ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Кораблина Юлия Викторовна

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор

Абанин Александр Васильевич

Ростов-на-Дону — 2025

Оглавление

Введение **4**

1 Ограниченность и компактность классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах общего вида и их проективных и индуктивных пределах **13**

1.1 Постановка задачи и предварительные сведения 14

1.2 Абстрактные критерии непрерывности в квазибанаховых пространствах 16

1.2.1 Абстрактные критерии непрерывности операторов $T : X \to H_v(G)$ и $T : X \to B_v(G)$ 16

1.2.2 Абстрактные критерии непрерывности линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций 19

1.3 Абстрактные критерии компактности операторов $T : X \to H_{v,0}(G)$ и $T : X \to B_{v,0}(G)$ 23

1.4 Непрерывность операторов весовой композиции 28

1.4.1 Компактность 32

1.5 Непрерывность и компактность оператора Вольтерра и союзного с ним 34

1.5.1 Компактность 45

2 Пространства целых функций и нормы дельта-функций в них **50**

2.1 Нормы дельта-функций в классических пространствах голоморфных в единичном круге функций 51

2.2 Классическое пространство Фока 53

2.3 Оценка норм дельта-функций и их производных в обобщенных пространствах Фока 54

2.3.1 Оценка норм дельта-функций для $F_\alpha^{p,q}$ при $0 < q \leq 1$ 55

2.3.2 Оценка норм дельта-функций в обобщённых пространствах Фока и почти гармонические функции 57

2.3.3 Производная нормы дельта-функции 63

3 Приложения к конкретным операторам и пространствам функций, голоморфных в единичном круге или комплексной плоскости 66

3.1 Пространства голоморфных в единичном круге функций 67

3.1.1 Критерии ограниченности интегральных операторов 67

3.1.2 Критерии компактности интегральных операторов 69

3.2 Пространства целых функций 71

3.2.1 Ограниченность операторов в пространствах Фока 71

3.2.2 Условия компактности композиционных и интегральных операторов 76

3.3 Приложения к проективным и индуктивным пределам последовательностей пространств голоморфных функций 79

3.4 Приложения к интегральным операторам Чезаро и Харди 82

Приложение 89

Список литературы 91

Введение

Актуальность темы исследования. В диссертации рассматриваются пространства голоморфных и целых функций с равномерными и интегральными весовыми оценками. Весовые шкалы таких пространств применяются в теории аппроксимации и интерполяции, теории роста целых и мероморфных функций и её приложениях, теории двойственности различных функциональных пространств, теории распределений и ее обобщениях, теории уравнений в частных производных, анализе Фурье, в математической и теоретической физике. В последнее время упомянутые пространства интенсивно изучались с различных точек зрения многими математиками (J. Bonet, W. Lusky, K. Zhu, B. MacCluer, S. Li, T. Mengestie). Наиболее известными примерами таких пространств являются пространства Бергмана, Харди, Дирихле, Дирихле-Харди, Фока и стандартные весовые пространства роста (см., напр. [42, 43, 60–63]).

Одной из важнейших проблем для указанных пространств является изучение топологических свойств классических операторов (дифференцирования, интегрирования, композиции, умножения, вложения и др.), действующих в них. Достаточно полное представление о проблематике в этой области можно получить из следующих работ ([17, 22, 26, 27, 31, 41, 43, 45, 54, 55, 58, 64]), в которых приводятся постановки задач и фундаментальные результаты. В настоящее время наибольший интерес представляет вопрос о получении условий непрерывности и компактности классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций в терминах норм дельта-функций и их производных в соответствующих сопряженных пространствах (см., напр., [28, 38, 64]). При этом, требуется не просто установить указанные результаты, а представить общий подход к исследованию поставленной задачи для различных линейных операторов на абстрактных квазибанаховых пространствах, а результаты для конкретных пространств установить как следствия полученных абстрактных критериев. Наиболее подробно указанная проблема для случая банаховых пространств функций, голоморфных в единичном круге, изучена в работе N. Zorboska [64]. В ней был предложен общий метод получения критериев непрерывности и компактности абстрактного линейного оператора, действующего из абстрактного банахова пространства голоморфных в единичном круге функций в весовые банаховы пространства таких же функций с sup-нормами. Кроме того, была получена формула для вычисления нормы этого оператора и разработаны приложения основных результатов к конкретным пространствам и операторам. Подчеркнём, что рассматривался лишь случай единичного круга и радиальные веса на нём. Кроме того, поставленная задача в общей ситуации ранее изучалась в основном для банаховых пространств. Можно выделить лишь отдельные работы, в которых исследовались вопросы ограниченности и компактности конкретных линейных операторов в квазибанаховых пространствах специального вида без использования дельта-функций.

Для эффективного изучения обозначенной выше проблемы, развития идеи Н. Зорбоска на пространства голоморфных функций, задаваемых произвольными весами в произвольных областях (как ограниченных, так и неограниченных) и распространения результатов на случай квазибанаховых пространств требовалось разработать подход, не предполагающий использования сопряжённых пространств и сопряжённых операторов. Идея развития данного подхода обусловлена возможной тривиальностью пространства, сопряжённого с квазибанаховым. Кроме того, в качестве весов, порождающих пространства, требуется выбрать оптимальные, в определённом смысле, классы весовых функций. Так, для исследования многих вопросов в весовых пространствах голоморфных функций существенную роль играют ассоциированные веса. Например, в терминах таких весов получены критерии непрерывности дифференциального и интегрального операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций (см. [17]).

Кроме того, особый интерес представляют приложения упомянутых выше результатов к индуктивным и проективным пределам последовательностей (квази)банаховых пространств голоморфных функций, а также к конкретным весовым пространствам голоморфных и целых функций (см. [39]). Подчеркнём, что в случае работы с конкретными весовыми пространствами требуется знать нормы дельта-функции и её производной в этих пространствах. Для некоторых пространств указанные формулы известны (напр., для пространств Бергмана и Харди). Однако для весовых пространств целых функций подобный результат был известен лишь для классического гильбертова пространства Фока. В связи с этим ещё одной важной задачей, исследуемой в настоящей работе, является получение оценок сверху нормы дельта-функции и её производной в обобщённых пространствах Фока. Решение этой задачи сводится к построению целых функций из единичных шаров рассматриваемых пространств, которые в точках плоскости принимают значения по модулю сравнимые с весом, задающим пространство. Подобные построения ранее проводились различными методами многими авторами (см. [2, 4, 15] и библиографию в них). Однако во всех предшествующих работах имеется существенный асимптотический зазор в $\ln|z|$, $z \to \infty$, между оценками сверху, вытекающими из принадлежности построенных функций единичным шарам, и значениями их модулей в точках плоскости. Избавиться от этого зазора для всей шкалы пространств Фока вряд ли удастся. Поэтому актуальной в данном направлении задачей является выделение подкласса весов, для которых это всё-таки возможно. Отметим, что поскольку, как правило, все рассматриваемые для пространств Фока веса являются субгармоническими функциями в плоскости, эта задача является новой и для теории субгармонических функций и их связи с целыми.

Индуктивные и проективные пределы последовательностей (квази)банаховых пространств мы вводим как объединение и пересечение последовательностей весовых пространств, которое строим по возрастающей (для индуктивных пределов) или убывающей (для проективных пределов) последовательности весов их определяющих (см., напр., [7]). Пространства такого вида играют значительную роль в теории распределений Шварца, её обобщениях и приложениях. Кроме того, пространства такого типа естественным образом возникают при изучении условий роста аналитических функций, и интересны с точки зрения аналитических приложений (см., напр., [25]). При этом важные для приложений случаи пространств индуктивного и проективного типа ранее рассматривались лишь для конкретных операторов (операторов композиции, сдвига, дифференцирования) и последовательностей банаховых пространств с sup-нормами (см., напр., [23, 29]). Так, основное ограничение на весовые последовательности, используемое в [23], состоит в предположении, что веса являются радиальными, а пространства, порождаемые ими, локально выпуклыми. Предложенный в [23] метод исследования существенным образом опирается на введённые ограничения. Мы же, в настоящей работе, представляем иной метод исследования, а потому не накладываем на весовые последовательности и порождённые ими пространства дополнительных условий.

В качестве конкретных весовых пространств мы рассмотрим пространства функций с интегральными нормами (Бергмана, Дирихле, Харди, Фока и.т.д.). Ранее для указанных пространств изучались динамические и спектральные свойства композиционных [36] и интегральных операторов специального вида [13, 21, 34, 46, 50]. Однако большинство результатов формулировалось для банаховых пространств в терминах весов и элементов, порождающих соответствующие пространства и операторы, без использования дельта-функций. Разработанный нами универсальный подход, предполагающий получение конкретных критериев из абстрактных, приведённых в главе 1, позволяет исследовать квазибанахов случай указанных пространств и распространить полученные результаты на ранее не изученные в предлагаемой постановке пространства целых функций — обобщённые пространства Фока.

Преимущество предложенного в работе подхода состоит в том, что он может применяться ко многим шкалам весовых пространств (банаховым, квазибанаховым, пространствам целых функций). Кроме того, получение результатов для конкретных операторов и пространств, как следствий из абстрактных критериев, позволяет попутно изучать другие топологические свойства дифференциального оператора. В частности, установить критерии изоморфности указанного оператора, действующего между пространствами с равномерными весовыми нормами. Данный результат позволяет получать критерии непрерывности и компактности интегральных операторов, как прямое следствие соответствующих критериев для композиционных операторов (оператора умножения и его композиции с оператором дифференцирования). Кроме того, благодаря формулировке результатов в терминах норм дельта-функции и её производной, удалось значительно расширить класс весовых пространств голоморфных в области функций с равномерными и интегральными нормами, в которых исследуются вопросы о непрерывности и компактности различных линейных операторов.

Отметим, что необходимая нам информация из фундаментальных курсов функционального и комплексного анализа и теории целых и субгармонических функций имеется в монографиях [5], [6], [8], [9], [11].

Цели работы.

1. Получение критериев ограниченности и компактности произвольного линейного оператора на абстрактных квазибанаховых пространствах голоморфных в области комплексной плоскости функций, а также на проективных и индуктивных пределах последовательностей таких пространств в терминах норм дельта-функции.

2. Исследование задачи о вычислении норм дельта-функции и её производной в конкретных весовых пространствах. Получение оценок сверху указанных норм на обобщённых пространствах Фока.

3. Получение условий непрерывности и компактности композиционных и интегральных операторов в конкретных весовых пространствах голоморфных и целых функций, а также про-

ективных и индуктивных пределах последовательностей этих пространств. Приложения полученных результатов к интегральным операторам Чезаро и Харди.

Методы исследований. В диссертационной работе применяются классические и современные методы комплексного, вещественного и функционального анализа. В том числе используются: теория операторов в функциональных пространствах различной природы, теория целых функций, классические операторы (операторы умножения, композиции, интегрирования и дифференцирования) и их топологические свойства (главным образом непрерывность и компактность таких операторов), субгармонические функции и их свойства, дельта-функции и их производные.

Научная новизна и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты являются новыми, носят теоретический характер. Кроме самостоятельного интереса с точки зрения теории дифференциальных и интегральных операторов они могут найти дальнейшее применение, например, к разрешимости уравнений типа свертки, а также к изучению теории весовых пространств целых функций. Исследование топологических свойств указанных операторов является отправной точкой для создания инструментария, позволяющего разрабатывать конкретные приложения в упомянутых теориях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на Международной научной конференции "Воронежская зимняя математическая школа"(г. Воронеж, 2023 г.), Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа"(г. Уфа, 2022, 2023 гг.), Международной сателлит-конференции МКМ-2022 "Комплексный анализ и смежные проблемы"(г. Казань, 2022 г.), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"(г. Ростов-на-Дону, 2021, 2022, 2023 гг.), на Региональной школе-конференции молодых учёных "Владикавказская молодежная математическая школа"(г. Владикавказ, 2020, 2022, 2023, 2024 гг.), на Международной конференции "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум"(пос. Батилиман, 2019, 2021 гг.), на Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования"(с. Цей, 2019, 2021 гг.; с. Дзинага 2023 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано пятнадцать работ:

— научная статья [65] издана в журнале, индексируемом в Scopus.

— научные статьи [66] и [76] изданы в журнале, входящем в список ВАК.

— тезисы докладов [67–75, 77–79].

В совместных с научным руководителем А.В. Абаниным статьях [65, 66] А.В. Абанину принадлежит постановка задач, указание метода исследования, окончательная редактура текста и общее руководство, а автору работы – проведение исследования и доказательство результатов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка литературы и приложения. Её объем составляет 99 страниц. Библиография – 79 наименований. Определения, предложения, теоремы, леммы и следствия имеют сквозную нумерацию, содержащую номер главы, параграфа и результата.

Во введении представлена общая характеристика работы и приведен краткий обзор результатов работы по главам и параграфам.

Первая глава посвящена получению абстрактных критериев непрерывности и компактности произвольного линейного оператора, действующего из абстрактных квазибанаховых пространств, а также проективных и индуктивных пределов последовательностей таких пространств в весовые пространства с равномерными весовыми нормами. Именно, областью действия операторов являются пространства типа $H_v(G)$ или $B_v(G)$, которые вводятся и обсуждаются в разделе 1.1 или их проективные и индуктивные пределы. Решению поставленной задачи посвящены разделы 1.2 и 1.3 соответственно, а полученные в этих разделах теоремы 1.2.1, 1.2.3, 1.3.2 и 1.3.4 являются основными результатами настоящей работы. При этом в подразделе 1.2.2 вводятся классы весовых последовательностей V и $\mathcal{V}$, удовлетворяющие ряду дополнительных ограничений, носящих естественный характер, и описываются рассматриваемые в диссертации весовые пространства $HV(G)$ и $\mathcal{V}H(G)$ с топологией проективного и внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств. Основными результатами раздела являются теоремы 1.2.5 и 1.2.8.

В разделе 1.4 исследуются операторы весовой и обычной композиции, умножения, а также композиция операторов умножения и дифференцирования. Основными результатами раздела являются следствия 1.4.1, 1.4.4 и 1.4.10, 1.4.14, в которых формулируются критерии непрерывности и компактности оператора весовой композиции, действующего в пространства H_v и B_v, соответственно. Критерии непрерывности и компактности других перечисленных ранее операторов являются следствием упомянутых выше теорем. Кроме того, полученные в настоящем разделе результаты, а точнее одно из их следствий — предложение 1.4.13 играет существенную роль при исследовании интегральных операторов в следующем разделе. Данное предложение наиболее интересно с точки зрения приложений к конкретным пространствам, которым посвящена глава 3. Наконец, в следствии 1.4.6 формулируется критерий непрерывности оператора весовой композиции на индуктивном (проективном) пределе последовательности квазибанаховых пространств.

В разделе 1.5 изучаются топологические свойства интегрального оператора Вольтерра и его союзного. Для получения требуемых результатов в предложении 1.5.5 и теореме 1.5.13 формулируются вспомогательные критерии изоморфности дифференциального оператора, действующего между пространствами типа $H_v(\mathbb{D})$ и $H_v(\mathbb{C})$, соответственно, где $\mathbb{D}$ — единичный круг. Основными результатами раздела, в случае пространств H_v, являются предложения 1.5.7, и 1.5.22 и их аналоги для случая всей комплексной плоскости — теоремы 1.5.14 и 1.5.24. Кроме того, в предложениях 1.5.17 и 1.5.27 установлены аналогичные результаты для пространств типа Блоха. В заключительной части этого раздела исследуется вопрос о непрерывности упомянутых выше интегральных операторов на индуктивном (проективном) пределе последовательности квазибанаховых пространств. Отмечается, что в общем случае результаты аналогичные тем, что установлены для композиционных операторов, получить не удаётся. Однако, критерии для одного частного случая приводятся в следствиях 1.5.19 и 1.5.20 соответственно.

Вторая глава выполняет связующую роль между первой и третьей. В ней вводятся и рассматриваются пространства голоморфных и целых функций, к которым позднее будут применены результаты, приведённые в главе 1. Подчёркивается, что для этих целей необходимо знать нормы дельта-функции и её производной на указанных пространствах или хотя бы их равномерные оценки. Именно, в качестве пространств аналитических функций, в разделе 2.1 вводятся пространства Бергмана, Харди, Дирихле и Дирихле-Харди с интегральными нормами. Отмечается, что для данного случая нормы дельта-функции и её производной известны. Формулы для их вычисления приводятся также в разделе 2.1.

Далее, в разделах 2.2 и 2.3 вводятся пространства целых функций — классическое и обобщённое пространства Фока. В этом случае формулы для вычисления нормы дельта-функций известны лишь для классического пространства Фока. Чтобы получить нужные оценки для обобщённых пространств Фока, как было отмечено выше, требовалось выделить класс весов, для которых это возможно. Именно этому вопросу и посвящён раздел 2.3.2. Здесь вводятся важные понятия слабо растущих в среднем весов и почти гармонических функций. Показано, что для таких весов нужные нам оценки норм δ-функций имеют место. В леммах 2.3.5 и 2.3.12 установлено, что веса вида $\gamma|z|^q,\ 0 < q \leq 2$, и $|z|^{\rho(|z|)}$, где $\rho(r)$ — некоторый сильный уточнённый порядок с $\rho \leq 2$, входят в искомый класс. В лемме 2.3.7 содержатся некоторые достаточные условия на радиальные веса общего вида, при выполнении которых в пространствах Фока, ими задаваемых, имеется нужная оценка норм дельта-функций. Основными результатами раздела являются леммы 2.3.3, 2.3.9 и 2.3.13, в которых для различных весов устанавливаются оценки сверху для нормы дельта-функции. В разделе 2.3.3 в лемме 2.3.15 аналогичная оценка устанавливается для нормы производной дельта-функции на обобщённом пространстве Фока.

В третьей главе рассмотрены приложения полученных в главе 1 абстрактных критериев к пространствам голоморфных (пространства Бергмана, Харди, Дирихле и Дирихле-Харди) и целых функций (классическое и обобщённое пространства Фока). Основным требованием на веса, порождающие пространства, как и прежде, остаётся их радиальность.

В разделе 3.1 изучен вопрос о непрерывности и компактности интегральных операторов, действующих из конкретных пространств аналитических функций в весовые пространства типа $H_v(\mathbb{D})$ и $B_v(\mathbb{D})$. Установленные в настоящем разделе критерии существенным образом опираются на результаты, полученные в главах 1 и 2. Так, конкретные результаты мы получаем из общих, приведённых в главе 1, путём замены нормы дельта-функции или её производной на абстрактном пространстве, формулой для её вычисления в конкретном пространстве. Именно, в следствиях 3.1.1 и 3.1.2 формулируются критерии непрерывности в случае действия оператора Вольтерра и его союзного в пространства $H_v(\mathbb{D})$ и $B_v(\mathbb{D})$ соответственно. В следствиях 3.1.3 и 3.1.4 устанавливаются критерии компактности указанных операторов в тех же самых пространствах.

В разделе 3.2 для композиционных и интегральных операторов, действующих в пространствах целых функций, получены достаточные условия их непрерывности и компактности. Для получения требуемых результатов используется тот же подход, что и при работе с пространствами аналитических функций. Отдельное внимание в настоящем разделе уделяется исследованию интегральных операторов, действующих между пространствами Фока. Подчеркнём, что в изучении этого вопроса существенную роль играет предложение 3.2.5, в котором приведён критерий изоморфности дифференциального оператора, действующего между пространствами Фока общего вида.

В разделе 3.3 строятся проективные (индуктивные) пределы последовательностей конкретных пространств аналитических функций, введённых в разделе 2.1, и исследуется вопрос о непрерывности композиционных операторов на полученных пространствах.

В разделе 3.4. формулируются приложения установленных в главе 1 результатов к частным случаям рассмотренных ранее интегральных операторов. Именно, получены критерии непрерывности интегральных операторов Чезаро и Харди.

В заключении отметим, что разработанный нами подход и общие результаты могут быть использованы и для других операторов и пространств.

Глава 1

Ограниченность и компактность классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах общего вида и их проективных и индуктивных пределах

Непрерывность и компактность классических операторов, действующих в различных шкалах весовых пространств голоморфных функций (Харди, Бергмана, Фока и др.) изучалась многими авторами в большом количестве работ (см., напр., [38, 43, 60, 63] и библиографию в них). В работе [64] Н. Зорбоска предложила абстрактный подход к данному направлению для случая банаховых пространств голоморфных функций в круге. Таким образом, за пределами приложения её результатов остался не только важный случай пространств целых функций, но и части перечисленных выше шкал, состоящие из квазибанаховых пространств, не являющихся нормированными (будем называть такие пространства существенно квазибанаховыми).

