Bigg)^{1/p} \leqslant\\ \leqslant \beta^{1/p'} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)|\Big(r^{-\lambda}\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x-y,r))}\Big)^p\,dy\Bigg)^{1/p} \leqslant\\ \leqslant \beta^{1/p'}\|c\|_1^{1/p}\|\varphi\|_{p,\lambda}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что для выполнения условия (1.8) функция $b(x,y)$ не обязана быть ограниченной. Приведем соответствующий пример.

Пример 1.2.1. *Рассмотрим функцию*

$$b(x,y) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, y \in \mathbb{R}^n,\\ \left(\dfrac{|y|}{x^2}\right)^{1/p'}, & |x| \geqslant 1, y \in \mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Положим $c(y) = e^{-|y|}$. *Тогда*

$$\beta = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|x-y|}{x^2} e^{-|y|}\,dy = \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant 1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right| e^{-|y|}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant 1} \left(\frac{1}{|x|}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\,dy + \frac{1}{x^2}\int\limits_{\mathbb{R}} |y|e^{-|y|}\,dy\right) < \infty.$$

Если $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то условие (1.8) заведомо выполнено, причем

$$\beta \leqslant \|b\|_\infty^{p'}\|c\|_1.$$

Тогда из неравенства (1.9) следует, что

$$\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|b\|_\infty\|c\|_1\|\varphi\|_{p,\lambda}. \tag{1.10}$$

Среди операторов свертки часто встречаются операторы с ограниченными и суммируемыми ядрами. Для таких операторов условие (1.8) упрощается.

Следствие 1.2.1. *Пусть $c \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и функция $b(x,y)$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x,y)|^{p'}\,dy < \infty.$$

Тогда оператор $\mathscr{C}_b$ ограничен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Учитывая ограниченность функции c преобразуем условие (1.8). Имеем

$$\begin{aligned}\beta = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x,x-y)|^{p'}|c(y)|\,dy \leqslant \\ \leqslant \|c\|_\infty \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x,x-y)|^{p'}\,dy = \\ = \|c\|_\infty \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(x,t)|^{p'}\,dt < \infty.\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 1.2.1 оператор $\mathscr{C}_b$ ограничен. □

Замечание 1. Из этого следствия вытекает, что если $a \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $\mathscr{C}M_a$ ограничен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 Теоремы о компактности

В этом разделе всюду предполагается, что $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Как было отмечено выше, в этом случае оператор $\mathscr{C}_b$ ограничен в пространстве Морри и выполнено условие (1.10). Изучим компактность оператора $\mathscr{C}_b$.

Лемма 1.2.1. *Пусть D — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда операторы $P_D\mathscr{C}_b$ и $\mathscr{C}_bP_D$ компактны в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Докажем компактность оператора $P_D\mathscr{C}_b$. Пусть вначале

$$b(x,y) = b_1(x)b_2(y).$$

Тогда $\mathscr{C}_b = M_{b_1}\mathscr{C}M_{b_2}$, где $\mathscr{C}$ — оператор вида (1.6), а M_{b_j} — оператор умножения на функцию b_j, $j = 1,2$. Следовательно,

$$P_D\mathscr{C}_b = P_DM_{b_1}\mathscr{C}M_{b_2} = M_{b_1}P_D\mathscr{C}M_{b_2}.$$

Так как оператор $P_D\mathscr{C}$ компактен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (см. [8], следствие 1), то оператор $P_D\mathscr{C}_b$ также компактен. Очевидно, что оператор $P_D\mathscr{C}_b$ является компактным и в случае, когда

$$b(x,y) = \sum_{j=1}^{m} b_{1j}(x)b_{2j}(y), \tag{1.11}$$

где m — произвольное натуральное число.

Пусть теперь $b(x,y)$ — произвольная функция из $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Так как множество $\mathcal{S}$ функций вида (1.11) всюду плотно в $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то найдется такая последовательность $\{b_k(x,y)\} \subset \mathcal{S}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \|b - b_k\| = 0.$$

Тогда в силу (1.10)

$$\|P_D\mathscr{C}_b - P_D\mathscr{C}_{b_k}\| \leqslant \|P_D\|\|\mathscr{C}_{b-b_k}\| \leqslant \|b - b_k\|\,\|c\|_1 \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, оператор $P_D\mathscr{C}_b$ является компактным как предел последовательности компактных операторов $P_D\mathscr{C}_{b_k}$ в равномерной операторной топологии.

Компактность оператора $\mathscr{C}_bP_D$ доказывается аналогично. $\square$

Следующая теорема является основным результатом этого раздела.

Теорема 1.2.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1) если $b \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то оператор $\mathscr{C}_b$ компактен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и оператор $\mathscr{C}_b$ является компактным в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то $b_\infty = 0$.

Доказательство. 1) Рассмотрим шар $\mathbb{B}(0,N)$, где N — произвольное натуральное число. Тогда для оператора $\mathscr{C}_b$ справедливо равенство

$$\mathscr{C}_b = P_{\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b + P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_bP_{\mathbb{B}(0,N)} + P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_bP_{\complement\mathbb{B}(0,N)}.$$

По лемме 1.2.1 оператор

$$T_N = P_{\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b + P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\mathbb{B}(0,N)}$$

является компактным. Оценим норму

$$\|\mathscr{C}_b - T_N\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} = \|P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))}. \tag{1.12}$$

Заметим, что

$$\big(P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\varphi\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_N(x) b(x,y)\chi_N(y)c(x-y)\varphi(y)dy,$$

где χ_N — характеристическая функция множества $\complement\mathbb{B}(0,N)$. Тогда из неравенства (1.10) следует, что

$$\|P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N,|y|>N} |b(x,y)|\,\|c\|_1 \to 0$$

при $N \to \infty$. В силу того, что

$$\lim_{N\to\infty} \|\mathscr{C}_b - T_N\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} = 0$$

и T_N — компактный оператор, получаем, что оператор $\mathscr{C}_b$ также является компактным.

2) Так как $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то $(b - b_\infty) \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, а потому оператор $\mathscr{C}_{b-b_\infty}$ является компактным. Тогда из равенства

$$b_\infty \mathscr{C} = \mathscr{C}_b - \mathscr{C}_{b-b_\infty} \tag{1.13}$$

следует компактность оператора $\mathscr{C}_{b_\infty}$. Так как оператор $\mathscr{C}$ не компактен, то $b_\infty = 0$. □

Из теоремы 1.2.2 следует, что если $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то операторы $M_a\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}M_a$, где $\mathscr{C}$ — оператор вида (1.6), компактны в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. (Ранее этот результат был получен в работе [8].)

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$\mathscr{A} = \alpha I + \mathscr{C}_b,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathscr{C}_b$ — оператор вида (1.7), а I — тождественный оператор. Предполагая, что $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ назовем символом оператора $\mathscr{A}$ функцию

$$\sigma(\xi) = \alpha + b_\infty \widehat{c}(\xi) = \alpha + b_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x) e^{i\xi \cdot x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие 1.2.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, функция $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и функция $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Для того чтобы оператор $\mathscr{A}$ был нетеровым в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял условию*

$$\sigma(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n, \tag{1.14}$$

где $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой. Если условие (1.14) выполнено, то $\operatorname{ind}(\mathscr{A}) = 0$.

Доказательство. Так как выполняется соотношение (1.13), то оператор $\mathscr{A}$ можно представить в виде

$$\mathscr{A} = \alpha I + b_\infty \mathscr{C} + \mathscr{C}_{b-b_\infty}.$$

Из того, что $(b - b_\infty) \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, по теореме 1.2.2 следует компактность оператора $\mathscr{C}_{b-b_\infty}$. Значит, оператор $\mathscr{A}$ нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор $\alpha I + b_\infty \mathscr{C}$, причем их индексы равны. Согласно результатам работы [5] условие (1.14) является необходимым и достаточным для нетеровости и обратимости оператора $\alpha I + b_\infty \mathscr{C}$. Отсюда вытекает справедливость следствия. $\square$

Пример 1.2.2. *Рассмотрим оператор вида*

$$(\mathscr{A}\varphi)(x) = \varphi(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} \tanh(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{-|x-y|} \varphi(y)\, dy.$$

где $\tanh(x)$ — гиперболический тангенс. Нетрудно видеть, что функция

$$b(x, y) = \tanh(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

принадлежит классу $B^{\sup}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$*, причем* $b_\infty = 1$*. Следовательно, символом оператора* $\mathscr{A}$ *является функция*

$$\sigma(\xi) = 1 + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi x - |x|}\, dx =$$

$$= 1 + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\xi x + x}\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i\xi x - x}\, dx = 1 + \frac{1}{i\xi + 1} - \frac{1}{i\xi - 1} = 1 + \frac{2}{\xi^2 + 1}.$$

Так как

$$\sigma(\xi) = 1 + \frac{2}{\xi^2+1} \neq 0 \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}},$$

то по следствию (1.2.2) оператор $\mathscr{A}$ *нетеров, причем* $\operatorname{ind}(\mathscr{A}) = 0$.

Приведем еще одно достаточное условие компактности оператора $\mathscr{C}_b$.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $1 < p < \infty$*,* $0 < \lambda < n/p$*,* $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и функция* $b(x,y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{mes}\{y\colon |y| > N, \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |b(x,y)| > \varepsilon\} = 0. \tag{1.15}$$

Тогда оператор $\mathscr{C}_b$ *компактен в пространстве* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$*.*

Доказательство. Рассуждения проведем в два этапа.

1) Пусть сначала $c \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Повторяя доказательство теоремы 1.2.2, приходим к равенству (1.12), где T_N — компактный оператор. Докажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \|P_{\complement\mathbb{B}(0,N)} \mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\| = 0. \tag{1.16}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Введем обозначения:

$$U_{N,\varepsilon} = \{y\colon |y| > N, \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |b(x,y)| > \varepsilon\},$$

$$V_{N,\varepsilon} = \{y\colon |y| > N, \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |b(x,y)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Ясно, что $U_{N,\varepsilon} \cup V_{N,\varepsilon} = \complement\mathbb{B}(0,N)$ и $U_{N,\varepsilon} \cap V_{N,\varepsilon} = \varnothing$. Кроме того,

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{mes}(U_{N,\varepsilon}) = 0. \tag{1.17}$$

Представим оператор $P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}$ в виде

$$\bigl(P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\varphi\bigr)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b_N(x,y)c(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где

$$b_N(x,y) = \chi_N(x)b(x,y)\chi_N(y), \tag{1.18}$$

а χ_N — характеристическая функция множества $\complement\mathbb{B}(0,N)$. Согласно неравенству (1.9)

$$\|P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \beta_N^{1/p'}\|c\|_1^{1/p}, \tag{1.19}$$

где

$$\beta_N = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |b_N(x,x-t)|^{p'}|c(t)|\,dt.$$

Полагая $y = x-t$ и учитывая (1.18), получаем

$$\beta_N = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |b_N(x,y)|^{p'}|c(x-y)|\,dy =$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N}\int\limits_{|y|\geqslant N} |b(x,y)|^{p'}|c(x-y)|\,dy \leqslant \beta_N^1+\beta_N^2,$$

где

$$\beta_N^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N}\int\limits_{U_{N,\varepsilon}} |b(x,y)|^{p'}|c(x-y)|\,dy,$$
$$\beta_N^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N}\int\limits_{V_{N,\varepsilon}} |b(x,y)|^{p'}|c(x-y)|\,dy.$$

Оценим β_N^1. Так как $c\in C_0(\mathbb{R}^n)$, то функция c ограничена. Положим $\mu = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|c(x)|$. Тогда

$$\beta_N^1 \leqslant \mu\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N}\int\limits_{U_{N,\varepsilon}} |b(x,y)|^{p'}\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \mu\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N, y\in U_{N,\varepsilon}} |b(x,y)|^{p'}\operatorname{mes}(U_{N,\varepsilon}) \leqslant$$
$$\leqslant \mu\|b\|_\infty^{p'}\operatorname{mes}(U_{N,\varepsilon}).$$

Значит, в силу (1.17) $\beta_N^1 \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, по выбранному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_0, что для всех $N > N_0$ имеет место неравенство $\beta_N^1 < \varepsilon^{p'}$.

Для второго слагаемого получаем оценку

$$\beta_N^2 \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N, y\in V_{N,\varepsilon}} |b(x,y)|^{p'} \int\limits_{V_{N,\varepsilon}} |c(x-y)|\,dy \leqslant \varepsilon^{p'} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y)|\,dy = \varepsilon^{p'}\|c\|_1.$$

Таким образом, для любого $N > N_0$ справедливо неравенство

$$\beta_N \leqslant \varepsilon^{p'} + \varepsilon^{p'}\|c\|_1.$$

Следовательно, в силу (1.19) имеет место неравенство

$$\|P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\mathscr{C}_b P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\|_{p,\lambda} \leqslant \varepsilon(1+\|c\|_1)^{1/p'}\|c\|_1^{1/p},$$

которое означает, что выполнено условие (1.16).

2) Пусть теперь $c(t)$ — произвольная функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$. Так как класс $C_0(\mathbb{R}^n)$ всюду плотен в $L_1(\mathbb{R}^n)$, то найдется такая последовательность функций $\{c_j\} \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, что

$$\lim_{j\to\infty}\|c-c_j\|_1 = 0.$$

Рассмотрим оператор

$$(\mathscr{C}_{j,b}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x,y)c_j(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

который по доказанному выше является компактным. Используя неравенство (1.10), получим

$$\|\mathscr{C}_b - \mathscr{C}_{j,b}\| \leqslant \|b\|_\infty\|c-c_j\|_1 \to 0$$

при $j \to \infty$. Следовательно, оператор $\mathscr{C}_b$ в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ является компактным. Теорема доказана. □

В заключение рассмотрим случай, когда характеристика не зависит от переменной x. Если $b(x,y) = b(y)$, то условие (1.15) принимает вид

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{mes}\{y\colon |y| > N, |b(y)| > \varepsilon\} = 0 \tag{1.20}$$

для любого $\varepsilon > 0$, т. е. функция $b(y)$ сходится к нулю по мере при $y \to \infty$. Тогда из теоремы 1.2.3 вытекает

Следствие 1.2.3. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$, $c \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и функция $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (1.20). Тогда оператор $\mathscr{C} M_b$ компактен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

§1.3 Интегральные операторы типа свертки с ядрами из модифицированных пространств Морри

Рассмотрим оператор свертки (1.6) с ядром $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. В работе [18] было показано, что при выполнении условий

$$1 < q, s < p < \infty, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + 1, \quad 0 < \lambda < \frac{n}{p} \tag{1.21}$$

оператор $\mathscr{C}$ ограничен из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, причем для любой функции $\varphi \in L_q(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p} \|\varphi\|_q. \tag{1.22}$$

1.3.1 Произведение операторов свертки и умножения

Легко видеть, что оператор M_a умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ограничен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, и для любой функции $\psi \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\|M_a\psi\|_{p,\lambda} \leqslant \|a\|_\infty \|\psi\|_{p,\lambda}. \tag{1.23}$$

Основным объектом исследования в данном пункте является оператор $M_a\mathscr{C}$. Первоначально будем считать, что $a \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства следующей леммы используем условия предкомпактности множества, лежащего в пространстве Морри.

Предложение 1.3.1. *[59] Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$ и $F = \{f\}$ — множество функций из $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Пусть выполнены следующие условия:*

$$i)\quad \sup_{f\in F} \|f\|_{p,\lambda} < \infty; \tag{1.24}$$

$$ii)\quad \lim_{\delta\to 0}\sup_{f\in F} \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{p,\lambda} = 0; \tag{1.25}$$

$$iii)\quad \lim_{\rho\to\infty}\sup_{f\in F} \|f\chi_\rho\|_{p,\lambda} = 0; \tag{1.26}$$

где χ_ρ — характеристическая функция множества $\complement\mathbb{B}(0,\rho)$.

Тогда множество F предкомпактно в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1.3.1. *Пусть выполнены условия (1.21), $a \in C_0(\mathbb{R}^n)$ и функция $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $M_a\mathscr{C}$ является компактным оператором, действующим из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — произвольное ограниченное множество в $L_q(\mathbb{R}^n)$, т. е. существует такое число $d > 0$ что $\|\varphi\|_q \leqslant d$ для любой функции $\varphi \in \Phi$. Пользуясь предложением 1.3.1, покажем, что множество $\{M_a\mathscr{C}\varphi\}$, где $\varphi \in \Phi$, предкомпактно в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Проверим все три условия.

С помощью неравенств (1.22) и (1.23) получаем

$$\|M_a\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|a\|_\infty \|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|a\|_\infty \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p} \|\varphi\|_q \leqslant \\ \leqslant d\|a\|_\infty \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p},$$

т. е. условие *i)* выполнено.

Проверим условие *ii)*. Для начала отметим, что норма в пространстве Морри инвариантна относительно сдвига:

$$\|f(t+\delta)\|_{p,\lambda} = \|f(t)\|_{p,\lambda}, \quad \delta \in \mathbb{R}^n. \tag{1.27}$$

Действительно, с помощью замены переменной $t + \delta = y$ приходим к равенству

$$\|f(t+\delta)\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} = \|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x+\delta,r))}$$

а из биективности отображения $x \mapsto x+\delta$ получаем равенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} = \sup_{x+\delta\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x+\delta,r))}}{r^\lambda}.$$

Далее, для функции $\varphi\in\Phi$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} = \\
&= \|a(t+\delta)(\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-a(t)(\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} \leqslant \\
&\leqslant \|(a(t+\delta)-a(t))(\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)\|_{p,\lambda} + \|a(t)((\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(\mathscr{C}\varphi)(t))\|_{p,\lambda} \leqslant \\
&\leqslant \|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty \|(\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)\|_{p,\lambda} + \|a\|_\infty \|(\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda}.
\end{aligned}$$

Используя теперь неравенство (1.22) и равенство (1.27), получаем

$$\begin{aligned}
&\|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} \leqslant \\
&\qquad\leqslant \|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p} \|\varphi\|_q + \\
&\qquad\quad + \|a\|_\infty \|c(t+\delta)-c(t)\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c(t+\delta)-c(t)\|_s^{1-s/p} \|\varphi\|_q.
\end{aligned}$$

Пользуясь ограниченностью множества Φ приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} \leqslant \\
&\qquad\leqslant d\|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p} + \\
&\qquad\quad + d\|a\|_\infty (2\|c\|_{s,\lambda p/s})^{s/p} \|c(t+\delta)-c(t)\|_s^{1-s/p}.
\end{aligned}$$

Так как функция $a\in C_0(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{\delta\to 0} \|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty = 0.$$

Поскольку $c\in L_s(\mathbb{R}^n)$, то функция c непрерывна по L_s–норме, т. е.

$$\lim_{\delta\to 0} \|c(t+\delta)-c(t)\|_s = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} = 0$$

равномерно относительно $\varphi\in\Phi$.

Наконец, проверим условие *iii)*. Имеем

$$\|\chi_\rho M_a \mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|\chi_\rho a\|_\infty \|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda}.$$

Снова воспользовавшись неравенством (1.22) и ограниченностью множества Φ, получаем

$$\begin{aligned}\|\chi_\rho M_a \mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} &\leqslant \sup_{|t|\geqslant\rho} |a(t)| \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p} \|\varphi\|_q \leqslant \\ &\leqslant d \sup_{|t|\geqslant\rho} |a(t)| \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_s^{1-s/p}.\end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0$, то

$$\lim_{\rho\to\infty} \|\chi_\rho M_a \mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$. $\square$

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия (1.21) и* $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

1) если $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, *то* $M_a\mathscr{C}$ *есть компактный оператор, действующий из* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ *и оператор* $M_a\mathscr{C}$ *является компактным из* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *то* $a_\infty = 0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Определим функцию $a_N(t)$ равенством

$$a_N(t) = \begin{cases} a(t), & |t| \leqslant N, \\ 0, & |t| > N. \end{cases}$$

Покажем, что оператор $M_{a_N}\mathscr{C}$ компактен. Возьмем функцию $b \in C_0(\mathbb{R}^n)$ такую, что $b(t) \equiv 1$ при $|t| \leqslant N$. Тогда справедливо равенство

$$M_{a_N}\mathscr{C} = M_{a_N} M_b \mathscr{C}.$$

По лемме 1.3.1 оператор $M_b\mathscr{C}$ компактен, следовательно и оператор $M_{a_N}\mathscr{C}$ компактен. Так как $M_a\mathscr{C} - M_{a_N}\mathscr{C} = M_{a-a_N}\mathscr{C}$, то

$$\|M_a\mathscr{C} - M_{a_N}\mathscr{C}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = \|(a-a_N)\mathscr{C}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|t|>N} |a(t)| \|\mathscr{C}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}.$$

Учитывая, что $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\lim_{N\to\infty} \|M_a\mathscr{C} - M_{a_N}\mathscr{C}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = 0.$$

Значит, оператор $M_a\mathscr{C}$ компактен.

