ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Кораблина Юлия Викторовна

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» (в институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича на кафедре математического анализа и геометрии).

Научный руководитель: **Абанин Александр Васильевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Брайчев Георгий Генрихович**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО "Московский педагогический государственный университет", г. Москва

Шишкин Андрей Борисович
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО "Кубанский государственный университет", г. Славянск-на-Кубани

Защита состоятся 2 сентября 2025 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21ж, и на сайте ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу
https://hub.sfedu.ru/diss/show/1338183/

Автореферат разослан «____» июня 2025 г.

Учёный секретарь диссертационного совета — Кряквин В. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Пространства голоморфных и целых функций с равномерными и интегральными весовыми оценками являются предметом многочисленных исследований и играют важную роль во многих разделах комплексного и функционального анализа, а также в приложениях (в теории аппроксимации и интерполяции, теории роста целых и мероморфных функций и её приложениях, теории двойственности различных функциональных пространств, теории распределений и ее обобщениях, теории уравнений в частных производных, анализе Фурье, в математической и теоретической физике). Одной из важнейших проблем для указанных пространств является изучение топологических свойств классических операторов (дифференцирования, интегрирования, композиции, умножения, вложения и др.), действующих в них. Данная проблема в работах J. Bonet, W. Lusky, K. Zhu, B. MacCluer, S. Li, T. Mengestie и многих других авторов изучалась отдельно для каждого оператора при дополнительных ограничениях на области и веса, порождающие банаховы пространства. Общий метод получения критериев непрерывности и компактности линейных операторов на абстрактных банаховых пространствах голоморфных в единичном круге функций был предложен в работе N. Zorboska. За рамками этого метода оказались важные участки классических шкал Харди, Бергмана, Дирихле и др., состоящие из существенно квазибанаховых пространств (случай $0 < p < 1$), и области голоморфности, отличные от единичного круга, в первую очередь, пространства Фока целых функций. Таким образом, наиболее перспективным направлением в этой тематике является раздел, посвящённый получению условий непрерывности и компактности классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций в терминах норм дельта-функций и их производных в соответствующих сопряженных пространствах. В связи с этим актуальной представляется задача разработки единого подхода, не предполагающего использования сопряжённых пространств и сопряжённых операторов, к получению результатов для конкретных операторов и пространств как следствий из абстрактных критериев. Необходимость развития данного подхода обусловлена возможной тривиальностью пространства, сопряжённого с квазибанаховым, что существенно ограничивает возможность использования традиционных методов функционального анализа, основанных на привлечении сопряжённых пространств и сопряжённых операторов.

Применение предложенного метода к конкретным весовым пространствам основано на знании нормы дельта-функции и её производной в этих пространствах. Для некоторых пространств указанные формулы известны (напр., для пространств Бергмана и Харди). Однако для весовых пространств целых функций подобный результат был известен лишь для классического гильбертова пространства Фока. В связи с этим ещё одной важной задачей, исследуемой в настоящей работе, является получение оценок сверху нормы дельта-функции и её производной в обобщённых пространствах Фока. Решение этой задачи сводится к построению целых функций из единичных шаров рассматриваемых пространств, которые в точках плоскости принимают значения по модулю сравнимые с весом, задающим пространство. Подобные построения ранее проводились А. В. Абаниным, Р. А. Баладаем, Б. Н. Хабибуллиным, Р. С. Юлмухаметовым. Однако во всех предшествующих работах имеется существенный асимптотический зазор в $\ln |z|,\ z \to \infty$, между оценками сверху, вытекающими из принадлежности построенных функций единичным шарам, и значениями их модулей в точках плоскости. Избавиться от этого зазора для всей шкалы пространств Фока вряд ли удастся. Поэтому актуальной в данном направлении задачей является выделение подкласса весов, для которых это всё-таки возможно. Отметим, что поскольку, как правило, все рассматриваемые для пространств Фока веса являются субгармоническими функциями в плоскости, эта задача является новой и для теории субгармонических функций и их связи с целыми.