Центральное место в настоящей главе занимает обобщение и развитие подхода [64] для квазибанаховых пространств и произвольных областей, включая пространства целых функций. Поскольку значительная часть методов в [64] основана на привлечении сопряжённых пространств и сопряжённых операторов, то они неприменимы к существенно квазибанаховым пространствам. В связи с этим разработанное в настоящей главе обобщение является нетривиальным. Кроме того, абстрактный подход развит также для операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств, которые ранее в подобных случаях не изучались.

Материал настоящей главы разбит на пять частей. В первом разделе приводятся основные обозначения и постановка задачи. Во втором устанавливаются критерии непрерывности произвольного линейного оператора, действующего из произвольного квазибанахова пространства голоморфных в области функций в пространство таких же функций с равномерной весовой оценкой. Здесь же полученные результаты распространяются на случай проективных и индуктивных пределов последовательностей аналогичных пространств. Третий раздел содержит критерии компактности абстрактных операторов. В четвёртом и пятом разделах полученные абстрактные критерии применяются к композиционным и интегральным операторам.

1.1 Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G. Без ограничения общности и с целью упрощения изложения считаем, что область G содержит начало координат. По непрерывной функции (весу) $v : G \to (0, \infty)$ определим банаховы пространства

$$H_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : \|f\|_{H_v} = \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \Big\},$$

$$B_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : \|f\|_{B_v} = \sup_{z \in G} \frac{|f'(z)|}{v(z)} + |f(0)| < \infty \Big\}$$

и их соответствующие замкнутые подпространства

$$H_{v,0}(G) := \Big\{ f \in H(G) : \lim_{z \to \partial G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0 \Big\},$$

$$B_{v,0}(G) := \Big\{ f \in H(G) : \lim_{z \to \partial G} \frac{|f'(z)|}{v(z)} = 0 \Big\}.$$

Здесь и далее для функции $h : G \to \mathbb{C}$ запись $\lim\limits_{z \to \partial G} h(z) = 0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ имеется такой компакт K в G, что $|h(z)| \le \varepsilon$ при всех $z \in G \setminus K$.

Отметим, что пространства $H_v(G)$ и $H_{v,0}(G)$ являются пространствами типа Бергмана, а $B_v(G)$ и $B_{v,0}(G)$ — пространствами типа Блоха. Указанные пространства играют важную роль в теории аппроксимации, анализе Фурье, уравнениях в частных производных и свёртки, в теории двойственности функциональных пространств и др. В связи с этим многие работы посвящены исследованию как самих этих пространств, так и различных топологических свойств операторов, действующих на них или в них (см., напр., [3, 27, 48, 53, 61]). Как уже было отмечено в преамбуле к главе, нас в основном интересуют операторы, действующие из квазибанаховых пространств в $H_{v,0}$ и $B_{v,0}$.

Всюду далее будем предполагать, что X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(G)$. Напомним определение квазибанаховых пространств и перечислим некоторые нужные нам сведения об операторах в них.

Определение 1.1.1. Функцию, заданную на линейном пространстве X, которая любому $x \in X$ ставит в соответствие действительное число $\|x\|$, называют квазинормой, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

а) $\|x\| \geq 0$, $x \in X$, причем равенство $\|x\| = 0$ возможно только при $x = 0$;

б) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall x \in X$;

в) при некотором $K \geq 1$ выполняется неравенство $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|), \ \forall x, y \in X$.

В этом случае пространство X называется квазинормируемым. А если, кроме того, оно является полным, то X называется квазибанаховым. В случае, если $K = 1$, то $\|\cdot\|$ будет обычной нормой, а пространство X банаховым. Таким образом, понятие квазибанахова пространства является обобщением понятия банахова пространства.

Наиболее известными примерами квазибанаховых ненормируемых пространств являются пространства Бергмана $A^p_\alpha(\mathbb{D})$, Харди $H^p(\mathbb{D})$, Дирихле $D^p_\alpha(\mathbb{D})$, Харди-Дирихле $S^p(\mathbb{D})$, Фока $F^p_\alpha(\mathbb{C})$ при $0 < p < 1$ (см. подробнее разделы 2.1. и 2.2. главы 2).

Для линейных операторов и линейных функционалов, действующих из одного квазибанахова пространства $X, \|\cdot\|_X$ в другое квазибанахово пространство $Y, \|\cdot\|_Y$ верны все основные определения и утверждения, что и в случае, когда эти пространства банаховы. В частности, сопряженное с квазибанаховым пространством $X, \|\cdot\|_X$ пространство X^* всех линейных непрерывных функционалов на X, снабженное сопряженной нормой

$$\|f\|^* = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}, \ f \in X^*,$$

всегда является банаховым пространством. Следует, однако, отметить, что если в банаховом случае X^* всегда нетривиально, то есть содержит отличные от тождественного нуля линейные непрерывные функционалы на X, то для квазибанаховых пространств X^* может оказаться тривиальным. Классическим примером, подтверждающим это обстоятельство, является квазибанахово пространство $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$, всех интегрируемых с p-й степенью на $[0,1]$ функций (см., напр., [10, с. 67–68]).

Основополагающим для нашего исследования фактом является то, что для изучаемых нами пространств голоморфных функций сопряженное пространство всегда нетривиально и содержит, так называемые, дельта-функции $\delta_z : f \mapsto f(z)$ и их производные $\delta_z' : f \mapsto f'(z)$, вычисляющие значение каждой функции f и f', соответственно, в наперед заданной точке $z \in G$. Очевидно, что δ_z и δ_z' являются линейными непрерывными функционалами на $H(G)$ при любом $z \in G$. Поэтому δ_z и δ_z' будут элементами X^* для любого квазибанахова пространства X, непрерывно вложенного в $H(G)$.

1.2 Абстрактные критерии непрерывности в квазибанаховых пространствах

Основная задача этого раздела — в терминах норм дельта-функции и её производной получить критерии корректной определённости и непрерывности линейных операторов из произвольного квазибанахова пространства, непрерывно вложенного в $H(G)$, в $H_v(G)$ и $B_v(G)$, где v — произвольный вес на G.

1.2.1 Абстрактные критерии непрерывности операторов $T : X \to H_v(G)$ и $T : X \to B_v(G)$

Пусть, как и ранее, G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, T — линейный оператор, действующий из $H(G)$ в $H(G)$. Важную роль в дальнейшем исследовании играют следующие линейные функционалы на $H(G)$. Фиксируем $z \in G$ и рассматриваем линейный функционал $\delta_z \circ T : f \in H(G) \mapsto Tf(z)$, то есть сначала вычисляется функция Tf — образ f при отображении T, а затем вычисляется значение этой функции в точке z.

Справедлив следующий критерий.

Теорема 1.2.1. *Пусть v — вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z \circ T \in X^*, \forall z \in G$;*

б)

$$\sup_{z\in G}\frac{\|\delta_z\circ T\|^*}{v(z)}<\infty. \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $T : X \to H_v(G)$ корректно определён и ограничен.

а) Так как тождественный оператор $id : f \mapsto f$ действует непрерывно из $H_v(G)$ в $H(G)$, то $T : X \to H(G)$ ограничен, как композиция ограниченных операторов $T : X \to H_v(G)$ и $id : H_v \to H(G)$. Далее, в силу ограниченности линейного функционала $\delta_z : H(G) \to \mathbb{C}$, имеем $\delta_z \circ T \in X^*$ для всех $z \in G$.

б) В силу ограниченности $T : X \to H_v(G)$

$$\sup_{z\in G}\frac{|Tf(z)|}{v(z)}\le C\cdot\|f\|_X, \text{ при всех } f\in X,$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Отсюда получаем, что

$$\frac{|(Tf)(z)|}{\|f\|_X}\le C\cdot v(z), \forall f\in X, f\neq 0, \forall z\in G.$$

Поэтому при всех $z\in G$

$$\sup_{f\neq 0}\frac{|(\delta_z\circ T)(f)|}{\|f\|_X}\le C\cdot v(z).$$

Из этого очевидно следует, что $\|\delta_z\circ T\|^*\le C\cdot v(z)$ при всех $z\in G$, а тогда

$$\sup_{z\in G}\frac{\|\delta_z\circ T\|^*}{v(z)}\le C<\infty.$$

Достаточность. Пусть условие (1.2.1) выполнено, то есть, $\delta_z\circ T\in X^*$ для любого $z\in G$ и существует некоторая постоянная $C>0$ такая, что $\|\delta_z\circ T\|^*\le C\cdot v(z), \forall z\in G$. Тогда для всех $f\in X$ и $z\in G$, имеем

$$|(Tf)(z)|\le C\cdot v(z)\cdot\|f\|_X.$$

Отсюда следует, что

$$\|Tf\|_{H_v}\le C\cdot\|f\|_X,$$

то есть оператор $T : X\to H_v(G)$ ограничен. □

Замечание 1.2.2. Из приведенного доказательства следует формула для вычисления нормы оператора $T : X\to H_v(G)$:

$$\|T\|_{H_v}=\sup_{z\in G}\frac{\|\delta_z\circ T\|^*}{v(z)}.$$

Далее, фиксируем $z \in G$ и рассматриваем линейный функционал $\delta_z' \circ T : f \in H(G) \mapsto (Tf)'(z)$, то есть сначала вычисляем производную функции Tf, а затем находим её значение в точке z.

Теорема 1.2.3. *Линейный оператор $T : X \to B_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_0 \circ T \in X^*, \forall z \in G$; б) $\delta_z' \circ T \in X^*, \forall z \in G$; в)*

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z' \circ T\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.2.2}$$

Если T удовлетворяет перечисленным выше условиям а)-в), то норма оператора $T : X \to B_v(G)$ удовлетворяет оценке

$$\|T\|_{B_v} \leq \|\delta_0 \circ T\|^* + \sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z' \circ T\|^*}{v(z)}. \tag{1.2.3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $T : X \to B_v(G)$ корректно определён и ограничен.

а) Так как тождественный оператор $id : f \mapsto f$ действует непрерывно из $B_v(G)$ в $H(G)$, то $T : X \to H(G)$ непрерывен, как композиция непрерывных операторов $T : X \to B_v(G)$ и $id : B_v(G) \to H(G)$. Далее, в силу непрерывности $\delta_z : H(G) \to \mathbb{C}$, имеем $\delta_z \circ T \in X^*$ для всех $z \in G$. Отсюда, в частности, следует, что $\delta_0 \circ T \in X^*$.

б) Известно, что оператор дифференцирования $D : f \mapsto f'$ действует непрерывно из $B_v(G)$ в $H(G)$. Тогда, как и в а), $D \circ T : X \to H(G)$ непрерывен, как композиция непрерывных операторов $D : B_v(G) \to H(G)$ и $T : X \to B_v(G)$.

Кроме того, так как $\delta_z : H(G) \to \mathbb{C}$ непрерывен, то $\delta_z \circ D \circ T = \delta_z' \circ T : X \to \mathbb{C}$ непрерывен. То есть $\delta_z' \circ T \in X^*, \forall z \in G$.

в) В силу ограниченности $T : X \to B_v(G)$

$$\sup_{z \in G} \frac{|(Tf)'(z)|}{v(z)} + |Tf(0)| \leq C \cdot \|f\|_X \text{ при всех } f \in X,$$

или

$$\sup_{z \in G} \frac{|(\delta_z' \circ T)(f)|}{v(z)} + |Tf(0)| \leq C \cdot \|f\|_X, \text{ при всех } f \in X,$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Следовательно,

$$\frac{|(\delta_z' \circ T)(f)|}{\|f\|_X} \leq C \cdot v(z), \forall f \in X, f \neq 0, \forall z \in G.$$

Поэтому при всех $z \in G$
$$\sup_{f\neq 0} \frac{|(\delta_z^{'} \circ T)(f)|}{\|f\|_X} \leq C \cdot v(z).$$
и
$$\|\delta_z^{'} \circ T\|_{X^*}^* \leq C \cdot v(z),$$
откуда следует условие (1.2.2).

Достаточность. Пусть условие (1.2.2) выполнено. Тогда $\delta_z^{'} \circ T \in X^*$ для любого $z \in G$ и существует некоторая постоянная $C > 0$ такая, что $\|\delta_z^{'} \circ T\|^* \leq C \cdot v(z), \forall z \in G$. Тогда для всех $f \in X, z \in G$, имеем
$$|(Tf(z))'| \leq C \cdot v(z) \cdot \|f\|_X.$$
Отсюда следует, что $\|(Tf)'\|_{H_v} \leq C,$ при всех $f,$ таких что $\|f\|_X \leq 1$. Далее, так как $\delta_0 \circ T \in X^*$, то $|(Tf)(0)| \leq C_1 \cdot \|f\|_X, \forall f \in X$, где C_1 — некоторая положительная константа.

Таким образом,
$$\|(Tf)'\|_{H_v} + |Tf(0)| \leq \Big(C + C_1\Big) \cdot \|f\|_X \leq \Big(C + C_1\Big),\ \forall f : \|f\|_X \leq 1,$$
то есть оператор $T : X \to B_v(G)$ ограничен.

Из приведенных в ходе доказательства оценок следует справедливость оценки (1.2.3). $\square$

Замечание 1.2.4. Теоремы 1.2.1 и 1.2.3 обобщают п.п. (i) и (ii) теоремы 2.1 из [64] в двух направлениях: во-первых, проведенное нами доказательство позволяет расширить класс пространств X до квазибанаховых и, во-вторых, мы рассматриваем произвольные веса вместо радиальных весов, как было в [64].

1.2.2 Абстрактные критерии непрерывности линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций

Результаты, приведенные в предыдущем разделе, позволяют получить удобное для использования в приложениях описание топологических свойств линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей (квази)банаховых пространств голоморфных в области функций, задаваемых весовыми последовательностями общего вида. В случаях, когда последовательности состоят из банаховых пространств, они относятся к хорошо известным и широко используемым классам пространств Фреше и (LB)-пространствам, соответственно, и изучались в различных направлениях многими авторами (см., в частности, [24] и библиографию в этой статье). Насколько нам известно, топологические свойства операторов, действующих на аналогичных пределах квазибанаховых пространств, ранее не изучались. Этим вопросам и посвящён настоящий раздел.

Пусть V — последовательность $(v_n)_n$ весов на G, для которых имеются такие постоянные C_n, что $v_{n+1}(z) \leq v_n(z) + C_n$ на G. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеют место непрерывные вложения $H_{v_{n+1}}(G) \hookrightarrow H_{v_n}(G)$ и естественно образовать линейное пространство

$$HV(G) = \bigcap_n H_{v_n}(G)$$

и наделить его топологией проективного предела последовательности банаховых пространств $(H_{v_n}(G))_n$.

Рассмотрим теперь весовую последовательность $\mathcal{V} = (v_n)_n$ на G, для которой существуют постоянные C_n такие, что $v_n(z) \leq v_{n+1}(z) + C_n$ на G. Тогда имеют место непрерывные вложения $H_{v_n} \hookrightarrow H_{v_{n+1}}, n \in \mathbb{N}$, и естественно образовать линейное пространство

$$\mathcal{V}H(G) = \bigcup_n H_{v_n}(G),$$

наделённое топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств $(H_{v_n}(G))_n$. При этом, построенное по $\mathcal{V}$ пространство $\mathcal{V}H(G)$ является внутренним индуктивным пределом последовательности банаховых пространств $H_{v_n}(G), n \in \mathbb{N}$.

Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность квазибанаховых пространств, непрерывно вложенных в $H(G)$, для которых имеет место одно из двух условий:

1) $X_{n+1} \hookrightarrow X_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

2) $X_n \hookrightarrow X_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

В первом случае образуем пространство $X = \bigcap\limits_n X_n$ и наделим его топологией проективного предела. Во втором — $\mathcal{X} = \bigcup\limits_n X_n$ с топологией внутреннего индуктивного предела. Обратим внимание на различие в обозначении проективного (X) и индуктивного $(\mathcal{X})$ случаев.

В ряде вопросов, связанных с топологическими свойствами проективных и индуктивных пределов, особый интерес представляет получение условий ограниченности композиционных и интегральных операторов в терминах норм дельта-функций. С помощью полученных в разделе 1.2.1 результатов в этом параграфе устанавливаются критерии ограниченности классических операторов, действующих в проективных и индуктивных пределах последовательностей (квази)банаховых пространствах в терминах норм δ-функций в соответствующих сопряженных пространствах. Начнём с проективного предела последовательностей (квази)банаховых пространств. Далее, будем предполагать, что X плотно в каждом пространстве X_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.2.5. *Линейный оператор $T : X \to HV(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:*

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|_m^*}{v_n(z)} < \infty. \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (1.2.4). Из него следует, что $\delta_z \circ T \in X_m^*$ для любого $z \in G$ и что имеется такое $C_n > 0$, что $\|\delta_z \circ T\|_m^* \leq C_n \cdot v_n(z)$ при всех $z \in G$. Тогда для всех $x \in X_m$ и $z \in G$, имеем $|(Tx)(z)| \leq C_n \cdot v_n(z) \cdot \|x\|_m$. Отсюда получаем, что $\|Tx\|_{v_n} \leq C_n \cdot \|x\|_m$, то есть оператор $T : X_m \to H_{v_n}(G)$ непрерывен. Следовательно, $T : X \to H_{v_n}(G)$ непрерывен для каждого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $T(X) \subset HV(G)$ и $T : X \to HV(G)$ непрерывен.

Необходимость. Пусть линейный оператор $T : X \to HV(G)$ непрерывен. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что справедливо неравенство

$$\|Tx\|_{H_{v_n}} \leq C \cdot \|x\|_m, \text{ для всех } x \in X. \tag{1.2.5}$$

Так как X плотно в X_m, то найдётся последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ функций из X, которая сходится к x в X_m. Заметим, что тогда $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ фундаментальна в X_m. Отсюда и из неравенства (1.2.5) следует, что последовательность $(Tx_j)_{j=1}^{\infty}$ фундаментальна в $H_{v_n}(G)$. Так как $H_{v_n}(G)$ полно, то $(Tx_j)_{j=1}^{\infty}$ сходится к некоторому элементу $y \in H_{v_n}(G)$. Остаётся показать, что $y = Tx$.

Так как $x_j \to x$ в X_m и X_m непрерывно вложено в $H(G)$, то, тем более, $x_j \to x$ в $H(G)$. Отсюда и из непрерывности $T : H(G) \to H(G)$ следует, что $Tx_j \to Tx$ в $H(G)$. Аналогично, $Tx_j \to y$ в $H(G)$. Отсюда получаем, что $y = Tx$. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что оператор $T : X_m \to H_{v_n}(G)$ непрерывен. Тогда, по теореме 1.2.1, выполняется условие (1.2.4). □

Отметим, что частным случаем теоремы 1.2.5 является следующий результат

Теорема 1.2.6. *Пусть v — вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее* *условие:*

$$\sup_{z\in G}\frac{\|\delta_z\circ T\|_m^*}{v(z)}<\infty.$$

Далее, установим аналог теоремы 1.2.5 для индуктивных пределов последовательностей (квази)банаховых пространств голоморфных функций. Для этого нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1.2.7. *Пусть E и F — внутренние индуктивные пределы последовательностей $(E_n)_n$ и $(F_n)_n$ квазибанаховых пространств, соответственно. Линейный оператор $L:E\to F$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n\in\mathbb{N}$ найдётся такое $m\in\mathbb{N}$, что оператор $L:E_n\to F_m$ непрерывен.*

Доказательство. Пусть линейный оператор $L:E\to F$ непрерывен. Тогда по критерию непрерывности линейного оператора на индуктивном пределе оператор $L:E_n\to F$ непрерывен для каждого $n\in\mathbb{N}$. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$ и применим теорему 6.5.1 из [14] к операторам $L:E_n\to F$ и $id:F_n\to F$ соответственно. Поскольку $L(E_n)\subset F=\bigcup\limits_m F_m$, то по этой теореме найдется такое $m\in\mathbb{N}$, что $L(E_n)\subset F_m$ и, если U_m — окрестность нуля в F_m, то множество $V_n=L^{-1}(U_m)$ — окрестность нуля в E_n. Отсюда получаем непрерывность оператора $L:E_n\to F_m$.