Докажем утверждение 2). Так как $a \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то $(a - a_\infty) \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, а значит, по доказанному выше, $M_{a-a_\infty}\mathscr{C}$ — компактный оператор. Легко убедиться, что справедливо равенство

$$M_a\mathscr{C} - M_{a-a_\infty}\mathscr{C} = a_\infty\mathscr{C}.$$

Так как оператор в его левой части компактен, а $\mathscr{C}$ не является компактным оператором, то $a_\infty = 0$. $\square$

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *Пусть D — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда оператор $P_D\mathscr{C}$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Нужно лишь отметить, что характеристическая функция $\chi_D(x)$ множества D принадлежит классу $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

1.3.2 Коммутатор операторов свертки и умножения

Коммутатором $[M_a, \mathscr{C}]$ операторов M_a и $\mathscr{C}$ называется оператор $M_a\mathscr{C} - \mathscr{C}M_a$. С учетом (1.6) этот коммутатор имеет вид

$$\begin{aligned}([M_a, \mathscr{C}]\varphi)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(y))c(x-y)\varphi(y)\,dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(x-t))c(t)\varphi(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Следуя [8, с. 486], обозначим через $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ совокупность таких функций $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ функция

$$A(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in K} |a(x) - a(x-t)|$$

принадлежит классу $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. Функции из класса $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ называются функциями *типа слабо осциллирующих на бесконечности*. Приведем примеры таких функций.

Пример 1.3.1. *1) Рассмотрим множество $\Omega(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех непрерывных и ограниченных функций $b(x)$ на $\mathbb{R}^n$, которые для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию*

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{t\in K} |b(x) - b(x-t)| = 0.$$

Класс $\Omega(\mathbb{R}^n)$ был введен в [60]. Нетрудно видеть, что $\Omega(\mathbb{R}^n) \subset \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) Дадим пример функции из класса $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$, не являющейся непрерывной. Определим на $\mathbb{R}$ функцию $a(x)$ формулой

$$a(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{|x|}), & \text{если } x \neq \pm\pi^2 k^2, \\ \pi^2 k^2, & \text{если } x = \pm\pi^2 k^2, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in K} |a(x) - a(x-t)| = \sup_{t\in K} \Big|\sin(\sqrt{|x|}) - \sin(\sqrt{|x-t|})\Big|.$$

Так как $\sin(\sqrt{|x|}) \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, то $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1.3.2. *Если $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ и $c \in L_s(\mathbb{R}^n)$, то функция*

$$\mathcal{I}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |a(x) - a(x-t)|^s |c(t)|^s \, dt \tag{1.28}$$

принадлежит классу $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такое $\rho > 0$, что

$$\int\limits_{|t|>\rho} |c(t)|^s \, dt < \frac{\varepsilon}{2(2\|a\|_\infty)^s}.$$

Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{|t|\leqslant\rho} |a(x) - a(x-t)|^s |c(t)|^s\, dt + \int\limits_{|t|>\rho} |a(x) - a(x-t)|^s |c(t)|^s\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|t|\leqslant\rho} |a(x) - a(x-t)|^s \int\limits_{|t|\leqslant\rho} |c(t)|^s\, dt + (2\|a\|_\infty)^s \int\limits_{|t|>\rho} |c(t)|^s\, dt <$$

$$< \operatorname*{ess\,sup}_{|t|\leqslant\rho} |a(x) - a(x-t)|^s \|c\|_s^s + \frac{\varepsilon}{2} = (A(x))^s \|c\|_s^s + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $A(x)$ определяется формулой (1.28). Так как $A(x) \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} (A(x))^s = \lim_{N\to\infty} (\operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} A(x))^s = 0.$$

Значит, найдется такое $N_0 > 0$, что для всех $N > N_0$ выполняется неравенство

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} (A(x))^s < \frac{\varepsilon}{2\|c\|_s^s}.$$

Следовательно, для всех $N > N_0$ выполняется неравенство $\operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} \mathcal{J}(x) < \varepsilon$. Это означает, что $\mathcal{J}(x) \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. □

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнены условия (1.21), $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$, и $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда коммутатор $[M_a, \mathscr{C}]$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Покажем, что оператор $[M_a, \mathscr{C}]$ можно приблизить по операторной норме в равномерной операторной топологии с любой степенью точности компактными операторами. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 1.3.2 найдется $N > 0$ такое, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |a(x) - a(x-t)|^s |c(t)|^s\, dt < \frac{\varepsilon^{q'}}{(2\|a\|_\infty \|c\|_{s,\lambda p/s})^{sq'/p}}. \tag{1.29}$$

Зафиксируем N и оценим норму оператора $Q_N[M_a, \mathscr{C}]$. Из равенства

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + 1$$

следуют соотношения

$$1=\frac{1}{q'}+\frac{1}{s'}+\frac{1}{p}, \quad \frac{q}{p}+\frac{q}{s'}=1, \quad \frac{s}{p}+\frac{s}{q'}=1.$$

Представим функцию $|(a(x)-a(x-t))c(t)||\varphi(x-t)|$ в виде

$$\begin{aligned}|(a(x)-a(x-t))c(t)||\varphi(x-t)| = {} & |(a(x)-a(x-t))c(t)|^{s/q'}\times\\ & \times (|(a(x)-a(x-t))c(t)|^{s}|\varphi(x-t)|^{q})^{1/p}\times\\ & \times |\varphi(x-t)|^{q/s'}.\end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Гельдера с показателями q', p и s', для почти всех $x \in \complement\mathbb{B}(0,N)$ получаем

$$\begin{aligned}|(Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi)(x)| & \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)||\varphi(x-t)|\,dt \leqslant\\ & \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^{s}\,dt\right)^{1/q'}\times\\ & \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^{s}|\varphi(x-t)|^{q}\,dt\right)^{1/p}\times\\ & \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-t)|^{q}\,dt\right)^{1/s'}.\end{aligned}$$

Совершая в последнем интеграле замену $u=x-t$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}|(Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi)(x)| \leqslant {} & \left(\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |a(x)-a(x-t)|^{s}|c(t)|^{s}\,dt\right)^{1/q'}\times\\ & \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^{s}|\varphi(x-t)|^{q}\,dt\right)^{1/p}\|\varphi\|_q^{q/s'}.\end{aligned}$$

Первый множитель оценим с помощью неравенства (1.29), а для второго используем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^{s}|\varphi(x-t)|^{q}\,dt \leqslant (2\|a\|_\infty)^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^{s}|\varphi(x-t)|^{q}\,dt.$$

Совершая замену $u = x - t$, получаем

$$|(Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi)(x)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{(2\|a\|_\infty \|c\|_{s,\lambda p/s})^{s/p}} (2\|a\|_\infty)^{s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(x-u)|^s |\varphi(u)|^q \, du \Bigg)^{1/p} \|\varphi\|_q^{q/s'} =$$

$$= \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(x-u)|^s |\varphi(u)|^q \, du \Bigg)^{1/p}.$$

Тогда для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ справедливо

$$\|Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} <$$

$$< \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(y-u)|^s |\varphi(u)|^q \, du \Bigg)^{1/p} =$$

$$= \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|^q \, du \int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} |c(y-u)|^s \, dy \Bigg)^{1/p}.$$

После замены $y - u = z$ во внутреннем интеграле получаем неравенство

$$\|Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} < \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|^q \|c\|^s_{L_s(\mathbb{B}(x-u,r))} \, du \Bigg)^{1/p}.$$

Используем его для оценки нормы функции $Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi$ в пространстве Морри. Имеем

$$\|Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi\|_{p,\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda} \|Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} <$$

$$< \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|^q \|c\|^s_{L_s(\mathbb{B}(x-u,r))} \, du \Bigg)^{1/p} =$$

$$= \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|^q (r^{-\lambda p/s} \|c\|_{L_s(\mathbb{B}(x-u,r))})^s \, du \Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{-s/p} \|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|^q \, du \Bigg)^{1/p} = \varepsilon \|\varphi\|_q^{q/s'} \|\varphi\|_q^{q/p} = \varepsilon \|\varphi\|_q.$$

Отсюда следует, что

$$\|Q_N[M_a,\mathscr{C}]\|_{L_q \to L_{p,\lambda}} < \varepsilon.$$

Учитывая, что $P_N+Q_N=I$, где I — тождественный оператор, перепишем это неравенство в виде

$$\|[M_a,\mathscr{C}]-P_N[M_a,\mathscr{C}]\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}<\varepsilon.$$

По следствию 1.3.1 оператор $P_N[M_a,\mathscr{C}]$ является компактным. Тогда, в силу произвольности числа ε, оператор $[M_a,\mathscr{C}]$ также является компактным. Теорема доказана. $\square$

Применим данную теорему, вместе с результатами предыдущего раздела, к решению вопроса о компактности операторов вида $\mathscr{C}M_a$.

Лемма 1.3.3. *Пусть выполнены условия (1.21), $a\in C_0(\mathbb{R}^n)$ и $c\in\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $\mathscr{C}M_a$ является компактным оператором, действующим из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Так как $a\in C_0(\mathbb{R}^n)$, то для произвольного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in K}|a(x)-a(x-t)|\leqslant\sup_{t\in K}(|a(x)|+|a(x+t)|)\to 0$$

при $|x|>N$, $N\to\infty$, что значит $a\in\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$. Справедливо равенство

$$\mathscr{C}M_a=M_a\mathscr{C}-[M_a,\mathscr{C}].$$

Учитывая лемму 1.3.1 и теорему 1.3.2, заключаем, что оператор $\mathscr{C}M_a$ компактен как сумма компактных операторов. $\square$

Аналогично теореме 1.3.1 доказывается следующая

Теорема 1.3.3. *Пусть выполнены условия (1.21) и $c\in\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1) если $a\in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, то $\mathscr{C}M_a$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a\in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ и оператор $\mathscr{C}M_a$ компактен, то $a_\infty=0$.

Доказательство. 1) Возьмем функции $a_N(t)$ и $b(t)$ как в теореме 1.3.1. Легко убедиться в справедливости равенства

$$\mathscr{C}M_{a_N} = \mathscr{C}M_bM_{a_N}.$$

По лемме 1.3.3 оператор $\mathscr{C}M_b$ компактен. Следовательно, оператор $\mathscr{C}M_bM_{a_N}$ также компактен. Из того, что

$$\|\mathscr{C}M_a - \mathscr{C}M_{a_N}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = \|\mathscr{C}M_{a-a_N}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = \|\mathscr{C}(a-a_N)\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} \leqslant \\ \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|t|>N}|a(t)|\|\mathscr{C}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}},$$

следует

$$\lim_{N\to\infty}\|\mathscr{C}M_a - \mathscr{C}M_{a_N}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = 0,$$

что означает компактность оператора $\mathscr{C}M_a$.

2) Замечая, что

$$\mathscr{C}M_a - \mathscr{C}M_{a-a_\infty} = a_\infty\mathscr{C},$$

где $\mathscr{C}M_{a-a_\infty}$ и $\mathscr{C}M_a$, по доказанному выше компактные операторы, получаем $a_\infty = 0$, так как $\mathscr{C}$ не является компактным оператором. □

Следствие 1.3.2. *Пусть D — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда оператор $\mathscr{C}P_D$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство сразу вытекает из леммы 1.3.3.

1.3.3 Операторы свертки с характеристикой

Определим на пространстве $L_q(\mathbb{R}^n)$ оператор $\mathscr{C}_b$ формулой (1.7), где функция $c \in \widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$, а $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Учитывая неравенство (1.22), получаем следующую оценку

$$\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|b\|_\infty\|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p}\|c\|_s^{1-s/p}\|\varphi\|_q. \tag{1.30}$$

Докажем теорему о компактности оператора $\mathscr{C}_b$. Для этого нам потребуется

Лемма 1.3.4. *Пусть D — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда операторы $P_D\mathscr{C}_b$ и $\mathscr{C}_bP_D$ являются компактными операторами, действующими из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть сначала характеристика $b(x,y)$ принадлежит множеству $\mathcal{S}$ функций из $L_\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ вида

$$b(x,y)=\sum_{j=1}^{m} b_{1j}(x)b_{2j}(y),$$

где m — произвольное натуральное число. Тогда оператор

$$P_D\mathscr{C}_b=P_D\sum_{j=1}^{m} M_{b_{1j}}\mathscr{C}M_{b_{2j}}=\sum_{j=1}^{m} M_{b_{1j}}P_D\mathscr{C}M_{b_{2j}}$$

является компактным, так как оператор $P_D\mathscr{C}$ компактен по следствию 1.3.1.

Пусть теперь $b(x,y)$ — произвольная функция из $L_\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Возьмем последовательность $\{b_k(x,y)\}\subset\mathcal{S}$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty}\|b-b_k\|_\infty=0.$$

Это возможно в силу того, что множество $\mathcal{S}$ всюду плотно в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Учитывая (1.30), имеем

$$\|P_D\mathscr{C}_b-P_D\mathscr{C}_{b_k}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}\leqslant\|P_D\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}\|\mathscr{C}_b-\mathscr{C}_{b_k}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathscr{C}_{b-b_k}\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}\leqslant\|b-b_k\|_\infty\|c\|_{s,\lambda p/s}^{s/p}\|c\|_s^{1-s/p}\to 0$$

при $k\to\infty$. Значит, оператор $P_D\mathscr{C}_b$ компактен.

Аналогично доказывается компактность оператора $\mathscr{C}_bP_D$. □

Теорема 1.3.4. *Пусть выполнены условия (1.21) и $c\in\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1) если $b\in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, то $\mathscr{C}_b$ есть компактный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $b\in B^{\sup}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ и оператор $\mathscr{C}_b$ является компактным из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то $b_\infty=0$.

Доказательство. 1) Рассмотрим шар $\mathbb{B}(0,N)$, где N — произвольное натуральное число. Тогда

$$\mathscr{C}_b = P_N\mathscr{C}_b + Q_N\mathscr{C}_b P_N + Q_N\mathscr{C}_b Q_N.$$

По лемме 1.3.4 оператор $T_N = P_N\mathscr{C}_b + Q_N\mathscr{C}_b P_N$ является компактным. Оценим норму

$$\|\mathscr{C}_b - T_N\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = \|Q_N\mathscr{C}_b Q_N\|_{L_q\to L_{p,\lambda}}. \tag{1.31}$$

Оператор $Q_N\mathscr{C}_b Q_N$ имеет вид

$$\big(Q_N\mathscr{C}_b Q_N\varphi\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_N(x)b(x,y)\chi_N(y)c(x-y)\varphi(y)dy,$$

где χ_N — характеристическая функция множества $\complement\mathbb{B}(0,N)$. Тогда из неравенства (1.30) следует, что

$$\|Q_N\mathscr{C}_b Q_N\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N,|y|>N} |b(x,y)|\|c\|^{s/p}_{s,\lambda p/s}\|c\|_s^{1-s/p} \to 0$$

при $N\to\infty$. Так как

$$\lim_{N\to\infty}\|\mathscr{C}_b - T_N\|_{L_q\to L_{p,\lambda}} = 0$$

где T_N — компактный оператор, то оператор $\mathscr{C}_b$ также является компактным.

2) Доказательство проводится аналогично доказательству пункта 2) теоремы 1.3.1. □

§1.4 Операторы типа свертки, действующие из модифицированного пространства Морри в пространство Морри

В силу коммутативности свертки, в неравенстве (1.22) мы можем поменять функции c и φ местами, и рассмотреть, таким образом, оператор свертки (1.6) с ядром $c\in L_q(\mathbb{R}^n)$, действующий из пространства $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$

в пространство Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, для нормы которого выполняется неравенство

$$\|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|c\|_q \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|\varphi\|_s^{1-s/p}. \tag{1.32}$$

Снабдим пространство $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ квазинормой

$$\|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}} := \max\{\|\varphi\|_{s,\lambda p/s}, \|\varphi\|_s\}.$$

Покажем, что тогда неравенство (1.32) преобразуется к виду

$$\|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|c\|_q \|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}}. \tag{1.33}$$

Действительно, так как по условию (1.21) $1 < s < p$, то $1 - s/p > 0$. Если $\|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}} = \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}$, то $\|\varphi\|_s \leqslant \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}$, откуда $\|\varphi\|_s^{1-s/p} \leqslant \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{1-s/p}$. Следовательно, в этом случае

$$\|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|\varphi\|_s^{1-s/p} \leqslant \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{1-s/p} = \|\varphi\|_{s,\lambda p/s} = \|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}}.$$

Если же $\|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}} = \|\varphi\|_s$, то $\|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \leqslant \|\varphi\|_s^{s/p}$, и в этом случае

$$\|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|\varphi\|_s^{1-s/p} \leqslant \|\varphi\|_s^{s/p} \|\varphi\|_s^{1-s/p} = \|\varphi\|_s = \|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}}.$$

Сформулируем и докажем для оператора $\mathscr{C}$, действующего из пространства $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, аналоги результатов §1.3.

Лемма 1.4.1. *Пусть выполнены условия (1.21), $a \in C_0(\mathbb{R}^n)$ и $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $M_a\mathscr{C}$ является компактным оператором, действующим из $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Возьмем в $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ произвольное ограниченное множество $\Phi = \{\varphi\}$ и покажем, что множество $\{M_a\mathscr{C}\varphi\}$ предкомпактно в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Проверим выполнение условий *i)–iii)* предложения 1.3.1.

i) С помощью неравенств (1.23) и (1.33) получаем

$$\|M_a\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|a\|_\infty \|c\|_q \|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}} \leqslant d\|a\|_\infty \|c\|_q.$$

ii) Для функции $\varphi \in \Phi$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} \leqslant \\
&\leqslant \|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty\|(\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)\|_{p,\lambda}+\|a\|_\infty\|(\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda}.
\end{aligned}$$

Используя неравенства (1.27), (1.33) и учитывая ограниченность множества Φ, получаем

$$\begin{aligned}
&\|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda} \leqslant \\
&\leqslant \|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty\|c\|_q\|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}}+\|a\|_\infty\|c(t+\delta)-c(t)\|_q\|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}} \leqslant \\
&\leqslant d(\|a(t+\delta)-a(t)\|_\infty\|c\|_q+\|a\|_\infty\|c(t+\delta)-c(t)\|_q).
\end{aligned}$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{\delta\to 0}\|(M_a\mathscr{C}\varphi)(t+\delta)-(M_a\mathscr{C}\varphi)(t)\|_{p,\lambda}=0$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

iii) Пользуясь снова неравенством (1.33) и ограниченностью множества Φ, получаем

$$\|\chi_\rho M_a\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|\chi_\rho a\|_\infty\|\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \sup_{|t|\geqslant\rho}|a(t)|\|c\|_q\|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}} \leqslant d\sup_{|t|\geqslant\rho}|a(t)|\|c\|_q.$$

Так как $a \in C_0(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{\rho\to 0}\|\chi_\rho M_a\mathscr{C}\varphi\|_{p,\lambda}=0$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$. $\square$

С помощью этой леммы, используя приемы доказательства теоремы 1.3.1, получаем следующую теорему.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия (1.21) и* $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

1) если $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, *то* $M_a\mathscr{C}$ *есть компактный оператор, действующий из* $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ *и оператор* $M_a\mathscr{C}$ *компактен, то* $a_\infty = 0$.

Доказательство. 1) Справедливо неравенство

$$\|M_a\mathscr{C} - M_{a_N}\mathscr{C}\|_{\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)\to L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|t|>N} |a(t)| \|\mathscr{C}\|_{\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)\to L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

где функция a_N определяется так же, как в теореме 1.3.1. По лемме 1.4.1 $M_{a_N}\mathscr{C}$ — компактный оператор, действующий из пространства $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Учитывая, что $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\lim_{N\to\infty} \|M_a\mathscr{C} - M_{a_N}\mathscr{C}\|_{\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)\to L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

откуда следует утверждение 1).