Помимо самих упомянутых пространств в работе также рассматриваются их проективные и индуктивные пределы. Индуктивные и проективные пределы последовательностей (квази)банаховых пространств вводятся как объединение и пересечение последовательностей весовых пространств, которые строятся по возрастающей (для индуктивных пределов) или убывающей (для проективных пределов) последовательности весов их определяющих. При этом важные для приложений случаи пространств индуктивного и проективного типа ранее рассматривались лишь для конкретных операторов (операторов композиции, сдвига, дифференцирования) и последовательностей банаховых пространств с sup-нормами в работах K. D. Bierstedt, J. Bonet и M. Friz. Таким образом, задача о переносе известных результатов на случай квазибанаховых пространств и разработке общего подхода к их получению также является актуальной.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются классические и современные методы комплексного, вещественного и функционального анализа. В том числе используются: теория операторов в функциональных пространствах различной природы, теория целых функций, классические операторы (операторы умножения, композиции, интегрирования и дифференцирования) и их топологические свойства (главным образом, непрерывность и компактность таких операторов), субгармонические функции и их свойства, дельта-функции и их производные.

Цели работы.

1. Получение критериев ограниченности и компактности произвольного линейного оператора на абстрактных квазибанаховых пространствах голоморфных в области комплексной плоскости функций, а также на проективных и индуктивных пределах последовательностей таких пространств в терминах норм дельта-функции.

2. Исследование задачи о вычислении норм дельта-функции и её производной в конкретных весовых пространствах. Получение оценок сверху указанных норм на обобщённых пространствах Фока.

3. Получение условий непрерывности и компактности композиционных и интегральных операторов в конкретных весовых пространствах голоморфных и целых функций, а также проективных и индуктивных пределах последовательностей этих пространств. Приложения полученных результатов к интегральным операторам Чезаро и Харди.

Области исследований. Диссертация соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»:

3. Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях;

5. Комплексный анализ, аналитические функции одного и многих комплексных переменных и их свойства, аналитическое продолжение, граничные свойства аналитических функций;

6. Различные классы и пространства аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.);

8. Краевые задачи для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексная теория потенциала, в т. ч. субгармонические и плюрисубгармонические функции;

9. Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы);

11. Теория операторов, в т. ч. теория дифференциальных операторов.

Научную новизну составляют следующие **основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для линейных операторов, действующих из квазибанаховых пространств голоморф-

ных функций в банаховы пространства с равномерной весовой нормой, получены критерии их ограниченности и компактности, формулируемые в терминах норм дельта-функций. Эти результаты установлены за счёт нового подхода, не использующего в доказательствах сопряжённых пространств и сопряжённых операторов, что позволило провести исследования для класса квазибанаховых пространств вместо ранее изучавшегося более узкого класса банаховых пространств.

2. Установлены критерии ограниченности и компактности операторов весовой композиции, Вольтерра и союзного с ним и некоторых других, действующих как на абстрактных квазибанаховых пространствах голоморфных функций, так и на пространствах из шкал Харди, Бергмана, Фока и др. По степени общности условий на веса, задающие пространства, эти результаты не имеют предшествующих аналогов.

3. Найдены оценки норм дельта-функций и их производных на пространствах Фока, задаваемых слабо растущими в среднем весами. Ранее формула для нормы дельта-функции была известна лишь для классического гильбертова пространства Фока.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в разработке единого подхода к исследованию топологических свойств линейных операторов, действующих из квазибанаховых пространств голоморфных функций в банаховы пространства таких же функций с равномерными весовыми нормами. Кроме того, полученные результаты могут найти дальнейшее применение, например, к разрешимости уравнений типа свертки, а также к изучению теории весовых пространств целых функций. Исследование топологических свойств указанных операторов является отправной точкой для создания инструментария, позволяющего разрабатывать конкретные приложения в упомянутых теориях.

Степень достоверности. Достоверность результатов диссертационного исследования основана на применении классических и современных методов комплексного и функционального анализа, математической строгости доказательств и совпадении результатов с ранее известными в частных ситуациях. Положения диссертации, выносимые на защиту, прошли апробацию на конференциях, опубликованы в рецензируемых журналах, относящихся к списку ВАК.

Апробация результатов. Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

1) Международная конференция "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум"(пос. Батилиман, 2019, 2021 гг.).

2) Международная научная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования"(с. Цей, 2019, 2021 гг.; с. Дзинага, 2023 г.).

3) Региональная школа-конференция молодых учёных "Владикавказская молодежная математическая школа"(г. Владикавказ, 2020, 2022, 2023, 2024 гг.).

4) Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"(г. Ростов-на-Дону, 2021, 2022, 2023 гг.).

5) Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа"(г. Уфа, 2022, 2023 гг.).