Обратно, пусть теперь для любого $n\in\mathbb{N}$ существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что оператор $L:E_n\to F_m$ непрерывен. Так как тождественный оператор $id:F_m\to F$ непрерывен, то $L=L\circ id:=E_n\to F$ непрерывен, как композиция непрерывных операторов. Тогда по критерию непрерывности оператора на индуктивном пределе оператор $L:E\to F$ непрерывен. $\square$

Теперь мы готовы сформулировать результат для индуктивного случая.

Теорема 1.2.8. *Линейный оператор $T:\mathcal{X}\to\mathcal{V}H(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует такое $m\in\mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:*

$$\sup_{z\in G}\frac{\|\delta_z\circ T\|_n^*}{v_m(z)}<\infty. \tag{1.2.6}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (1.2.6). Из него следует, что $\delta_z\circ T\in X_n^*$ для любого $z\in G$ и что имеется такое $C>0$, что $\|\delta_z\circ T\|_n^*\le C\cdot v_m(z)$ при всех $z\in G$. Тогда для всех $x\in X_n$ и $z\in G$, имеем $|(Tx)(z)|\le C\cdot v_m(z)\cdot\|x\|_n$. Отсюда получаем, что $\|Tx\|_{v_m}\le C\cdot\|x\|_n$, то есть оператор $T:X_n\to H_{v_m}(G)$ непрерывен. Следовательно, оператор $T:$

$X_n \to \mathcal{V}H(G)$ непрерывен. По критерию непрерывности линейного оператора на индуктивном пределе отсюда следует, что $T : \mathcal{X} \to \mathcal{V}H(G)$ непрерывен.

Необходимость. Пусть линейный оператор $T : \mathcal{X} \to \mathcal{V}H(G)$ корректно определён и непрерывен. Из леммы 1.2.7 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что оператор $T : X_n \to H_{v_m}(G)$ непрерывен. Тогда по теореме 1.2.1 выполняется условие (1.2.6). □

Отметим, что частным случаем теоремы 1.2.8 является следующий результат

Теорема 1.2.9. *Пусть X — квазибанахово пространство. Линейный оператор $T : X \to \mathcal{V}H(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что выполнено следующее условие:*

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v_m(z)} < \infty.$$

1.3 Абстрактные критерии компактности операторов $T : X \to H_{v,0}(G)$ и $T : X \to B_{v,0}(G)$

Основная задача этого раздела — в терминах норм дельта-функции и её производной получить критерии компактности T из X в $H_{v,0}(G)$ и $B_{v,0}(G)$ соответственно, где X — произвольное квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(G)$, а v — произвольный вес на G. Ранее подобная задача исследовалась Н. Зорбоска в [64] для случая банаховых пространств $H_{v,0}$ и $B_{v,0}$ в единичном круге $\mathbb{D}$ и радиальных весов v. Предложенный в [64] подход основан на привлечении теории сопряжённых пространств и сопряжённых операторов, результаты и методы которой нельзя использовать для существенно квазибанаховых пространств. В связи с этим мы развиваем в настоящем разделе другой подход, который применим ко всему классу рассматриваемых квазибанаховых пространств, как банаховых, так и существенно квазибанаховых.

Прежде, чем привести указанные критерии, сформулируем вспомогательный результат о компактности произвольного линейного оператора, действующего между квазибанаховыми пространствами, который будет нам полезен в дальнейшем. Для его доказательства мы будем использовать соображения, предложенные в [38, предложение 3.11] для композиционных операторов в пространствах Харди и Бергмана (см. также [57, лемма 3.7] для произвольного линейного оператора на банаховых пространствах голоморфных функций). Для наших целей будет достаточно следующего варианта.

Лемма 1.3.1. *Пусть X, Y — квазибанаховы пространства, непрерывно вложенные в $H(G)$, $T : H(G) \to H(G)$ — линейный непрерывный оператор, и замкнутый единичный шар в X является компактным подмножеством X в топологии, индуцированной из $H(G)$. Пусть, далее, $T(X) \subset Y$. Для того, чтобы оператор $T : X \to Y$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{f_n\}$ в X такой, что $f_n \to 0$ в $H(G)$, последовательность $\{Tf_n\}$ сходилась к нулю по квазинорме Y.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $T : X \to Y$ — компактный оператор, последовательность $\{f_n\}$ ограничена в X и $f_n \to 0$ в $H(G)$, то есть

$$\forall K \Subset G \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in K, \forall n \geq N.$$

Предположим противное, что последовательность $\{Tf_n\}$ не сходится к 0 по квазинорме Y, то есть, существует $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{Tf_{n_j}\}$ такая что

$$\|Tf_{n_j}\|_Y \geq \varepsilon_0, \ \forall j \in \mathbb{N}. \qquad (1.3.1)$$

Так как последовательность $\{f_{n_j}\}$ ограничена и оператор $T : X \to Y$ компактен, то из $\{f_{n_j}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_{j_k}}\}$, сходящуюся в Y к некоторой функции $f \in Y$. Поскольку Y вложено непрерывно в $H(G)$, то $f_{n_{j_k}} \to f$ в $H(G)$. А так как $f_n \to 0$ в $H(G)$, то $f = 0$. Таким образом, $f_{n_{j_k}} \to 0$ в Y, что противоречит (1.3.1).

Достаточность. Рассмотрим произвольную ограниченную в X последовательность $\{f_n\}$. Без ограничения общности можно считать, что f_n содержатся в единичном шаре B_X пространства X при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как единичный шар B_X компактен в $H(G)$, то имеется такая функция $f \in B_X$ и подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$, что $f_{n_j} \to f$ в $H(G)$. Тогда $\{f_{n_j} - f\}$ — ограниченная в X последовательность, которая сходится к нулю в $H(G)$. По условию тогда $f_{n_j} - f \to 0$ в Y, то есть $f_{n_j} \to f$ в Y. Отсюда следует, что $T : X \to Y$ — компактный оператор. □

Теперь мы готовы привести основной результат данного раздела.

Теорема 1.3.2. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z \circ T \in X^*, \forall z \in G$; б)*

$$\lim_{z \to \partial G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} = 0. \qquad (1.3.2)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (1.3.2). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (1.3.2) для него найдется компакт K в G, для которого $\|\delta_z \circ T\|^* \leq \varepsilon \cdot v(z), \forall z \in G \backslash K$, или

$$|(Tf)(z)| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_X \cdot v(z), \forall z \in G \setminus K, \forall f \in X. \tag{1.3.3}$$

Отсюда очевидно следует, что

$$\lim_{z \to \partial G} \frac{|(Tf)(z)|}{v(z)} = 0.$$

И, значит, $(Tf)(z) \in H_{v,0}(G)$, $\forall f \in X$, т.е $T(X) \subset H_{v,0}(G)$. Остается проверить, компактность $T : X \to H_v(G)$. Для этого воспользуемся леммой 1.3.1.

Пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная в X последовательность, сходящаяся в $H(G)$ к нулю. Тогда из (1.3.3) заключаем, что

$$\sup_{z \in G \backslash K} \frac{|Tf_n(z)|}{v(z)} \leq \varepsilon \cdot M, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.3.4}$$

где $M := \sup\limits_n \|f_n\|_X < \infty$. Далее, в силу непрерывности и положительности веса v на G имеем, что $\min\limits_{z \in K} v(z) =: m > 0$. По условию оператор $T : H(G) \to H(G)$ непрерывен и $f_n \to 0$ в $H(G)$ при $n \to \infty$. Поэтому найдется такой номер N, что

$$\max_{z \in K} |Tf_n(z)| \leq \varepsilon \cdot m, \forall n \geq N,$$

а тогда

$$\sup_{z \in K} \frac{|Tf_n(z)|}{v(z)} \leq \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Объединив это неравенство с (1.3.4), имеем при всех $n \geq N$

$$\begin{aligned} \|Tf_n\|_{H_v} &= \sup_{z \in G} \frac{|Tf_n(z)|}{v(z)} \\ &= \max\left\{ \sup_{z \in K} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)}, \sup_{z \in G \backslash K} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)} \right\} \leq \varepsilon \cdot (M+1). \end{aligned}$$

Значит, $Tf_n \to 0$ в $H_v(G)$ при $n \to \infty$ и по лемме 1.3.1 оператор $T : X \to H_v(G)$ компактен.

Необходимость. Пусть теперь $T : X \to H_{v,0}(G)$ компактен, но условие (1.3.2) не выполнено. Тогда существует последовательность $\{z_n\} \subset G$ такая, что $z_n \to \partial G$ при $n \to \infty$ и

$$\exists c > 0 : \ \frac{\|\delta_{z_n} \circ T\|^*}{v(z_n)} \geq c.$$

То есть,
$$\|\delta_{z_n}\circ T\|^* = \sup_{\|f\|_X\le 1}\frac{|(\delta_{z_n}\circ T)f|}{v(z_n)} = \sup_{\|f\|_X\le 1}\frac{|(Tf)(z_n)|}{v(z_n)} \ge c.$$
Отсюда следует, что имеется такая последовательность $\{f_n\}$ функций из единичного шара B_X пространства X, что
$$\frac{|(Tf_n)(z_n)|}{v(z_n)} \ge \frac{c}{2},\ n\in\mathbb{N}.$$
Так как единичный шар B_X компактен в топологии τ_{uc} равномерной сходимости на компактах G, то имеется такая функция $f\in B_X$ и подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$, что $f_{n_j}\to f$ в $H(G)$. Так как, $T: X\to H_{v,0}(G)$ компактен, то по лемме 1.3.1 $\|T(f_n-f)\|_{H_v}\to 0$.

Тогда для достаточно большого n
$$\frac{|Tf(z_n)|}{v(z_n)} \ge \frac{|Tf_n(z_n)|}{v(z_n)} - \frac{|T(f_n-f)(z_n)|}{v(z_n)} \ge \frac{c}{2}-\frac{c}{4}=\frac{c}{4}>0.$$
С другой стороны, $T: X\to H_{v,0}(G)$ ограничен и $Tf\in H_{v,0}(G)$. Следовательно, справедливо равенство
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|Tf(z_n)|}{v(z_n)}=0.$$
Получили противоречие. Таким образом условие (1.3.2) выполнено. □

Замечание 1.3.3. Теорема 1.3.2 обобщает, как и ранее, теорему 3.2 (a) из [64] в двух направлениях: во-первых, проведенное нами доказательство позволяет расширить класс пространств X до квазибанаховых и, во-вторых, мы рассматриваем произвольную область вместо единичного круга.

Исследуем теперь вопрос о компактности абстрактного линейного оператора, действующего из произвольных (квази)банаховых пространств в весовые пространства Блоха.

Теорема 1.3.4. *Пусть v — произвольный вес на G. Линейный оператор $T: X\to B_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z'\circ T\in X^*, \forall z\in G$; б)*
$$\lim_{z\to\partial G}\frac{\|\delta_z'\circ T\|^*}{v(z)}=0. \tag{1.3.5}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия а) и б). В силу (1.3.5) для любого $\varepsilon>0$ существует компакт $K\Subset G$, для которого $\|\delta_z'\circ T\|^*\le\varepsilon\cdot v(z), \forall z\in G\setminus K$.
$$|(Tf(z))'| = \|\delta_z'\circ T\|^*\cdot\|f\|_X \le \varepsilon\cdot\|f\|_X\cdot v(z), \forall z\in G\setminus K, \forall f\in X. \tag{1.3.6}$$

Рассмотрим произвольную ограниченную в X последовательность $\{f_n\}$, сходящуюся в $H(G)$ к нулю. Тогда из (1.3.6) заключаем, что

$$\sup_{z\in G\setminus K}\frac{|(Tf_n)'(z)|}{v(z)}\le\varepsilon\cdot M,\forall n\in\mathbb{N},\tag{1.3.7}$$

где $M:=\sup\limits_n\|f_n\|_X<\infty$. Далее, в силу непрерывности и положительности веса v на G имеем, что $\min\limits_{z\in K}v(z)=:m>0$. По условию оператор $T:H(G)\to H(G)$ непрерывен и $f_n\to 0$ в $H(G)$ при $n\to\infty$. Следовательно, $Tf_n\to 0$ в $H(G)$, в частности $Tf_n(0)\to 0$. В силу непрерывности оператора дифференцирования $D:H(G)\to H(G)$, композиция $D\circ T$ непрерывно действует из $H(G)$ в $H(G)$. В силу вышесказанного существует такое $N\in\mathbb{N}$, что $|Tf_n(0)|\le\varepsilon$, $\forall n\ge N$, и

$$\max_{z\in K}|(Tf_n(z))'|\le\varepsilon\cdot m,\forall n\ge N.$$

Следовательно,

$$|Tf_n(0)|\le\varepsilon \text{ и } \sup_{z\in K}\frac{|(Tf_n(z))'|}{v(z)}\le\varepsilon,\forall n\ge N.\tag{1.3.8}$$

Объединив неравенство (1.3.8) с неравенством (1.3.7), для всех $n\ge N$ имеем

$$\|Tf_n\|_{B_v}=\sup_{z\in G}\frac{|(Tf_n)'(z)|}{v(z)}+|Tf_n(0)|=$$

$$\max\left\{\sup_{z\in K}\frac{|(Tf_n)'(z)|}{v(z)},\sup_{z\in G\setminus K}\frac{|(Tf_n)'(z)|}{v(z)}\right\}+|Tf(0)|\le(M+2)\varepsilon.$$

Значит, $Tf_n\to 0$ в $B_v(G)$ при $n\to\infty$ и по лемме 1.3.1 оператор $T:X\to B_v(G)$ компактен.

Необходимость. Пусть $T:X\to B_{v,0}(G)$ компактен. Справедливость условия а) следует из того факта, что всякий компактный оператор является ограниченным, и теоремы 1.2.3. Докажем теперь условие б).

Предположим, рассуждая от противного, что условие (1.3.5) не выполнено. Тогда существует последовательность $\{z_n\}\subset G$ такая, что $z_n\to\partial G$ при $n\to\infty$ и $\exists c>0:\ \frac{\|\delta'_{z_n}\circ T\|^*}{v(z_n)}\ge c>0$. Из определения нормы функционалов $\delta'_{z_n}\circ T$ и последнего неравенства следует, что существует такая последовательность $\{f_n\}\subset B_X$, что

$$\frac{|(Tf_n)'(z_n)|}{v(z_n)}\ge\frac{c}{2}.$$

Так как единичный шар B_X компактен в топологии τ_{uc} равномерной сходимости на компактах G, то имеется такая функция $f\in B_X$ и подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$, что $f_{n_j}\to f$ в $H(G)$. Так как, $T:X\to B_{v,0}(G)$ компактен, то по лемме 1.3.1 $\|T(f_n-f)\|_{B_v}\to 0$, то есть

$$\sup_{z\in G}\frac{|(T(f_n-f))'(z)|}{v(z)}+|T(f_n-f)(0)|\to 0\Rightarrow\frac{|(T(f_n-f))'(z_n)|}{v(z_n)}\to 0.$$

Тогда для достаточно больших n

$$\frac{|(Tf)'(z_n)|}{v(z_n)} \geq \frac{|(Tf_n)'(z_n)|}{v(z_n)} - \frac{|(T(f_n - f))'(z_n)|}{v(z_n)} =$$

$$\frac{|(Tf_n)'(z_n)|}{v(z_n)} - \frac{|(Tf_n - Tf)'(z_n)|}{v(z_n)} = \frac{|(Tf_n)'(z_n)|}{v(z_n)} - \frac{|(Tf_n)'(z_n) - (Tf)'(z_n)|}{v(z_n)} \geq \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{4} > 0.$$

С другой стороны, $T : X \to B_{v,0}(G)$ и, значит, $Tf \in B_{v,0}(G)$. Следовательно, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(Tf(z_n))'|}{v(z_n)} = 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, условие (1.3.2) выполнено. □

Замечание 1.3.5. Теорема 1.3.4 обобщает теорему $3.4'$ из [64] на случай квазибанаховых пространств вместо банаховых и произвольной области G вместо круга.

1.4 Непрерывность операторов весовой композиции

В настоящем разделе установленные ранее абстрактные критерии применяются к оператору весовой композиции и его частным случаям (оператору умножения, его композиции с оператором дифференцирования и оператору обычной композиции). Такие операторы интенсивно изучаются для пространств различной природы (непрерывных, дифференцируемых и суммируемых функций). Что касается весовых пространств голоморфных функций, то операторы, которым посвящён настоящий раздел, в основном исследовались в конкретных шкалах пространств функций, голоморфных в единичном круге или на плоскости (см. [38, 54, 56]) и библиографию в этих работах). Ниже будут представлены новые результаты в данном направлении для квазибнаховых пространств и областей общего вида. При этом, полученные результаты содержат ранее известные в качестве частных случаев.

Обозначим через $S(G)$ семейство тех функций $\varphi \in H(G)$, для которых $\varphi(G) \subset G$. По фиксированным функциям $g \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$ определим оператор весовой композиции $W_{g,\varphi}$

$$(W_{g,\varphi}f)(z) = g(z) \cdot f(\varphi(z)),\ f \in H(G),\ z \in G.$$

Этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. Положив $T = W_{g,\varphi}$, имеем тогда $(\delta_z \circ T)f = g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)} f$ и, значит, при каждом $z \in G$

$$\|\delta_z \circ T\|^* = \sup_{\|f\|_X \leq 1} |g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)} f| = |g(z)| \cdot \sup_{\|f\|_X \leq 1} |\delta_{\varphi(z)} f| = |g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*.$$

Из теоремы 1.2.1 и приведенной выше цепочки равенств, вытекает следующий результат

Следствие 1.4.1. *Пусть v — вес на G, $g \in H(G)$, $\varphi \in S(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $W_{g,\varphi} : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|W_{g,\varphi}\|_{H_v} = \sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Заметим, что если $g(z) \equiv 1$ в G, то оператор $W_{g,\varphi}$ является оператором обычной композиции и обозначается через C_φ; таким образом, $C_\varphi : f \mapsto f(\varphi(z))$. Если же $g \in H(G)$ фиксирована, а $\varphi(z) \equiv z$ в G, то $W_{g,\varphi}$ превращается в оператор умножения на $g(z)$ и обозначается через M_g, то есть $M_g : f \mapsto g \cdot f$. Кроме того, представляет интерес его композиция с оператором дифференцирования $D : f \mapsto f'$. Она определяет оператор $(M_g D f)(z) = g(z) \cdot f'(z)$, для которого $\|\delta_z \circ M_g D\|^* = |g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*$. Применяя следствие 1.4.1 к этим частным случаям, получаем следующие критерии ограниченности.

Следствие 1.4.2. *Пусть v — вес на G, $\varphi \in S(G)$. Оператор композиции $C_\varphi : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $C_\varphi : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|C_\varphi\|_{H_v} = \sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Следствие 1.4.2 обобщает [37, предложение 3.1] на весовые пространства общего вида.

Следствие 1.4.3. *Пусть v и g — те же, что и в следствии 1.4.1.*

(i) Оператор умножения $M_g : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.4.1}$$

В случае, когда $M_g : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|M_g\|_{H_v} = \sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)}.$$

(ii) Оператор $(M_gD)(f) : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.4.2}$$

В случае, когда $M_gD : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|M_gD\|_{H_v} = \sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{v(z)}.$$

Далее исследуем вопрос о непрерывности оператора весовой композиции на пространстве Блоха $B_v(G)$. Для этого применим теорему 1.2.3 к указанному оператору. Отметим, что при каждом $z \in G$ для $T = W_{g,\varphi}$ справедливо следующее равенство

$$\|\delta_z' \circ T\|^* = \sup_{\|f\|_X \le 1} |g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}' f| = |g(z)| \cdot \sup_{\|f\|_X \le 1} |\delta_{\varphi(z)}' f| = |g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}'\|^*.$$

Следствие 1.4.4. *Пусть v — вес на G, $\varphi \in S(G)$, $g \in H(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to B_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}'\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В качестве частного случая следствия 1.4.4 сформулируем критерий непрерывности оператора обычной композиции C_φ.

Следствие 1.4.5. *Пусть v — вес на G, $\varphi \in S(G)$. Оператор композиции $C_\varphi : X \to B_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}'\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Отметим, что результаты, аналогичные следствиям 1.4.4 и 1.4.5, ранее формулировались для весовых композиционных операторов, для конкретных пространств X (напр., Блоха [52, теорема 2.2]).