Утверждение 2) доказывается совершенно аналогично соответствующему утверждению теоремы 1.3.1. □

Следствие 1.4.1. *Пусть D — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда оператор $P_D\mathscr{C}$ есть компактный оператор, действующий из $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Применим, в частности, это следствие к установлению компактности коммутатора $[M_a, \mathscr{C}]$.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены условия (1.21), функция $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$ и $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Тогда коммутатор $[M_a, \mathscr{C}]$ есть компактный оператор, действующий из $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 1.3.2 найдется $N > 0$ такое, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |a(x) - a(x-t)|^q |c(t)|^q \, dt < \frac{\varepsilon^{s'}}{(2\|a\|_\infty \|c\|_q)^{qs'/p}}. \tag{1.34}$$

Зафиксируем N и оценим норму оператора $Q_N[M_a, \mathscr{C}]$. Представим функцию $|(a(x) - a(x-t))c(t)||\varphi(x-t)|$ в виде

$$\begin{aligned} |(a(x) - a(x-t))c(t)||\varphi(x-t)| &= |(a(x) - a(x-t))c(t)|^{q/s'} \times \\ &\times (|(a(x) - a(x-t))c(t)|^q |\varphi(x-t)|^s)^{1/p} \times \\ &\times |\varphi(x-t)|^{s/q'}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера, для почти всех $x \in \complement\mathbb{B}(0,N)$ получаем

$$|(Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)||\varphi(x-t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^q\,dt\Bigg)^{1/s'} \times$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^q|\varphi(x-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/p} \times$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/q'}.$$

Для множителей в правой части этого неравенства справедливы следующие оценки:

$$\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^q\,dt\Bigg)^{1/s'} \leqslant \Bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |a(x)-a(x-t)|^q|c(t)|^q\,dt\Bigg)^{1/s'},$$

$$\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(a(x)-a(x-t))c(t)|^q|\varphi(x-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (2\|a\|_\infty)^{q/p}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q|\varphi(x-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/p},$$

$$\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/q'} \leqslant \|\varphi\|_s^{s/q'}.$$

Учитывая соотношение (1.34), приходим к неравенству

$$|(Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon(2\|a\|_\infty)^{q/p}}{(2\|a\|_\infty\|c\|_q)^{q/p}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q|\varphi(x-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/p}\|\varphi\|_s^{s/q'}.$$

Тогда для $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ справедливо

$$\|Q_N[M_a,\mathscr{C}]\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} < \frac{\varepsilon}{\|c\|_q^{q/p}}\|\varphi\|_s^{s/q'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} dy\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q|\varphi(y-t)|^s\,dt\Bigg)^{1/p} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\|c\|_q^{q/p}}\|\varphi\|_s^{s/q'}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q\,dt\int\limits_{\mathbb{B}(x,r)} |\varphi(y-t)|^s\,dy\Bigg)^{1/p}.$$

После замены $y - t = z$ во внутреннем интеграле получаем неравенство

$$\|Q_N[M_a, \mathscr{C}]\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} < \frac{\varepsilon}{\|c\|_q^{q/p}} \|\varphi\|_s^{s/q'} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q \|\varphi\|^s_{L_s(\mathbb{B}(x-t,r))}\, dt \Bigg)^{1/p}.$$

Тогда норма функции $Q_N[M_a, \mathscr{C}]\varphi$ в пространстве Морри имеет следующую оценку:

$$\|Q_N[M_a, \mathscr{C}]\varphi\|_{p,\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda} \|Q_N[M_a, \mathscr{C}]\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{\|c\|_q^{q/p}} \|\varphi\|_s^{s/q'} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q (r^{-\lambda p/s} \|\varphi\|_{L_s(\mathbb{B}(x-t,r))})^s\, dt \Bigg)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\|c\|_q^{q/p}} \|\varphi\|_s^{s/q'} \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |c(t)|^q\, dt \Bigg)^{1/p} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\|c\|_q^{q/p}} \|\varphi\|_s^{s/q'} \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p} \|c\|_q^{q/p} = \varepsilon \|\varphi\|_s^{s/q'} \|\varphi\|_{s,\lambda p/s}^{s/p}.$$

Так как $s/q' = 1 - s/p$, то по доказательству неравенства (1.33)

$$\|Q_N[M_a, \mathscr{C}]\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \|\varphi\|_{\widehat{s,\lambda p/s}},$$

откуда

$$\|Q_N[M_a, \mathscr{C}]\|_{\widehat{L}_{s,\lambda p/s} \to L_{p,\lambda}} < \varepsilon.$$

Так как

$$Q_N[M_a, \mathscr{C}] = [M_a, \mathscr{C}] - P_N[M_a, \mathscr{C}]$$

и по следствию 1.4.1 оператор $P_N[M_a, \mathscr{C}]$ является компактным, то оператор $[M_a, \mathscr{C}]$ также является компактным. $\square$

Теперь, с помощью этой теоремы и леммы 1.4.1, аналогично лемме 1.3.3 доказывается

Лемма 1.4.2. *Пусть выполнены условия (1.21), функция $a \in C_0(\mathbb{R}^n)$ и $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $\mathscr{C} M_a$ есть компактный оператор, действующий из $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Следующие результаты устанавливаются аналогично теоремам 1.3.3 и 1.3.4.

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнены условия (1.21) и* $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

1) если $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathscr{C}M_a$ *есть компактный оператор, действующий из* $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ *и оператор* $\mathscr{C}M_a$ *компактен, то* $a_\infty = 0$.

Доказательство. 1) Используя рассуждения теоремы 1.3.3 и лемму 1.4.2 приходим к неравенству

$$\|\mathscr{C}M_a - \mathscr{C}M_{a_N}\|_{\widehat{L}_{s,\lambda p/s} \to L_{p,\lambda}},$$

из которого получаем требуемое.

Доказательство пункта 2) проводится как в теореме 1.3.3. $\square$

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 1.4.2. *Пусть* D *— ограниченное измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда оператор* $\mathscr{C}P_D$ *есть компактный оператор, действующий из* $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим теперь оператор типа свертки с характеристикой вида (1.7), где ядро $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$ и функция $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Из неравенства (1.33) вытекает, что

$$\|\mathscr{C}_b\varphi\|_{p,\lambda} \leqslant \|b\|_\infty \|c\|_q \|\varphi\|_{L_{\widehat{s,\lambda p/s}}}. \tag{1.35}$$

Лемма 1.4.3. *Пусть* D *— ограниченное измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда операторы* $P_D\mathscr{C}_b$ *и* $\mathscr{C}_bP_D$ *являются компактными операторами, действующими из* $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Повторяя схему доказательства леммы (1.3.4) и учитывая нервавенство (1.35), получаем

$$\|P_D\mathscr{C}_b - P_D\mathscr{C}_{b_k}\|_{L_{\widehat{s,\lambda p/s}} \to L_{p,\lambda}} \leqslant \|b - b_k\|_\infty \|c\|_q \to 0$$

при $k \to \infty$, что и завершает доказательство. Для оператора $\mathscr{C}_bP_D$ доказательство аналогично. $\square$

Сформулируем, наконец, основной результат этого параграфа.

Теорема 1.4.4. *Пусть выполнены условия (1.21) и* $c \in L_q(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

1) если $b \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, *то* $\mathscr{C}_b$ *есть компактный оператор, действующий из* $\widehat{L}_{s,\lambda p/s}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$*;*

2) если $b \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *и оператор* $\mathscr{C}_b$ *компактен, то* $b_\infty = 0$.

Доказательство. 1) С учетом рассуждений теоремы (1.3.4) получаем неравенство

$$\|Q_N \mathscr{C}_b Q_N\|_{L_{\widehat{s,\lambda p/s}} \to L_{p,\lambda}} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, |y|>N} |b(x,y)| \|c\|_q.$$

Так как $b \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{|x|>N, |y|>N} |b(x,y)| \to 0$ при $N \to \infty$, откуда следует требуемое.

Пункт 2) доказывается аналогично соответствующему пункту теоремы 1.3.4. $\square$

Глава 2

Интегральные операторы с однородными ядрами в локальных пространствах Морри

В этой главе рассматриваются многомерные интегральные операторы, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$, действующие в локальных пространствах Морри $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Известно (см. [76]), что именно в локальных пространствах Морри эти операторы ограничены. Нас в основном будет интересовать компактность таких операторов с переменными коэффициентами.

§2.1 Постановка задачи

В этой и следующей главе мы будем использовать обозначения

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad x' = x/|x|, \quad x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\lambda > 0$. В пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(\mathscr{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее предполагается, что $n \geqslant 2$), измерима и удовлетворяет условиям:

1° однородности степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y), \quad \forall\, \alpha > 0;$$

2° инвариантности относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y), \quad \forall\, \omega \in SO(n);$$

3° суммируемости, т. е.

$$\varkappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)||y|^{-n/p+\lambda}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x, e_1)||x|^{-n/p'-\lambda}\, dx < \infty.$$

Операторы вида (2.1), ядра которых удовлетворяют условиям 1° и 2°, называются *каноническими* (см. [49]).

В работе [76] установлено, что оператор $\mathscr{K}$ ограничен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, причем $\|\mathscr{K}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa$.

Пример 2.1.1. *Рассмотрим функцию*

$$k(x,y) = \frac{1}{|x|^\beta |x-y|^{n-\beta}}, \quad 0 < \beta < n.$$

Очевидно, она удовлетворяет свойствам 1° *и* 2°. *Далее,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)||y|^{-n/p+\lambda}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|e_1 - y|^{n-\beta}} |y|^{-n/p+\lambda}\, dy < \infty$$

при $1 \leqslant p < n/\beta$, $0 < \lambda < n/p - \beta$, *то есть свойство* 3° *также выполняется при указанных значениях* p *и* λ.

В пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор M_a умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно видеть, что этот оператор ограничен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, причем для любой функции $\varphi \in L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|M_a \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|a\|_\infty \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

Основной целью данной главы является исследование компактности оператора $M_a \mathscr{K} M_b$. Точнее говоря, требуется выяснить условия на функции

$a(x)$ и $b(x)$, при которых оператор $M_a \mathscr{K} M_b$ компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Для решения поставленной задачи нам потребуются достаточные условия предкомпактности множества, лежащего в локальном пространстве Морри (см. [52]). Для любой функции $f \in L_1^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и любого $\delta > 0$ положим

$$(A_\delta f)(x) = \frac{1}{|\mathbb{B}(x,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(x,\delta)} f(y)\, dy,$$

где $|\mathbb{B}(x,\delta)|$ — мера шара с центром в точке x и радиуса δ. Пусть R_1 и R_2 — произвольные положительные числа, причем $R_1 < R_2$. Обозначим через $S(R_1, R_2)$ сферический слой, то есть

$$S(R_1, R_2) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon R_1 \leqslant |x| \leqslant R_2\}.$$

Предложение 2.1.1. *[52] Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$ *и* $F = \{f\}$ *— множество функций из* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *и пусть выполнены следующие условия:*

$$\text{i)}\quad \sup_{f\in F} \|f\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty; \tag{2.2}$$

$$\text{ii)}\quad \lim_{R_1\to 0} \sup_{f\in F} \|f\chi_{\mathbb{B}(0,R_1)}\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0; \tag{2.3}$$

$$\text{iii)}\quad \lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in F} \|A_\delta f - f\|_{L_p(S(R_1,R_2))} = 0; \tag{2.4}$$

$$\text{iv)}\quad \lim_{R_2\to\infty} \sup_{f\in F} \|f\chi_{\complement\mathbb{B}(0,R_2)}\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.5}$$

Тогда множество F *является предкомпактным в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Преобразуем выражение $A_\delta f - f$. Имеем

$$\begin{aligned}(A_\delta f)(x) - f(x) &= \frac{1}{|\mathbb{B}(x,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(x,\delta)} f(y)\, dy - f(x) = \\ &= \frac{1}{|\mathbb{B}(x,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(x,\delta)} f(y)\, dy - \frac{1}{|\mathbb{B}(x,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(x,\delta)} f(x)\, dy = \\ &= \frac{1}{|\mathbb{B}(x,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(x,\delta)} (f(y) - f(x))\, dy.\end{aligned}$$

Ясно, что $|\mathbb{B}(x,\delta)| = |\mathbb{B}(0,\delta)|$. Тогда в результате замены $y = x+t$, получим

$$(A_\delta f)(x) - f(x) = \frac{1}{|\mathbb{B}(0,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} (f(x+t) - f(x))\, dt. \tag{2.6}$$

§2.2 Вспомогательные утверждения

В этом параграфе исследуется компактность операторов $M_a \mathscr{K} M_b$ в предположении, что коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат некоторому подклассу непрерывных функций. В дальнейшем это условие будет снято.

Обозначим через $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ множество всех непрерывных на $\mathbb{R}^n$ финитных функций, носитель которых не содержит точку $x = 0$.

Лемма 2.2.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $\mathscr{K}$ — оператор вида (2.1) и $b \in C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любой функции $\varphi \in L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство*

$$\|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t) - (\mathscr{K} M_b\varphi)(x)\|_{L_p(S(R_1,R_2))} \leqslant \nu\big(\mathcal{B}_1^{1/p}(\varphi,t) + \mathcal{B}_2^{1/p}(\varphi,t)\big), \tag{2.7}$$

где $\nu = 2\varkappa^{1/p'}\|b\|_\infty^{1/p'}$, а функции $\mathcal{B}_1(\varphi,t)$, $\mathcal{B}_2(\varphi,t)$ определяются формулами

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t) = \int\limits_{S(R_1,R_2)} |x|^{\lambda p/p' - n/p'}\, dx \times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y) - k(x,y)||y|^{n/p' - \lambda p/p'}|b(y)||\varphi(y)|^p\, dy, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{B}_2(\varphi,t) = \int\limits_{S(R_1,R_2)} |x+t|^{\lambda p/p' - n/p'}\, dx \times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y) - k(x,y)||y|^{n/p' - \lambda p/p'}|b(y)||\varphi(y)|^p\, dy. \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как функция $\varphi \in L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ и операторы $\mathscr{K}$ и M_b ограниченно действуют в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то функция $(\mathscr{K} M_b\varphi)(x)$ принадлежит пространству $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Это, в частности, означает, что она также принадлежит пространству $L_p^{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, левая часть неравенства (2.7) определена корректно. Оценим модуль приращения функции $(\mathscr{K} M_b\varphi)(x)$. Имеем

$$|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t)-(\mathscr{K} M_b\varphi)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y)-k(x,y)||b(y)||\varphi(y)|\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{|k(x+t,y)-k(x,y)|^{1/p'}|y|^{\lambda/p'-n/(pp')}|b(y)|^{1/p'}\right\}\times$$

$$\times\left\{|k(x+t,y)-k(x,y)|^{1/p}|y|^{n/(pp')-\lambda/p'}|b(y)|^{1/p}|\varphi(y)|\right\}dy.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t)-(\mathscr{K} M_b\varphi)(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y)-k(x,y)||y|^{\lambda-n/p}|b(y)|\,dy\right)^{1/p'}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y)-k(x,y)||y|^{n/p'-\lambda p/p'}|b(y)||\varphi(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

Положим

$$\mathcal{Q}(x,t) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y)-k(x,y)||y|^{\lambda-n/p}|b(y)|\,dy\right)^{1/p'}.$$

Оценим функцию $\mathcal{Q}(x,t)$. Для начала заметим, что

$$\mathcal{Q}(x,t) \leqslant \|b\|_\infty^{1/p'}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y)||y|^{\lambda-n/p}\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\lambda-n/p}\,dy\right)^{1/p'}.$$

В первом интеграле сделаем замену $y=|x+t|u$ (тогда $dy=|x+t|^n\,du$), а во втором — замену $y=|x|u$ (тогда $dy=|x|^n\,du$). Пользуясь однородностью функции $k(x,y)$, получим

$$\mathcal{Q}(x,t) \leqslant \|b\|_\infty^{1/p'}\Bigg(|x+t|^{\lambda-n/p}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k((x+t)',u)||u|^{\lambda-n/p}\,du+$$

$$+|x|^{\lambda-n/p}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x',u)||u|^{\lambda-n/p}\,du\Bigg)^{1/p'}.$$

Далее, сделаем замену $u = \omega_{x+t}(z)$ в первом интеграле и $u = \omega_x(z)$ во втором, так что $\omega_{x+t}(e_1) = (x+t)'$ и $\omega_x(e_1) = x'$. Тогда, используя инвариантность функции $k(x,y)$ относительно вращений, получим

$$\mathcal{Q}(x,t) \leqslant \|b\|_\infty^{1/p'} \left(\left(|x+t|^{\lambda-n/p} + |x|^{\lambda-n/p}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,z)||z|^{\lambda-n/p}\, dz \right)^{1/p'} =$$

$$= \|b\|_\infty^{1/p'} \varkappa^{1/p'} \left(|x+t|^{\lambda-n/p} + |x|^{\lambda-n/p}\right)^{1/p'}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t) - (\mathscr{K} M_b\varphi)(x)\|^p_{L_p(S(R_1,R_2))} \leqslant$$
$$\leqslant \|b\|_\infty^{p/p'} \varkappa^{p/p'} \int\limits_{S(R_1,R_2)} \left(|x+t|^{\lambda-n/p} + |x|^{\lambda-n/p}\right)^{p/p'} dx \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x+t,y) - k(x,y)||y|^{n/p' - \lambda p/p'} |b(y)||\varphi(y)|^p\, dy.$$

В силу того, что для любого $s > 0$ справедливо неравенство

$$(a+b)^s \leqslant 2^s(a^s + b^s),$$

первый интеграл оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{S(R_1,R_2)} \left(|x+t|^{\lambda-n/p} + |x|^{\lambda-n/p}\right)^{p/p'} dx \leqslant 2^{p/p'} \int\limits_{S(R_1,R_2)} |x+t|^{(\lambda p-n)/p'} + |x|^{(\lambda p-n)/p'}\, dx.$$

Отсюда получаем

$$\|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t) - (\mathscr{K} M_b\varphi)(x)\|^p_{L_p(S(R_1,R_2))} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{p/p'} \|b\|_\infty^{p/p'} \varkappa^{p/p'} (\mathcal{B}_1(\varphi,t) + \mathcal{B}_2(\varphi,t)).$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t) - (\mathscr{K} M_b\varphi)(x)\|_{L_p(S(R_1,R_2))} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1/p'} \|b\|_\infty^{1/p'} \varkappa^{1/p'} \left(\mathcal{B}_1(\varphi,t) + \mathcal{B}_2(\varphi,t)\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|b\|_\infty^{1/p'} \varkappa^{1/p'} \left(\mathcal{B}_1^{1/p}(\varphi,t) + \mathcal{B}_2^{1/p}(\varphi,t)\right).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ *— оператор вида (2.1) и функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *принадлежат классу* $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $M_a \mathscr{K} M_b$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — произвольное ограниченное множество, лежащее в $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, т. е. $\|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant d$ для любой $\varphi \in \Phi$. Используя предложение 2.1.1, покажем, что множество $\{M_a \mathscr{K} M_b \varphi\}$, где $\varphi \in \Phi$, предкомпактно в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Проверим выполнение условий *i)–iv)*.

i) Так как операторы $\mathscr{K}$ и M_a ограничены в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо неравенство

$$\|M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|a\|_\infty \|\mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|a\|_\infty \varkappa \|M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_\infty \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant d\varkappa \|a\|_\infty \|b\|_\infty.$$

ii) Учитывая ограниченность операторов $\mathscr{K}$ и M_a, для любой функции $\varphi \in \Phi$ имеем

$$\begin{aligned}\|\chi_{\mathbb{B}(0,R_1)} M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \|\chi_{\mathbb{B}(0,R_1)} a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant \|\chi_{\mathbb{B}(0,R_1)} a\|_\infty \|\mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{B}(0,R_1)} |a(x)| \; \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant d\varkappa \|b\|_\infty \sup_{x \in \mathbb{B}(0,R_1)} |a(x)|.\end{aligned}$$

Так как функция $a(x)$ принадлежит пространству $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то при достаточно малых значениях R_1 выполняется тождество $|a(x)| \equiv 0$, $x \in \mathbb{B}(0, R_1)$. Тогда

$$\lim_{R_1 \to 0} \sup_{\varphi \in \Phi} \|\chi_{\mathbb{B}(0,R_1)} M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

iii) Проверим условие (2.4), т. е. докажем, что

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\varphi \in \Phi} \left\| A_\delta (M_a \mathscr{K} M_b \varphi) - M_a \mathscr{K} M_b \varphi \right\|_{L_p(S(R_1,R_2))} = 0.$$

Учитывая формулу (2.6), получаем

$$\begin{aligned}\big\|A_\delta(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)-M_a\mathscr{K}M_b\varphi\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}=\\ =\frac{1}{|\mathbb{B}(0,\delta)|}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)}\big[(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)-(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)(x)\big]\,dt\Bigg\|_{L_p(S(R_1,R_2))}.\end{aligned}$$

Применяя к правой части этого равенства обобщённое неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned}\big\|A_\delta(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)-M_a\mathscr{K}M_b\varphi\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{|\mathbb{B}(0,\delta)|}\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)}\big\|(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)-(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)(x)\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\,dt=\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{|\mathbb{B}(0,\delta)|}\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)}\big\|a(x+t)(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)-\\ -a(x)(\mathscr{K}M_b\varphi)(x)\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\,dt. \quad (2.10)$$

Введем обозначения

$$\mathfrak{I}_1(\varphi,\delta)=\frac{1}{|\mathbb{B}(0,\delta)|}\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)}\big\|[a(x+t)-a(x)](\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\,dt, \quad (2.11)$$

$$\mathfrak{I}_2(\varphi,\delta)=\frac{1}{|\mathbb{B}(0,\delta)|}\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)}\big\|a(x)[(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)-\\ -(\mathscr{K}M_b\varphi)(x)]\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\,dt. \quad (2.12)$$

Тогда, как легко видеть,

$$\big\|A_\delta(M_a\mathscr{K}M_b\varphi)-M_a\mathscr{K}M_b\varphi\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\leqslant\mathfrak{I}_1(\varphi,\delta)+\mathfrak{I}_2(\varphi,\delta).$$

Покажем, что функции $\mathfrak{I}_1(\varphi,\delta)$ и $\mathfrak{I}_2(\varphi,\delta)$ стремятся к нулю при $\delta\to 0$ равномерно относительно $\varphi\in\Phi$.