6) Международная сателлит-конференция МКМ-2022 "Комплексный анализ и смежные проблемы"(г. Казань, 2022 г.).

7) Международная научная конференция "Воронежская зимняя математическая школа"(г. Воронеж, 2023 г.).

Личный вклад автора. В совместных работах [1,2] постановка задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных работах [1 — 15]. Статьи [1, 2, 3] входят в перечень научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций, защищаемых в диссертационном совете ЮФУ801.01.02. Статья [1] входит в базу данных Scopus. Статьи [2, 3] опубликованы в журнале, входящем в список ВАК. Тезисы [4-15] опубликованы в сборниках трудов конференций.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, списка литературы, включающего 79 наименований, и приложения. Главы разделены на параграфы, которые разделены на пункты. Объём диссертационной работы — 99 страниц.

Содержание работы

Во введении даётся общая характеристика работы и проводится краткий обзор результатов диссертации по главам и параграфам.

Первая глава посвящена получению абстрактных критериев непрерывности и компактности произвольного линейного оператора, действующего из абстрактных квазибанаховых пространств, а также проективных и индуктивных пределов последовательностей таких пространств в весовые пространства с равномерными весовыми нормами.

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех голоморфных в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из G. Весом в области G будем называть произвольную непрерывную функцию $v : G \to (0, \infty)$. По каждому весу v в G образуем банаховы пространства

$$H_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : \|f\|_{H_v} = \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \Big\},$$

$$B_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : \|f\|_{B_v} = \sup_{z \in G} \frac{|f'(z)|}{v(z)} + |f(0)| < \infty \Big\}$$

и их соответствующие замкнутые подпространства

$$H_{v,0}(G) := \Big\{ f \in H(G) : \lim_{z \to \partial G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0 \Big\},$$

$$B_{v,0}(G) := \Big\{ f \in H(G) : \lim_{z \to \partial G} \frac{|f'(z)|}{v(z)} = 0 \Big\}.$$

Здесь и далее для функции $h : G \to \mathbb{C}$ запись $\lim\limits_{z \to \partial G} h(z) = 0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ имеется такой компакт K в G, что $|h(z)| \leq \varepsilon$ при всех $z \in G \setminus K$.

Всюду далее будем предполагать, что X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(G)$. При этом, при исследовании компактности дополнительно будем предполагать, что X — квазибанахово пространство, содержащее полиномы, такое что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости τ_{uc} на компактах.

Основополагающим для нашего исследования фактом является то, что для изучаемых нами пространств голоморфных функций сопряженное пространство всегда нетривиально и содержит, так называемые, дельта-функции $\delta_z : f \mapsto f(z)$ и их производные $\delta_z' : f \mapsto f'(z)$, вычисляющие значение каждой функции f и f', соответственно, в наперед заданной точке $z \in G$. Очевидно, что δ_z и δ_z' являются линейными непрерывными функционалами на $H(G)$ при любом $z \in G$. Поэтому δ_z и $\delta_z^{'}$ будут элементами X^* для любого квазибанахова пространства X, непрерывно вложенного в $H(G)$.

Решению поставленной задачи посвящены разделы 1.2 и 1.3 соответственно, а приведённые в них результаты являются основными результатами настоящей работы.

Теорема 1.2.1. Пусть v — вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z \circ T \in X^*, \forall z \in G$; б)

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $T : X \to H_v(G)$ ограничен

$$\|T\|_{H_v} = \sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)}.$$

Теорема 1.2.3. Линейный оператор $T : X \to B_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_0 \circ T \in X^*, \forall z \in G$; б) $\delta_z^{'} \circ T \in X^*, \forall z \in G$; в)

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z^{'} \circ T\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Если T удовлетворяет перечисленным выше условиям а)-в), то норма оператора $T : X \to B_v(G)$ удовлетворяет оценке

$$\|T\|_{B_v} \le \|\delta_0 \circ T\|^* + \sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z' \circ T\|^*}{v(z)}.$$

В подразделе 1.2.2 на основе этих результатов установлены критерии непрерывности линейных операторов, действующих из проективных и индуктивных пределов квазибанаховых пространств голоморфных в области функций в аналогичные пределы весовых банаховых пространств таких же функций с sup-нормами.

В разделе 1.3 исследуется компактность абстрактных операторов, действующих из квазибанаховых пространств в пространства с весовыми sup-нормами. Ниже приводятся основные результаты этого раздела.