Теперь сформулируем критерии непрерывности весовых композиционных операторов на проективном (индуктивном) пределе последовательности $(X_n)_{n=1}^\infty$ квазибанаховых пространств, введённом в разделе 1.2.2. Применяя теоремы 1.2.5 и 1.2.8 к оператору весовой композиции и его частным случаям, получим требуемые результаты. Как и прежде, $X = \bigcap_n X_n$ и X плотно в каждом X_n, $\mathcal{X} = \bigcup_n X_n$, а $HV(G)$ и $\mathcal{V}H(G)$ те же, что и в разделе 1.2.2.

Следствие 1.4.6. *Пусть $g \in H(G)$, $\varphi \in S(G)$.*

(i) Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to HV(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:
$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|_m^*}{v_n(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : \mathcal{X} \to \mathcal{V}H(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:
$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|_n^*}{v_m(z)} < \infty.$$

Из следствия 1.4.6 непосредственным образом вытекают следующие результаты

Следствие 1.4.7. *Пусть $g \in H(G)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор умножения $M_g : X \to HV(G)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:
$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|_m^*}{v_n(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $(M_gD)(f) : X \to HV(G)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:
$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|_m^*}{v_n(z)} < \infty.$$

Следствие 1.4.8. *Пусть $g \in H(G)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор умножения $M_g : \mathcal{X} \to \mathcal{V}H(G)$ корректно определен и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:
$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|_n^*}{v_m(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $(M_gD)(f) : \mathcal{X} \to \mathcal{V}H(G)$ корректно определен и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:
$$\sup_{z\in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|_n^*}{v_m(z)} < \infty.$$

Следствие 1.4.9. *Пусть $g \in H(G)$, $\varphi \in S(G)$.*

(i) Оператор композиции $C_\varphi : X \to HV(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|_m^*}{v_n(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор весовой композиции $C_\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{V}H(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|_n^*}{v_m(z)} < \infty.$$

Следствие 1.4.9 обобщает результаты работ [29, предложение 4.1] и [30, предложение 12].

1.4.1 Компактность

В настоящем разделе приводятся результаты, касающиеся компактности композиционных операторов на квазибанаховых пространствах. Наша цель — представить некоторые новые критерии, позволяющие в изучавшихся ранее случаях получать результаты более общего характера. При этом, всюду ниже, будем предполагать, что X — квазибанахово пространство с квазинормой $\|\cdot\|_X$, непрерывно вложенное в $H(G)$ и содержащее полиномы, такое что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости τ_{uc} на компактах.

Рассмотрим реализацию теоремы 1.3.2 для весовых композиционных операторов. Напомним, что в случае, когда $T = W_{g,\varphi}$ выполняется следующее равенство $(\delta_z \circ T)f = g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)} f$. Следовательно, справедлив такой результат

Следствие 1.4.10. *Пусть v — произвольный вес на G, $\varphi \in S(G)$, $g \in H(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Следствие 1.4.10 обобщает следствие 3.1 (a-i) из [64] на произвольные веса v и квазибанаховы пространства.

Частными случаями следствия 1.4.10 являются следующие результаты

Следствие 1.4.11. *Пусть v — произвольный вес на G, $\varphi \in S(G)$. Оператор композиции $C_\varphi : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Следствие 1.4.11 обобщает [37, следствие 4.3] на весовые пространства общего вида.

Следствие 1.4.12. *Пусть v и g — те же, что и в следствии 1.4.10.*

(i) Оператор умножения $M_g : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0. \tag{1.4.3}$$

(ii) Оператор $M_g D : X \to H_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_z\|^*}{v(z)} = 0. \tag{1.4.4}$$

Выделим важный случай $G = \mathbb{C}$, который будет систематически исследоваться в дальнейшем.

Предложение 1.4.13. *Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$. Верны следующие утверждения:*

(i) Оператор умножения $M_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0. \tag{1.4.5}$$

(ii) Оператор $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_z\|^*}{v(z)} = 0. \tag{1.4.6}$$

Теперь, применяя теорему 1.3.4 к классическому оператору весовой композиции, установим критерий компактности указанного оператора на пространстве Блоха $B_v(G)$. Напомним, что в случае, когда $T = W_{g,\varphi}$ выполняется равенство $(\delta'_z \circ T)f = g(z) \cdot \delta'_{\varphi(z)} f$.

Следствие 1.4.14. *Пусть v — произвольный вес на G, $\varphi \in S(G)$, $g \in H(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \to B_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

В частности, для $G = \mathbb{C}$ оператор $W_{g,\varphi} : X \to B_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Из следствия 1.4.14 непосредственным образом вытекает такой результат

Следствие 1.4.15. *Пусть v — произвольный вес на G, $\varphi \in S(G)$. Оператор композиции C_φ : $X \to B_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{\|\delta'_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

В частности, для $G = \mathbb{C}$ оператор $C_\varphi : X \to B_{v,0}(G)$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\|\delta'_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} = 0.$$

1.5 Непрерывность и компактность оператора Вольтерра и союзного с ним

Пусть теперь G — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как и ранее, без ограничения общности и с целью упрощения изложения считаем, что область G содержит начало координат. Для фиксированной функции $g \in H(G)$ оператор Вольтерра определяется по правилу

$$T_g : f \mapsto \int_0^z f(w)g'(w)dw,\ z \in G,$$

а оператор союзный с ним следующим образом

$$S_g : f \mapsto \int_0^z f'(w)g(w)dw,\ z \in G,$$

где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути, соединяющему начало с точкой z и лежащему в G. Заметим, что если $h(z) = (T_g f)(z)$ или $h(z) = (S_g f)(z)$, то $h(0) = 0$. При $g(z) \equiv z$ в G оператор T_g совпадает с оператором интегрирования $I : f \mapsto \int_0^z f(w)dw$.

Основной целью настоящего раздела является получение критериев ограниченности и компактности указанных интегральных операторов, действующих из квазибанахова пространства X в $H_v(G)$, $H_{v,0}(G)$ и $B_v(G)$, $B_{v,0}(G)$ в терминах норм дельта-функций. При этом для получения указанных результатов мы будем рассматривать интегральный оператор Вольтерра и его союзный как композицию операторов $I \circ M_g$ и $I \circ M_g D$, соответственно. Для реализации данного подхода требуется знать некоторые дополнительные свойства пространств, в которые действуют операторы, и весов, порождающих эти пространства.

Как известно (см., напр., [3, 24]), точное описание свойств пространств $H_v(G)$ и $H_{v,0}(G)$ и операторов в них в терминах исходных весов в общем случае получить невозможно. Для этой цели нужно использовать ассоциированные веса, систематическое исследование и применение которых было инициировано в [24], хотя эпизодически они встречаются и в более ранних работах. Однако даже в простейших ситуациях, ассоциированные веса в областях, отличных от $\mathbb{D}$ и $\mathbb{C}$, крайне редко применяются для решения конкретных задач. Дело, видимо, заключается в том, что до сих пор нет внутреннего описания таких весов в известных терминах (гладкость, какого-либо рода выпуклость и т. п.). Хорошо изучен лишь случай радиальных весов в единичном круге $\mathbb{D}$ и комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Остановимся на этом подробнее.

Напомним (см. [3]), что радиальный вес на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ — это положительная функция v на G, для которой $v(z) = v(|z|), z \in G$. При этом функция $v(r)$ непрерывна и возрастает на $(0, a)$ и $\ln r = o(\ln v(r))$ при $r \to \infty$, если $G = \mathbb{C}$, и $\lim\limits_{r \to 1^-} v(r) = \infty$, если $G = \mathbb{D}$. Здесь и всюду ниже $a = +\infty$ для $G = \mathbb{C}$ и $a = 1$ для $G = \mathbb{D}$.

Дополнительные условия $v(r) \to \infty$ при $r \to 1^-$ для $\mathbb{D}$ и $r^n = o(v(r))$ при $r \to \infty$ для $\mathbb{C}$ вызваны тем, что они обеспечивают то, что $H_v(\mathbb{D})$ отлично от хорошо изученного пространства $H^\infty(\mathbb{D})$ всех ограниченных голоморфных в $\mathbb{D}$ функций и что $H_v(\mathbb{C})$ содержат все полиномы.

Как известно (см. [17, 24]), при рассмотрении пространств голоморфных в единичном круге или плоскости функций, определяемых радиальными весами, всегда можно ограничиться log-выпуклыми весовыми функциями, то есть такими радиальными весами v, для которых функция $\ln(v(e^x))$ выпукла на $(-\infty, a)$. При этом, из свойств выпуклых функций следует, что log-выпуклые веса дифференцируемы на $(0, a)$ за исключением не более, чем счетного числа точек, и всюду на $(0, a)$ имеют левую и правую производные. В дальнейшем обозначение $v'(r)$ будет использоваться для обозначения правой производной функции v. Отметим еще следующий момент, который часто облегчает технические выкладки.

Замечание 1.5.1. Пусть r_0 — произвольная фиксированная точка из $(0, a)$. Очевидно, что радиальные веса $v(r)$ и

$$v_0(r) := \begin{cases} v(r_0),\ 0 \le r \le r_0 \\ v(r),\ r_0 < r < a \end{cases}$$

на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ задают одно и то же весовое пространство $H_v(G)$, а нормы $\|\cdot\|_{H_v}$ и $\|\cdot\|_{H_{v_0}}$ эквивалентны, т.е. $\frac{1}{C}\|\cdot\|_{H_v} \le \|\cdot\|_{H_{v_0}} \le C\|\cdot\|_{H_v}$ при некотором $C > 1$.

Из сделанного замечания следует, что мы можем проверять log-выпуклость веса v не на всем промежутке $[0, a)$, а лишь на его части $[r_0, a)$, где r_0 — произвольное положительное число.

Для получения критериев непрерывности указанных интегральных операторов в терминах дельта-функции и её производной нам потребуется несколько результатов из работы [17], нужную нам часть формулировок которых мы приведем для удобства читателя.

Теорема 1.5.2. *([17, Lemma 2.6 и Theorem 2.8]). Для log-выпуклого веса v на $\mathbb{D}$ и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$ эквивалентны следующие условия:*

(i) Оператор дифференцирования $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) $\limsup\limits_{r\to 1^-} \dfrac{(1-r)\cdot v'(r)}{v(r)} < \infty.$

(iii) $v(r) = O(v(r^2))$ *при* $r \to 1^-$.

Теорема 1.5.3. *([17, Lemma 3.15 и Theorem 3.16]). Для log-выпуклого веса v на $\mathbb{D}$ и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$ эквивалентны следующие условия:*

(i) Оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) $\liminf\limits_{r\to 1^-} \dfrac{(1-r)\cdot v'(r)}{v(r)} > 0.$

(iii) Существует $\gamma > 1$, такое что $\limsup\limits_{r\to 1^-} \dfrac{v(r^\gamma)}{v(r)} < 1.$

Следствие 1.5.4. *([17, Corollary 3.18]). Пусть v — log-выпуклый радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$. Оператор $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ — эпиморфизм тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:*

$$0 < \liminf_{r\to 1^-} \frac{(1-r)\cdot v'(r)}{v(r)} \le \limsup_{r\to 1^-} \frac{(1-r)\cdot v'(r)}{v(r)} < \infty. \tag{1.5.1}$$

Теперь мы готовы доказать результат, нужный нам для дальнейшего исследования и, одновременно, являющийся уточнением приведенного выше следствия 1.5.4. Образуем весовое банахово пространство

$$H_v^0(\mathbb{D}) := \{f \in H_v(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}.$$

Предложение 1.5.5. *Пусть v и w — те же, что в следствии 1.5.4. Пусть выполнено условие (1.5.1). Тогда оператор дифференцирования $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является изоморфизмом.*

Доказательство. 1) Так как $H_v^0(\mathbb{D})$ является подпространством $H_v(\mathbb{D})$, то из теоремы 1.5.2 следует, что оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен.

2) Теперь проверим инъективность $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$. Пусть $Df \equiv 0$, то есть, $f'(z) \equiv 0$ в $\mathbb{D}$, где $f \in H_v^0(\mathbb{D})$. Тогда $f(z) \equiv c$ — постоянная в $\mathbb{D}$. Так как $f(0) = 0$, то $c = 0$, то есть $f \equiv 0$.

Таким образом, оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ инъективен.

3) Сюръективность оператора дифференцирования вытекает из следствия 1.5.4. В самом деле, по этому следствию для любой функции $g \in H_w(\mathbb{D})$ найдется функция $f \in H_v(\mathbb{D})$, для которой $Df = g$. Но тогда $f - f(0)$ принадлежит $H_v^0(\mathbb{D})$ и при этом $D(f - f(0)) = Df = g$.

4) По теореме Банаха об обратном операторе, из 1)–3) следует, что D — изоморфизм между $H_v^0(\mathbb{D})$ и $H_w(\mathbb{D})$. Следовательно, оператор, обратный к оператору дифференцирования, непрерывен по теореме Банаха. Заметим, что обратным в данном случае является оператор интегрирования и его ограниченность можно также извлечь из теоремы 1.5.3. □

Всюду ниже будем предполагать, что X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H_v^0(\mathbb{D})$.

Из предложения 1.5.5 и приведенных выше рассуждений вытекает такой результат

Лемма 1.5.6. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1), $w(r) = \dfrac{v(r)}{1-r}$. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда оператор умножения $M_{g'} : X \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда произведение операторов умножения M_g и дифференцирования D, именно, оператор $(M_g D)(f) : X \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен.

Доказательство. (*i*): *Необходимость.* Пусть $T_g : X \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен. По предложению 1.5.5 оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен, следовательно, $D \circ T_g : X \to H_w(\mathbb{D})$ также ограничен. При этом

$$(D \circ T_g f)(z) = \left(\int_0^z f(w) g'(w) dw \right)' = f(z) \cdot g'(z) = (M_{g'} f)(z).$$

Достаточность. Пусть $M_{g'} : X \to H_w$ ограничен. По теореме 1.5.3 $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен, следовательно, и $I \circ M_{g'} : X \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен. При этом

$$(I \circ M_{g'} f)(z) = \int_0^z f(w)g'(w)dw = (T_g f)(z).$$

(ii): *Необходимость.* Пусть $S_g : X \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен. Оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен по теореме 1.5.2. Следовательно, $(M_g D)(f) = (D \circ S_g)(f) : X \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен.

Достаточность. Пусть теперь $(M_g D)(f) : X \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен. Так как $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен, то и $S_g f = (I \circ M_g D)(f) : X \to H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен. □

Следствие 1.4.3 и лемма 1.5.6 влекут такой результат

Предложение 1.5.7. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g'(z)|\cdot\|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.5.2}$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g(z)|\cdot\|\delta_z'\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.5.3}$$

Доказательство. (i): По лемме 1.5.6 оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен в том и только в том случае, когда ограничен оператор умножения $M_{g'} : X \to H_w(\mathbb{D})$, где $w(z) = \dfrac{v(z)}{1-|z|}$. В свою очередь, по предложению 1.4.3 (i) последний оператор ограничен тогда и только тогда, когда условие (1.4.1) выполнено для g' вместо g и w вместо v, то есть, тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.5.2).

(ii): По лемме 1.5.6 оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен в том и только в том случае, когда ограничен оператор $(M_g D)(f) : X \to H_w(\mathbb{D})$, где $w(z) = \dfrac{v(z)}{1-|z|}$. В свою очередь, по предложению 1.4.3 (ii) последний оператор ограничен тогда и только тогда, когда условие (1.4.2) выполнено для w вместо v, то есть, тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.5.3). □

Приведём примеры нескольких стандартных log-выпуклых радиальных весовых функций удовлетворяющих условию (1.5.1). Проверка их log-выпуклости и выполнения условия (1.5.1) содержит лишь элементарные вычисления, которые мы опускаем.

Пример 1.5.8. *Следующие веса являются log-выпуклыми радиальными весами на $\mathbb{D}$, для которых выполнено условие (1.5.1):*

$$v(z) = (1 - |z|^2)^{-\beta},\ \beta > 0;$$
$$v(z) = \ln^p \frac{1}{1 - |z|},\ p \geq 1;$$
$$v(z) = \Big(\frac{1}{1 - |z|}\Big)^{\beta} \cdot \ln^p \Big(\frac{1}{1 - |z|}\Big),\ \beta > 0,\ p \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что функция $v(z) = e^{\frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}}}$, $\alpha > 0$ является log-выпуклой на $\mathbb{D}$, для которой условие (1.5.1) не выполнено.

Из предложения 1.5.7 и примера 1.5.8 непосредственно следует

Предложение 1.5.9. *Пусть $v(r) = (\frac{1}{1-r})^{\beta} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{\beta+1} \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{\ln^p(1/(1 - |z|))} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{\beta+1} \cdot |g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{\ln^p(1/(1 - |z|))} < \infty.$$

Отметим, что утверждение (i) предложения 1.5.9 содержит в качестве частного случая результат п. (iii) следствия 2.1 из [64].

Теперь рассмотрим вопрос о получении критериев непрерывности интегральных операторов в пространствах функций, голоморфных во всей комплексной плоскости. Отметим, что ранее данный случай в предлагаемой постановке не рассматривался. Как и выше, сначала приведём нужные для наших исследований, результаты из [17].

Теорема 1.5.10. *([17, Theorem 2.10]) Пусть v — log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ непрерывен.

(ii)

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

(iii) $\ln v(r) = O(r)$, *при* $r \to \infty$.

Теорема 1.5.11. *([17, Theorem 3.8]) Пусть v — log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i)
$$\liminf_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} > 0.$$

(ii)
$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{v(r)} \int_0^r v(t)dt < \infty.$$

(iii) интегральный оператор $I : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ *непрерывен.*

Следствие 1.5.12. *([17, Corollary 3.10]) Пусть v — log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ *— эпиморфизм.*

(ii)
$$0 < \liminf_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

(iii) $\exists A, C \ge 1$, *такие что* $\frac{1}{A} \cdot e^{\frac{r}{C}} < v(r) < A \cdot e^{r \cdot C}, \forall r > 0$.

Теперь мы готовы сформулировать нужный результат.

Теорема 1.5.13. *Пусть v — log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Оператор дифференцирования $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:*

$$0 < \liminf_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty. \tag{1.5.4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм. Тогда D — непрерывный оператор из $H_v^0(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$. Рассмотрим оператор $S : H_v(\mathbb{C}) \to H_v^0(\mathbb{C}) : f(z) \mapsto f(z) - f(0)$ и покажем, что он ограничен.

В силу радиальности веса v и его возрастания

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z) - f(0)|}{v(z)} \le \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{v(z)} + \frac{|f(0)|}{v(0)} \le \|f\|_{H_v} + \|f\|_{H_v} = 2 \cdot \|f\|_{H_v}.$$

Таким образом, оператор S действует непрерывно из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v^0(\mathbb{C})$.

Заметим, что $Df = D(f(z) - f(0))$ для любой функции $f \in H(\mathbb{C})$. Поэтому $Df = (D \circ S)f$, $\forall f \in H(\mathbb{C})$. Так как S действует непрерывно из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v^0(\mathbb{C})$, а D — из $H_v^0(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$, то отсюда следует, что D, как композиция, действует непрерывно из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$. Тогда по теореме 1.5.10 выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

Так как по условию оператор дифференцирования D — изоморфизм из $H_v^0(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$, то обратный к нему, оператор интегрирования $I : H_v(\mathbb{C}) \to H_v^0(\mathbb{C})$ также ограничен. Значит, по теореме 1.5.11 справедливо неравенство:

$$0 < \liminf_{r\to\infty} \frac{v'(r)}{v(r)}.$$

Таким образом, условие (1.5.4) выполнено.

Достаточность. Пусть выполнено (1.5.4). Из отмеченного выше равенства $Df = D(f(z) - f(0))$ следует, что $D(H_v^0(\mathbb{C})) = D(H_v(\mathbb{C}))$. Отсюда, учитывая, что по следствию 1.5.12 оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ — эпиморфизм, то есть $D(H_v(\mathbb{C})) = H_v(\mathbb{C})$, заключаем, что и $D(H_v^0(\mathbb{C})) = H_v(\mathbb{C})$, то есть оператор $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ сюръективен.

Теперь покажем, что $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ — инъективный оператор. Пусть $Df \equiv 0$, то есть, $f'(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, где $f \in H_v^0(\mathbb{C})$. Тогда $f(z) \equiv c$ — постоянная в $\mathbb{C}$. Так как $f(0) = 0$, то $c = 0$, то есть $f \equiv 0$. Таким образом, оператор $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ инъективен.