(1) Оценим $\mathcal{J}_1(\varphi,\delta)$. Для подынтегрального выражения имеем

$$\begin{aligned}\big\|[a(x+t)-a(x)](\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))} &\leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in S(R_1,R_2)}|a(x+t)-a(x)|\|(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in S(R_1,R_2)}|a(x+t)-a(x)|\|(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\|_{L_p(\mathbb{B}(0,R_2))}.\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbb{B}(t,R_2)\subset\mathbb{B}(0,|t|+R_2)$. В самом деле, если $y\in\mathbb{B}(t,R_2)$, то $|y-t|<R_2$. Тогда $|y|\leqslant|y-t|+|t|<R_2+|t|$, а значит $y\in\mathbb{B}(0,|t|+R_2)$. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned}\|(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\|_{L_p(\mathbb{B}(0,R_2))} &= \Bigg(\int\limits_{|x|<R_2}\big|(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\big|^p\,dx\Bigg)^{1/p} = \\ &= \Bigg(\int\limits_{|y-t|<R_2}\big|(\mathscr{K}M_b\varphi)(y)\big|^p\,dy\Bigg)^{1/p} = \\ &= \|\mathscr{K}M_b\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(t,R_2))}\leqslant\|\mathscr{K}M_b\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,|t|+R_2))}.\end{aligned}$$

Так как операторы M_b и $\mathscr{K}$ ограничены в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то функция $\mathscr{K}M_b\varphi$ принадлежит пространству $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Из определения нормы в $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ следует, что

$$\|\mathscr{K}M_b\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\geqslant\frac{\|\mathscr{K}M_b\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,r))}}{r^\lambda}$$

для любого $r>0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|(\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\|_{L_p(\mathbb{B}(0,|t|+R_2))} &\leqslant(|t|+R_2)^\lambda\|\mathscr{K}M_b\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\leqslant \\ &\leqslant(|t|+R_2)^\lambda\varkappa\|b\|_\infty\|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\varkappa d\|b\|_\infty(|t|+R_2)^\lambda.\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\big\|[a(x+t)-a(x)](\mathscr{K}M_b\varphi)(x+t)\big\|_{L_p(S(R_1,R_2))} &\leqslant \\ &\leqslant\varkappa d\|b\|_\infty(|t|+R_2)^\lambda\sup_{x\in S(R_1,R_2)}|a(x+t)-a(x)|. \quad (2.13)\end{aligned}$$

Применим (2.13) к формуле (2.11). Получим следующее неравенство:

$$\mathcal{J}_1(\delta,\varphi) \leqslant \frac{\varkappa d\|b\|_\infty}{|\mathbb{B}(0,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} (|t|+R_2)^\lambda \sup_{x\in S(R_1,R_2)} |a(x+t)-a(x)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varkappa d\|b\|_\infty}{|\mathbb{B}(0,\delta)|} \sup_{\substack{x\in S(R_1,R_2)\\ |t|<\delta}} |a(x+t)-a(x)| \int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} (|t|+R_2)^\lambda\,dt.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} (|t|+R_2)^\lambda\,dt \leqslant (\delta+R_2)^\lambda |\mathbb{B}(0,\delta)|,$$

приходим к неравенству

$$\mathcal{J}_1(\varphi,\delta) \leqslant \varkappa d\|b\|_\infty(\delta+R_2)^\lambda \sup_{\substack{x\in S(R_1,R_2)\\ |t|<\delta}} |a(x+t)-a(x)|. \tag{2.14}$$

Так как $a(x)\in C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то из (2.14) следует, что

$$\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{\varphi\in\Phi}\mathcal{J}_1(\varphi,\delta)=0.$$

(2) Рассмотрим интеграл $\mathcal{J}_2(\varphi,\delta)$. Из формулы (2.12) следует, что

$$\mathcal{J}_2(\varphi,\delta) \leqslant \frac{\|a\|_\infty}{|\mathbb{B}(0,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} \|(\mathscr{K} M_b\varphi)(x+t)-(\mathscr{K} M_b\varphi)(x)\|_{L_p(S(R_1,R_2))}\,dt.$$

Тогда, применяя неравенство (2.7), получаем

$$\mathcal{J}_2(\varphi,\delta) \leqslant \frac{\nu\|a\|_\infty}{|\mathbb{B}(0,\delta)|} \int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} \big(\mathcal{B}_1^{1/p}(\varphi,t)+\mathcal{B}_2^{1/p}(\varphi,t)\big)\,dt,$$

где функции $\mathcal{B}_1(\varphi,t)$ и $\mathcal{B}_2(\varphi,t)$ определяются формулами (2.8) и (2.9) соответственно. Учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{B}(0,\delta)} \big(\mathcal{B}_1^{1/p}(\varphi,t)+\mathcal{B}_2^{1/p}(\varphi,t)\big)\,dt \leqslant \sup_{|t|<\delta}\big(\mathcal{B}_1^{1/p}(\varphi,t)+\mathcal{B}_2^{1/p}(\varphi,t)\big)|\mathbb{B}(0,\delta)|,$$

приходим к неравенству

$$\mathcal{J}_2(\varphi,\delta) \leqslant \nu\|a\|_\infty\big(\sup_{|t|<\delta}\mathcal{B}_1^{1/p}(\varphi,t)+\sup_{|t|<\delta}\mathcal{B}_2^{1/p}(\varphi,t)\big). \tag{2.15}$$

Покажем, что функции $\mathcal{B}_1(\varphi,t)$ и $\mathcal{B}_2(\varphi,t)$ стремятся к нулю при $t\to 0$ равномерно относительно $\varphi\in\Phi$.

Рассмотрим функцию $\mathcal{B}_1(\varphi,t)$, заданную формулой (2.8). Меняя порядок интегрирования, получим

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|b(y)||\varphi(y)|^p|y|^{n/p'-\lambda p/p'}dy\times$$
$$\times\int\limits_{S(R_1,R_2)}|k(x+t,y)-k(x,y)||x|^{\lambda p/p'-n/p'}dx.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $x=|y|z$. Тогда, с учетом однородности функции $k(x,y)$, приходим к равенству

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|b(y)||\varphi(y)|^p\,dy\int\limits_{S(R_1/|y|,R_2/|y|)}\left|k\Big(z+\frac{t}{|y|},y'\Big)-k(z,y')\right||z|^{\lambda p/p'-n/p'}dz.$$

Теперь во внутреннем интеграле сделаем замену $z=\omega_y(x)$. Принимая во внимание условие 2°, получим

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|b(y)||\varphi(y)|^p\,dy\times$$
$$\times\int\limits_{S(R_1/|y|,R_2/|y|)}\left|k\Big(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\Big)-k(x,e_1)\right||x|^{\lambda p/p'-n/p'}\,dx.$$

Поскольку $p/p'=p-1$, то

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|b(y)||\varphi(y)|^p\,dy\times$$
$$\times\int\limits_{S(R_1/|y|,R_2/|y|)}\left|k\Big(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\Big)-k(x,e_1)\right||x|^{\lambda p-\lambda-n/p'}\,dx.$$

Так как $\dfrac{R_1}{|y|} < |x| < \dfrac{R_2}{|y|}$, то $|x|^{\lambda p} < \left(\dfrac{R_2}{|y|}\right)^{\lambda}$, и тогда

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(y)||\varphi(y)|^p \left(\frac{R_2}{|y|}\right)^{\lambda p} dy \times$$

$$\times \int\limits_{S(R_1/|y|,R_2/|y|)} \left|k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\right)-k(x,e_1)\right||x|^{-\lambda-n/p'}\,dx.$$

Функция $b(y)$ принадлежит, по условию, пространству $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, найдутся такие значения $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$, что $b(y) \equiv 0$ при $y \notin S(\rho_1,\rho_2)$. Значит,

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t) \leqslant R_2^{\lambda p} \int\limits_{S(\rho_1,\rho_2)} |b(y)| \frac{|\varphi(y)|^p}{|y|^{\lambda p}}\, dy \times$$

$$\times \int\limits_{S(R_1/|y|,R_2/|y|)} \left|k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\right)-k(x,e_1)\right||x|^{-\lambda-n/p'}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant R_2^{\lambda p} \int\limits_{S(\rho_1,\rho_2)} |b(y)| \frac{|\varphi(y)|^p}{|y|^{\lambda p}}\, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\right)-k(x,e_1)\right||x|^{-\lambda-n/p'}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \|b\|_\infty \frac{R_2^{\lambda p}}{\rho_1^{\lambda p}} \int\limits_{S(\rho_1,\rho_2)} |\varphi(y)|^p\, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\right)-k(x,e_1)\right||x|^{-\lambda-n/p'}\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t) \leqslant \|b\|_\infty \frac{R_2^{\lambda p}}{\rho_1^{\lambda p}} \times$$

$$\times \sup_{y\in S(\rho_1,\rho_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|},e_1\right)-k(x,e_1)\right||x|^{-\lambda-n/p'}\,dx \int\limits_{S(\rho_1,\rho_2)} |\varphi(y)|^p\, dy.$$

Поскольку $\varphi \in L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, то в силу определения 1.1.2

$$\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,\rho_2))} \leqslant \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \rho_2^{\lambda}.$$

Тогда

$$\int\limits_{S(\rho_1,\rho_2)} |\varphi(y)|^p\, dy \leqslant \|\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(0,\rho_2))} \leqslant \left(\|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\rho_2^{\lambda}\right)^p \leqslant d^p \rho_2^{\lambda p}.$$

Таким образом, для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется неравенство

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t) \leqslant \|b\|_\infty d^p \Big(R_2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)^{\lambda p} \sup_{y\in S(\rho_1,\rho_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| k\Big(x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\Big) - \\ - k(x,e_1)\Big| |x|^{-\lambda - n/p'} dx.$$

Легко видеть, что для всех $y \in S(\rho_1,\rho_2)$ выполняется

$$\left|\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}\right| = \frac{|t|}{|y|} < \frac{|t|}{\rho_1},$$

откуда следует, что $\dfrac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}$ стремится к нулю при $t \to 0$ равномерно относительно $y \in S(\rho_1,\rho_2)$. Тогда из условия 3° и свойства непрерывности по L_1–норме вытекает, что

$$\lim_{t\to 0} \sup_{y\in S(\rho_1,\rho_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| k\Big(x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\Big) - k(x,e_1)\Big| |x|^{-\lambda - n/p'} dx = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} \sup_{\varphi\in\Phi} \mathcal{B}_1(\varphi,t) = 0. \tag{2.16}$$

Перейдем к функции $\mathcal{B}_2(\varphi,t)$, заданной формулой (2.9). Аналогичным, как и выше, образом эту функцию можно преобразовать к виду

$$\mathcal{B}_2(\varphi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(y)||\varphi(y)|^p\, dy \times \\ \times \int\limits_{S(R_1/|y|,R_2/|y|)} \Big| k\Big(x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\Big) - k(x,e_1)\Big| \Big| x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}\Big|^{\lambda p - \lambda - n/p'} dx.$$

При $|x| < \dfrac{R_2}{|y|}$ справедливо неравенство

$$\left| x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}\right| \leqslant |x| + \frac{|\omega_y^{-1}(t)|}{|y|} = |x| + \frac{|t|}{|y|} < \frac{R_2}{|y|} + \frac{|t|}{|y|},$$

из которого следует, что

$$\mathcal{B}_2(\varphi,t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(y)||\varphi(y)|^p \left(\frac{R_2+|t|}{|y|}\right)^{\lambda p} dy \times$$
$$\times \int\limits_{S(R_1/|y|, R_2/|y|)} \left| k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\right) - k(x,e_1)\right| \left|x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}\right|^{-\lambda-n/p'} dx.$$

Повторяя в целом рассуждения, которые использовались выше для оценки функции $\mathcal{B}_1(\varphi,t)$, приходим к следующей оценке для функции $\mathcal{B}_2(\varphi,t)$:

$$\mathcal{B}_2(\varphi,t) \leqslant \|b\|_\infty \frac{(R_2+|t|)^{\lambda p}}{\rho_1^{\lambda p}} d^p \rho_2^{\lambda p} \times$$
$$\times \sup_{y\in S(\rho_1,\rho_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| k\left(x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\right) - k(x,e_1)\right| \left|x+\frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}\right|^{-\lambda-n/p'} dx,$$

причем это неравенство справедливо для любой функции $\varphi \in \Phi$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to 0} \sup_{\varphi\in\Phi} \mathcal{B}_2(\varphi,t) = 0. \tag{2.17}$$

Из неравенства (2.15), с учетом формул (2.16) и (2.17) следует, что

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{\varphi\in\Phi} \mathcal{I}_2(\varphi,\delta) = 0.$$

iv) Для любой функции $\varphi \in \Phi$ имеем

$$\begin{aligned}\|\chi_{\complement\mathbb{B}(0,R_2)} M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \|\chi_{\complement\mathbb{B}(0,R_2)} a\|_\infty \|\mathscr{K} M_b\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in\complement\mathbb{B}(0,R_2)} |a(x)| \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant d\varkappa\|b\|_\infty \sup_{x\in\complement\mathbb{B}(0,R_2)} |a(x)|.\end{aligned}$$

Так как функция $a(x)$ финитна, то при достаточно больших значениях R_2 выполняется тождество $|a(x)| \equiv 0$, $x \in \complement\mathbb{B}(0,R_2)$. Тогда

$$\lim_{R_2\to\infty} \sup_{\varphi\in\Phi} \|\chi_{\complement\mathbb{B}(0,R_2)} M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Лемма полностью доказана. $\square$

§2.3 Основные теоремы о компактности

В этом параграфе мы расширим класс рассматриваемых коэффициентов. Введем

Определение 2.3.1. *Будем говорить, что функция* $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит классу* $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$*, если*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N} |a(x)| = 0.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ *— оператор вида (2.1) и функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *принадлежат классу* $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$*. Тогда оператор* $M_a \mathscr{K} M_b$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Введем обозначение $S_N := S(1/N, N)$ и положим

$$a_N(x) = a(x)\chi_{S_N}(x), \quad b_N(x) = b(x)\chi_{S_N}(x).$$

Убедимся, что оператор $M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N}$ компактен в $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, пусть функция $v(x) \in C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ такова, что $v(x) \equiv 1$ при $x \in S_N$. Тогда

$$M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N} = M_{a_N} M_v \mathscr{K} M_v M_{b_N}.$$

По лемме 2.2.2 оператор $M_v\mathscr{K} M_v$ компактен в $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, а значит оператор $M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N}$ также является компактным.

Приблизим оператор $M_a\mathscr{K} M_b$ компактными операторами $M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N}$. Имеем

$$\|M_a\mathscr{K} M_b - M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|M_a\mathscr{K} M_b - M_{a_N}\mathscr{K} M_b\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} + \\ + \|M_{a_N}\mathscr{K} M_b - M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))}.$$

Первое слагаемое не превосходит величины $\|a - a_N\|_\infty \varkappa \|b\|_\infty$, второе — величины $\|a_N\|_\infty \varkappa \|b - b_N\|_\infty$. Следовательно,

$$\|M_a\mathscr{K} M_b - M_{a_N}\mathscr{K} M_{b_N}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa \operatorname*{ess\,sup}_{x\notin S_N} |a(x)|\, \|b\|_\infty + \\ + \varkappa \operatorname*{ess\,sup}_{x\notin S_N} |b(x)|\, \|a\|_\infty.$$

Так как функции $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат пространству $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то выражение справа стремится к нулю при $N \to \infty$. Тогда

$$\|M_a \mathscr{K} M_b - M_{a_N} \mathscr{K} M_{b_N}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \to 0$$

при $N \to \infty$. Значит, $M_a \mathscr{K} M_b$ является компактным оператором в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2.3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ *— оператор вида (2.1),* D_1 *и* D_2 *— ограниченные измеримые области в* $\mathbb{R}^n$*, причем* $0 \notin \overline{D_1}$ *и* $0 \notin \overline{D_2}$*. Тогда оператор* $P_{D_1} \mathscr{K} P_{D_2}$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

В заключение рассмотрим интегральный оператор, обобщающий оператор вида (2.1). Именно, в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(\mathscr{K}_c \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} c(x,y) k(x,y) \varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.18}$$

где $k(x,y)$ удовлетворяет условиям 1°–3°, а $c(x,y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Функцию $c(x,y)$ будем называть *характеристикой.*

Лемма 2.3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}_c$ *— оператор вида (2.18),* D_1 *и* D_2 *— ограниченные измеримые области в* $\mathbb{R}^n$*, причем* $0 \notin \overline{D_1}$ *и* $0 \notin \overline{D_2}$*. Тогда оператор* $P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2}$ *компактен в пространстве* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть вначале $c(x,y) = c_1(x) c_2(y)$. Тогда $\mathscr{K}_c = M_{c_1} \mathscr{K} M_{c_2}$. Следовательно,

$$P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2} = P_{D_1} M_{c_1} \mathscr{K} M_{c_2} P_{D_2} = M_{c_1} P_{D_1} \mathscr{K} P_{D_2} M_{c_2}.$$

По следствию 2.3.1 оператор $P_{D_1} \mathscr{K} P_{D_2}$ компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Значит оператор $P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2}$ также компактен. Ясно, что оператор $P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2}$ будет компактен и в случае, если

$$c(x,y) = \sum_{j=1}^{m} c_{1j}(x) c_{2j}(y), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Пусть теперь $c(x, y)$ — произвольная функция из $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Так как множество $\mathcal{S}$, состоящее из всех функций вида (2.19), всюду плотно в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то найдется последовательность $\{c_j(x, y)\} \subset \mathcal{S}$ такая, что $\|c - c_j\|_\infty \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда, учитывая неравенство

$$\|\mathscr{K}_c \varphi\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa \|c\|_\infty,$$

получим

$$\|P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2} - P_{D_1} \mathscr{K}_{c_j} P_{D_2}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|\mathscr{K}_{c-c_j}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa \|c - c_j\|_\infty \to 0$$

при $j \to \infty$. Отсюда следует, что оператор $P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2}$ компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. □

Теорема 2.3.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}_c$ — оператор вида (2.18) и характеристика $c(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x, y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|>N} |c(x, y)| = 0; \tag{2.20}$$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x, y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|<1/N} |c(x, y)| = 0. \tag{2.21}$$

Тогда оператор $\mathscr{K}_c$ компактен в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Представим оператор $\mathscr{K}_c$ в следующем виде:

$$\mathscr{K}_c = P_{\mathbb{B}(0,1/N)} \mathscr{K}_c + P_{\complement\mathbb{B}(0,N)} \mathscr{K}_c + \\ + P_{S_N} \mathscr{K}_c P_{\mathbb{B}(0,1/N)} + P_{S_N} \mathscr{K}_c P_{S_N} + P_{S_N} \mathscr{K}_c P_{\complement\mathbb{B}(0,N)},$$

где, как выше, $S_N = S(1/N, N)$. Оператор $T_N = P_{S_N} \mathscr{K}_c P_{S_N}$ компактен по лемме 2.3.1. Оценим норму разности $\mathscr{K}_c - T_N$. Имеем

$$\|\mathscr{K}_c - T_N\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|P_{\mathbb{B}(0,1/N)} \mathscr{K}_c\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} + \|P_{\complement\mathbb{B}(0,N)} \mathscr{K}_c\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} + \\ + \|P_{S_N} \mathscr{K}_c P_{\mathbb{B}(0,1/N)}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} + \|P_{S_N} \mathscr{K}_c P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))}.$$

Поскольку для любых измеримых множеств X и Y из $\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|P_X \mathscr{K}_c P_Y\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X, y\in Y} |c(x, y)|,$$

то

$$\|\mathscr{K}_c - T_N\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| + \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| +$$
$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|<1/N} |c(x,y)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|>N} |c(x,y)|\Big).$$

Значит, $\|\mathscr{K}_c - T_N\|_{\mathcal{L}(L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))} \to 0$ при $N\to\infty$. Так как T_N является компактным оператором, то $\mathscr{K}_c$ — компактный оператор. $\square$

Замечание 2. Если $c(x,y) = a(x)b(y)$, где $a(x)$ и $b(x) \in B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то условия (2.20) и (2.21) выполнены. Действительно,

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, y\in\mathbb{R}^n} |c(x,y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |b(y)| =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| \|b\|_\infty = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|>N} |c(x,y)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |a(x)| \operatorname*{ess\,sup}_{|y|>N} |b(y)| =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \|a\|_\infty \operatorname*{ess\,sup}_{|y|>N} |b(y)| = 0.$$

Аналогично проверяется условие (2.21).

§2.4 Канонические операторы, действующие из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри

В этом разделе мы будем исследовать канонические интегральные операторы с однородными ядрами, действующие из L_p–пространства со степенным весом в локальное пространство Морри.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\alpha > 0$. Обозначим через $L_{p,|y|^{-\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\alpha}}(\mathbb{R}^n)} = \Bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p |y|^{-\alpha}\, dy\Bigg)^{1/p} < \infty.$$

Теорема 2.4.1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\lambda > 0$. *Тогда оператор* $\mathscr{K}$ *вида (2.1) ограничен из пространства* $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ *в пространство* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|\mathscr{K}\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa \|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.22}$$

где $\varkappa$ *определяется из условия* 3°.