Теорема 1.3.2. Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z \circ T \in X^*, \forall z \in G$; б)

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} = 0.$$

Теорема 1.3.4. Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \to B_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z^{'} \circ T \in X^*, \forall z \in G$; б)

$$\lim_{z \to \partial G} \frac{\|\delta_z^{'} \circ T\|^*}{v(z)} = 0.$$

В разделе 1.4 исследуется оператор $W_{g,\varphi}$ весовой композиции

$$(W_{g,\varphi} f)(z) = g(z) \cdot f(\varphi(z)),\ g \in H(G),\ f, \varphi \in H(G),\ z \in G,$$

где $\varphi \in H(G)$ такова, что $\varphi(G) \subset G$ (класс таких функций обозначается через $S(G)$).

Основными результатами раздела являются критерии непрерывности и компактности этого оператора, являющиеся следствиями теорем 1.2.1, 1.2.3, 1.3.2, 1.3.4, соответственно.

Следствие 1.4.1. Пусть v — вес на G, $g \in H(G)$, $\varphi \in S(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $W_{g,\varphi} : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|W_{g,\varphi}\|_{H_v} = \sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Следствие 1.4.4. Пусть v — вес на G, $\varphi \in S(G)$, $g \in H(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to B_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}^{'}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Следствие 1.4.10. Пусть v — произвольный вес на G, $\varphi \in S(G)$, $g \in H(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \to \partial G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Следствие 1.4.14. Пусть v — произвольный вес на G, $\varphi \in S(G)$, $g \in H(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to B_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \to \partial G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}^{'}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Заметим, что если $g(z) \equiv 1$ в G, то оператор $W_{g,\varphi}$ является оператором обычной композиции и обозначается через C_φ; таким образом, $C_\varphi : f \mapsto f(\varphi(z))$. Если же $g \in H(G)$ фиксирована, а $\varphi(z) \equiv z$ в G, то $W_{g,\varphi}$ превращается в оператор умножения на $g(z)$ и обозначается через M_g, то есть $M_g : f \mapsto g \cdot f$. Кроме того, представляет интерес его композиция с оператором дифференцирования $D : f \mapsto f'$. Она определяет оператор $(M_g D f)(z) = g(z) \cdot f'(z)$.

Критерии непрерывности и компактности указанных выше операторов C_φ, M_g и $M_g D$ непосредственным образом вытекают из следствий 1.4.1, 1.4.4, 1.4.10 и 1.4.14. Приведём лишь один результат из полученных, играющий существенную роль при исследовании интегральных операторов в следующем разделе.

Предложение 1.4.13. Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$. Верны следующие утверждения:

(i) Оператор умножения $M_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда
$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда
$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

В заключительной части настоящего раздела формулируется критерий непрерывности оператора весовой композиции на индуктивном (проективном) пределе последовательности квазибанаховых пространств — следствие 1.4.6.

В разделе 1.5 изучаются топологические свойства интегрального оператора Вольтерра
$$T_g : f \mapsto \int_0^z f(w) g'(w) dw, \ z \in G,$$
и его союзного
$$S_g : f \mapsto \int_0^z f'(w) g(w) dw, \ z \in G.$$
Для получения требуемых результатов используется идея представления оператора Вольтерра в виде композиции операторов интегрирования и умножения, а его союзного — в виде композиции оператора интегрирования с композицией операторов умножения и дифференцирования. В связи с этим формулируются имеющие самостоятельный интерес вспомогательные критерии изоморфности дифференциального оператора, действующего между пространствами типа $H_v(\mathbb{D})$ и $H_v(\mathbb{C})$, соответственно.

Предложение 1.5.5. Пусть v — $\log$ – выпуклый радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$, $0 \le r < 1$. Оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда
$$0 < \liminf_{r\to 1^-} \frac{(1-r)\cdot v'(r)}{v(r)} \le \limsup_{r\to 1^-} \frac{(1-r)\cdot v'(r)}{v(r)} < \infty. \tag{1}$$

Теорема 1.5.13. Пусть v — log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Оператор дифференцирования $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:

$$0 < \liminf_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty. \tag{2}$$

Основными результатами раздела, в случае пространств H_v, являются предложения 1.5.7 и 1.5.22.

Предложение 1.5.7. Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (1). Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g'(z)|\cdot\|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g(z)|\cdot\|\delta_z'\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Предложение 1.5.22. Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (1).