Окончательно получаем, что оператор дифференцирования $D : H_v^0(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм. □

Из теоремы 1.5.13 следует такой результат, его доказательство аналогично доказательству предложения 1.5.7, поэтому повторять его не будем. При этом будем предполагать, что X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H_v^0(\mathbb{C})$.

Предложение 1.5.14. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{C}$, для которого выполнено условие (1.5.4). Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.5.5}$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1.5.6}$$

В качестве конкретного пространства X рассмотрим пространства $H_{\alpha,\beta}(\mathbb{C})$, задаваемые log-выпуклыми радиальными весами вида $v(r) = r^{\alpha} e^{\beta r}$, $r \in [1, \infty), \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$, удовлетворяющими условию (1.5.4). При $r \in [0, 1)$ полагаем $v(r) = v(1) = e^{\beta}$ (см. выше замечание 1.5.1). Отметим, что пространства из этой шкалы и операторы в них изучались в различных направлениях (см., напр., [22] и библиографию в этой статье).

Следствие 1.5.15. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{\alpha,\beta}(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{|z|\geq 1} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{|z|^{\alpha} \cdot e^{\beta|z|}} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{\alpha,\beta}(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{|z|\geq 1} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{|z|^{\alpha} \cdot e^{\beta|z|}} < \infty.$$

Теперь рассмотрим вопрос об ограниченности интегральных операторов, действующих в пространство Блоха $B_v(\mathbb{D})$. Как хорошо известно, $D : f \mapsto f'$ — изоморфизм $B_v^0(\mathbb{D}) := \{f \in B_v(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$ на $H_v(\mathbb{D})$. При этом, обратный к нему оператор — это $I : f \mapsto \int_0^z f(w)dw$, $I : H_v(\mathbb{D}) \to B_v^0(\mathbb{D})$. Указанный факт позволяет сформулировать следующий результат

Лемма 1.5.16. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда оператор умножения $M_{g'} : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) Оператор $S_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда оператор $(M_g D)(f) : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен.

Доказательство леммы 1.5.16 аналогично доказательству леммы 1.5.6, поэтому повторять его не будем.

Из леммы 1.5.16 и следствия 1.4.3 непосредственным образом вытекает

Предложение 1.5.17. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Отметим, что пункт (i) предложения 1.5.17 — обобщение следствия 2.1 (ii) Н. Зорбоска [64].

Из примера 1.5.8 и леммы 1.5.17 вытекает такой результат.

Предложение 1.5.18. *Пусть $v(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^\beta \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^\beta \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{\ln^p(1/(1-|z|))} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^\beta \cdot |g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{\ln^p(1/(1-|z|))} < \infty.$$

В случае, когда дифференциальный оператор действует между проективными пределами последовательностей (квази)банаховых пространств нам не удалось установить критерии его изоморфности, подобные следствию 1.5.4 и теореме 1.5.13. В силу этого для интегрального оператора Вольтерра и его союзного, в случае их действия между проективными пределами последовательностей квазибанаховых пространств, нами могут быть сформулированы лишь отдельно достаточные и необходимые условия ограниченности. Мы на этом останавливаться не будем, а рассмотрим случай, когда указанные интегральные операторы действуют из проективного предела последовательностей (квази)банаховых пространств в некоторое банахово пространство голоморфных функций. В этой ситуации удаётся установить критерий, приведённый ниже.

Как известно (см., напр., [12, предложение 2]) линейный оператор $T : \bigcap_n X_n \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что оператор $T : X_n \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен. Тогда из предложения 1.5.7 непосредственно следует

Следствие 1.5.19. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1), *$X = \bigcap\limits_n X_n$ и X плотно в X_n для каждого $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g'(z)|\cdot\|\delta_z\|_n^*}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g(z)|\cdot\|\delta'_z\|_n^*}{v(z)} < \infty.$$

Аналогично проективному случаю, вопрос о получении критерия изоморфности дифференциального оператора, действующего между индуктивными пределами, на данный момент остаётся открытым. В связи с этим мы не можем сформулировать критерии непрерывности интегральных операторов, действующих между индуктивными пределами. Однако, как и выше, для случая, когда интегральные операторы действуют из индуктивного предела последовательности банаховых пространств в некоторое банахово пространство голоморфных функций имеет место критерий непрерывности.

Как известно (см., напр., [1] стр. 206), линейный оператор $T : \mathcal{X} \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ оператор $T : X_n \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен. Тогда на основании выше сказанного и предложения 1.5.7 получаем

Следствие 1.5.20. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : \mathcal{X} \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g'(z)|\cdot\|\delta_z\|_n^*}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор $S_g : \mathcal{X} \to H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\cdot|g(z)|\cdot\|\delta'_z\|_n^*}{v(z)} < \infty.$$

1.5.1 Компактность

Настоящий раздел посвящён получению критериев компактности интегрального оператора Вольтерра и его союзного в терминах норм дельта-функции и её производной. Отметим, что используемый ниже подход отличен от методов [64]. Он основан на сведении задачи о компактности указанных операторов к установлению компактности операторов умножения и композиции операторов дифференцирования и умножения. Кроме того, мы, по сравнению с [64], исследуем не только случай круга $\mathbb{D}$, но и всей плоскости.

Приведем вспомогательный результат о компактности указанных интегральных операторов. Всюду ниже, будем предполагать, что X — квазибанахово пространство с квазинормой $\|\cdot\|_X$, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, содержащее полиномы, такое что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости τ_{uc} на компактах $\mathbb{D}$.

Лемма 1.5.21. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1), $w(r) = \dfrac{v(r)}{1-r}$. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда оператор умножения $M_{g'} : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ компактен.

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда оператор $M_g D : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ компактен.

Доказательство. (*i*): *Необходимость.* Пусть $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Так как по предложению 1.5.5 оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ ограничен, то $D \circ T_g : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ компактен. При этом

$$(D \circ T_g f)(z) = \left(\int_0^z f(w)g'(w)dw\right)' = f(z) \cdot g'(z) = (M_{g'} f)(z).$$

Достаточность. Пусть $M_{g'} : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ компактен. Так как интегральный оператор $I : H_{w,0}(\mathbb{D}) \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ ограничен по теореме 1.5.3, то $I \circ M_{g'} : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. При этом

$$(I \circ M_{g'} f)(z) = \int_0^z f(w)g'(w)dw = (T_g f)(z).$$

(*ii*): *Необходимость.* Пусть $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ ограничен. При этом

$$(D \circ S_g) f(z) = \left(\int_0^z f'(w)g(w)dw\right)' = f'(z) \cdot g(z) = (M_g D)(f(z))$$

и, следовательно, $M_g D : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ компактен.

Достаточность. Пусть теперь $M_g D : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$ компактен. Так как $I : H_{w,0}(\mathbb{D}) \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ ограничен, то $I \circ M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. При этом

$$(I \circ M_g D)(z) = \int_0^z f'(w)g(w)dw = (S_g f)(z)$$

и, значит, $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен.

Лемма доказана. □

Таким образом, из следствия 1.4.12 и леммы 1.5.21 вытекает следующий критерий компактности оператора Вольтерра и его союзного на произвольном (квази)банаховом пространстве.

Предложение 1.5.22. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1).

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{(1-|z|) \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0. \tag{1.5.7}$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{(1-|z|) \cdot |g(z)| \cdot \|\delta_z'\|^*}{v(z)} = 0. \tag{1.5.8}$$

Доказательство. (i): По лемме 1.5.21 оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен в том и только в том случае, когда компактен оператор умножения $M_{g'} : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$, где $w(z) = \dfrac{v(z)}{1-|z|}$. В свою очередь, по следствию 1.4.12 последний оператор компактен тогда и только тогда, когда условие (1.4.3) выполнено для g' вместо g и w вместо v, то есть, тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.5.7).

(ii): По лемме 1.5.21 оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен в том и только в том случае, когда компактен оператор $M_g D : X \to H_{w,0}(\mathbb{D})$, где $w(z) = \dfrac{v(z)}{1-|z|}$. В свою очередь, по следствию 1.4.10 последний оператор компактен тогда и только тогда, когда условие (1.4.4) выполнено для w вместо v, то есть, тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.5.8). □

Далее, представим аналог предложения 1.5.22 для случая пространств целых функций. Всюду ниже в этом разделе будем считать, что X — квазибанахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{C})$, содержащее полиномы, такое что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости τ_{uc} на компактах.

Предложение 1.5.23. *Пусть v — log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$, удовлетворяющий условию* (1.5.4). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда оператор умножения $M_{g'} : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда оператор $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.

Доказательство. (i) : *Необходимость.* Пусть $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен. Так как по теореме 1.5.13 оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{C}) \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ ограничен, то $M_{g'} = D \circ T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.

Достаточность. Пусть $M_{g'} : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен. Так как $I : H_{v,0}(\mathbb{C}) \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ ограничен по теореме 1.5.13, то и $T_g = I \circ M_{g'} : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.

(ii) : *Необходимость.* Пусть $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен. Так как по теореме 1.5.13 оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{C}) \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ ограничен, то $M_g D = D \circ S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.

Достаточность. Пусть $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен. Так как $I : H_{v,0}(\mathbb{C}) \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ ограничен по теореме 1.5.13, то и $S_g = I \circ M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен. Предложение доказано. $\square$

Следующий результат является прямым следствием предложений 1.4.13 и 1.5.23

Предложение 1.5.24. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{C}$, удовлетворяющий условию* (1.5.4). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Если в предложении 1.5.24 положить $v(r) = r^\alpha e^{\beta r}$, $r \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$, то имеет место такой результат

Предложение 1.5.25. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_{\alpha,\beta,0}(\mathbb{C})$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{|z|^\alpha \cdot e^{\beta|z|}} = 0.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to H_{\alpha,\beta,0}(\mathbb{C})$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{|z|^\alpha \cdot e^{\beta|z|}} = 0.$$

Теперь исследуем вопрос о компактности интегральных операторов на пространствах типа Блоха. Прежде, чем сформулировать критерии компактности оператора Вольтерра и его союзного в терминах норм дельта-функций, докажем ещё один вспомогательный результат.

Лемма 1.5.26. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор $T_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен тогда и только тогда, когда оператор умножения* $M_{g'} : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен.*

(ii) Оператор $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен тогда и только тогда, когда* $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен.*

Доказательство. (i) : *Необходимость.* Пусть $T_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Тогда $T_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ также компактен. Так как $D : B_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ ограничен, то $D \circ T_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. При этом

$$(D \circ T_g)f(z) = \left(\int_0^z f(w)g'(w)dw\right)' = f(z) \cdot g'(z) = (M_{g'}f)(z).$$

Достаточность. Пусть $M_{g'} : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Так как $I : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ ограничен, то в $I \circ M_{g'} : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. При этом

$$(I \circ M_{g'})f(z) = \int_0^z f(w)g'(w)dw = (T_g f)(z).$$

(ii) : *Необходимость.* Пусть $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Тогда $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ также компактен. Так как $D : B_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ ограничен, то $D \circ S_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Следовательно, $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен.

Достаточность. Пусть теперь $M_g D : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Так как $I : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ ограничен, то и $I \circ M_g D : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. Значит, $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен. □

Из леммы 1.5.26 и следствия 1.4.12 вытекает непосредственно

Теорема 1.5.27. *Пусть v — произвольный вес на $\mathbb{D}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, выполнено условие:

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Теорема 1.5.27 пункт (i) обобщает пункт (b) подпункт (i) следствия 3.1 из [64] на случай произвольного веса и квазибанахова пространства.

Глава 2

Пространства целых функций и нормы дельта-функций в них

Как было установлено в главе 1, непрерывность и компактность линейных операторов, действующих из квазибанаховых пространств X, непрерывно вложенных в $H(G)$, в весовые пространства с равномерными нормами типа $H_v(G)$ и $B_v(G)$, непосредственным образом зависят от норм дельта-функций $\|\delta_z\|^*$ или их производных $\|\delta_z'\|^*$ в сопряжённом пространстве X^*. В связи с этим актуальной задачей является нахождение точных асимптотических оценок этих норм при $z \to \partial G$. Эта задача достаточно полно изучена для случая единичного круга $\mathbb{D}$. Для всех пространств из классических шкал Бергмана, Дирихле, Харди и Дирихле-Харди известны точные формулы для указанных норм при всех $z \in \mathbb{D}$. В то же время для пространств целых функций, когда $G = \mathbb{C}$, аналогичная задача практически не исследована. Нам удалось извлечь из литературы лишь один точный результат для пространства Фока $F_\alpha^{p,2}$. Для $F_\alpha^{p,q}$ при $q \neq 2$ до сих пор не было известно не только точных формул, но хотя бы более или менее точных асимптотических оценок норм дельта-функций. В основном это связано с тем, что при переходе от интегральных оценок, входящих в определение пространств, к равномерным, которые нужны для использования результатов главы 1, приходится существенно увеличивать вес. Приёмы, связанные с увеличением веса, использовались многими авторами в весовых индуктивных и проективных пределах пространств целых функций с достаточными для указанной цели зазорами между весами. Очевидно, что для квазибанаховых пространств, задаваемых одним весом, эти приёмы неприменимы.

В связи с вышеизложенным в настоящей главе основное внимание сосредоточено на выделении подкласса весов в $\mathbb{C}$, для которых можно получить асимптотические оценки норм дельта-функций сверху без существенного увеличения веса.

Сначала для полноты изложения приводятся известные формулы для норм дельта-функций и их производных в пространствах из классических шкал для случая круга $\mathbb{D}$. А вся оставшаяся часть главы посвящена выделению указанного выше подкласса весов и получению соответствующих результатов для классических и обобщённых пространств Фока в $\mathbb{C}$. Отметим, что нам удалось установить лишь оценки норм дельта-функций сверху. На точность этих оценок косвенно указывает тот факт, что для $F_{\alpha}^{p,2}$ они, с точностью до мультипликативной постоянной, совпадают с известными значениями $\|\delta_z\|^*$. Что касается получения оценок снизу, то этот вопрос пока остаётся открытым. Это вызвано прежде всего тем, что для ответа на него требуется уметь строить целые функции со значениями в точках из $\mathbb{C}$, равными значениям в них веса, и имеющими равномерные оценки через тот же вес во всей плоскости. В то же время, все имеющиеся на сегодняшний день результаты, включая тонкие построения Р.С. Юлмухаметова (см., напр., [2, 4, 15]), позволяют строить функции с зазорами между оценками снизу в точках и равномерными оценками сверху во всей плоскости, составляющими не менее $\ln|z|$ при $z \to \infty$.

В соответствии с вышеизложенным, по-видимому, наибольший интерес в данной главе представляет введённое ниже понятие почти гармонических весов. На его основе и удалось установить упомянутые выше оценки $\|\delta_z\|^*$ в обобщённых и классических пространствах Фока.

2.1 Нормы дельта-функций в классических пространствах голоморфных в единичном круге функций

Как было отмечено выше, вопрос о вычислении норм $\|\delta_z\|^*$ и $\|\delta_z'\|^*$ в пространствах из классических шкал голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций исследован достаточно полно. Теория таких пространств хорошо развита и широко представлена в литературе (см., напр., [42, 43, 58, 62]). Тем не менее, задача о нормах дельта-функций продолжает быть актуальной вплоть до последнего времени. Приведём нужные нам для дальнейшего изложения результаты в данном направлении. Некоторые из них хорошо известны и приведены в работе [64], а остальные получены совсем недавно в [40] и [47]. Указанная задача исследовалась для пространств Бергмана

$$A^p_\alpha := \Big\{ f\in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{A^p_\alpha} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\cdot(1-|z|^2)^\alpha dA(z)\Big\},\ \alpha>-1,\ 0<p<\infty;$$

Дирихле

$$D^p_\alpha := \Big\{ f\in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{D^p_\alpha} := |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p\cdot(1-|z|^2)^\alpha dA(z)\Big\},\ \alpha>-1,\ 0<p<\infty,$$

здесь и выше $dA(z)$, нормализованная мера Лебега в $\mathbb{D}$, т.е. $dA(z)=\frac{1}{\pi}d\lambda(z)$, где $d\lambda(z)$ — мера Лебега в плоскости;

Харди

$$H^p := \Big\{ f\in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p\ d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\Big\}$$

и Дирихле-Харди

$$S^p := \Big\{ f\in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{S^p} := |f(0)| + \|f'\|_{H^p}\Big\},\ 0<p<\infty.$$

При этом при $p\geq 1$ эти пространства банаховы, а в случае $0<p<1$ — как уже упоминалось ранее, квазибанаховы.

Пусть $A(z)$ и $B(z)$ — две вещественнозначные функции, определённые в области $G\subset\mathbb{C}$. Условимся писать $A(z)\asymp B(z)$ в G, если имеется такое $C\geq 1$, что

$$\frac{1}{C}\cdot A(z)\leq B(z)\leq C\cdot A(z),\ \forall z\in G.$$

Следующие точные и асимптотически точные формулы приведены в работах [40], [47] и [64].

$$\|\delta_z\|^*_{A^p_\alpha} = (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha+2}{p}}; \tag{2.1.1}$$

$$\|\delta_z\|^*_{H^p} = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}; \tag{2.1.2}$$

$$\|\delta_z\|^*_{D^p_\alpha} \asymp \begin{cases} (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha+2-p}{p}}, & p<\alpha+2\\ \left(\log\dfrac{2}{1-|z|^2}\right)^{-\frac{1-p}{p}}, & p=\alpha+2\\ 1, & p>\alpha+2; \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$$\|\delta_z\|^*_{S^p} \asymp \begin{cases} (1-|z|^2)^{1-\frac{1}{p}}, & 0<p<1\\ 1, & 1\leq p<\infty; \end{cases} \tag{2.1.4}$$

$$\|\delta_z'\|^*_{A^p_\alpha} = \|\delta_z\|^*_{D^p_\alpha};\ \|\delta_z'\|^*_{H^p} = \|\delta_z\|^*_{S^p};\ \|\delta_z'\|^*_{D^p_\alpha} = \|\delta_z\|^*_{A^p_\alpha};\ \|\delta_z'\|^*_{S^p} = \|\delta_z\|^*_{H^p}. \tag{2.1.5}$$

Этого вполне достаточно для исследования вопросов непрерывности и компактности линейных операторов на приведённых выше пространствах голоморфных в единичном круге функций. Мы продемонстрируем это в разделе 3.1 главы 3 на примере интегральных операторов.

2.2 Классическое пространство Фока

В ряде задач теории функции и теории операторов, а также квантовой физике важную роль играют классические пространства Фока (см., напр., [60]). Напомним, что указанные пространства определяются следующим образом:

$$F^p_\alpha := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ \|f\|^p_{F^p_\alpha} := \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p}{2}\cdot |z|^2} dA(z) < \infty \Big\},$$

где $\alpha > 0,\ p > 0$ и $dA(z)$ — мера Лебега в $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. При этом, F^p_α является пространством целых функций, в котором дельта-функции $\delta_z : f \mapsto f(z)$, вычисляющие значение каждой функции f из пространства F^p_α в наперед заданной точке z, непрерывны при всех $z \in \mathbb{C}$.

Следующий результат взят нами из монографии [63]. Его доказательство мы приводить не будем, а лишь подчеркнём, что для получения оценки сверху в приведённом ниже неравенстве (2.2.1) используется субгармоничность функции $|f(z)|^p$ и тот факт, что функция $F(w) = f(z-w)e^{\alpha w\bar{z} - \alpha(|z|^2/2)}$ является целой при любом фиксированном $z \in \mathbb{C}$ и принадлежит F^p_α для любой функции f из F^p_α.

Теорема 2.2.1. *([63, Theorem 2.7]) Для любого $0 < p < \infty$ и $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\sup\{|f(z)| : \|f\|_{F^p_\alpha} \le 1\} = e^{\frac{\alpha\cdot|z|^2}{2}}. \tag{2.2.1}$$

Кроме того, для $0 < p < \infty$ любая экстремальная функция в этом равенстве имеет вид: $f(w) = e^{\alpha\bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2 + i\cdot\theta}$.