Доказательство. Оценим функцию $|(\mathscr{K}\varphi)(x)|$. Имеем

$$|(\mathscr{K}\varphi)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||\varphi(y)|\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|^{\frac{1}{p'}} |y|^{\frac{\lambda p - n}{pp'}} |k(x,y)|^{\frac{1}{p}} |y|^{\frac{n-\lambda p}{pp'}} |\varphi(y)|\,dy.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|(\mathscr{K}\varphi)(x)| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\frac{\lambda p-n}{p}}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\frac{n-\lambda p}{p'}} |\varphi(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Преобразуем первый интеграл. Сделаем замену $y \mapsto |x|t$ и воспользуемся условием 1°, а затем сделаем замену $t \mapsto \omega_x(\tau)$ (так что $\omega_x(e_1) = x'$) и воспользуемся условием 2°. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\frac{\lambda p-n}{p}}\,dy = |x|^{\frac{\lambda p-n}{p}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,\tau)||\tau|^{\frac{\lambda p-n}{p}}\,d\tau. \tag{2.23}$$

Учитывая теперь условие 3°, приходим к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\frac{\lambda p-n}{p}}\,dy = |x|^{\frac{\lambda p-n}{p}} \varkappa.$$

Следовательно,

$$|(\mathscr{K}\varphi)(x)| \leqslant \varkappa^{\frac{1}{p'}} |x|^{\frac{\lambda p-n}{pp'}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\frac{n-\lambda p}{p'}} |\varphi(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Возведем это неравенство в степень p, проинтегрируем его по множеству $\mathbb{B}(0,r)$, а затем домножим на $r^{-\lambda p}$. В результате получим

$$r^{-\lambda p}\|\mathscr{K}\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(0,r))} \leqslant r^{-\lambda p} \varkappa^{\frac{p}{p'}} \int\limits_{|x|<r} |x|^{\frac{\lambda p-n}{p'}}\,dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{\frac{n-\lambda p}{p'}} |\varphi(y)|^p\,dy.$$

Изменим порядок интегрирования, тогда

$$r^{-\lambda p}\|\mathscr{K}\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(0,r))} \leqslant \varkappa^{p-1} r^{-\lambda p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p |y|^{\frac{n-\lambda p}{p'}}\, dy \int\limits_{|x|<r} |k(x,y)||x|^{\frac{\lambda p-n}{p'}}\, dx.$$

Преобразуем внутренний интеграл. Пользуясь теми же приемами, которыми было получено равенство (2.23), получаем равенство

$$\int\limits_{|x|<r} |k(x,y)||x|^{\frac{\lambda p-n}{p'}}\, dx = |y|^{\frac{\lambda p-n}{p'}} \int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{\frac{\lambda p-n}{p'}}\, d\tau.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства

$$r^{-\lambda p}\|\mathscr{K}\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(0,r))} \leqslant \varkappa^{p-1} r^{-\lambda p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p\, dy \int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{\frac{\lambda p-n}{p'}}\, d\tau.$$

Оценим внутренний интеграл.

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{\frac{\lambda p-n}{p'}}\, d\tau &= \int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{\lambda(p-1)-\frac{n}{p'}}\, d\tau = \\ &= \int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{-\frac{n}{p'}-\lambda}|\tau|^{\lambda p}\, d\tau \leqslant \\ &\leqslant r^{\lambda p}|y|^{-\lambda p} \int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{-\frac{n}{p'}-\lambda}\, d\tau.\end{aligned}$$

Тогда приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}r^{-\lambda p}\|\mathscr{K}\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(0,r))} &\leqslant \varkappa^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p |y|^{-\lambda p}\, dy \int\limits_{|\tau|<\frac{r}{|y|}} |k(\tau,e_1)||\tau|^{-\lambda-\frac{n}{p'}}\, d\tau \leqslant \\ &\leqslant \varkappa^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p |y|^{-\lambda p}\, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(\tau,e_1)||\tau|^{-\lambda-\frac{n}{p'}}\, d\tau.\end{aligned}$$

Учитывая условие 3° для функции $k(x,y)$, получаем неравенство

$$r^{-\lambda p}\|\mathscr{K}\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{B}(0,r))} \leqslant \varkappa^{p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p |y|^{-\lambda p}\, dy.$$

Следовательно,

$$r^{-\lambda}\|\mathscr{K}\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,r))} \leqslant \varkappa\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^p|y|^{-\lambda p}\,dy\Bigg)^{1/p} = \varkappa\|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пользуясь теперь определением нормы в локальном пространстве Морри, получаем

$$\|\mathscr{K}\varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0}\frac{\|\mathscr{K}\varphi\|_{L_p(\mathbb{B}(0,r))}}{r^\lambda} \leqslant \varkappa\|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Неравенство (2.22) доказано. □

Сформулируем теперь и докажем аналоги лемм и теорем §2.2-2.3 для канонического оператора $\mathscr{K}$, действующего из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри. Дальнейшие рассуждения будут во многом опираться на рассуждения предыдущих параграфов, поэтому поясним только ключевые детали.

Установим сначала аналог леммы 2.2.1.

Лемма 2.4.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $\mathscr{K}$ — оператор вида (2.1) и $b \in C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любой функции $\varphi \in L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство (2.7), где функции $\mathcal{B}_1(\varphi,t)$, $\mathcal{B}_2(\varphi,t)$ определяются формулами (2.8) и (2.9) соответственно.*

Доказательство. Действительно, так как $\varphi \in L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$, то функция $M_b\varphi \in L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу теоремы 2.4.1, $\mathscr{K}M_b\varphi \in L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, откуда $\mathscr{K}M_b\varphi \in L^{\mathtt{loc}}_p(\mathbb{R}^n)$. Поэтому левая часть неравенства (2.7) определена корректно. Повторяя, далее, рассуждения леммы 2.2.1, убеждаемся в ее справедливости и для $\varphi \in L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$. □

Лемма 2.4.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ — оператор вида (2.1), и функции $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат классу $C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $M_a\mathscr{K}M_b$, действующий из $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ в $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, является компактным.*

Доказательство. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — ограниченное множество в пространстве $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$, то есть $\|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant d$ для всех $\varphi \in L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$. Покажем, с помощью предложения 2.1.1, что множество $\{M_a \mathscr{K} M_b \varphi\}$, где $\varphi \in \Phi$, предкомпактно в пространстве $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

i)-ii) Учитывая теорему 2.4.1, легко видеть, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливы неравенства

$$\|M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|a\|_\infty \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant d\varkappa \|a\|_\infty \|b\|_\infty;$$

$$\|\chi_{\mathbb{B}(0,R_1)} M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sup_{x \in \mathbb{B}(0,R_1)} |a(x)| \ \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant d\varkappa \|b\|_\infty \sup_{x \in \mathbb{B}(0,R_1)} |a(x)|,$$

из которых следует выполнение условий (2.2)-(2.3).

iii) Далее, повторяя рассуждения пункта *iii)* леммы 2.2.2, приходим к формуле (2.10), где $\mathcal{J}_1(\varphi,\delta)$ и $\mathcal{J}_2(\varphi,\delta)$, как и прежде, определяются равенствами (2.11) и (2.12) соответственно. Покажем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{J}_j(\varphi,\delta) = 0, \quad j = 1, 2.$$

С помощью теоремы 2.4.1 устанавливаем неравенство

$$\|(\mathscr{K} M_b \varphi)(x+t)\|_{L_p(\mathbb{B}(0,|t|+R_2))} \leqslant (|t| + R_2)^\lambda \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa d \|b\|_\infty (|t| + R_2)^\lambda.$$

Рассуждая аналогично пункту (1) леммы 2.2.2, приходим к неравенству (2.14) из которого получаем, что $\mathcal{J}_1(\varphi,\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

Для функции $\mathcal{J}_2(\varphi,\delta)$ справедливо неравенство (2.15). Опираясь на рассуждения пункта (2) леммы 2.2.2, получаем неравенство

$$\mathcal{B}_1(\varphi,t) \leqslant R_2^{\lambda p} \int\limits_{S(\rho_1,\rho_2)} |b(y)||\varphi(y)|^p |y|^{-\lambda p}\, dy \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| k\left(x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\right) - k(x,e_1) \right| |x|^{-\lambda - n/p'}\, dx.$$

Внешний интеграл не превосходит $\|b\|_\infty \|\varphi\|^p_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)}$. Следовательно,

$$\mathcal{B}_1(\varphi, t) \leqslant R_2^{\lambda p} \|b\|_\infty \|\varphi\|^p_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)} \times \\ \times \sup_{y \in S(\rho_1,\rho_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| k\Big(x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\Big) - k(x, e_1) \right| |x|^{-\lambda - n/p'}\, dx.$$

Учитывая, что $\varphi \in \Phi$, получаем

$$\mathcal{B}_1(\varphi, t) \leqslant R_2^{\lambda p} \|b\|_\infty d^p \sup_{y \in S(\rho_1,\rho_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| k\Big(x + \frac{\omega_y^{-1}(t)}{|y|}, e_1\Big) - k(x, e_1) \right| |x|^{-\lambda - n/p'}\, dx.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{B}_1(\varphi, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно относительно $\varphi \in \Phi$. Аналогичным образом этот факт устанавливается и для функции $\mathcal{B}_2(\varphi, \delta)$.

Таким образом, $\mathcal{I}_2(\varphi, \delta)$ также стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно относительно $\varphi \in \Phi$, т.е. условие (2.4) выполняется.

iv) Наконец, для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется

$$\|\chi_{\complement\mathbb{B}(0,R_2)} M_a \mathscr{K} M_b \varphi\|_{L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sup_{x \in \complement\mathbb{B}(0,R_2)} |a(x)| \varkappa \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant d\varkappa \|b\|_\infty \sup_{x \in \complement\mathbb{B}(0,R_2)} |a(x)|,$$

откуда вытекает справедливость условия (2.5). $\square$

С помощью этой леммы, используя аналогичные приемы доказательства теорем 2.3.1 и 2.3.2, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ *— оператор вида (2.1) и функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *принадлежат классу* $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $M_a \mathscr{K} M_b$, *действующий из пространства* $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *является компактным.*

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы (2.3.1) приходим к неравенству

$$\|M_a \mathscr{K} M_b - M_{a_N} \mathscr{K} M_{b_N}\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n) \to L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant \varkappa \operatorname*{ess\,sup}_{x \notin S_N} |a(x)|\, \|b\|_\infty + \varkappa \operatorname*{ess\,sup}_{x \notin S_N} |b(x)|\, \|a\|_\infty.$$

Из того, что $a, b \in B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\|M_a \mathscr{K} M_b - M_{a_N} \mathscr{K} M_{b_N}\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n) \to L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $N \to \infty$. Значит оператор $M_a \mathscr{K} M_b$, действующий из пространства $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)$, является компактным, как предел последовательности компактных операторов. □

Обозначим через D_1 и D_2 такие ограниченные измеримые области в $\mathbb{R}^n$, замыкания которых не содержат начала координат.

Следствие 2.4.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}$ — оператор вида (2.1), Тогда оператор $P_{D_1} \mathscr{K} P_{D_2}$, действующий из пространства $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)$, является компактным.*

Доказательство. Достаточно заметить, что функции $\chi_{D_j}(x)$, $j = 1, 2$, принадлежат классу $B_{0,0}^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. □

Лемма 2.4.3. *Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}_c$ — оператор вида (2.18). Тогда оператор $P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2}$, действующий из пространства $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)$, является компактным.*

Доказательство. Используя рассуждения и построения леммы 2.3.1, с учетом следствия 2.4.1 и неравенства

$$\|\mathscr{K}_c \varphi\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n) \to L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa \|c\|_\infty,$$

приходим к неравенству

$$\|P_{D_1} \mathscr{K}_c P_{D_2} - P_{D_1} \mathscr{K}_{c_j} P_{D_2}\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n) \to L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathscr{K}_{c-c_j}\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n) \to L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa \|c - c_j\|_\infty,$$

где $\{c_j(x, y)\}$ — сходящаяся к $c(x, y)$ последовательность функций вида (2.19). Так как $\|c - c_j\|_\infty \to 0$ при $j \to \infty$ и оператор $P_{D_1} \mathscr{K}_{c_j} P_{D_2}$, действующий из пространства $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p,\lambda}^0(\mathbb{R}^n)$, компактен, то заключаем, что утверждение леммы справедливо. □

Сформулируем и докажем, наконец, заключительный результат этого параграфа.

Теорема 2.4.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathscr{K}_c$ *— оператор вида (2.18) и характеристика* $c(x,y)$ *удовлетворяет условиям (2.20) и (2.21). Тогда оператор* $\mathscr{K}_c$, *действующий из пространства* $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ *в пространство* $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *является компактным.*

Доказательство. Положим $T_N = P_{S_N}\mathscr{K}_c P_{S_N}$. Тогда, по лемме (2.4.2), T_N является компактным оператором и

$$\|\mathscr{K}_c - T_N\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)\to L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N, y\in\mathbb{R}^n}|c(x,y)| + \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N, y\in\mathbb{R}^n}|c(x,y)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|<1/N}|c(x,y)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n, |y|>N}|c(x,y)|\Big).$$

Таким образом,

$$\|\mathscr{K}_c - T_N\|_{L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)\to L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $N \to \infty$. Следовательно, $\mathscr{K}_c$ — компактный оператор, действующий из пространства $L_{p,|y|^{-\lambda p}}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L^0_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. □

Глава 3

C^*-алгебра, порожденная интегральными операторами с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами различных типов

В статье [4] была построена и исследована C^*–алгебра, порожденная всеми каноническими многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами умножения на радиально слабо осциллирующие функции. В данной главе нами рассматривается C^*–алгебра $\mathfrak{B}$, которая является расширением этой алгебры операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}(= e^{i\alpha \ln|x|})$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. И сама C^*–алгебра $\mathfrak{B}$, и ее фактор–алгебра по идеалу всех компактных операторов не являются коммутативными. Для исследования алгебры $\mathfrak{B}$ используется подход А. Б. Антоневича, который базируется на теории C^*-алгебр, порожденных динамическими системами. Метод А. Б. Антоневича является весьма специальным методом исследования C^*-алгебр. Поэтому для удобства читателя в первом разделе настоящей главы кратко приведены теоретические основы этого метода: основные определения, факты и теоремы, включая теорему об изоморфизме.

§3.1 Необходимые сведения о C^*-алгебрах

Пусть $\mathfrak{A}$ — комплексная банахова алгебра. *Инволюцией* алгебры $\mathfrak{A}$ называется отображение

$$*\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \quad a \mapsto a^*,$$

удовлетворяющее для любых $a, b \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ условиям

$$(a+b)^* = a^* + b^*, \quad (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad a^{**} = a.$$

Банаховой $*$-алгеброй называется комплексная банахова алгебра $\mathfrak{A}$, наделенная инволюцией $*$. В случае если $*$-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет единичный элемент e (такие алгебры называются унитальными), и для $a \in \mathfrak{A}$ выполняется

$$aa^* = a^*a = e,$$

то a называется *унитарным* элементом.

Определение 3.1.1. *C^*-алгеброй называется банахова $*$-алгебра, для любого элемента a которой выполняется равенство*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Линейное отображение $\psi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ называется *$*$-гомоморфизмом* C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в C^*-алгебру $\mathfrak{B}$, если для любых $a, b \in \mathfrak{A}$ выполняются условия

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b), \quad \psi(a^*) = (\psi(a))^*.$$

Если $*$-гомоморфизм ψ биективен, то он называется *$*$-изоморфизмом.* Если $*$-изоморфизм $\psi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, то он называется *автоморфизмом* C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Подчеркнем, что когда речь идет об автоморфизме C^*-алгебры имеется в виду автоморфизм, сохраняющий инволюцию. Более подробную информацию о C^*-алгебрах можно найти, например, в книгах [25], [33], [65].

Пусть G — абстрактная группа и $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра. Всякий гомоморфизм τ из G в $\mathfrak{A}$ называется *представлением* группы G в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Представление τ группы G в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется унитарным, если для любого $g \in G$ соответствующий элемент $\tau(g) \in \mathfrak{A}$ является унитарным. Если $G = \mathbb{Z}$, то представление группы задается одним элементом $\tau_1 = \tau(1)$. Основные сведения о представлениях групп можно найти в [29].

В работах А. Б. Антоневича была построена теория специального класса C^*-алгебр (их иногда называют C^*-алгебрами, порожденными динамическими системами). Ниже мы приводим в удобном виде основные факты этой теории, включая основную теорему — теорему об изоморфизме (подробно эти факты изложены в монографии [12, §§ 6–7]).

Определение 3.1.2. *Пусть $\mathfrak{B}$ — C^*-алгебра, $\mathfrak{A}$ — C^*-подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, τ — унитарное представление группы G в $\mathfrak{B}$, и пусть выполнены следующие аксиомы:*

1) *$\tau(g)a\tau^{-1}(g) \in \mathfrak{A}$ для любых $a \in \mathfrak{A}$ и $g \in G$;*

2) *множество $\mathfrak{B}^0$ конечных сумм вида $\sum\limits_i a_i\tau(g_i)$, где $a_i \in \mathfrak{A}$, $g_i \in G$, плотно по норме в алгебре $\mathfrak{B}$.*

Тогда говорят, что C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ и представлением τ группы G, и пишут $\mathfrak{B} = C^*(\mathfrak{A}, G, \tau)$.

Для любого фиксированного элемента $g \in G$ рассмотрим отображение

$$\widehat{\tau}_g \colon \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}, \quad a \mapsto \tau(g)a\tau^{-1}(g). \tag{3.1}$$

Это отображение линейно и сохраняет умножение:

$$\widehat{\tau}_g(ab) = \tau(g)ab\tau^{-1}(g) = \tau(g)a\tau^{-1}(g)\tau(g)b\tau^{-1}(g) = \widehat{\tau}_g(a)\widehat{\tau}_g(b).$$

Так как, по условию, $\tau(g)$ — унитарный элемент, то

$$\tau^{-1}(g) = \tau(g)^*.$$

Из этого равенства следует, что отображение $\widehat{\tau}_g$ сохраняет инволюцию:

$$(\widehat{\tau}_g(a))^* = (\tau(g)a\tau^{-1}(g))^* = (\tau^{-1}(g))^*a^*(\tau(g))^* = \tau(g)a^*\tau^{-1}(g) = \widehat{\tau}_g(a^*).$$

Таким образом, отображение $\widehat{\tau}_g$ является $*$-гомоморфизмом C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Непосредственно из формулы (3.1) следует, что отображение $\widehat{\tau}_g$ является биективным. Следовательно, $\widehat{\tau}_g$ есть автоморфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}$.

В книге [12] предполагалось, что C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ $*$-изоморфна алгебре $\mathrm{HOM}(\mathcal{E})$ гомоморфизмов N-мерного комплексного векторного расслоения $\mathcal{E}$ над компактным топологическим пространством $\mathcal{X}$. Если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна, что соответствует случаю $N = 1$, то она $*$-изоморфна алгебре $C(\mathcal{X})$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра вышеуказанного типа. Каждый автоморфизм $\widehat{\tau}_g$ вида (3.1) порождает гомеоморфизм $\pi_g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Гомеоморфизмы π_g задают действие группы G на пространстве $\mathcal{X}$.

Определение 3.1.3. *Говорят, что группа G действует на алгебре $\mathfrak{A}$ автоморфизмами топологически свободно, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:*

i) для любого конечного набора H элементов группы G и любого открытого множества $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$ существует такая точка $x_0 \in \mathcal{W}$, что все точки $\pi_g(x_0)$, $g \in H$, попарно различны;

ii) для каждого отображения π_g при $g \neq e$ внутренность множества неподвижных точек пуста.

В случае $G = \mathbb{Z}$ это определение эквивалентно тому, что множество непериодических точек отображения π_1 всюду плотно в $\mathcal{X}$.

Пусть G — группа, H — конечное подмножество в G. Через $|H|$ обозначим мощность множества H, а через H^m — множество элементов, представимых в виде произведения m элементов из H.

Определение 3.1.4. *Пусть группа G имеет конечное число образующих $g_1, g_2, \ldots, g_j$. Если для множества*

$$H_0 = \{e, g_1, g_2, \ldots, g_j, g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_j^{-1}\}$$

выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty} |(H_0)^m|^{1/m} = 1,$$

то группа G называется субэкспоненциальной.

Определение 3.1.5. *Группа G называется допустимой, если для любого конечного $H \subset G$ существует такая последовательность подгрупп $\{e\} := G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_p$, что*

1) $H \subset G_p$;

2) подгруппа G_{j-1} нормальна в подгруппе G_j, $j = 1, 2, \cdots, p$;

3) фактор-группа G_j/G_{j-1} субэкспоненциальна, $j = 1, 2, \cdots, p$.

Доказывается, в частности, что всякая абелева группа G является допустимой.