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{(1-|z|)\cdot|g'(z)|\cdot\|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{(1-|z|)\cdot|g(z)|\cdot\|\delta_z'\|^*}{v(z)} = 0.$$

Также в настоящем разделе формулируются аналоги этих предложений для случая всей комплексной плоскости — теоремы 1.5.14 и 1.5.24.

Теорема 1.5.14. Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{C}$, для которого выполнено условие (2). Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)|\cdot\|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Теорема 1.5.24. Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$, удовлетворяющий условию (2). Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Далее, в предложениях 1.5.17 и 1.5.27 установлены аналогичные результаты для пространств типа Блоха.

Предложение 1.5.17. Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$. Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Предложение 1.5.27. Пусть v — произвольный вес на $\mathbb{D}$. Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, выполнено условие:

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Вторая глава выполняет связующую роль между первой и третьей. В ней вводятся и рассматриваются пространства голоморфных и целых функций, к которым позднее будут применены результаты, приведённые в главе 1. Подчёркивается, что для этих целей необходимо знать нормы дельта-функции и её производной на указанных пространствах или хотя бы их равномерные оценки. Именно, в качестве пространств аналитических функций, в разделе 2.1 вводятся пространства Бергмана

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{A^p_\alpha} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \cdot (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \right\},\ \alpha > -1,\ 0 < p < \infty;$$

Дирихле

$$D^p_\alpha := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{D^p_\alpha} := |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f^{'}(z)|^p \cdot (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \right\},\ \alpha > -1,\ 0 < p < \infty,$$

здесь и выше $dA(z)$, нормализованная мера Лебега в $\mathbb{D}$, т.е. $dA(z) = \frac{1}{\pi} d\lambda(z)$, где $d\lambda(z)$ — мера Лебега в плоскости;

Харди

$$H^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p \ d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

и Дирихле-Харди

$$S^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{S^p} := |f(0)| + \|f^{'}\|_{H^p} \right\},\ 0 < p < \infty.$$

При этом при $p \geq 1$ эти пространства банаховы, а в случае $0 < p < 1$ — квазибанаховы. В заключительной части раздела 2.1 приводятся значения нормы дельта-функции и её производной на указанных пространствах[1].

Далее, в разделах 2.2 и 2.3 вводятся пространства целых функций — классическое и обобщённое пространства Фока.

Пусть непрерывная функция $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ такова, что

$$A_\psi := \int_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)} dA(z) < \infty,\ \lambda_\psi := \frac{1}{A_\psi}.$$

При каждом $0 < p < \infty$ она задает обобщенное пространство Фока:

$$F^\psi_p := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{F^\psi_p} := \left(\lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, e^{-\psi(z)} dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

[1]**Lin, Q.** Order boundedness of weighted compostion operators on weighted Dirichlet spaces and derivative Hardy spaces / Q. Lin, J. Liu, Y. Wu // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2020. — Vol. 27, № 4. P. 627 — 637.

В случае $p = \infty$ полагаем $F_\infty^\psi = H_{e^\psi}(\mathbb{C})$. При $1 \le p \le \infty$ пространство F_∞^ψ является банаховым, а при $0 < p < 1$ пространство F_p^ψ квазибанахово. Весу $\psi(z) = \frac{\alpha p}{2}|z|^2$, где $\alpha > 0$ (при этом $\lambda_\psi = \frac{p\alpha}{2\pi}$), соответствует классическое пространство Фока F_α^2.

В этом случае формулы для вычисления нормы дельта-функций известны лишь для классического пространства Фока[2]. Чтобы получить нужные оценки для обобщённых пространств Фока, в разделе 2.3.2. вводится класс Ψ_0 весов ψ, *слабо растущих в среднем*, то есть тех весов, для которых существует такая постоянная $C > 0$, что

$$B_\psi(z) := \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta) \le \psi(z) + C \text{ для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Если, кроме того, вес ψ (он у нас по условию непрерывен в $\mathbb{C}$) из класса Ψ_0 является субгармонической функцией в $\mathbb{C}$, то есть для любого $r > 0$

$$\psi(z) \le \frac{1}{\pi r^2}\int_{|\zeta|\le r} \psi(z+\zeta)dA(\zeta),$$

и, в частности,

$$\psi(z) \le \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta),\ \forall z \in \mathbb{C},$$

то существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\psi(z) \le \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta) \le \psi(z) + C,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Веса, для которых выполняются приведённые выше условия, будем называть почти гармоническими. Подчеркнём, что при наложении на такие веса некоторых дополнительных ограничений, приведённых в лемме 2.3.7, имеется нужная оценка норм дельта-функций в пространствах Фока, ими задаваемых.