Отметим на языке дельта-функций равенство (2.2.1) означает, что $\delta_z \in (F^p_\alpha)^*$ при любом $z \in \mathbb{C}$ и

$$\|\delta_z\|^*_{F^p_\alpha} = e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.2.2}$$

Это равенство позволяет сформулировать ряд следствий о непрерывности и компактности классических операторов, действующих на пространствах Фока F^p_α. Однако в этом случае останутся неисследованными обобщённые пространства Фока, которые в последнее время стали предметом пристального изучения специалистов. Поэтому далее, мы рассмотрим вопрос о распространении равенства (2.2.1) (или, хотя бы, оценки сверху) на обобщенные пространства Фока. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

2.3 Оценка норм дельта-функций и их производных в обобщенных пространствах Фока

Пусть непрерывная функция $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)} dA(z) < \infty.$$

При каждом $0 < p < \infty$ она задает обобщенное пространство Фока:

$$F^\psi_p := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{F^\psi_p} := \Big(\lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, e^{-\psi(z)} dA(z) \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\},$$

где нормирующий коэффициент λ_ψ выбран с тем расчетом, что $\|1\|_{F^\psi_p} = 1$, то есть

$$\lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)} dA(z) = 1.$$

В случае $p = \infty$ полагаем $F^\psi_\infty = H_{e^\psi}(\mathbb{C})$. При $1 \le p \le \infty$ пространство F^ψ_∞ является банаховым, а при $0 < p < 1$ пространство F^ψ_p квазибанахово. Весу $\psi(z) = \frac{\alpha p}{2}|z|^2$, где $\alpha > 0$ (при этом $\lambda_\psi = \frac{p\alpha}{2\pi}$), соответствует классическое пространство Фока F^2_α.

При $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q$, получаем пространство Фока

$$F^{p,q}_\alpha := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha} := \lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q} dA(z) < \infty \Big\},$$

где $0 < \alpha, p, q < \infty$, а коэффициент λ_ψ найдём, воспользовавшись равенством:

$$\|1\|_{F^{p,q}_\alpha} = \lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q} dA(z) = 1. \tag{2.3.1}$$

Чтобы определить λ_ψ, вычислим интеграл из (2.3.1), сделав замену $t = \frac{\alpha p}{q} r^q$ и использовав определение Γ-функции Эйлера,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha p}{q}\cdot|z|^q} dA(z) &= 2\pi\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}}\cdot r dr\\ &= \frac{2\pi}{q}\cdot\frac{q}{\alpha p}\cdot\int_0^\infty e^{-t}\Big(\frac{qt}{\alpha p}\Big)^{\frac{2}{q}-1}dt = \frac{2\pi}{q}\cdot\Big(\frac{q}{\alpha p}\Big)^{\frac{2}{q}}\cdot\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{\frac{2}{q}-1}dt\\ &= \frac{2\pi}{q}\cdot\Big(\frac{q}{\alpha p}\Big)^{\frac{2}{q}}\cdot\Gamma\Big(\frac{2}{q}\Big) = \frac{2\pi}{q}\cdot\Big(\frac{q}{\alpha p}\Big)^{\frac{2}{q}}\cdot\Gamma\Big(\frac{2}{q}\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, для $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q}\cdot|z|^q$

$$\lambda_\psi = \frac{q}{2\pi}\cdot\Big(\frac{\alpha p}{q}\Big)^{\frac{2}{q}}\cdot\Gamma^{-1}\Big(\frac{2}{q}\Big).$$

Ясно, что при $q = 2$ получаем, что $F^{p,q}_\alpha = F^p_\alpha$. Напомним, что для этого случая мы имеем точное значение нормы дельта-функций (см. конец предыдущего раздела). Однако метод его получения является специфичным (напомним, что было использовано, что функция $F(w)$, определённая перед теоремой 2.2.1, целая и принадлежит F^p_α), и не распространяется в полной мере на произвольное $q > 0$. Ниже мы представляем его модификацию, позволяющую получить оценку сверху для норм дельта-функций при $0 < q \le 1$.

2.3.1 Оценка норм дельта-функций для $F^{p,q}_\alpha$ при $0 < q \le 1$

Пусть $f \in F^{p,q}_\alpha(\mathbb{C})$. Сначала найдём значение $\|\delta_0\|^*_{F^{p,q}_\alpha}$. Для этого воспользуемся схемой рассуждений, применённой при доказательстве упомянутой выше теоремы 2.7 из [63]. В силу субгармоничности $|f(z)|^p$ в $\mathbb{C}$ для $z_0 = 0$ и любого $r > 0$ выполняется неравенство

$$|f(0)|^p \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Умножим обе части этого неравенства $e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}}\cdot r$ и проинтегрируем в полярных координатах

$$\begin{aligned}&|f(0)|^p\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}}\cdot r dr\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\cdot e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}}\cdot r dr d\theta.\end{aligned}$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части неравенства

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}}\cdot r dr &= -\frac{1}{\alpha p}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}} d\frac{\alpha p r^q}{q}\\ &= -\frac{1}{\alpha p}e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha p}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим двойной интеграл, стоящий в правой части неравенства

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}} \cdot r dr d\theta \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \cdot e^{-\frac{\alpha r^q}{q}} \right|^p \cdot r dr d\theta \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left| f(w) \cdot e^{\frac{-\alpha |w|^q}{q}} \right|^p dA(w).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|f(0)|^p \le \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(w) \cdot e^{\frac{-\alpha |w|^q}{q}} \right|^p dA(w) = \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha}.$$

Следовательно,

$$|f(0)| \le \|f\|_{F^{p,q}_\alpha}. \tag{2.3.2}$$

Значит, $\|\delta_0\|^*_{F^{p,q}_\alpha} \le 1$. В то же время из (2.3.1) следует, что для $f_0(z) \equiv 1$

$$\delta_0(f_0) = 1 = \|f_0\|_{F^{p,q}_\alpha}.$$

Следовательно, $\|\delta_0\|^*_{F^{p,q}_\alpha} = 1$ при всех $q > 0$.

Теперь оценим $\|\delta_z\|^*_{F^{p,q}_\alpha}$ при произвольном $z \in \mathbb{C}$ и $0 < q \le 1$.

Как прежде, $f \in F^{p,q}_\alpha$. При фиксированном $z \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию $F(w) = f(z + w)e^{-\frac{\alpha |z|^q}{q}}$. Ясно, что $F(w)$ — целая функция. В соответствии с (2.3.2)

$$\begin{aligned}
|F(0)|^p \le \|F\|^p_{F^{p,q}_\alpha} &= \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |F(w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}|w|^q} dA(w) \\
&= \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(z+w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}(|z|^q + |w|^q)} dA(w).
\end{aligned}$$

Заметим, что при $0 < q \le 1$ выполнено неравенство $|z|^q + |w|^q \ge |z + w|^q$, при всех $z, w \in \mathbb{C}$.

Поэтому

$$|F(0)|^p \le \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(z+w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}(|z+w|^q)} dA(w) = \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(\xi)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}|\xi|^q} dA(\xi) = \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha}.$$

Так как $F(0) = f(z)e^{-\frac{\alpha |z|^q}{q}}$, то отсюда следует, что для любой функции $f \in F^{p,q}_\alpha$

$$|f(z)|^p \le e^{\alpha p \frac{|z|^q}{q}} \cdot \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha}$$

или

$$|f(z)| \le e^{\alpha \frac{|z|^q}{q}} \cdot \|f\|_{F^{p,q}_\alpha}.$$

Значит, $\|\delta_z\|^*_{F^{p,q}_\alpha} \le e^{\alpha \frac{|z|^q}{q}}$.

Итак, мы установили следующий результат.

Предложение 2.3.1. *Пусть* $0 < q \le 1$. *Тогда*

$$\|\delta_z\|^*_{F^{p,q}_\alpha} \le e^{\alpha\frac{|z|^q}{q}} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.3}$$

2.3.2 Оценка норм дельта-функций в обобщённых пространствах Фока и почти гармонические функции

Как видно из наших рассуждений, для получения оценки (2.3.3) для пространства $F^{p,q}_\alpha$ мы существенно использовали неравенство $|z+w|^q \le |z|^q + |w|^q$, $z, w \in \mathbb{C}$, верное только при $0 < q \le 1$. Поэтому мы не можем распространить предлагаемую нами модификацию даже для случая $1 < q \le 2$, хотя для $q = 2$, как отмечено выше, имеет место точная формула для норм дельта-функций. Ниже мы предлагаем совершенно новый метод получения оценок этих норм, который незначительно теряет в точности, зато годится для определённого класса весов общего вида.

Назовем вес ψ *слабо растущим в среднем*, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$B_\psi(z) := \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta) \le \psi(z) + C \text{ для всех } z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.4}$$

Обозначим через Ψ_0 класс весов, удовлетворяющих (2.3.4).

Для получения оценки сверху $\|\delta_z\|^*_{F^\psi_p}$ нам потребуется следующий результат из работы [4].

Теорема 2.3.2. *([4, Теорема 1]) Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$ и $\|f\|_{F^\psi_p} := \Big(\int_G |f|^p e^{-\psi(z)} dA(z)\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Тогда для всех $z \in G$*

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{p}\inf_{0<r<\operatorname{dist}(z, C\setminus G)}\Big(B_\psi(z,r) + 2\ln\frac{1}{r}\Big) + \ln\|f\|_{F^\psi_p} + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi},$$

где $B_\psi(z,r) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B_\psi(z,r)} dA(z)$ — среднее функции ψ по кругу $B(z,r)$.

Теперь мы готовы привести доказательство следующего утверждения.

Предложение 2.3.3. *Для любого веса $\psi \in \Psi_0$ существует $A > 0$ такое, что*

$$\|\delta_z\|^*_{F^\psi_p} \le Ae^{\psi(z)},\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.5}$$

Доказательство. В силу теоремы 2.3.2 для любой функции $f \in F^\psi_p$ при каждом $z \in \mathbb{C}$

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{p}\,B_\psi(z) + \ln\|f\|_{F^\psi_p} + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi}.$$

Учитывая, что $\psi \in \Psi_0$, получаем отсюда, что

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{p} \cdot p\,\psi(z) + \ln\|f\|_{F_p^\psi} + C + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi},\ \forall z \in \mathbb{C},$$

где C — постоянная из условия (2.3.4). Тогда для f с $\|f\|_{F_p^\psi} \le 1$ имеем $|f(z)| \le Ae^{\psi(z)}$, где $A := \frac{1}{\pi^p} \cdot e^C$, откуда следует требуемое. □

Как известно, наибольший интерес представляют те веса ψ, которые являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями. В связи с этим напомним, (см., напр., [6, 9, 11]), что вес ψ (он у нас по условию непрерывен в $\mathbb{C}$) является субгармонической функцией в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда для любого $r > 0$

$$\psi(z) \le \frac{1}{\pi r^2}\int_{|\zeta|\le r} \psi(z+\zeta)dA(\zeta) \tag{2.3.6}$$

и, в частности,

$$\psi(z) \le \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta),\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.7}$$

Отсюда и из (2.3.4) следует, что для любого субгармонического веса ψ из класса Ψ_0 существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\psi(z) \le \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta) \le \psi(z) + C,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.8}$$

А поскольку для гармонических весов имеет место равенство

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(\zeta),\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{2.3.9}$$

то естественно назвать слабо растущие в среднем веса ψ, являющиеся субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями, почти гармоническими.

Следующий простой факт в ряде случаев позволяет упростить проверку почти гармоничности веса.

Лемма 2.3.4. *Субгармонический в $\mathbb{C}$ вес ψ является почти гармоническим, если существует такая постоянная $C > 0$, что*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(z+e^{i\theta})d\theta \le \psi(z) + C,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.10}$$

Доказательство. Следует непосредственно из того факта, что для субгармонических функций в $\mathbb{C}$ интегральное среднее по кругу не превосходит интегрального среднего по его границе. В частности,

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le 1} \psi(z+\zeta)dA(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(z+e^{i\theta})d\theta. \tag{2.3.11}$$

□

Описание класса почти гармонических функций является отдельной задачей. Мы её рассмотрим для радиальных весов вида $\psi(z) = \gamma|z|^q$, где $\gamma > 0$, $q > 0$. Заметим, что они являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями. Для них справедлива

Лемма 2.3.5. *Веса $\psi(z) = \gamma|z|^q$ при всех $\gamma > 0$ и $0 < q \le 2$ являются почти гармоническими.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть веса $\psi(z) = |z|^q$, $0 < q \le 2$, и в силу их радиальности проверить условие (2.3.4) для $z = x \ge 0$. Рассмотрим интеграл из неравенства (2.3.4) при $x > 0$:

$$\begin{aligned} I := \int_0^{2\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta + \int_0^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta. \end{aligned}$$

Заменив θ на $-\theta$ в первом интеграле, имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \left|x + e^{-i\theta}\right|^q d\theta + \int_0^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (\left|x + \cos\theta - i\sin\theta\right|^q + \left|x + \cos\theta + i\sin\theta\right|^q) d\theta \\ &= 2 \cdot \int_0^{\pi} ([(x+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]^{\frac{q}{2}}) d\theta \\ &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta = 2 \cdot \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta \Big). \end{aligned}$$

Далее, делаем замену θ на $\theta + \pi$ во втором интеграле и учитываем, что $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i\theta}|^q d\theta$:

$$\begin{aligned} I &= 2 \cdot \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x + e^{i(\theta+\pi)}\right|^q d\theta \Big) \\ &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\left|x + e^{i\theta}\right|^q + \left|x - e^{i\theta}\right|^q \Big) d\theta \\ &= 2 \cdot |x|^q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\Big|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\Big|^q + \Big|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\Big|^q \Big) d\theta. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в подинтегральной функции в случае, когда $0 < q \le 2$. Заметим, что для $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $0 < \frac{2x\cdot\cos\theta+1}{x^2} < 1$ при $x > 1 + \sqrt{2}$. Поэтому после несложных вычислений и использования формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $(1+u)^{\frac{q}{2}}$, получим для $x > 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \Big|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\Big|^q &= \Big(\Big|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\Big|^2\Big)^{\frac{q}{2}} = \Big(\Big|1 + \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{x}\Big|^2\Big)^{\frac{q}{2}} \\ &= \Big(1 + \frac{2x\cos\theta + 1}{x}\Big)^{\frac{q}{2}} \le 1 + \frac{q}{2} \cdot \frac{2x\cdot\cos\theta + 1}{x^2}, \end{aligned}$$

Аналогичным образом оцениваем второе слагаемое при $x > 0$

$$\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q \le 1 - \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos\theta - 1}{x^2}.$$

Учитывая приведённые выше оценки, имеем

$$\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q \le 2 + \frac{q}{x^2}.$$

Применив эту оценку, получим при $x \ge 1 + \sqrt{2}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta \le 2|x|^q \cdot \left(2 + \frac{q}{x^2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \le \pi \cdot |x|^q \left(2 + \frac{q}{x^2}\right).$$

Отсюда следует, что при $x \ge 1 + \sqrt{2}$ и $0 < q \le 2$

$$B_\psi(x) \le \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot |x|^q \left(2 + \frac{q}{x^2}\right) = \frac{x^q}{2}\left(2 + \frac{q}{x^2}\right) = x^q + \frac{q}{2} x^{q-2} \le \psi(x) + \frac{q}{2}.$$

Простой подсчёт показывает, что при $0 \le x \le 1 + \sqrt{2}$ имеем, что $B_\psi(x) \le (2 + \sqrt{2})^q$. Положив теперь $C := (2 + \sqrt{2})^q$, получим окончательно, что

$$B_\psi(x) \le \psi(x) + C, \ \forall x \ge 0,$$

и доказательство закончено. □

Из предложения 2.3.3 и леммы 2.3.5 и их доказательств следует такой результат.

Предложение 2.3.6. *Пусть $0 < q \le 2$. Тогда*

$$\|\delta_z\|^*_{F^{p,q}_\alpha} \le A e^{\frac{\alpha|z|^q}{q}} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{2.3.12}$$

где A можно взять равным $\frac{1}{\pi^p} e^{(2+\sqrt{2})^q}$.

Как уже отмечалось выше, при $q = 2$ в (2.3.12) при $A = 1$ имеет место знак равенства, а при $0 < q \le 1$ в качестве A можно взять $A = 1$. Нам неизвестно, выполняется ли оценка вида $\|\delta_z\|^*_{F^{p,q}_\alpha} \ge a e^{\frac{\alpha|z|^q}{q}}$ при некотором $a > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$ для каких-либо $0 < q < 2$.

Распространим лемму 2.3.5 на радиальные веса более общего вида, чем $\gamma|z|^q$, воспользовавшись ключевыми свойствами $\gamma|z|^q$, которые были использованы в этой лемме.

Лемма 2.3.7. *Пусть $\psi(r)$ — возрастающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, которая является дважды дифференцируемой на $[r_0, \infty)$ при некотором $r_0 \ge 0$, и при этом, $\sup\limits_{r \ge r_0} \psi''(r) < \infty$. Тогда радиальная функция $\psi(z) = \psi(|z|)$ при некотором $C > 0$ удовлетворяет условию*

$$\exists C > 0 : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z + e^{i\theta}) d\theta \le \psi(z) + C, \text{ при всех } z \in \mathbb{C}. \tag{2.3.13}$$

Доказательство. Схема доказательства данной леммы та же, что и леммы 2.3.5. Поэтому мы опустим аналогичные технические детали из доказательства последней, сосредоточив основное внимание на тех моментах, которые вызваны общностью ситуации. Для упрощения изложения будем считать, что $r_0 = 0$. Это не отражается на общности рассуждений.

Учитывая, что $\sqrt{1+t} \le 1 + \frac{1}{2}t$ при всех $t \ge 0$ и что $\sqrt{1-t} \le 1 - \frac{1}{2}t$ при всех $t \le 1$, имеем при всех $x > 0$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}\left|x + e^{i\theta}\right| &= \sqrt{x^2 + 2x\cos\theta + 1} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{2x\cos\theta + 1}{x^2}} \le x + \frac{2x\cos\theta + 1}{2x};\\ \left|x - e^{i\theta}\right| &= \sqrt{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = x \cdot \sqrt{1 - \frac{2x\cos\theta - 1}{x^2}} \le x - \frac{2x\cos\theta - 1}{2x}.\end{aligned}$$

Отсюда, использовав возрастание $\psi(r)$ и формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для каждой пары $x \ge 1$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ найдём такие точки $\gamma = \gamma(x,\theta)$ и $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(x,\theta)$, лежащие между x и $x + \frac{2x\cos\theta+1}{2x}$ и x и $x - \frac{2x\cos\theta-1}{2x}$, соответственно, что:

$$\begin{aligned}\psi\big(\left|x + e^{i\theta}\right|\big) &\le \psi\Big(x + \frac{2x\cos\theta + 1}{2x}\Big)\\ &= \psi(x) + \psi'(x) \cdot \frac{2x\cos\theta + 1}{2x} + \frac{\psi''(\gamma)}{2} \cdot \Big(\frac{2x\cos\theta + 1}{2x}\Big)^2;\\ \psi\big(\left|x - e^{i\theta}\right|\big) &\le \psi\Big(x - \frac{2x\cos\theta - 1}{2x}\Big)\\ &= \psi(x) - \psi'(x) \cdot \frac{2x\cos\theta - 1}{2x} + \frac{\psi''(\widetilde{\gamma})}{2} \cdot \Big(\frac{2x\cos\theta - 1}{2x}\Big)^2.\end{aligned}$$

Обозначим $M := \Big(\sup\limits_{r\ge 0}\psi''(r)\Big)^+$, где, как обычно, $t^+ = t$ при $t \ge 0$ и $t^+ = 0$ при $t < 0$. Заметим, что тогда при всех $x \ge 1$

$$\psi'(x) = \int_0^x \psi''(t)dt + \psi'(0) \le Mx + \psi'(0) \le M_1 x,$$

где $M_1 := M + \psi'(0)$. Тогда из приведённых оценок получаем при всех $x \ge 1$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}\psi\big(\left|x + e^{i\theta}\right|\big) + \psi\big(\left|x - e^{i\theta}\right|\big) &\le 2\psi(x) + \frac{\psi'(x)}{x} + M \cdot \frac{2x^2\cos^2\theta + 1}{4x^2}\\ &\le 2\psi(x) + C,\end{aligned}$$

где $C := M + M_1$.