Предложение 3.1.1. ***(Теорема об изоморфизме, [12, с. 83])*** *Пусть заданы C^*-алгебры $\mathfrak{B} = C^*(\mathfrak{A}, G, \tau)$ и $\mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{A}_1, G, \tau_1)$ с одной и той же группой G, и пусть существует $*$-изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1$ такой, что*

$$\varphi(\tau(g)a\tau^{-1}(g)) = \tau_1(g)\varphi(a)\tau_1^{-1}(g).$$

Если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $HOM(\mathcal{E})$ гомоморфизмов N-мерного комплексного векторного расслоения $\mathcal{E}$, а группа G допустима и действует на $\mathfrak{A}$ автоморфизмами топологически свободно, то соответствие

$$\Phi\colon \sum_i a_i\tau(g_i) \mapsto \sum_i \varphi(a_i)\tau_1(g_i)$$

продолжается с множества $\mathfrak{B}^0$ конечных сумм вида $\sum\limits_i a_i\tau(g_i)$ до $*$-изоморфизма C^*-алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$.

Предложение 3.1.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ и унитарным представлением τ группы $\mathbb{Z}$, причем C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ $*$-изоморфна алгебре $C(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — компактное топологическое пространство.

2) группа $\mathbb{Z}$ действует на алгебре $\mathfrak{A}$ топологически свободно,

3) пространство $\mathcal{X}$ неприводимо относительно гомеоморфизма π, порожденного автоморфизмом $\widehat{\tau}$ вида (3.1).

Тогда элемент $a_0 + a_1\tau_1$ обратим в том и только в том случае, когда один из коэффициентов a_0 или a_1 обратим.

§3.2 C^*-алгебра интегральных операторов с однородными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами

Рассмотрим на $\mathbb{R}$ множество $\Omega(\mathbb{R})$ всех непрерывных ограниченных функций f, которые для любого компакта $X \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to\pm\infty} \sup_{h\in X} |f(t) - f(t+h)| = 0.$$

Функции из $\Omega(\mathbb{R})$ называются слабо осциллирующими на бесконечности.

Пример 3.2.1. *Возьмем произвольное $a \in (0,1)$. Тогда функции*

$$f_1(t) = \sin|t|^a \quad \textit{и} \quad f_2(t) = \cos|t|^a$$

принадлежат пространству $\Omega(\mathbb{R}^n)$.

Множество $\Omega(\mathbb{R})$ является замкнутой подалгеброй C^*-алгебры $L_\infty(\mathbb{R})$ (см. [60], [46]). Обозначим через $\mathcal{M}_\Omega$ пространство максимальных идеалов коммутативной C^*-алгебры $\Omega(\mathbb{R})$. Известно, что $\mathcal{M}_\Omega$ можно рассматривать как компактификацию локально компактного пространства $\mathbb{R}$, причем $\mathbb{R}$ гомеоморфно вкладывается в $\mathcal{M}_\Omega$. Обозначим $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\Omega \setminus \mathbb{R}$. Множество $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ состоит из двух компонент связности $\mathcal{M}_\pm(\mathbb{R})$, которые соответствуют лучам $\mathbb{R}_\pm$ (см. [44, с. 89]). Данные компоненты представляют собой бесконечные связные множества, не являющиеся линейно связными пространствами. На множестве $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ задается мера Лебега. Непрерывное продолжение функций из алгебры $\Omega(\mathbb{R})$ с $\mathbb{R}$ на $\mathcal{M}_\Omega$ реализует $*$-изоморфизм C^*-алгебр $\Omega(\mathbb{R})$ и $C(\mathcal{M}_\Omega)$, что позволяет отождествлять эти алгебры.

Пусть $\Omega(\mathbb{R}_+)$ — замкнутая подалгебра C^*-алгебры $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, состоящая из всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций f, которые для любого компакта $X \subset \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям:

$$\lim_{t\to 0} \sup_{h\in X} |f(t) - f(ht)| = 0,$$

$$\lim_{t\to +\infty} \sup_{h\in X} |f(t) - f(ht)| = 0.$$

Функции из $\Omega(\mathbb{R}_+)$ называют слабо осциллирующими в нуле и на бесконечности. Нетрудно видеть, что замена переменных $t \mapsto e^{-t}$ устанавливает изоморфизм $\Omega(\mathbb{R}_+)$ на $\Omega(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ множество всех заданных на $\mathbb{R}^n$ функций $a(x)$ таких, что $a(x) = a_0(|x|)$, где $a_0 \in \Omega(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Следуя работе [4], функции из класса $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *радиально слабо осциллирующими* функциями.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(\mathscr{K}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, удовлетворяет условиям 1°, 2° главы 2 и, кроме того, условию

$$\hat{3}^\circ \quad \kappa := \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)||y|^{-n/2}\,dy < \infty, \quad e_1 = (1,0,\ldots,0).$$

Пример 3.2.2. *Функция*

$$k(x,y) = \frac{1}{|x|^n + |y|^n} e^{ia(x'\cdot y')},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $x' \cdot y'$ — скалярное произведение нормированных векторов x' и y', удовлетворяет условиям 1° и 2°. Условие $\hat{3}^\circ$ также выполняется:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)||y|^{-n/2}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|y|^n}|y|^{-n/2}\,dy < \infty.$$

Известно (см. [68, p. 70]), что оператор $\mathscr{K}$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, причем $\|\mathscr{K}\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varkappa$. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор M_a умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что $\|M_a\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|a\|_\infty \|\varphi\|_2$ для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$A = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} \mathscr{K}_j + F, \tag{3.3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a_j \in \Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{K}_j$ — оператор вида (2.1) с ядром $k_j(x,y)$, а F — компактный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую C^*-подалгебру C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы A вида (3.3). Она представляет собой замыкание в равномерной операторной топологии множества $\mathfrak{A}_0$, состоящего из всех операторов вида (3.3). В работе [4] для алгебры $\mathfrak{A}$ построено символическое исчисление, т. е. каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ поставлена в соответствие некоторая функция $\sigma_A(m,\eta,\xi) \in C(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — компактификация локально компактного пространства $\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой. Функция $\sigma_A(m,\eta,\xi)$ называется символом оператора A. В частности, символ оператора A вида (3.3) задается на компакте $\mathfrak{M}$ равенствами

$$\begin{cases} \sigma_A(m,\eta,\xi) = \lambda + \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{a}_{0j}(\eta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1,y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/2+i\xi}\, dy, \\ \sigma_A(\infty) = \lambda, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\widetilde{a}_{0j}(t) = a_{0j}(e^{-t})$, а $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, которые определяются следующим образом

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ \dfrac{m!(n-3)!}{(m+n-3)!} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Здесь $C_m^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех компактных операторов, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Из свойств компактных операторов следует, что множество $\mathfrak{F}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$. Символ $\sigma_{[A]}(m, \eta, \xi)$ фактор–класса $A+\mathfrak{F}$ определим равенством

$$\sigma_{[A]}(m, \eta, \xi) = \sigma_A(m, \eta, \xi).$$

Это корректно, поскольку все операторы из множества $A + \mathfrak{F}$ имеют одинаковый символ. В статье [4] было показано, что C^*-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ является коммутативной, а ее пространство максимальных идеалов, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}$.

Лемма 3.2.1. *Отображение*

$$s\colon \mathfrak{A}/\mathfrak{F} \to C(\mathfrak{M}), \quad A + \mathfrak{F} \mapsto \sigma_{[A]}(m, \eta, \xi) \tag{3.5}$$

является $*$-изоморфизмом.

Доказательство. Так как пространство максимальных идеалов C^*-алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}$, то в силу первой теоремы теоремы Гельфанда–Наймарка (см., например, [33, с. 58]), C^*-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ $*$-изоморфна C^*-алгебре $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на $\mathfrak{M}$. Этот изоморфизм осуществляет преобразование Гельфанда. Но согласно результатам работы [4] преобразование Гельфанда произвольного элемента $A+\mathfrak{F} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ совпадает с его символом $\sigma_{[A]}(m, \eta, \xi)$. $\square$

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим $|x|^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln |x|}$. Заметим, что при $\alpha \neq 0$ функция $|x|^{i\alpha}$ не принадлежит классу $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$. Для этого покажем, что функция $e^{i\alpha \ln r}$, $r > 0$, не принадлежит классу $\Omega(\mathbb{R}_+)$. Имеем

$$\begin{aligned} |e^{i\alpha \ln r} - e^{i\alpha \ln hr}| = |e^{i\alpha \ln r}||1 - e^{i\alpha \ln h}| = |1 - e^{i\alpha \ln h}| = \\ = |1 - \cos(\alpha \ln h) - i \sin(\alpha \ln h)| = \sqrt{2(1 - \cos(\alpha \ln h))}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(h) = \sqrt{2(1-\cos(\alpha \ln h))}$. Ясно, что её точками максимума будут те, в которых $\cos(\alpha \ln h) = -1$, т. е. точки

$$h_m = e^{(\pi+2\pi m)/\alpha}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Возьмем число $h_0 = e^{\pi/\alpha}$ и рассмотрим компакт $X = [\lfloor h_0 \rfloor, \lfloor h_0 \rfloor + 1]$, где $\lfloor h_0 \rfloor$ есть целая часть h_0. Для компакта X получаем соотношения

$$\lim_{x\to 0} \sup_{h\in X} \big\{ |e^{i\alpha \ln x} - e^{i\alpha \ln hx}| \big\} = \lim_{x\to 0} \sup_{h\in X} f(h) = 2,$$

$$\lim_{x\to \infty} \sup_{h\in X} \big\{ |e^{i\alpha \ln x} - e^{i\alpha \ln hx}| \big\} = \lim_{x\to \infty} \sup_{h\in X} f(h) = 2.$$

Но тогда функция $e^{i\alpha \ln x}$ не принадлежит классу $\Omega(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, $|x|^{i\alpha}$ не принадлежит классу $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$.

Расширим алгебру $\mathfrak{A}$ операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}$. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 3.2.2. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ оператор*

$$A_\alpha = M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}}$$

принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $A = \mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — оператор вида (3.2). Тогда

$$(\mathscr{K}_\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x,y)\, \varphi(y)\, dy,$$

где функция $k_\alpha(x,y)$ задется равенством

$$k_\alpha(x,y) = k(x,y) \frac{|x|^{i\alpha}}{|y|^{i\alpha}}. \tag{3.6}$$

Легко видеть, что функция $k_\alpha(x,y)$ удовлетворяет условиям 1° и 2°. Проверим выполнение условия $\hat{3}^\circ$. Так как

$$|k_\alpha(e_1,y)| = |k(e_1,y)| \left| \frac{|e_1|^{i\alpha}}{|y|^{i\alpha}} \right| = |k(e_1,y)|,$$

то
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k_\alpha(e_1,y)||y|^{-n/2}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k_(e_1,y)||y|^{-n/2}\,dy < \infty.$$
Таким образом, $\mathscr{K}_\alpha \in \mathfrak{A}$.

Пусть A — оператор вида (3.3). Тогда
$$\begin{aligned} A_\alpha &= M_{|x|^{i\alpha}}\left(\lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j}\mathscr{K}_j + F\right) M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} = \\ &= \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j}(M_{|x|^{i\alpha}}\mathscr{K}_j M^{-1}_{|x|^{i\alpha}}) + M_{|x|^{i\alpha}} F M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} = \\ &= \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j}(\mathscr{K}_j)_\alpha + F_\alpha. \end{aligned}$$
Следовательно, $A_\alpha \in \mathfrak{A}$.

Пусть теперь A — произвольный оператор из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Так как множество $\mathfrak{A}_0$, состоящее из всех операторов вида (3.3), всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}$, то найдется такая последовательность $\{A_j\} \subset \mathfrak{A}_0$, что
$$\|A - A_j\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))} \to 0, \quad j \to \infty.$$
В силу того, что
$$\begin{aligned} \|A_\alpha - (A_j)_\alpha\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))} = \|M_{|x|^{i\alpha}}(A - A_j)M^{-1}_{|x|^{i\alpha}}\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant \\ \leqslant \|A - A_j\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))}, \end{aligned}$$
получаем
$$\|A_\alpha - (A_j)_\alpha\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))} \to 0, \quad j \to \infty.$$
Так как $(A_j)_\alpha \in \mathfrak{A}$, то $A_\alpha \in \mathfrak{A}$. □

§3.3 C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ и ее структура

Обозначим через $\mathfrak{B}$ C^*-алгебру, порожденную всеми операторами A из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и всеми операторами $M_{|x|^{i\alpha}}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, что множество $\mathfrak{F}$ всех компактных операторов является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{B}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$. Она представляет собой замыкание по норме фактор-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$ множества

$$(\mathfrak{B}/\mathcal{F})_0 = \Big\{\sum_r \prod_s A_{rs} M_{|x|^{i\alpha_{rs}}} + \mathcal{F}\Big\},$$

где суммы и произведения конечны. Заметим, что алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$.

Лемма 3.3.1. *Отображение*

$$\tau_M : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}, \quad \alpha \mapsto M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}$$

является унитарным представлением группы $\mathbb{R}$.

Доказательство. Вначале покажем, что отображение τ_M является гомоморфизмом. Действительно,

$$\tau_M(\alpha+\beta) = M_{|x|^{i(\alpha+\beta)}} + \mathcal{F} = (M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F})(M_{|x|^{i\beta}} + \mathcal{F}) = \tau_M(\alpha)\tau_M(\beta)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Далее,

$$(M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F})^* = (M_{|x|^{i\alpha}})^* + \mathcal{F} = M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F}.$$

Так как

$$(M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F})^*(M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}) = (M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F})(M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}) = I + \mathcal{F}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то элемент $M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F} \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$ является унитарным. Следовательно, отображение τ_M является унитарным представлением группы $\mathbb{R}$ в алгебре $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$. □

Следующее утверждение дает описание структуры C^*-алгебры $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$.

Лемма 3.3.2. *C^*-алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ и унитарным представлением τ_M группы $\mathbb{R}$, т.е. $\mathfrak{B}/\mathcal{F} = C^*(\mathfrak{A}/\mathcal{F}, \mathbb{R}, \tau_M)$.*

Доказательство. Проверим выполнение условий из определения 3.1.2. В силу леммы 3.2.2 для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ элемент

$$(M_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F})(A + \mathcal{F})(M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}) = M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}$$

принадлежит C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$. Следовательно, условие 1) выполнено.

Проверим второе условие из определения 3.1.2, т. е. докажем, что множество

$$(\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0 = \Big\{\sum_r A_r M_{|x|^{i\alpha_r}} + \mathcal{F}\Big\} \tag{3.7}$$

всюду плотно в C^*-алгебре $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$. Выше было сказано, что множество $(\mathfrak{B}/\mathcal{F})_0$ всюду плотно в алгебре $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$. Поэтому нам достаточно доказать, что

$$(\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0 = (\mathfrak{B}/\mathcal{F})_0.$$

Для этого нам достаточно убедиться в справедливости равенства

$$A_1 M_{|x|^{i\alpha}} A_2 M_{|x|^{i\beta}} = A_3 M_{|x|^{i(\alpha+\beta)}} + F, \tag{3.8}$$

где $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$ и $F \in \mathcal{F}$. Действительно,

$$A_1 M_{|x|^{i\alpha}} A_2 M_{|x|^{i\beta}} = A_1 (A_2)_\alpha M_{|x|^{i(\alpha+\beta)}}.$$

По лемме 3.2.2 оператор $(A_2)_\alpha$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$. Так как $A_1(A_2)_\alpha = A_3 + F$, где $A_3 \in \mathfrak{A}$ (см. [4]), то равенство (3.8) справедливо. □

Каждый оператор $M_{|x|^{i\alpha}}$ порождает отображение

$$\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}} \colon \mathfrak{A}/\mathcal{F} \to \mathfrak{A}/\mathcal{F}, \quad A + \mathcal{F} \mapsto M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathcal{F}. \tag{3.9}$$

Покажем, что $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ является автоморфизмом C^*-алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$. Линейность этого отображения очевидна. Кроме того,

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}((A_1+\mathcal{F})(A_2+\mathcal{F})) &= \widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}(A_1A_2+\mathcal{F}) = M_{|x|^{i\alpha}} A_1 A_2 M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F} = \\
&= M_{|x|^{i\alpha}} A_1 M_{|x|^{-i\alpha}} M_{|x|^{i\alpha}} A_2 M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F} = \\
&= (M_{|x|^{i\alpha}} A_1 M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F})(M_{|x|^{i\alpha}} A_2 M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F}) = \\
&= \widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}(A_1+\mathcal{F})\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}(A_2+\mathcal{F})
\end{aligned}$$

для любых $A_1 + \mathcal{F}, A_2 + \mathcal{F} \in \mathfrak{A}/\mathcal{F}$, и

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}((A+\mathcal{F})^*) &= M_{|x|^{i\alpha}} A^* M_{|x|^{-i\alpha}} + \mathcal{F} = \\
&= (M_{|x|^{i\alpha}} A M_{|x|^{-i\alpha}})^* + \mathcal{F} = (\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}(A+\mathcal{F}))^*
\end{aligned}$$

для любого $A+\mathcal{F}\in\mathfrak{A}/\mathcal{F}$. Значит, $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ является $*$-гомоморфизмом. Далее, из (3.9) следует, что $*$-гомоморфизм $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ сюръективен. Покажем, что ядро $\operatorname{Ker}(\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}})$ этого гомоморфизма является тривиальным. В самом деле, пусть $A+\mathcal{F}\in\operatorname{Ker}(\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}})$, причем $A\notin\mathcal{F}$. Тогда $M_{|x|^{i\alpha}}AM_{|x|^{-i\alpha}}+\mathcal{F}=\mathcal{F}$, откуда $M_{|x|^{i\alpha}}AM_{|x|^{-i\alpha}}\in\mathcal{F}$. Но тогда $A\in\mathcal{F}$ — противоречие. Значит, отображение $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ инъективно. Таким образом, $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ является $*$-изоморфизмом C^*-алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ на себя, то есть ее автоморфизмом.

Лемма 3.3.3. *Группа $\mathbb{R}$ действует на C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ автоморфизмами $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ топологически свободно.*

Доказательство. На алгебре $C(\mathfrak{M})$ определим отображение

$$\widehat{\Phi}_\alpha=s\circ\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}\circ s^{-1},$$

где s и $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ задаются формулами (3.5) и (3.9) соответственно. Так как отображение s является $*$-изоморфизмом C^*-алгебры $C(\mathfrak{M})$ на C^*-алгебру $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$, а $\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$, то $\widehat{\Phi}_\alpha$ является автоморфизмом алгебры $C(\mathfrak{M})$.

Нам потребуется явная формула, задающая действие автоморфизма $\widehat{\Phi}_\alpha$ на алгебре $C(\mathfrak{M})$. Пусть $\sigma(m,\eta,\xi)$ — произвольная функция из $C(\mathfrak{M})$ и $s^{-1}(\sigma)=A+\mathcal{F}$. Из (3.5) следует, что $\sigma(m,\eta,\xi)=\sigma_{[A]}(m,\eta,\xi)$. Согласно формуле (3.9)

$$\widehat{M}_{|x|^{i\alpha}}(A+\mathcal{F})=A_\alpha+\mathcal{F},$$

где $A_\alpha=M_{|x|^{i\alpha}}AM^{-1}_{|x|^{i\alpha}}$. Таким образом нужно найти $s(A_\alpha+\mathcal{F})$, т. е. вычислить символ $\sigma_{[A_\alpha]}(m,\eta,\xi)$ элемента $A_\alpha+\mathcal{F}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть A — оператор вида (3.3). Тогда

$$A_\alpha=\lambda I+\sum_{j=1}^{\ell}M_{a_j}(\mathscr{K}_j)_\alpha+F_\alpha.$$

Учитывая формулы (3.4) и (3.6), получаем

$$\sigma_{[A_\alpha]}(m,\eta,\xi)=\lambda+\sum_{j=1}^{\ell}\widetilde{a}_{0j}(\eta)\int\limits_{\mathbb{R}^n}k_{j\alpha}(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/2+i\xi}\,dy=$$

$$= \lambda + \sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{a}_{0j}(\eta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/2 + i(\xi - \alpha)}\, dy = \sigma_{[A]}(m, \eta, \xi - \alpha),$$

причем

$$\sigma_{[A_\alpha]}(\infty) = \sigma_{[A]}(\infty) = \lambda.$$

2) Пусть теперь A — произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим последовательность $\{A_j + \mathcal{F}\}$, где A_j — оператор вида (3.3), такую что $\|A - A_j + \mathcal{F}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{F}} \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда

$$\lim_{j \to \infty} \|A_\alpha - (A_j)_\alpha + \mathcal{F}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{F}} = 0.$$

Как было показано выше, для любой точки $(m, \eta, \xi) \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство

$$\sigma_{[(A_j)_\alpha]}(m, \eta, \xi) = \sigma_{[A_j]}(m, \eta, \xi - \alpha). \tag{3.10}$$

Поскольку $*$-изоморфизм является изометрией ([33], с. 105), то из леммы 3.2.1 следует, что для любого оператора $A \in \mathfrak{A}$ выполняется равенство

$$\sup_{\mathfrak{M}} |\sigma_{[A_\alpha]}(m, \eta, \xi)| = \|A + \mathcal{F}\|_{\mathfrak{A}/\mathcal{F}}.$$

Учитывая это, перейдем в равенстве (3.10) к пределу при $j \to \infty$. В результате получаем равенство

$$\sigma_{[A_\alpha]}(m, \eta, \xi) = \sigma_{[A]}(m, \eta, \xi - \alpha) \tag{3.11}$$

для всех $(m, \eta, \xi) \in \mathfrak{M}$, из которого, в частности, имеем $\sigma_{[A_\alpha]}(\infty) = \sigma_{[A]}(\infty)$.