Лемма 2.3.7. Пусть $\psi(r)$ — возрастающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, которая является дважды дифференцируемой на $[r_0, \infty)$ при некотором $r_0 \ge 0$, и при этом, $\sup\limits_{r \ge r_0} \psi''(r) < \infty$. Тогда радиальная функция $\psi(z) = \psi(|z|)$ при некотором $C > 0$ удовлетворяет условию

$$\exists C > 0 : \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(z + e^{i\theta})d\theta \le \psi(z) + C, \text{ при всех } z \in \mathbb{C}. \tag{0.0.1}$$

В этом же разделе лемма 2.3.7 иллюстрируется на конкретных частных случаях весов, порождающих пространства — функциях вида $\gamma|z|^q,\ 0 < q \le 2$, и $|z|^{\rho(|z|)}$, где $\rho(r)$ — некоторый сильный уточнённый порядок с $\rho \le 2$.

[2] **Zhu, K.** Analysis on Fock spaces. Graduate texts in Mathematics / K. Zhu. New York: Springer, 2012. — № 346. — 263 p.

Основными результатами раздела являются оценки сверху норм дельта-функции и её производной на обобщённых пространствах Фока, задаваемых весами ψ из класса Ψ_0, удовлетворяющими описанным выше условиям.

Предложение 2.3.9. Пусть $\psi(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.3.7 и является субгармонической в $\mathbb{C}$ функцией. Тогда при любом $p \in (0, \infty)$ имеем

$$\|\delta_z\|^*_{F_p^\psi} \leq Ae^{\psi(z)} \text{ при всех } z \in \mathbb{C},$$

где A — некоторая постоянная.

Лемма 2.3.15. Пусть $\psi \in \Psi_0$ — субаддитивный вес. Тогда

$$\|\delta_z'\|^*_{F_p^\psi} \leq \begin{cases} \frac{1}{(2\pi\lambda_\psi)^{\frac{1}{p}}} \cdot e^{\psi(2)} \cdot e^{\psi(|z|)}, & 1 \leq p < \infty \\ e^{\psi(1)} \cdot e^{\psi(|z|)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Кроме того, в разделе 2.3 и подразделе 2.3.1, в леммах 2.3.13 и 2.3.17, устанавливаются аналоги приведённых выше оценок для пространств, задаваемых весами вида $\gamma|z|^q$, $0 < q \leq 2$, и $|z|^{\rho(|z|)}$, где $\rho(r)$ — некоторый сильный уточнённый порядок с $\rho \leq 2$.

В третьей главе рассмотрены приложения полученных в главе 1 абстрактных критериев к пространствам голоморфных в единичном круге (пространства Бергмана, Харди, Дирихле и Дирихле-Харди) и целых функций (классическое и обобщённое пространства Фока). Основным требованием на веса, порождающие пространства, как и прежде, остаётся их радиальность.

В разделе 3.1 изучен вопрос о непрерывности и компактности интегральных операторов, действующих из конкретных пространств аналитических функций в весовые пространства типа $H_v(\mathbb{D})$ и $B_v(\mathbb{D})$. Установленные в настоящем разделе критерии существенным образом опираются на результаты, полученные в главах 1 и 2. Так, конкретные результаты мы получаем из общих, приведённых в главе 1, путём замены нормы дельта-функции или её производной на абстрактном пространстве, формулой для её вычисления в конкретном пространстве. Именно, в следствиях 3.1.1 и 3.1.2 формулируются критерии непрерывности в случае действия оператора Вольтерра и его союзного в пространства $H_v(\mathbb{D})$ и $B_v(\mathbb{D})$, соответственно. В следствиях 3.1.3 и 3.1.4 устанавливаются критерии компактности указанных операторов в тех же самых пространствах.

В разделе 3.2 для композиционных и интегральных операторов, действующих в пространствах целых функций, получены достаточные условия их непрерывности и компактности.

Для получения требуемых результатов используется тот же подход, что и при работе с пространствами голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Отдельное внимание в настоящем разделе уделяется исследованию интегральных операторов, действующих в обобщённые пространства Фока.