Преобразовав интеграл в левой части (2.3.13) так же, как в доказательстве леммы 2.3.5, и применив полученную только что оценку, заключаем, что при всех $x \ge 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\big(\left|x + e^{i\theta}\right|\big)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\psi\big(\left|x + e^{i\theta}\right|\big) + \psi\big(\left|x - e^{i\theta}\right|\big)\Big)d\theta \le \psi(x) + \frac{C}{2}.$$

Увеличив, если необходимо, постоянную $\frac{C}{2}$ и учтя радиальность $\psi(z)$, получим нужное неравенство (2.3.13). $\square$

Из леммы 2.3.7 следует такой результат.

Предложение 2.3.8. *Пусть ψ та же, что и в лемме 2.3.7, и дополнительно, известно, что $\psi(|z|)$ субгармонична в $\mathbb{C}$. Тогда $\psi(z)$ почти гармонична.*

Заметим, что предложение 2.3.8 содержит в качестве частного случая лемму 2.3.5 о почти гармоничности функции $\alpha|z|^q$ при указанных α и q. Мы привели доказательство леммы 2.3.5 по той причине, что в нём содержится конкретное значение постоянной C, что может иметь значение в приложениях.

Из предложения 2.3.8 и леммы 2.3.7 следует такой результат

Предложение 2.3.9. *Пусть $\psi(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.3.7 и является субгармонической в $\mathbb{C}$ функцией. Тогда при любом $p \in (0, \infty)$ имеем*

$$\|\delta_z\|^*_{F_p^\psi} \le Ae^{\psi(z)} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{2.3.14}$$

где A — некоторая постоянная.

Как известно, в теории роста целых функций большую роль играют веса вида $\psi(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок. Напомним нужные нам определения.

Определение 2.3.10. Уточненным порядком для порядка $\rho \in (0, \infty)$ в смысле Валирона называется произвольная непрерывно дифференцируемая функция $\rho(r), r \ge 0$, такая, что

(1) $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$.

(2) $r\rho'(r) \ln r \to 0$ при $r \to \infty$.

Определение 2.3.11. Уточненный порядок $\rho(r)$ называется сильным уточненным порядком, если $\rho(r)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $r > 0$ и

(3) $r^2\rho''(r) \ln r \to 0$ при $r \to \infty$.

Отметим, что для сильного уточнённого порядка $\rho(r) \to \rho \in (0, \infty)$ найдётся такое r_0, что функция $\psi(z) = p|z|^{\rho(|z|)}$ субгармонична вне круга $|z| \le r_0$ (см., напр., [6]), а порождённое ей пространство имеет следующий вид:

$$F_p^{\rho(r)} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{F_p^{\rho(r)}} := \left(\lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, e^{-p|z|^{\rho(|z|)}} dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

Применим лемму 2.3.7 к весам вида $r^{\rho(r)}$.

Лемма 2.3.12. *Пусть $\rho(r) \to \rho \in (0, 2]$ — сильный уточненный порядок и существует такая постоянная $M > 0$, что $r^{\rho(r)-2} \le M$ при всех $r > 0$. Тогда радиальная функция $\psi(z) = |z|^{\rho(|z|)}$ при некотором $C > 0$ удовлетворяет условию (2.3.13). В частности, для любого сильного уточнённого порядка $\rho(r) \to \rho \in (0, 2)$ функция $\psi(z) = |z|^{\rho(|z|)}$ удовлетворяет условию (2.3.13) и, тем самым, является почти гармонической вне некоторого круга с центром в нуле.*

Доказательство. Как известно (см. [6]), из свойств уточнённого порядка следует, что функций $\psi(r) = r^{\rho(r)}$ возрастает на $[r_1, \infty)$, где r_1 — некоторое неотрицательное число. Далее, прямой подсчёт показывает, что

$$\psi''(r) = r^{\rho(r)-2}\Big([r\rho'(r)\ln r + \rho(r)]^2 + r^2\rho''(r)\ln r + 2r\rho'(r) - \rho(r)\Big).$$

Из свойств сильного уточнённого порядка имеем, что

$$\lim_{r\to\infty}\Big([r\rho'(r)\ln r + \rho(r)]^2 + r^2\rho''(r)\ln r + 2r\rho'(r) - \rho(r)\Big) = \rho^2 - \rho.$$

Следовательно, существуют такие $r_2 > 0$ и $A > 0$, что $\psi''(r) \le A \cdot M$ при всех $r \ge r_1$. Остаётся взять $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ и применить лемму 2.3.7. $\square$

Из предложения 2.3.8 и леммы 2.3.12 следует такой результат.

Предложение 2.3.13. *Пусть $\rho(r)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.3.12. Тогда при любом $p \in (0, \infty)$ и $\rho \in (0, 2]$ имеем*

$$\|\delta_z\|^*_{F_p^{\rho(r)}} \le Ae^{|z|^{\rho(|z|)}} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{2.3.15}$$

где A — некоторая постоянная.

Как мы установили, для любого сильного уточнённого порядка с $\rho \in (0, 2)$ для пространства $X = F_p^{\rho(r)}$ верна оценка (2.3.15).

В пограничном случае $\rho = 2$ уточнённым порядком, удовлетворяющим условиям леммы 2.3.12, являются, например, $\rho(r) = 2 + \frac{1}{r^\alpha}$, $r \ge 1$ и $\rho(r) = 2 + e^{-r^\alpha}$ при любом $\alpha > 0$.

2.3.3 Производная нормы дельта-функции

Как было установлено выше в разделе 1.2.1, для формулирования ряда результатов необходимо знать оценку сверху не самой нормы дельта-функции, а её производной $\delta_z' : f \mapsto f(z)$.

Решению этой задачи и посвящён настоящий раздел. При этом, в случае $p = \infty$ на вес ψ, образующий пространство, налагается дополнительное условие субаддитивности. В связи с этим напомним, следующее определение

Определение 2.3.14. Функция $u : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ называется субаддитивной, если для неё имеет место следующее неравенство:

$$u(x + y) \le u(x) + u(y), \ \forall x, y \ge 0.$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат данного раздела

Лемма 2.3.15. *Пусть $\psi \in \Psi_0$ — субаддитивный вес. Тогда*

$$\|\delta_z^{'}\|^*_{F_p^\psi} \le \begin{cases} \frac{1}{(2\pi\lambda_\psi)^{\frac{1}{p}}} \cdot e^{\psi(2)} \cdot e^{\psi(|z|)}, & 1 \le p < \infty \\ e^{\psi(1)} \cdot e^{\psi(|z|)}, & p = \infty. \end{cases} \tag{2.3.16}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $f \in F_p^\psi$. Запишем интегральную формулу Коши для вычисления первой производной в точке $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f^{'}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z_0 + z)}{z^2} dz. \tag{2.3.17}$$

Из неё следует, что $|Df(z_0)| \le \displaystyle\int_{|z|=1} |f(z_0 + z)||dz|$ для всех z с $|z| = 1$.

I. Сначала проведем доказательство для случая $p = \infty$. В силу субаддитивности и монотонности функции $\psi(|z|)$ справедливо неравенство

$$\psi(|z_0 + z|) \le \psi(|z_0| + 1) \le \psi(|z_0|) + \psi(1) \tag{2.3.18}$$

Учитывая, что $f \in F_\infty^\psi$, имеем

$$|f(z_0 + z)| \le \|f\|_{F_\infty^\psi} \cdot e^{\psi(|z_0+z|)} \le \|f\|_{F_\infty^\psi} \cdot e^{\psi(|z_0|)} \cdot e^{\psi(1)}.$$

Из формулы (2.3.17) заключаем тогда, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f^{'}(z_0)| \le \sup_{|z|=1} |f(z_0 + z)| \le \|f\|_{F_\infty^\psi} \cdot e^{\psi(|z_0|)} \cdot e^{\psi(1)}.$$

Поэтому $|\delta^{'} f(z_0)| \le e^{\psi(|z_0|)} \cdot e^{\psi(1)}$ для всех $f \in F_\infty^\psi$ с $\|f\|_{F_\infty^\psi} \le 1$, и, значит $\|\delta_{z_0}^{'}\|^*_{F_\infty^\psi} \le e^{\psi(1)} \cdot e^{\psi(|z_0|)}$.

II. Пусть теперь $1 \le p < \infty$. Использовав, как и выше, интегральную формулу Коши, имеем для $z_0 \in \mathbb{C}$ и любого $r \in [1, 2]$:

$$f^{'}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z_0 + z)}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi r i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta,$$

откуда
$$|f^{'}(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta,\ \forall r\in[1,2].$$
Учитывая, что функция x^p выпукла на $(0,\infty)$ при любом $p\ge 1$, и использовав неравенство Иенсена, получаем тогда, что
$$|f^{'}(z_0)|^p \le \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\Big)^p \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^p d\theta.$$
Умножим это неравенство на r и проинтегрируем по r на $[1,2]$:
$$\begin{aligned}|f^{'}(z_0)|^p &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_1^2\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^p rdrd\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_1^2\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^p e^{-p\psi(z_0+re^{i\theta})+p\psi(z_0+re^{i\theta})} rdrd\theta\\ &\le \frac{1}{2\pi}\cdot e^{p(\psi(|z_0|)+\psi(2))}\int_1^2\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^p e^{-p\psi(z_0+re^{i\theta})} rdrd\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot e^{p(\psi(|z_0|)+\psi(2))}\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^p e^{-p\psi(z)}dA(z)\\ &= \frac{1}{2\pi\lambda_\psi}\cdot e^{p(\psi(|z_0|)+\psi(2))}\cdot\|f\|^p_{F_p^\psi}.\end{aligned}$$

Таким образом, $|f^{'}(z_0)| \le \frac{1}{(2\pi\lambda_\psi)^{\frac{1}{p}}}\cdot e^{\psi(|z_0|)+\psi(2)}$ для любого $f\in F_p^\psi$ с $\|f\|_{F_p^\psi}\le 1$. Откуда следует, что $\|\delta_z^{'}\|^*_{F_p^\psi} \le \dfrac{1}{(2\pi\lambda_\psi)^{\frac{1}{p}}}\cdot e^{\psi(2)}\cdot e^{\psi(|z|)},\ \forall z\in\mathbb{C}$. □

Замечание 2.3.16. Из доказательства леммы 2.3.15 (см. левую часть неравенства (2.3.18)) следует, что без предположения о субаддитивности веса $\psi\in\Psi_0$, для которого $\psi(r)$ возрастает, верна следующая оценка
$$\|\delta_z^{'}\|^*_{F_p^\psi} \le \begin{cases}\frac{1}{(2\pi\lambda_\psi)^{\frac{1}{p}}}\cdot e^{\psi(|z|+2)}, & 1\le p<\infty\\ e^{\psi(|z|+1)}, & p=\infty.\end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует такой результат

Лемма 2.3.17. *Пусть $\rho(r)\to\rho\in(0,2]$ — сильный уточненный порядок. Тогда существует такая постоянная $C>0$, что*
$$\|\delta_z^{'}\|^*_{F_p^{\rho(r)}} \le \begin{cases}C\cdot e^{(|z|+2)^{\rho(|z|+2)}}, & 1\le p<\infty\\ e^{(|z|+1)^{\rho(|z|+1)}}, & p=\infty.\end{cases} \qquad (2.3.19)$$

Доказательство. В самом деле, функция $r^{\rho(r)}$, как известно, возрастает и по лемме 2.3.12 функция $|z|^{\rho(|z|)}$ почти гармонична (при больших r и $|z|$). Остаётся воспользоваться замечанием 2.3.16, чтобы получить оценку (2.3.19). □

Глава 3

Приложения к конкретным операторам и пространствам функций, голоморфных в единичном круге или комплексной плоскости

Материал настоящей главы разбит на три части. Сначала в первом и втором разделах приводятся результаты об ограниченности и компактности композиционных и интегральных операторов, действующих из весовых пространств с интегральными квазинормами в пространства с весовой sup-нормой. Затем в третьем разделе формулируются приложения полученных в разделе 3.1.1 результатов к проективному (индуктивному) пределу последовательности (квази)банаховых пространств. Наконец, в четвёртом разделе устанавливаются приложения полученных в главе 1 результатов к интегральным операторам Харди и Чезаро. Очевидно, что подобным образом можно будет в будущем получать аналогичные результаты и для других операторов.

3.1 Пространства голоморфных в единичном круге функций

В этом параграфе приведённые выше в главе 1 результаты применяются к исследованию условий ограниченности композиционных и интегральных операторов, действующих из весовых квазибанаховых пространств в пространства с весовыми sup-нормами. Для получения указанных результатов будем использовать формулы для вычисления норм дельта-функций $\|\delta_z\|^*$ и их производных $\|\delta_z'\|^*$ на пространствах Бергмана, Харди, Дирихле и Дирихле-Харди, приведённые в главе 2.

Ранее в предлагаемой постановке указанная задача не исследовалась. Изучался лишь вопрос об ограниченности и компактности композиционных и интегральных операторов, действующих в весовые пространства с интегральными нормами (см. [39, 49, 64]) или пространства специального вида (пространства Соболева, пространства Морри), к которым наши результаты неприменимы. Большинство из этих результатов сформулированы в терминах пространств BMOA и VMOA. В частности (см. [49]), для компактности интегрального оператора Вольтерра на пространствах Харди и Бергмана от функции, порождающей указанный оператор, требовалась принадлежность пространству BMOA (см., также, [18, 19]). В аналогичной постановке эта задача изучалась и для оператора, союзного с оператором Вольтерра на пространствах Дирихле и Дирихле-Харди. В терминах норм дельта-функций данный вопрос исследовался лишь в работе [64] для случая, когда пространства Харди и Бергмана являются банаховыми.

Поскольку формулировка следствий из предшествующих результатов, приведённых в главе 1, об ограниченности и компактности композиционных операторов не составляет труда, мы ограничимся в данном разделе только изучением интегрального оператора Вольтерра и его союзного.

3.1.1 Критерии ограниченности интегральных операторов

В настоящем разделе формулируются следствия из абстрактных критериев ограниченности композиционных и интегральных операторов, действующих из квазибанаховых пространств голоморфных в единичном круге функций в весовые пространства $H_v(\mathbb{D})$ или $B_v(\mathbb{D})$. Для получения требуемых результатов применим предложение 1.5.7 к пространствам Бергмана, Харди, Дирихле и Дирихле-Харди. При этом, вместо нормы дельта-функции и её производной будем подставлять соответствующие их значения, указанные в разделе 2.1.1. Для оператора Вольтерра в [64] аналогичные результаты приведены только для одного специального класса пространств $H_v(\mathbb{D})$, задаваемых весами вида $v(z) = (1-|z|^2)^{-\beta},\ \beta > 0$ и обозначаемых символом H_β. Это связано в основном с тем, что лишь для этого класса пространств было известно, что оператор дифференцирования осуществляет изоморфизм между $H_{\beta,0} := \{f \in H_\beta : f(0) = 0\}$ и $H_{\beta+1}$. Для оператора, союзного с оператором Вольтерра, подобные результаты не приводились. Кроме того, чтобы не приводить ряд однотипных результатов, оператор Вольтерра рассмотрим в пространстве $H_v(\mathbb{D})$, а оператор союзный с ним — в пространстве $B_v(\mathbb{D})$.

Применив к предложению 1.5.7 формулы (2.1.1) — (2.1.4), получим следующий результат

Предложение 3.1.1. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (1.5.1). Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : A^p_\alpha \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2}{p}} \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор Вольтерра $T_g : D^p_\alpha \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2-p}{p}} \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty, & p < \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|) \cdot |g'(z)|}{(\log \frac{2}{1-|z|^2})^{\frac{1-p}{p}} \cdot v(z)} < \infty, & p = \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|) \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty, & p > \alpha+2. \end{cases}$$

(iii) Оператор Вольтерра $T_g : H^p \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{1}{p}} \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

(iv) Оператор Вольтерра $T_g : S^p \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|)^{2-\frac{1}{p}} \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty, & 0 < p < 1 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|) \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty, & 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

Отметим, что сформулированные в следствии 3.1.1 утверждения ранее были известны лишь для конкретного классического пространства Бергмана H_β, задаваемого весом $(1-$

$|z|)^{-\beta},\ \beta > 0$ (обычно для его задания используют эквивалентный вес $(1-|z|^2)^{-\beta}$; см. следствие 2.1 (iii) в [64]).

Из предложения 1.5.17 и равенств (2.1.5) непосредственным образом вытекает

Предложение 3.1.2. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (1.5.1). Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор $S_g : A^p_\alpha \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{\alpha+2-p}{p}} \cdot v(z)} < \infty, & p < \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{(\log\frac{1}{1-|z|^2})^{\frac{1-p}{p}} \cdot v(z)} < \infty, & p = \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{v(z)} < \infty, & p > \alpha+2. \end{cases}$$

(ii) Оператор $S_g : D^p_\alpha \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{\alpha+2}{p}} \cdot v(z)} < \infty.$$

(iii) Оператор $S_g : H^p \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}-1} \cdot v(z)} < \infty, & 0 < p < 1 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{v(z)} < \infty, & 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

(iv) Оператор $S_g : S^p \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}} \cdot v(z)} < \infty.$$

3.1.2 Критерии компактности интегральных операторов

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 3.1.1, применим полученные в главе 1 результаты о компактности интегральных операторов к весовым пространствам голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций с интегральными нормами. Для краткости изложения материала будем рассматривать оператор Вольтерра, действующий в пространство $B_{v,0}(\mathbb{D})$, а его союзный — в пространство $H_{v,0}(\mathbb{D})$. Для формулировки указанных результатов воспользуемся формулами для $\|\delta_z\|^*$ и $\|\delta_z'\|^*$, приведенными в разделе 2.1.1 для пространств Бергмана A^p_α, Дирихле D^p_α, Харди H^p и Дирихле-Харди S^p.

Так, предложение 1.5.22 и равенства (2.1.5) позволяют установить

Предложение 3.1.3. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор $S_g : A^p_\alpha \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2-p}{p}} \cdot |g(z)|}{v(z)} = 0, & p < \alpha+2 \\ \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-|z|)\cdot|g(z)|}{(\log\frac{2}{1-|z|^2})^{\frac{1-p}{p}} \cdot v(z)} = 0, & p = \alpha+2 \\ \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-|z|)\cdot|g(z)|}{v(z)} = 0, & p > \alpha+2. \end{cases}$$

(ii) Оператор $S_g : D^p_\alpha \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z\to 1} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2}{p}} \cdot |g(z)|}{v(z)} = 0.$$

(iii) Оператор $S_g : H^p \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-|z|)^{2-\frac{1}{p}} \cdot |g(z)|}{v(z)} = 0, & 0 < p < 1 \\ \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-|z|)\cdot|g(z)|}{v(z)} = 0, & 1 < p < \infty. \end{cases}$$

(iv) Оператор $S_g : S^p \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z\to 1} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{1}{p}} \cdot |g(z)|}{v(z)} = 0.$$

Отметим, что следствие 3.1.3 применимо к достаточно широкому классу весов v, содержащему $(1-|z|)^{-\beta}, \beta > 0$ в качестве частного случая.

Аналогично, из теоремы 1.5.27 и формул (2.1.1) — (2.1.4) следует

Следствие 3.1.4. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие* (1.5.1). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : A^p_\alpha \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to 1} \frac{|g'(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{\alpha+2}{p}} \cdot v(z)} = 0.$$

(ii) Оператор Вольтерра $T_g : D^p_\alpha \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{|g'(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{\alpha+2-p}{p}} \cdot v(z)} = 0, & p < \alpha+2 \\ \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{|g'(z)|}{(\log \frac{2}{1-|z|^2})^{\frac{1-p}{p}} \cdot v(z)} = 0, & p = \alpha+2 \\ \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{|g'(z)|}{v(z)} = 0, & p > \alpha+2. \end{cases}$$

(iii) Оператор Вольтерра $T_g : H^p \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to 1} \frac{|g'(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}} \cdot v(z)} = 0.$$

(iv) Оператор Вольтерра $T_g : S^p \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{|g'(z)|}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}-1} \cdot v(z)} = 0, & 0 < p < 1 \\ \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{|g'(z)|}{v(z)} = 0, & 1 < p < \infty. \end{cases}$$

3.2 Пространства целых функций

В настоящем разделе формулируются приложения абстрактных критериев об ограниченности и компактности линейных операторов, приведённых в главе 1, к классическому и обобщённому пространствам Фока. Для получения необходимых результатов существенным образом используются оценки норм дельта-функции и её производной на указанных пространствах, полученные в главе 2. Подчеркнём, что ранее подобная задача в предлагаемой постановке не исследовалась. Результаты представленные ниже являются новыми, как для квазибанахова, так и для банахова случаев.