Из (3.11) следует, что автоморфизм $\widehat{\Phi}_\alpha$ задаётся формулами

$$\begin{cases} (\widehat{\Phi}_\alpha \sigma)(m, \eta, \xi) = \sigma(m, \eta, \xi - \alpha), \quad (m, \eta, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \\ (\widehat{\Phi}_\alpha \sigma)(\infty) = \sigma(\infty), \end{cases} \tag{3.12}$$

где $\sigma(m, \eta, \xi)$ — произвольная функция из $C(\mathfrak{M})$.

Автоморфизм $\widehat{\Phi}_\alpha$ C^*-алгебры $C(\mathfrak{M})$ порождает гомеоморфизм π_α компактного топологического пространства $\mathfrak{M}$, который определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \pi_\alpha((m, \eta, \xi)) = (m, \eta, \xi + \alpha), \quad (m, \eta, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \\ \pi_\alpha(\infty) = \infty. \end{cases} \tag{3.13}$$

Очевидно, что если $\alpha \neq 0$, то единственной неподвижной точкой гомеоморфизма π_α является бесконечно удалённая точка. Следовательно, группа $\mathbb{R}$ действует на C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ автоморфизмами топологически свободно. $\square$

§3.4 Критерий нетеровости операторов из алгебры $\mathfrak{B}$

Будем говорить, что $f(m,\eta,\xi) \in L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$, если при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ функция $f(m,\eta,\xi)$ измерима на множестве $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ и

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{Z}_+\times\mathcal{M}(\mathbb{R})\times\mathbb{R})} := \left(\sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(m,\eta,\xi)|^2 \, d\eta \, d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\sigma(m,\eta,\xi) \in C(\mathfrak{M})$. Определим в пространстве $L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ оператор $\mathbb{M}_\sigma$ равенством

$$(\mathbb{M}_\sigma f)(m,\eta,\xi) = \sigma(m,\eta,\xi) f(m,\eta,\xi). \tag{3.14}$$

Пусть $\mathfrak{D}$ — C^*-алгебра, порожденная всеми операторами умножения $\mathbb{M}_\sigma$ на функции из $C(\mathfrak{M})$. Рассмотрим отображение

$$\mu : C(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{D}, \quad \sigma(m,\eta,\xi) \mapsto \mathbb{M}_\sigma. \tag{3.15}$$

Так как операторы умножения на функции из $C(\mathfrak{M})$ обладают следующими свойствами:

$$\mathbb{M}_{\sigma_1+\sigma_2} = \mathbb{M}_{\sigma_1} + \mathbb{M}_{\sigma_2}, \quad \mathbb{M}_{\sigma_1\sigma_2} = \mathbb{M}_{\sigma_1}\mathbb{M}_{\sigma_2}, \quad (\mathbb{M}_\sigma)^* = \mathbb{M}_{\overline{\sigma}},$$

то μ является $*$-гомоморфизмом. Нетрудно видеть, что μ — взаимно однозначное отображение. Таким образом, μ является $*$-изоморфизмом C^*-алгебр $C(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{D}$.

Далее, в пространстве $L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ рассмотрим оператор

$$(U_\alpha f)(m,\eta,\xi) = f(m,\eta,\xi-\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Лемма 3.4.1. *Отображение*

$$\tau_U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})), \quad \alpha \mapsto U_\alpha$$

является унитарным представлением группы $\mathbb{R}$.

Доказательство. Вначале покажем, что отображение τ_U является гомоморфизмом. В самом деле,

$$\tau_U(\alpha + \beta) = U_{\alpha+\beta} = U_\alpha U_\beta = \tau_U(\alpha)\tau_U(\beta),$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Так как $U_\alpha^* = U_{-\alpha} = U_\alpha^{-1}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то оператор U_α является унитарным. Таким образом, τ_U есть унитарное представление группы $\mathbb{R}$ в алгебре $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$. $\square$

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathfrak{B}_1$, порожденную всеми операторами $\mathbb{M}_\sigma$ вида (3.14) и всеми операторами U_α вида (3.16). Она является замыканием в равномерной операторной топологии множества

$$(\mathfrak{B}_1)_0 = \Big\{ \sum_r \prod_s \mathbb{M}_{\sigma_{rs}} U_{\alpha_{rs}} \Big\},$$

где суммы и произведения конечны.

Лемма 3.4.2. *C^*-алгебра $\mathfrak{B}_1$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{D}$ и унитарным представлением τ_U группы $\mathbb{R}$, т.е. $\mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R}, \tau_U)$.*

Доказательство. Проверим выполнение условий определения 3.1.2. Для любой функции $\sigma(m, \eta, \xi) \in C(\mathfrak{M})$ имеем

$$\begin{aligned}(U_\alpha \mathbb{M}_\sigma U_\alpha^{-1} f)(m, \eta, \xi) &= (U_\alpha \mathbb{M}_\sigma)(f(m, \eta, \xi + \alpha)) = \\ &= U_\alpha(\sigma(m, \eta, \xi) f(m, \eta, \xi + \alpha)) = \\ &= \sigma(m, \eta, \xi - \alpha) f(m, \eta, \xi) = (\mathbb{M}_{\sigma_\alpha} f)(m, \eta, \xi),\end{aligned}$$

где

$$\sigma_\alpha(m, \eta, \xi) = \sigma(m, \eta, \xi - \alpha).$$

Следовательно, $U_\alpha \mathbb{M}_\sigma U_\alpha^{-1} \in \mathfrak{D}$. Таким образом первое условие выполнено.

Проверим условие 2) из определения 3.1.2, т. е. докажем, что множество

$$\mathfrak{B}_1^0 = \Big\{ \sum_r \mathbb{M}_{\sigma_r} U_{\alpha_r} \Big\},$$

где суммы конечны, всюду плотно в алгебре $\mathfrak{B}_1$. Учитывая, что множество $(\mathfrak{B}_1)_0$ всюду плотно в $\mathfrak{B}_1$, достаточно показать, что $\mathfrak{B}_1^0 = (\mathfrak{B}_1)_0$. Положим

$$\sigma(m, \eta, \xi) = \sigma_1(m, \eta, \xi)\sigma_2(m, \eta, \xi - \alpha_1).$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$(\mathbb{M}_{\sigma_1} U_{\alpha_1} \mathbb{M}_{\sigma_2} U_{\alpha_2} f)(m, \eta, \xi) = \sigma_1(m, \eta, \xi)\sigma_2(m, \eta, \xi - \alpha_1) f(m, \eta, \xi - \alpha_2 - \alpha_1),$$
$$(\mathbb{M}_{\sigma} U_{\alpha_1+\alpha_2} f)(m, \eta, \xi) = \sigma(m, \eta, \xi) f(m, \eta, \xi - (\alpha_1 + \alpha_2)),$$

из которых вытекает, что $\mathbb{M}_{\sigma_1} U_{\alpha_1} \mathbb{M}_{\sigma_2} U_{\alpha_2} = \mathbb{M}_{\sigma} U_{\alpha_1+\alpha_2}$. Следовательно, $\mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R}, \tau_U)$. $\square$

Рассмотрим отображение

$$\theta : \mathfrak{A}/\mathcal{F} \to \mathfrak{D}, \quad A + \mathcal{F} \mapsto \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}},$$

где $\sigma_{[A]}(m, \eta, \xi)$ — символ элемента $A + \mathcal{F}$. Нетрудно видеть, что $\theta = \mu \circ s$, где s и μ определяются формулами (3.5) и (3.15) соответственно. Следовательно, отображение θ является $*$-изоморфизмом.

Определим на множестве конечных сумм $(\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0$ вида (3.7) отображение

$$\psi_0 \colon (\mathfrak{B}/\mathcal{F})^0 \to \mathfrak{B}_1^0, \quad \sum_j A_j M_{|x|^{i\alpha_j}} + \mathcal{F} \mapsto \sum_j \theta(A_j + \mathcal{F}) U_{\alpha_j}. \qquad (3.17)$$

Теорема 3.4.1. *Соответствие ψ_0, заданное формулой (3.17), продолжается до $*$-изоморфизма $\psi : \mathfrak{B}/\mathcal{F} \to \mathfrak{B}_1$.*

Доказательство. Воспользуемся предложением 3.1.1. Покажем, что все условия этого предложения выполнены. В леммах 3.3.2 и 3.4.2 было установлено, что

$$\mathfrak{B}/\mathcal{F} = C^*(\mathfrak{A}/\mathcal{F}, \mathbb{R}, \tau_M), \quad \mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R}, \tau_U).$$

Докажем, что $*$-изоморфизм θ удовлетворяет условию

$$\theta((M_{|x|^{i\alpha}} + \mathfrak{F})(A + \mathfrak{F})(M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathfrak{F})) = U_\alpha \theta(A + \mathfrak{F}) U_\alpha^{-1}. \tag{3.18}$$

Действительно, используя формулу (3.11), запишем равенства:

$$\theta((M_{|x|^{i\alpha}} + \mathfrak{F})(A + \mathfrak{F})(M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathfrak{F})) = \theta(M_{|x|^{i\alpha}} A M^{-1}_{|x|^{i\alpha}} + \mathfrak{F}) = \theta(A_\alpha + \mathfrak{F}) =$$
$$= \mathbb{M}_{\sigma_{[A_\alpha]}(m,\eta,\xi)} = \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}(m,\eta,\xi-\alpha)}.$$

Учитывая, что

$$(U_\alpha \theta(A + \mathfrak{F}) U_\alpha^{-1} f)(m, \eta, \xi) = (U_\alpha \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}})(f(m, \eta, \xi + \alpha)) =$$
$$= \sigma(m, \eta, \xi - \alpha) f(m, \eta, \xi),$$

получаем равенство

$$U_\alpha \theta(A + \mathfrak{F}) U_\alpha^{-1} = \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}(m,\eta,\xi-\alpha)},$$

из которого приходим к формуле (3.18).

Далее, по лемме 3.2.1 C^*-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ $*$-изоморфна C^*-алгебре $C(\mathfrak{M})$. Группа $\mathbb{R}$ является абелевой, а потому допустима и, в силу леммы 3.3.3, действует на алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ автоморфизмами топологически свободно. Тогда, с учетом предложения 3.1.1, соответствие ψ_0 продолжается до $*$-изоморфизма $\psi\colon \mathfrak{B}/\mathfrak{F} \to \mathfrak{B}_1$. $\square$

Канонический $*$-гомоморфизм

$$p\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}/\mathfrak{F}, \quad B \mapsto B + \mathfrak{F},$$

ядром которого является идеал $\mathfrak{F}$, позволяет определить отображение

$$S = \psi \circ p : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1.$$

Так как ψ есть $*$-изоморфизм C^*-алгебр $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B}_1$, то отображение S является $*$-гомоморфизмом. Назовем *символом* оператора $B \in \mathfrak{B}$ его образ $S(B) \in \mathfrak{B}_1$. В случае, когда

$$B = \sum_{j=1}^{\ell} A_j M_{|x|^{i\alpha_j}},$$

где $A_j \in \mathfrak{A}$, его символом является оператор

$$S(B) = \psi(B + \mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\ell} \theta(A_j + \mathcal{F}) U_{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{M}_{\sigma_{A_j}} U_{\alpha_j}. \tag{3.19}$$

(Напомним, что $\sigma_{A_j}(m, \eta, \xi) = \sigma_{[A_j]}(m, \eta, \xi)$.)

Теорема 3.4.2. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Оператор B является нетеровым тогда и только тогда, когда его символ $S(B)$ обратим в $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$.*

Доказательство. Как известно (см., например, [23, с. 86]), необходимым и достаточным условием нетеровости оператора $B \in \mathfrak{B}$ является обратимость элемента $B + \mathcal{F}$ в фактор-алгебре $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$. Так как C^*-алгебра $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$, то элемент $B + \mathcal{F}$ обратим в $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))/\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда он обратим в $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ (см. [33, с. 63]). Таким образом, то нетеровость оператора B эквивалентна обратимости элемента $B + \mathcal{F}$ в C^*-алгебре $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$.

По теореме 3.4.1 C^*-алгебры $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ и $\mathfrak{B}_1$ $*$-изоморфны. Значит элемент $B + \mathcal{F}$ обратим в алгебре $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ в том и только в том случае, когда его образ $\psi(B + \mathcal{F})$ обратим в алгебре $\mathfrak{B}_1$. Но $\psi(B + \mathcal{F}) = S(B)$ и $\mathfrak{B}_1$ является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$. Следовательно, обратимость фактор-класса $B + \mathcal{F}$ в C^*-алгебре $\mathfrak{B}/\mathcal{F}$ равносильна обратимости оператора $S(B)$ в C^*-алгебре $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$. □

Замечание 3. В [9] была исследована C^*-алгебра $\mathfrak{U}$, порожденная всеми операторами вида $\lambda I + \mathcal{K}$ и всеми операторами $M_{|x|^{i\alpha}}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{U}$ является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathfrak{B}$. Поэтому условия нетеровости операторов из алгебры $\mathfrak{U}$, ранее установленные в [9], могут быть получены из теоремы 3.4.2.

§3.5 Некоторые частные случаи

Теорема 3.4.2 дает критерий нетеровости оператора в терминах обратимости его символа, который сам является оператором. Представляется важным рассмотреть частные случаи, когда для символа оператора можно получить эффективные скалярные условия обратимости. Тем самым будут получены условия нетеровости исходного оператора в скалярной форме.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор

$$B = I + A_1 + A_2 M_{|x|^{i\alpha}}, \tag{3.20}$$

где $\alpha \neq 0$, A_1 и A_2 — операторы из алгебры $\mathfrak{A}$, символы которых удовлетворяют условию

$$\sigma_{A_1}(\infty) = 0, \quad \sigma_{A_2}(\infty) = 0. \tag{3.21}$$

В качестве операторов A_s, $s = 1, 2$, можно взять операторы вида

$$A_s = \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_{sj}} \mathscr{K}_{sj},$$

где $a_{sj} \in \Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{K}_{sj}$ — оператор вида (2.1). Из формулы (3.4) следует, что для таких операторов условие (3.21) выполнено.

Согласно формуле (3.19) символом оператора B является оператор

$$S(B) = I + \mathbb{M}_{\sigma_{A_1}} + \mathbb{M}_{\sigma_{A_2}} U_\alpha,$$

где U_α определяется формулой (3.16). Оператор $S(B)$ действует на функцию $f \in L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ по правилу

$$(S(B)f)(m, \eta, \xi) = \big(1 + \sigma_{A_1}(m, \eta, \xi)\big) f(m, \eta, \xi) + \\ + \sigma_{A_2}(m, \eta, \xi) f(m, \eta, \xi - \alpha).$$

Напомним, что индексом функции $w \in C(\dot{\mathbb{R}})$, которая нигде не обращается в нуль, называется целое число

$$\operatorname{ind} w(\xi) = \frac{1}{2\pi} \Delta[\arg w(\xi)]\big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Если $g(m, \eta, \xi) \in C(\mathfrak{M})$, то через $\operatorname{ind}_\xi g(m, \eta, \xi)$ будем обозначать индекс функции $g(m, \eta, \xi)$ по переменной ξ при фиксированных значениях m и η.

Теорема 3.5.1. *Для того чтобы оператор B вида (3.20) являлся нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$1 + \sigma_{A_1}(m, \eta, \xi) \neq 0, \quad \forall\, (m, \eta, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Если условие (3.22) выполнено, то

$$\operatorname{ind} B = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_-, \xi)}{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_+, \xi)}, \tag{3.23}$$

где $\eta_\pm \in \mathcal{M}_\pm(\mathbb{R})$ — произвольные фиксированные точки, а $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m, которая вычисляется по формуле

$$d_n(m) = (n + 2m - 2)\frac{(n + m - 3)!}{m!(n - 2)!}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.4.2, нетеровость оператора B равносильна обратимости его символа $S(B)$в алгебре $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}))$. Покажем, в свою очередь, что обратимость символа $S(B)$ равносильна условию (3.22).

Для этого рассмотрим C^*-алгебру $\mathfrak{B}_1^\alpha = C^*(\mathfrak{D}, \mathbb{Z}, U_\alpha)$, где α такое же, как и в равенстве (3.20). Докажем, что эта алгебра удовлетворяет всем условиям предложения 3.1.2.

1) Выше было отмечено (см. (3.15)), что C^*-алгебра $\mathfrak{D}$ $*$-изоморфна C^*-алгебре $C(\mathfrak{M})$.

2) Автоморфизм

$$\widehat{U}_\alpha : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \quad \mathbb{M}_\sigma \mapsto U_\alpha \mathbb{M}_\sigma U_\alpha^{-1}$$

порождает автоморфизм $\widehat{\Phi}_\alpha$ алгебры $C(\mathfrak{M})$, который задается формулами (3.12). Как было показано, автоморфизм $\widehat{\Phi}_\alpha$ порождает гомеоморфизм π_α компактного топологического пространства $\mathfrak{M}$ (формула (3.13)). Так как любая точка компакта $\mathfrak{M}$, отличная от бесконечно удаленной, является непериодической, то группа $\mathbb{Z}$ действует на алгебре $\mathfrak{D}$ топологически свободно.

3) Топологическое пространство $\mathfrak{M}$ является неприводимым относительно отображения π_α, поскольку его нельзя представить в виде объединения двух непустых замкнутых множеств, инвариантных относительно этого отображения.

Таким образом, все условия предложения 3.1.2 выполнены. Тогда если оператор $S(B)$ обратим, то один из коэффициентов $1+\sigma_{A_1}(m,\eta,\xi)$ или $\sigma_{A_2}(m,\eta,\xi)$ должен быть обратим в алгебре $C(\mathfrak{M})$ (см. [12, с. 118]). Так как $\sigma_{A_2}(\infty)=0$, то коэффициент $\sigma_{A_2}(m,\eta,\xi)$ не обратим в $C(\mathfrak{M})$. Значит, коэффициент $1+\sigma_{A_1}(m,\eta,\xi)$ должен быть обратим в $C(\mathfrak{M})$. Но это равносильно условию (3.22).

Обратно, пусть выполняется условие (3.22). Рассмотрим оператор

$$(Cf)(m,\eta,\xi)=\frac{\sigma_{A_2}(m,\eta,\xi)}{1+\sigma_{A_1}(m,\eta,\xi)}f(m,\eta,\xi-\alpha).$$

Используя следствие 9.5.1 из [12], получаем, что спектральный радиус r оператора C вычисляется по формуле

$$r=\exp\Bigg(\int\limits_{\mathfrak{M}}\ln\left|\frac{\sigma_{A_2}(m,\eta,\xi)}{1+\sigma_{A_1}(m,\eta,\xi)}\right|\,d\nu\Bigg),$$

где ν — нормированная борелевская мера на $\mathfrak{M}$, сосредоточенная в бесконечно удаленной точке. Следовательно,

$$r=\left|\frac{\sigma_{A_2}(\infty)}{1+\sigma_{A_1}(\infty)}\right|=0.$$

Тогда оператор $I+C$ обратим. Значит, оператор $S(B)$ также обратим.

Найдем формулу для вычисления индекса оператора B. Рассмотрим семейство $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ операторов вида

$$B_t=I+A_1+(1-t)A_2M_{|x|^{i\alpha}}.$$

Это семейство непрерывно по t в равномерной операторной топологии, что вытекает из неравенства

$$\|B_{t_1}-B_{t_2}\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))}=\|(t_2-t_1)A_2M_{|x|^{i\alpha}}\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))}\leqslant|t_2-t_1|\|A_2\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))},$$

справедливого для всех $t_1, t_2 \in [0,1]$. Кроме того, $B_0 = B$ и $B_1 = I + A_1$. Таким образом, $\{B_t\}$ — гомотопия, соединяющая операторы B и $I + A_1$.

Для каждого $t \in [0,1]$ оператор B_t есть оператор вида (3.20). Поэтому условие (3.22) обеспечивает нетеровость каждого оператора B_t. Тогда в силу гомотопической устойчивости индекса

$$\operatorname{ind} B = \operatorname{ind}(I + A_1).$$

В работе [4] было доказано, что индекс оператора $I + A_1$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind}(I + A_1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_-, \xi)}{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_+, \xi)},$$

где $\eta_\pm \in \mathcal{M}_\pm(\mathbb{R})$ — произвольные фиксированные точки. Отсюда следует формула (3.23). $\square$

Замечание 4. Подчеркнем, что начиная с некоторого значения $m^* \in \mathbb{Z}_+$, выполняется условие

$$\operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_-, \xi)}{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_+, \xi)} = 0.$$

Поэтому правая часть в формуле (3.23) фактически представляет собой конечную сумму.