Обозначим через T семейство всех дифференцируемых функций $\tau : [0,\infty) \to (0,\infty)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\lim\limits_{r\to\infty} \tau(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) = 0$;

(b) Либо при некотором $C > 0$ функция $\tau(r)\, r^C$ возрастает, либо

$$\lim_{r\to\infty} \tau'(r) \ln \frac{1}{\tau(r)} = 0.$$

Пусть, далее, $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция класса C^2 на $[0,\infty)$ такая, что $\psi(z) = \psi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, ее лапласиан $\Delta\psi$ положителен в $\mathbb{C}$ и $\exists \tau \in T : (\Delta\psi(z))^{-\frac{1}{2}} \simeq \tau(|z|)$, $|z| \geq 1$. Класс всех функций ψ, обладающих указанными свойствами, будем обозначать символом $\mathcal{I}$. Подчеркнём, что в изучении поставленного вопроса существенную роль играет критерий изоморфности дифференциального оператора, действующего между пространствами Фока общего вида, установленный в лемме 3.2.5.

Лемма 3.2.5. Пусть $\psi \in \mathcal{I}$. Положим $\phi(r) := \psi(r) + \ln(1 + \psi'(r))$, $r \in [0,\infty)$. Тогда оператор дифференцирования $D : f \mapsto f'$ является изоморфизмом из $F^{\psi}_{\infty,0}$ на F^{ϕ}_{∞} , где $F^{\psi}_{\infty,0} := \{f \in F^{\psi}_{\infty} :\ f(0) = 0\}$.

Лемма 3.2.5 и предложение 2.3.9 позволяют установить условия непрерывности и компактности оператора Вольтерра и его союзного.

Предложение 3.2.6. Пусть $\psi \in \mathcal{I}$.

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to F^{\psi}_{\infty}(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{(1 + \psi'(|z|))\, e^{\psi(z)}} < \infty.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : X \to F^{\psi}_{\infty}(\mathbb{C})$ был ограничен, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_z\|^*}{(1 + \psi'(|z|))\, e^{\psi(z)}} < \infty.$$

Предложение 3.2.12. Пусть $\psi \in \mathcal{I}$. Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to F^{\psi}_{\infty}(\mathbb{C})$ компактен, если выполнено условие:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))e^{\psi(z)}} = 0.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : X \to F^{\psi}_{\infty}(\mathbb{C})$ был компактен, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))e^{\psi(z)}} = 0.$$

В разделе 3.3 получены критерии непрерывности операторов умножения M_g и его композиции с оператором дифференцирования на индуктивных и проективных пределах пространств Харди, Бергмана и др.

В разделе 3.4. формулируются приложения установленных в главе 1 результатов к частным случаям рассмотренных ранее интегральных операторов. Именно, в следствиях 3.4.4, 3.4.9, 3.4.11, 3.4.12 получены критерии непрерывности интегральных операторов Чезаро и Харди.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК, Scopus, RSCI:

1. Абанин, А. В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций / А. В. Абанин, Ю. В. Кораблина // Владикавказский математический журнал. — 2020. — Т. 22, № 3. — С. 5 — 17. — DOI 10.46698/u5398-4279-7225-c. К2 (Q4).

2. Абанин, А. В. Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций / А. В. Абанин, Ю. В. Кораблина // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4-1(216-1). — С. 83 — 89. — DOI 10.18522/1026-2237-2022-4-1-83-89. К2.

3. Кораблина, Ю. В. Непрерывность линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2024. — № 4-1(224-1). — С. 24 — 30. — DOI 10.18522/1026-2237-2024-4-1-24-30. К2.

Публикации в сборниках трудов конференций:

4. Кораблина, Ю. В. Непрерывные линейные операторы из абстрактных банаховых пространств голоморфных функций в аналогичные пространства с равномерной нормой / Ю. В.

Кораблина // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с. Цей, 15–20 июля 2019 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2019. — С. 80 — 81. — Режим доступа: https://smath.ru/upload/iblock/4a1/Tezisy_2019.pdf (дата обращения 08.04.2025).

5. Кораблина, Ю. В. О непрерывных линейных операторах из абстрактных банаховых пространств голоморфных функций в аналогичные пространства с равномерной нормой / Ю. В. Кораблина // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. : XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам / Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, Российский университет дружбы народов, Математический Фонд Крыма. — Симферополь: Полипринт, 2019. — С. 18 — 20.