Следствие 3.5.1. *Для того чтобы оператор*

$$B_1 = I + A_1 + M_{|x|^{i\alpha}} A_2$$

был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.22). В этом случае его индекс вычисляется по формуле (3.23).

Доказательство. Запишем оператор B_1 в виде

$$B_1 = I + A_1 + (A_2)_\alpha M_{|x|^{i\alpha}},$$

где $(A_2)_\alpha = M_{|x|^{i\alpha}} A_2 M^{-1}_{|x|^{i\alpha}}$. Применив теперь теорему 3.5.1, убеждаемся в справедливости данного следствия. $\square$

Отметим еще один интересный частный случай. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор

$$B_0 = I + \mathscr{K}_1 + M_a \mathscr{K}_2 M_{|x|^{i\alpha}} + F, \tag{3.24}$$

где $\alpha \neq 0$, $a \in \Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ — операторы вида (3.2), F — компактный оператор. Сопоставляя равенство (3.24) с равенством (3.20), видим, что $A_1 = \mathscr{K}_1 + F$. Следовательно, символ

$$\sigma_{A_1}(m, \eta, \xi) = \sigma_{\mathscr{K}_1}(m, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_1(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p + i\xi} \, dy$$

не зависит от η.

Следствие 3.5.2. *Для того чтобы оператор B_0 вида (3.24) являлся нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$1 + \sigma_{\mathscr{K}_1}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall\, (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

В этом случае $\operatorname{ind} B_0 = 0$.

Доказательство. Так как символ оператора $A_1 = \mathscr{K}_1 + F$ не зависит от η, то условие (3.22) принимает вид (3.24). Далее, поскольку

$$\operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \sigma_{\mathscr{K}_1}(m, \xi)}{1 + \sigma_{\mathscr{K}_1}(m, \xi)} = 0,$$

то из формулы (3.23) следует, что $\operatorname{ind} B_0 = 0$. □

Пример 3.5.1. *Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор*

$$(B\varphi)(x) = \varphi(x) + \sin\left(\sqrt{|\ln|x||}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_1(x, y)\varphi(y)\, dy + \\ + |x|^{i\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_2(x, y)\varphi(y)\, dy, \tag{3.26}$$

предполагая, что функции $k_1(x, y)$ и $k_2(x, y)$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и $\hat{3}^\circ$. Чтобы воспользоваться следствием 3.5.1, запишем этот оператор в виде

$$B = I + M_a K_1 + M_{|x|^{i\alpha}} K_2,$$

где $a(x) = \sin\left(\sqrt{|\ln|x||}\right)$. *Тогда*

$$\tilde{a}_0(t) = a_0(e^{-t}) = \sin\sqrt{|t|}.$$

В соответствии с формулой (3.4) символом оператора $A_1 = M_a K_1$ *является функция*

$$\sigma_{A_1}(m, \eta, \xi) = \sin\sqrt{|\eta|}\,\sigma_{K_1}(m, \xi).$$

Из результатов работы [46] (см. также [44]) следует, что множество значений этой функции на множестве $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *есть отрезок* $[-1, 1]$. *Поэтому условие (3.22) принимает вид*

$$1 + \beta\,\sigma_{K_1}(m, \xi) \neq 0, \quad \forall\,(m, \beta, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times [-1, 1] \times \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Таким образом, условие (3.27) является необходимым и достаточным для нетеровости оператора B *вида (3.26).*

Вычислим индекс оператора B. *В соответствии с формулами (3.23) и (3.27) имеем*

$$\operatorname{ind} B = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m)\operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_-, \xi)}{1 + \sigma_{A_1}(m, \eta_+, \xi)} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m)\operatorname{ind}_\xi \frac{1 + \beta\sigma_{K_1}(m, \xi)}{1 + \beta\sigma_{K_1}(m, \xi)} = 0.$$

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационного исследования.

1. В классических пространствах Морри рассмотрены интегральные операторы свертки с характеристикой. В терминах этой характеристики получены условия ограниченности и компактности таких операторов.

2. Получены достаточные условия компактности интегральных операторов свертки с переменными коэффициентами, действующих из пространства Лебега в модифицированное пространство Морри и наоборот. Исследована компактность коммутатора оператора свертки и оператора умножения на функцию.

3. В локальных пространствах Морри рассмотрены канонические интегральные операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами. Найдены условия на коэффициенты, обеспечивающие компактность таких операторов. Также установлены условия ограниченности и компактности таких операторов, действующих из весового пространства Лебега в локальное пространство Морри.

4. Построено операторное символическое исчисление для C^*-алгебры, порожденной каноническими интегральными операторами с однородными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами, а так же операторами умножения на функции вида $|x|^{i\alpha}$. В терминах построенного исчисления сформулирован и доказан критерий нетеровости операторов этой алгебры.

Список сокращений и условных обозначений

p'	показатель, сопряженный к p: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
$\mathbb{Z}_+$	множество целых неотрицательных чисел
$\mathbb{R}^n$	n-мерное евклидово пространство
x	$= (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\lvert x \rvert$	$= \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
x'	$= x/\lvert x \rvert$
$x \cdot y$	$= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
$\mathbb{B}(x, r)$	открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x
$\complement\mathbb{B}(x, r)$	$= \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(x, r)$
$\lvert\mathbb{B}(x, \delta)\rvert$	мера шара $\mathbb{B}(x, \delta)$
χ_D	характеристическая функция измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$
P_D	оператор умножения на функцию χ_D
P_N	$:= P_{\mathbb{B}(0,N)}$
Q_N	$:= P_{\complement\mathbb{B}(0,N)}$, где N — натуральное число
$C_0(\mathbb{R}^n)$	множество всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций $v(t)$ таких, что $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 0$
$C_{0,0}(\mathbb{R}^n)$	множество всех непрерывных на $\mathbb{R}^n$ финитных функций, носитель которых не содержит точку $x = 0$
$\mathcal{L}(H)$	C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H

Литература

[1] **Авсянкин, О. Г.** Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами / О. Г. Авсянкин, Ф. Г. Перетятькин // Изв. вузов. Математика. - 2013. - № 11. - С. 64–68.

[2] **Авсянкин, О. Г.** Об интегральных операторах с однородными ядрами в весовых пространствах Лебега на группе Гейзенберга / О. Г. Авсянкин // Матем. заметки. -2023. -Т. 114, -вып. 1. -С. 144–148.

[3] **Авсянкин, О. Г.** Компактность некоторых классов операторов типа свертки в обобщенных пространствах Морри / О. Г. Авсянкин // Матем. заметки, - 2018. - Т. 104 - вып. 3 - С. 336–344.

[4] **Авсянкин, О. Г.** Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными $SO(n)$-инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами / О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк // Матем. заметки, - 2007. - Т. 82, - вып. 2. - С. 163–176.

[5] **Авсянкин, О. Г.** Об обратимости операторов типа свертки в пространствах Морри / О. Г. Авсянкин // Изв. вузов. Матем. - 2019. - №. 6. - С. 3–10.

[6] **Авсянкин, О. Г.** Об ограниченности и компактности одного класса операторов типа свертки в пространствах Морри / О. Г.Авсянкин, С. С. Ашихмин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, - 2022. - №3 (215). - С. 4–10.

[7] **Авсянкин, О.Г.** О компактности интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри / О. Г. Авсянкин,

С. С. Ашихмин // Матем. заметки, - 2024. - 116:3 - С. 327–338.

[8] **Авсянкин, О. Г.** О компактности операторов типа свертки в пространствах Морри / О. Г. Авсянкин // Матем. заметки, - 2017. - Т. 102 - вып. 4. - С. 483–489.

[9] **Авсянкин, О. Г.** Развитие теории многомерных интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами: дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Авсянкин Олег Геннадиевич. - Ростов-на-Дону, 2009. - 277 с.

[10] **Авсянкин, О. Г.** Многомерные интегральные операторы с однородными степени $-n$ ядрами / О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц // Докл. РАН. 1999. - Т. 368, № 6. - С. 727–729.

[11] **Авсянкин О. Г.** Проекционный метод в теории интегральных операторов с однородными ядрами / О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц // Матем. заметки. 2004. - Т. 75, № 2. - С. 149–157.

[12] **Антоневич, А. Б.** Линейные функциональные уравнения: операторный подход. / А. Б. Антоневич - Минск: Изд-во «Университетское», 1988. - 232 с.

[13] **Ашихмин, С. С.** Достаточные условия компактности интегральных операторов с однородными ядрами в локальных пространствах Морри / С. С. Ашихмин // В сборнике: Сборник материалов XIX Владикавказской молодежной математической школы (онлайн, 24-28 июня 2024 г.). -Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2024. - С. 43–44.

[14] **Ашихмин, С. С.** Об операторах типа свертки с ядрами из модифицированных пространств Морри / С. С. Ашихмин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. - 2024. - №2 (222). - С. 4–11.

[15] **Ашихмин, С. С.** О компактности операторов типа свертки с ядрами из модифицированных пространств Морри / С. С. Ашихмин // В сборнике: XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-

симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам. КРОМШ-2023. Сборник материалов международной конференции. Симферополь, 2023. - С. 28–29.

[16] **Ашихмин, С. С.** Критерии нетеровости интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами / С. С. Ашихмин // XXVIII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". XI Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Ростов н/Д - 2022. - С. 31.

[17] **Бурбаки, Н.** Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления / Н. Бурбаки - М.: Наука, 1970. - 320 с.

[18] **Буренков, В. И.** Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри / В. И. Буренков, Т. В. Тарарыкова // Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа. Сборник статей к 110–летию со дня рождения академика С. М. Никольского. - Труды МИАН. - 2016. - Т. 293. - С. 113–132.

[19] **Буренков, В. И.** Необходимые и достаточные условия ограниченности дробного максимального оператора в локальных пространствах типа Морри / В. И. Буренков, В. С. Гулиев, Г. В. Гулиев // Докл. АН - 2006. - Т. 409 - №4 - С. 443–447.

[20] **Буренков, В. И.** Необходимые и достаточные условия ограниченности потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри / В. И. Буренков, В. С. Гулиев, Г. В. Гулиев // Докл. АН - 2007. - Т. 412 - №5 - С. 585–589.

[21] **Гахов, Ф. Д.** Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский - М.: Наука, 1978. - 296 с.

[22] **Гохберг, И. Ц.** Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн // УМН - 1958. - Т. 13, - вып. 2. - С. 3–72.

[23] **Гохберг, И. Ц.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман - М.:Наука, 1971. - 352 с.

[24] **Деундяк, В. М.** Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами / В. М. Деундяк // Матем. заметки, - 2010. - Т. 87 - вып. 5 - С. 704–720.

[25] **Диксмье Ж.** C*–алгебры и их представления. / М.: Наука - 1974. - 399 с.

[26] **Ильин, В. П.** О некоторых свойствах функций из пространства $W^l_{p,a,\varkappa}(G)$ / В. П. Ильин // Зап. научн. сем. ЛОМИ. - 1971. - Т. 23 - С. 33–40.

[27] **Карапетянц, Н. К.** О необходимых условиях ограниченности оператора с неотрицательным квазиоднородным ядром / Н. К. Карапетянц // Мат. заметки. - 1981. - Т. 30, № 5. - С. 787–794.

[28] **Карапетянц, Н. К.** Полная непрерывность некоторых классов операторов типа свертки и с однородными ядрами / Н. К. Карапетянц // Изв. вузов. Математика. - 1981. - № 11. - С. 71–74.

[29] **Кириллов А. А.** Элементы теории представлений. / А. А. Кириллов - М.: Наука, - 1978. - 344 с.

[30] **Козак, А. В.** Локальный принцип в теории проекционных методов / А. В. Козак // Докл. АН СССР. - 1973. - Т. 212, - № 6. - С. 1287–1289.

[31] **Коротков, В. Б.** Интегральные операторы / В. Б. Коротков - Новосибирск: Наука, 1983. - 224 с.

[32] **Крейн, М. Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов / М. Г. Крейн // УМН - 1958. - Т. 13, - вып. 5. - С. 3–120.

[33] **Мёрфи, Дж.** C^*-алгебры и теория операторов / Дж. Мёрфи - М.: Факториал, 1997. - 336 с.

[34] **Михайлов, Л. Г.** Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 / Л. Г. Михайлов - Душанбе: Дониш, 1966. - 50 с.

[35] **Михайлов, Л. Г.** Новый класс особых интегральных уравнений / Л. Г. Михайлов // Math. Nachr. - 1977. - Т. 76. - С. 91–107.

[36] **Михайлов Л. Г.** Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Л. Г. Михайлов // Труды АН Тадж ССР. - 1963. - Т. 1. - 180 с.

[37] **Михайлов Л. Г.** О некоторых многомерных интегральных операторах с однородными ядрами / Л. Г. Михайлов // Докл. АН СССР. - 1967. - Т. 176 - вып.2 - С. 263–265.

[38] **Пасенчук А. Э.** Об обратимости некоторых классов операторов типа свертки / А. Э. Пасенчук // Докл. АН СССР. - 1985. - Т. 280, - № 5. - С. 1066–1069.

[39] **Рабинович, В.С.** Многомерные операторы типа свертки в пространствах, интегрируемых с весом функций / В.С.Рабинович // Матем. заметки. - 1974. - Т. 16, - вып. 2. - С. 267–276.

[40] **Симоненко, И. Б.** Операторы типа свертки в конусах / И. Б. Симоненко // Мат. сборник - 1967. - Т. 74 - № 2. С. 298–314.

[41] **Симоненко, И. Б.** Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих / И. Б. Симоненко // Ростов н/Д: Изд-во ЦВВР - 2007. - 120 с.

[42] **Умархаджиев, С. М.** Интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега / С. М. Умархаджиев // Матем. заметки, 102:5 (2017), С. 775–788.

[43] **Умархаджиев, С. М.** Односторонние интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега / С. М. Умархаджиев // Владикавк. матем. журн., 19:3 (2017), С. 70–82.

[44] **Штейнберг, Б. Я.** Компактность и нетеровость операторов свертки с измеримыми коэффициентами на локально компактных группах: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Штейнберг Борис Яковлевич. - Ростов-на-Дону, 1982. - 141 с.

[45] **Штейнберг, Б. Я.** Нетеровость и индекс многомерных сверток с коэффициентами типа быстро осциллирующих / Б. Я. Штейнберг // Сиб. мат. журн. - 1990. - Т. 31, -№ 4. - С. 180–186.

[46] **Штейнберг, Б. Я.** Об операторах типа свертки на локально компактных группах / Б. Я. Штейнберг // Функц. анализ и его прил. - 1981. - Т. 15 - вып. 3. - С. 95–96.

[47] **Adams, D. R.** Morrey spaces / D. R. Adams. - Cham: Birkhäuser/Springer, 2015. - xvi+121 p.

[48] **Avsyankin, O. G.** C*-algebra generated by integral operators with homogeneous kernels and oscillating coefficients of various types / O. G. Avsyankin, S. S. Ashikhmin // Journal of Mathematical Sciences. 2022. - V. 266. - № 1. - P. 66–76.

[49] **Avsyankin, O. G.** On the algebra generated by canonical integral operators with homogeneous kernels / O. G. Avsyankin // Journal of Mathematical Sciences. 2024. - V. 280. - P. 831–839.

[50] **Aykol, C.** Maximal commutator and commutator of maximal function on modified Morrey spaces / C. Aykol, H. Armutcu, M. N. Omarova // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., Mathematics. - 2016. - V. 36 - No. 1 - P. 29–35.

[51] **Benedek, A.** Convolution operators on Banach space valued functions / A. Benedek, A. P. Calderón, R. Panzone // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. - 1962. - V. 48 - No. 3 - P. 356–365.

[52] **Bokayev, N. A.** On precompactness of a set in general local and global Morrey-type spaces / N. A. Bokayev, V. I. Burenkov, D. T. Matin // Eurasian Math. J. - 2017. V. 8. - No. 3. - P. 109–115.

[53] **Böttcher, A.** Analysis of Toeplitz operators. / A. Böttcher, B. Silbermann - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. - 1990. - 512 p.

[54] **Böttcher, A.** Convolution operators and factorization of almost periodic matrix functions. / A. Böttcher, Yu. Karlovich, I. Spitkovsky - Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser. - 2002. - 457 p.

[55] **Burenkov, V. I.** Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces / V. I. Burenkov, M. A. Senouci // Eurasian Math. J. - 2021. V. 12 - No. 4 - P. 92–98.

[56] **Burenkov, V. I.** Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces / V. I. Burenkov, V. S. Guliev, T. V. Tararykova, A. Serbetci // Dokl. Math. - 2008. - V. 422 - No. 1. - P. 11–14.

[57] **Burenkov, V. I.** Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I / V. I. Burenkov // Eurasian Math. J. - 2012. - V. 3 - No. 3. - P. 11–32.

[58] **Burenkov, V. I.** Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II / V. I. Burenkov // Eurasian Math. J. - 2013. - V. 4 - No. 1. - P. 21–45.

[59] **Chen, Y** Compactness of commutators for singular integrals on Morrey spaces / Y. Chen, Y. Ding, X. Wang // Can. J. Math. - 2012. V. 64 - No. 2. - P. 257–281.

[60] **Cordes, H. O.** On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudodifferential operators / H. O. Cordes // J. Funct. Anal. - 1975. - V. 18 - No. 2. - P. 115–131.

[61] **Diggle, P. J.** A kernel method for smoothing point process data / P. J. Diggle // Journal of the Royal Statistical Society, Series C. - 1985. - V. 34 - No. 2. - P. 138–147.

[62] **Feller W.** An introduction to probability theory and its applications, vol. 2 (2nd ed.) / W. Feller - John Wiley & sons, Inc. New York. N.Y., Mei Ya Publications, Inc. Taipei, Taiwan, 1991. - 704 p.

[63] **Gonzalez R. C.** Digital image processing (4th global ed.) / R. C. Gonzalez, R. E. Woods - Pearson, 2017. - 1024 p.

[64] **Guliyev, V. S.** Parabolic fractional integral operator in modified parabolic Morrey spaces / V. S. Guliyev, K. Rahimova // Proc. A. Razmadze Math. Inst. - 2013. - V. 163 - P. 59–80.

[65] **Hagen R.** C*-algebras and numerical analysis / R. Hagen, S. Roch, B. Silbermann - Marcel Dekker. New York, Basel, - 2001. - 376 p.

[66] **Hardy, G. H.** Inequalities (2nd ed.) / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya - Cambridge University Press, 1988. - 324 p.

[67] **Hörmander, L.** On the range of convolution operatots / L. Hörmander // Ann. of Math. - 1962. - V. 76. - No. 1. - P. 148–170.

[68] **Karapetiants, N. K.** Equations with Involutive Operators / N. Karapetiants, S. Samko // Boston, MA: Birkhäuser, 2001. - P. xxii+427.

[69] **Karapetiants, N. K.** Multi-dimensional integral operators with homogeneous kernels / N. K. Karapetiants, S. G. Samko // Fract. Calc. and Applied Anal. - 1999. V. 2 - P. 67–96.

[70] **Monaghan, J. J.** Smoothed particle hydrodynamics / J. J. Monaghan // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. - 1992. V. 30 - P, 543–547.

[71] **Morrey, C. B.** On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations / C. B. Morrey jun. // Trans. Am. Math. Soc. - 1938. - 43 - P. 126–166.

[72] **Nakai, E.** Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces / E. Nakai // Math. Nachr. - 1994 - V. 166 - P. 95–103.

[73] **Peetre, J.** On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces / J. Peetre // J. Funct. Anal. - 1969. - V. 4 - P. 71–87.

[74] **Pick, L.** Function spaces. Volume 1, 2^{nd} revised and extended ed. / L. Pick, A. Kufner, O. John, S. Fučík. - Berlin: De Gruyter, 2013. - xv+479 p.

[75] **Rafeiro, H.** Morrey-Campanato spaces: an overview / H. Rafeiro, N. Samko, S. Samko // Operator theory: advances and applications - 2013. - V. 228 - P. 293–323.

[76] **Samko, N.** Integral operators commuting with dilations and rotations in generalized Morrey-type spaces / N. Samko // Math. Methods Appl. Sci. - 2020. V. 43 - No. 16 - P. 1–19.

[77] **Sawano, Y.** Morrey spaces: introduction and applications to integral operators and PDE's, Volume I (1st ed.) / Y. Sawano, G. Di Fazio, D. I. Hakim - New York: Chapman and Hall/CRC, 2020. - 502 p.

[78] **Sawano, Y.** Morrey spaces: introduction and applications to integral operators and PDE's, Volume II (1st ed.) / Y. Sawano, G. Di Fazio, D. I. Hakim - New York: Chapman and Hall/CRC, 2020. - 428 p.

[79] **Stein, E. M.** L^p boundedness of certain convolution operators / E. M. Stein // Bull. of the AMS. - 1971. - V. 77. - No. 3 - P. 404–405.