6. Кораблина, Ю. В. О непрерывности классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Современные проблемы математики и математического образования : XV Владикавказская молодежная математическая школа (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020. — С. 210. — Режим доступа: https://smath.ru/upload/iblock/ce5/Tezisy_2020.pdf (дата обращения 08.04.2025).

7. Кораблина, Ю. В. Непрерывность классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах общего и конкретного вида / Ю. В. Кораблина // Сборник материалов международной конференции. КРОМШ-2021 : XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам / Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Российский университет дружбы народов, Математический Фонд Крыма. — Симферополь : Полипринт, 2021. — С. 7.

8. Кораблина, Ю. В. О критериях непрерывности классических операторов на весовых пространствах Бергмана, Блоха и Фока / Ю. В. Кораблина // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVI Международной научной конференции (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2021. — С. 37 — 38. — Режим доступа: https://smath.ru/upload/iblock/4fd/Tezisy_2021.pdf (дата обращения 08.04.2025).

9. Кораблина Ю. В. Об ограниченности классических операторов на весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Уфимская осенняя математическая школа — 2022 : материалы Международной научной конференции (Уфа, 28 сентября–1 октября 2022 г.). Т. 1: Секции: «Спектральная теория операторов»; «Комплексный и функ-

циональный анализ» / Министерство науки и высшего образования РФ, Башкирский государственный университет [и др.] ; редакционная коллегия: З. Ю. Фазуллин (отв. редактор) [и др.].— Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 119 — 120. — DOI 10.33184/mnkuomsh1t-2022-09-28.45.

10. Кораблина, Ю. В. Компактные операторы в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Материалы Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа — 2023», г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.: в 2 томах. Т. 1 : Секции: «Спектральная теория операторов», «Комплексный и функциональный анализ», «Нелинейные уравнения» / Министерство науки и высшего образования РФ, Уфимский университет науки и технологий [и др.] ; редакционная коллегия: З. Ю. Фазуллин (отв. редактор) [и др.]. — Уфа : Аэтерна, 2023. — Т. 1, С. 86 — 88.

11. Кораблина, Ю. В. О компактности классических операторов в весовых пространствах целых функций / Ю. В. Кораблина // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения : тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023. — С. 68 — 69. — (Серия: Математический форум. Т. 15); (Итоги науки. Юг России). — Режим доступа: https://smath.ru/upload/iblock/001/_Sborka_Tez_2023.pdf (дата обращения 09.04.2025).

12. Кораблина, Ю. В. Топологические свойства композиционных операторов на квазибанаховых пространствах / Ю. В. Кораблина // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 1 февраля 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 204 — 206. — Режим доступа: https://vzmsh.math-vsu.ru/files/vzmsh2023.pdf (дата обращения 09.04.2025).

13. Кораблина, Ю. В. Непрерывность линейных операторов на проективных и индуктивных пределах квазибанаховых пространств голоморфных функций. Общие результаты и приложения / Ю. В. Кораблина // Сборник материалов XIX Владикавказской Молодежной Математической Школы (онлайн, 24–28 июня 2024 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2024. — С. 60 — 61. — Режим доступа: https://www.smath.ru/upload/iblock/001/Sborka_Tez_VMMSH_2024.pdf (дата обращения 09.04.2025).

14. Korablina, Yu. V. On conditions of boundedness of linear operators on weighted quasi-Banach spaces / Yu. V. Korablina // Book of abstracts Tenth International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – X»,

OTHA-2021, [22–27 August 2021, Rostov-on-Don, Russia]. — Rostov-on-Don, 2021. — P. 28.

15. Korablina, Yu. V. On the boundedness of the classical operators on weighted quasi-Banach spaces of holomorphic functions / Yu. V. Korablina // International Conference «Complex Analysis and Related Topics», (Kazan, June 30 – July 4, 2022) : Abstracts / Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Kazan (Volga region) Federal University, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, of the Volga Federal District ; Editorial team: D. N. Dautova [et al]. — Kazan: Kazan Federal University, 2022. — P. 34 — 35. — (Proceedings of the Mathematical Center named after N.I. Lobachevsky. Vol. 63). — Режим доступа: https://drive.google.com/file/d/183x3a7YG8yxYT4JimsQUuDw20uWAN4tG/view (дата обращения 09.04.2025).