3.2.1 Ограниченность операторов в пространствах Фока

Применим наши общие результаты главы 1 и результаты предыдущего раздела к задаче о непрерывности классических операторов, действующих на пространствах Фока.

Подобно тому, как это было сделано выше для пространств функций, голоморфных в единичном круге, с помощью (2.2.2) можно легко сформулировать ряд следствий об ограниченности операторов весовой композиции, действующих из F^2_α в весовые пространства $H_v(\mathbb{C})$ и $B_v(\mathbb{C})$ с равномерными весовыми нормами. Мы на этом останавливаться не будем, а сосредоточимся для этих операторов на исследовании пространств Фока F^ψ_p общего вида и приложениях полученных результатов к пространствам $F^{p,q}_\alpha$ и $F^{\rho(r)}_p$, задаваемых соответственно весами $\psi(z) = \frac{\alpha}{q}|z|^q$ при $q \neq 2$ и $\psi(z) = |z|^{\rho(|z|)}$, где $\rho(|z|) \to \rho \in (0, 2]$ — некоторый сильный уточненный порядок. Кроме того, будет рассмотрен вопрос и об ограниченности интегрального оператора Вольтерра и его союзного. При этом, для получения упомянутых выше результатов мы существенным образом будем опираться на установленные в главе 2 оценки сверху нормы дельта-функции и её производной.

Из следствий 1.4.1, 1.4.4 и оценок (2.3.5) и (2.3.16) непосредственным образом следует

Предложение 3.2.1. *Пусть ψ — вес из Ψ_0, v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, g и φ — фиксированные целые функции.*

(i) Если $p \in [1, \infty)$ и

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot e^{\psi(\varphi(z))}}{v(z)} < \infty,$$

то оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^\psi_p \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен.

(ii) Если дополнительно известно, что вес ψ субаддитивен и

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot e^{\psi(\varphi(z))}}{v(z)} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

то оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^\psi_p \to B_v(\mathbb{C})$ ограничен.

В качестве следствий предложения 3.2.1 получаем достаточные условия непрерывности композиционных операторов в $F^{p,q}_\alpha$ и $F^{\rho(r)}_p$. Так, используя формулы (2.3.12) и (2.3.16), получим

Предложение 3.2.2. *Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, g и φ — целые функции, $\alpha > 0$ и $0 < q \leq 2$.*

(i) Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^{p,q}_\alpha \to H_v(\mathbb{C})$, где $p \in [1, \infty)$, был ограничен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot e^{\alpha\frac{|\varphi(z)|^q}{q}}}{v(z)} < \infty.$$

(ii) *Для того чтобы оператор весовой композиции* $W_{g,\varphi} : F^{p,q}_{\alpha} \to B_v(\mathbb{C})$ *был ограничен, достаточно, чтобы*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot e^{\alpha \frac{|\varphi(z)|^q}{q}}}{v(z)} < \infty, \ 1 \le p \le \infty.$$

Из предложения 3.2.1 с помощью формул (2.3.15) и (2.3.19) получаем

Предложение 3.2.3. *Пусть* v *— произвольный вес в* $\mathbb{C}$, g *и* φ *— целые функции,* $\rho(r) \to \rho \in (0, 2]$ *— некоторый сильный уточненный порядок.*

(i) *Для того чтобы оператор весовой композиции* $W_{g,\varphi} : F^{\rho(r)}_p \to H_v(\mathbb{C})$, *где* $p \in [1, \infty)$, *был ограничен, достаточно, чтобы*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot e^{|\varphi(z)|^{\rho(|\varphi(z)|)}}}{v(z)} < \infty.$$

(ii) *Для того чтобы оператор весовой композиции* $W_{g,\varphi} : F^{\rho(r)}_p \to B_v(G)$ *был ограничен, достаточно, чтобы*

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in G} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|\varphi(z)|+2)^{\rho(|\varphi(z)|+2)}}}{v(z)} < \infty, & 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_{z\in G} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|\varphi(z)|+1)^{\rho(|\varphi(z)|+1)}}}{v(z)} < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Теперь займемся вопросом об ограниченности оператора Вольтерра и его союзного в пространствах Фока и покажем, что для достаточно широкого класса весов ψ, введенного в работе [35], для соответствующих пространств F^{ψ}_p имеют место аналоги результатов, установленных в разделе 3.1.1 в случае круга.

Условимся о следующем обозначении. Пусть E, F — две вещественнозначные функции, заданные на множестве D произвольной природы. Будем писать, что $E(x) \simeq F(x)$, $x \in D$, если существуют такие положительные постоянные c и C, что $cE(x) \le F(x) \le CE(x)$ для всех $x \in D$.

Обозначим через T семейство всех дифференцируемых функций $\tau : [0, \infty) \to (0, \infty)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\lim\limits_{r\to\infty} \tau(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) = 0$;

(b) Либо при некотором $C > 0$ функция $\tau(r)\, r^C$ возрастает, либо

$$\lim_{r\to\infty} \tau'(r) \ln \frac{1}{\tau(r)} = 0.$$

Пусть, далее, $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция класса C^2 на $[0,\infty)$. Продолжим её на всю комплексную плоскость, положив $\psi(z) = \psi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, и предположим, что ее лапласиан $\Delta\psi$ положителен в $\mathbb{C}$ и, более того, что существует такая функция $\tau \in T$, что $(\Delta\psi(z))^{-\frac{1}{2}} \simeq \tau(|z|)$, $|z| \geq 1$. Следуя [35], обозначим символом $\mathcal{I}$ класс всех функций ψ, обладающих указанными свойствами. В [35] отмечено, что в этот класс входят следующие функции: r^α, $\alpha > 2$; $e^{\beta r}$, $\beta > 0$; e^{e^r}.

Следующая лемма вытекает из [31, следствие 3.3] (см. также [51, лемма 2.1]).

Лемма 3.2.4. *Предположим, что $\psi \in \mathcal{I}$, и положим $\phi(r) := \psi(r) + \ln(1 + \psi'(r))$, $r \in [0,\infty)$. Целая функция f принадлежит пространству F^ψ_∞ в том и только в том случае, когда f' принадлежит пространству F^ϕ_∞. При этом*

$$\|f\|_{F^\psi_\infty} \simeq |f(0)| + \|f'\|_{F^\phi_\infty},\ f \in F^\psi_\infty.$$

С помощью этой леммы аналогично следствию 1.5.4 доказывается

Лемма 3.2.5. *Пусть ψ и ϕ — те же весовые функции, что и в лемме 3.2.4. Тогда оператор дифференцирования $D : f \mapsto f'$ является изоморфизмом из $F^\psi_{\infty,0}$ на F^ϕ_∞ , где $F^\psi_{\infty,0} := \{f \in F^\psi_\infty : f(0) = 0\}$.*

Из предложения 1.5.14 и леммы 3.2.5 следует непосредственно

Предложение 3.2.6. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$.*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to F^\psi_\infty(\mathbb{C})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g^{'}(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{(1 + \psi'(|z|))\, e^{\psi(z)}} < \infty.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : X \to F^\psi_\infty(\mathbb{C})$ был ограничен, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta^{'}_z\|^*}{(1 + \psi'(|z|))\, e^{\psi(z)}} < \infty.$$

Заметим, что предложение 3.2.6 в качестве частных случаев содержит результаты работы [51] об ограниченности оператора Вольтерра $T_g : F^\psi_p \to F^\psi_\infty$ для $\psi \in \mathcal{I}$ и $0 < p \leq \infty$. Из него также можно легко получить аналогичные критерии ограниченности для $T_g : F^{\psi_1}_p \to F^{\psi_2}_\infty$ в случае двух весов ψ_1 и ψ_2 из $\mathcal{I}$. Более того, полученные в данном разделе результаты позволяют исследовать и ситуацию, когда ψ_1 не обязательно содержится в $\mathcal{I}$. Именно, легко убедиться, что при $0 < q, \rho \le 2$ веса $\frac{\alpha}{q}|z|^q$ и $|z|^{\rho(|z|)}$ не входят в класс $\mathcal{I}$ и к ним неприменимы результаты из [35], [51]. Однако, предложение 3.2.6 и формулы (2.3.14), (2.3.16) влекут такой результат.

Предложение 3.2.7. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$, $\alpha > 0$ и $0 < q \le 2$.*

(i) Для того чтобы оператор Вольтерра $T_g : F_\alpha^{p,q} \to F_\infty^\psi$, где $p \in [1, \infty)$, был ограничен достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)| \cdot e^{\frac{\alpha}{q}|z|^q - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} < \infty.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : F_\alpha^{p,q} \to F_\infty^\psi$ был ограничен, достаточно, чтобы

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot e^{\frac{\alpha}{q}|z|^q - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} < \infty, \ 1 \le p \le \infty.$$

Отметим, что для оператора $S_g : F_p^\psi \to F_\infty^\psi$ ранее аналогичные результаты были установлены для случая, когда $\psi \in \mathcal{I}$ и $0 < p \le \infty$ (см.,напр., [51]). При этом сам критерий формулировался не в терминах весов, задающих пространства, а в терминах функции $g \in \mathbb{C}$, порождающей оператор.

Аналогично, предложение 3.2.6 и оценки (2.3.15), (2.3.19) позволяют установить следующий результат.

Предложение 3.2.8. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$ и $\rho(r) \to \rho \in (0, 2]$ — сильный уточненный порядок.*

(i) Для того чтобы оператор Вольтерра $T_g : F_p^{\rho(r)} \to F_\infty^\psi$, где $p \in [1, \infty)$, был ограничен достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)| \cdot e^{|z|^{\rho(|z|)} - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} < \infty.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : F_p^{\rho(r)} \to F_\infty^\psi$ был ограничен, достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|z|+2)^{\rho(|z|+2)} - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} < \infty, & 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|z|+1)^{\rho(|z|+1)} - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

3.2.2 Условия компактности композиционных и интегральных операторов

В настоящем разделе рассматривается задача о компактности композиционных и интегральных операторов в классическом и обобщенном пространствах Фока. При этом в качестве весов, задающих обобщенные пространства, рассматриваются радиальные веса $\psi(z)$ общего вида, которые являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями.

Из следствий 1.4.10, 1.4.14 и оценок (2.3.14) и (2.3.16) непосредственным образом вытекает

Теорема 3.2.9. *Пусть ψ — слабо растущая в $\mathbb{C}$ функция, v — произвольный вес на $\mathbb{C}$, g и φ — две целые функции.*

(i) Если $p \in [1, \infty)$ и

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot e^{\psi(\varphi(z))}}{v(z)} = 0, \tag{3.2.1}$$

то оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F_p^\psi \to H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.

(ii) Если дополнительно известно, что вес ψ субаддитивен и

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{|g(z)| \cdot e^{\psi(\varphi(z))}}{v(z)} = 0, \ 1 \le p \le \infty, \tag{3.2.2}$$

то оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F_p^\psi \to B_{v,0}(G)$ компактен.

Доказательство. (i): В самом деле, в данном случае для любой функции f из F_p^ψ

$$\delta_z \circ W_{g,\varphi} f = g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)} f, z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому $\|\delta_z \circ W_{g,\varphi} f\|^* = |g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*$, где сопряженная норма берется в $X^* = (F_p^\psi)^*$. Тогда из условия (1.3.7), заключаем что

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\|\delta_z \circ W_{g,\varphi} f\|^*}{v(z)} = 0,$$

и остается воспользоваться теоремой 1.3.2, чтобы сделать вывод о том, что оператор $W_{g,\varphi}$: $F_p^\psi \to H_v^0(\mathbb{C})$ компактен.

(ii): аналогично. □

Теорема 3.2.9 сформулирована для обобщенных пространств Фока, задаваемых слабо растущими в $\mathbb{C}$ функциями ψ, и, в соответствии с отмеченным выше, верна для почти гармонических ψ. В качестве следствий теоремы 3.2.9 получаем достаточные условия непрерывности композиционных операторов в $F^{p,q}_\alpha$ и $F^{\rho(r)}_p$. Именно, теорема 3.2.9 и оценки (2.3.12) и (2.3.16) позволяют получить такой результат

Следствие 3.2.10. *Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, g и φ — целые функции, $\alpha > 0$ и $0 < q \leq 2$.*

(i) Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^{p,q}_\alpha \to H_v(\mathbb{C})$, где $p \in [1,\infty)$, был компактен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot e^{\frac{\alpha|\varphi(z)|^q}{q}}}{v(z)} = 0. \tag{3.2.3}$$

(ii) Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^{p,q}_\alpha \to B_v(G)$ был компактен достаточно, чтобы

$$\lim_{z\to\partial G} \frac{|g(z)| \cdot e^{\frac{\alpha\cdot|\varphi(z)|^q}{q}}}{v(z)} = 0,\ 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.2.4}$$

Доказательство. (i): Пространство F^2_α является банаховым и для него, как известно (см. [63, теорема 2.7]), $\|\delta_z\|^*_{F^2_\alpha} = e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}$ (сопряженная норма берется в $(F^2_\alpha)^*$). Отсюда и из теорем 1.3.2 и 3.2.9 следует, что условие (3.2.4) необходимо и достаточно для компактности оператора $W_{g,\varphi}$: $F^2_\alpha \to H^0_v(\mathbb{C})$.

(ii): аналогично. □

Из теоремы 3.2.9 и оценок (2.3.15), (2.3.19) непосредственным образом следует

Предложение 3.2.11. *Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, g и φ — целые функции, $\rho(r) \to \rho \in (0, 2]$ — некоторый сильно уточненный порядок.*

(i) Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^{\rho(r)}_p \to H_v(\mathbb{C})$, где $p \in [1,\infty)$, был компактен, достаточно, чтобы

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot e^{|\varphi(z)|^{\rho(|\varphi(z)|)}}}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : F^{\rho(r)}_p \to B_v(G)$ был компактен, достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|\varphi(z)|+2)^{\rho(|\varphi(z)|+2)}}}{v(z)} < \infty, & 1 \leq p < \infty \\ \lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|\varphi(z)|+1)^{\rho(|\varphi(z)|+1)}}}{v(z)} < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Теперь изучим вопрос о компактности оператора Вольтерра и его союзного в пространствах Фока, задаваемых весами из класса, введённого в работе [35]. Покажем, что для соответствующих пространств F_p^{ψ} имеют место аналоги результатов, установленных в разделе 3.2.1 в случае круга. При этом, всюду ниже будем предполагать, что $X \subset H(\mathbb{C})$ — квазибнахово пространство, содержащее полиномы, такое что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости τ_{uc} на компактах.

Из предложения 1.5.24 и леммы 3.2.5 следует непосредственно

Предложение 3.2.12. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $T_g : X \to F_\infty^{\psi}(\mathbb{C})$ компактен, если выполнено условие:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))e^{\psi(z)}} = 0.$$

(ii) Для того, чтобы оператор $S_g : X \to F_\infty^{\psi}(\mathbb{C})$ был компактен, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))e^{\psi(z)}} = 0.$$

Заметим, что предложение 3.2.12 в качестве частных случаев содержит результаты работы [51] о компактности оператора Вольтерра $T_g : F_p^{\psi} \to F_\infty^{\psi}$ для $\psi \in \mathcal{I}$ и $0 < p \le \infty$. Из него также можно легко, подобно тому как это было сделано в разделе 3.1.3 в случае ограниченности, получить аналогичные критерии компактности для $T_g : F_p^{\psi_1} \to F_\infty^{\psi_2}$ в случае двух весов ψ_1 и ψ_2 из $\mathcal{I}$. При этом, для оператора $S_g : F_p^{\psi} \to F_\infty^{\psi}$ условия компактности в терминах весов, определяющих пространства, ранее не изучались. Кроме того, установленные в данном разделе результаты позволяют исследовать и ситуацию, когда ψ_1 не обязательно содержится в $\mathcal{I}$. Так предложение 3.2.12 и оценки (2.3.14), (2.3.16), влекут такой результат.

Предложение 3.2.13. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$, $\alpha > 0$ и $0 < q \le 2$.*

(i) Для того чтобы оператор Вольтерра $T_g : F_\alpha^{p,q} \to F_\infty^{\psi}$, где $p \in [1, \infty)$, был компактен достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g'(z)| \cdot e^{\frac{\alpha}{q}|z|^q - \psi(|z|)}}{1+\psi'(|z|)} = 0.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : F_\alpha^{p,q} \to F_\infty^{\psi}$ был компактен, достаточно, чтобы

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)| \cdot e^{\frac{\alpha}{q}|z|^q - \psi(z)}}{1+\psi'(|z|)} = 0, \quad 1 \le p \le \infty$$

Аналогично, предложение 3.2.12 и оценки (2.3.15), (2.3.19) позволяют установить следующий результат.

Предложение 3.2.14. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$ и $\rho(r) \to \rho \in (0, 2]$ — сильный уточненный порядок.*

(i) Для того чтобы оператор Вольтерра $T_g : F_p^{\rho(r)} \to F_\infty^\psi(\mathbb{C})$, где $p \in [1, \infty)$, был компактен, достаточно, чтобы

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g^{'}(z)| \cdot e^{|z|^{\rho(|z|)} - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} = 0.$$

(ii) Для того чтобы оператор $S_g : F_p^{\rho(r)} \to F_\infty^\psi(\mathbb{C})$ был компактен, достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|z|+2)^{\rho(|z|+2)} - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} = 0, & 1 \le p < \infty \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{|g(z)| \cdot e^{(|z|+1)^{\rho(|z|+1)} - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} = 0, & p = \infty. \end{cases}$$

3.3 Приложения к проективным и индуктивным пределам последовательностей пространств голоморфных функций

В этом разделе приводятся приложения абстрактных критериев об ограниченности классических операторов к весовым пространствам конкретного вида. Именно, рассматриваются проективные (индуктивные) пределы последовательностей конкретных весовых пространств. Ранее подобная задача рассматривалась в работах [16, 27] для случая банаховых пространств. Случай квазибанаховых пространств изучался лишь для пространств другой природы.

Приведём ряд результатов об ограниченности композиционных операторов на проективном (индуктивном) пределе последовательностей (квази)банаховых пространств с интегральными нормами. При этом, существенным образом будем опираться на следствия 1.4.7 и 1.4.8, приведенные в разделе 1.2.3.

Образуем для пространств Бергмана, Дирихле, Харди и Дирихле-Харди их индуктивные и проективные пределы.

Пусть $\gamma \geq 0$. Рассмотрим последовательность $p_n \downarrow \gamma$, то есть $p_1 > p_2 > ... > p_n \to \gamma,\ n \to \infty$.

Тогда при некоторых $C_n \geq 1$

$$\|f\|_{H^{p_{n+1}}} \leq C_n \|f\|_{H^{p_n}}, \ \forall f \in H^{p_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

При этом $H^{p_1} \subset H^{p_2} \subset ...$ и, значит, естественно определить индуктивный предел последовательности пространств Харди

$$H^{\{\gamma\}}(\mathbb{D}) = \bigcup_n H^{p_n}(\mathbb{D}).$$

Аналогичным образом вводятся индуктивные пределы последовательностей пространств Бергмана, Дирихле и Дирихле-Харди

$$A^{\{\gamma\}} = \bigcup_n A_\alpha^{p_n}, \ \ D^{\{\gamma\}} = \bigcup_n D_\alpha^{p_n}, \ \ S^{\{\gamma\}} = \bigcup_n S^{p_n}.$$

Из следствия 1.4.8 (i) вытекает такой результат

Следствие 3.3.1. *Пусть $g \in H(\mathbb{D})$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор умножения $M_g : A^{\{\gamma\}} \to \mathcal{V}H(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{-\frac{\alpha+2}{p}+\frac{1}{n}} \cdot |g(z)|}{v_m(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор умножения $M_g : D^{\{\gamma\}} \to \mathcal{V}H(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|)^{-\frac{\alpha+2-p}{p}+\frac{1}{n}} \cdot |g(z)|}{v_m(z)} < \infty, & p < \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{(\log\frac{2}{1-|z|^2})^{\frac{1-p}{p}-\frac{1}{n}} \cdot v_m(z)} < \infty, & p = \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{v_m(z)} < \infty, & p > \alpha+2. \end{cases}$$

(iii) Оператор умножения $M_g : H^{\{\gamma\}} \to \mathcal{V}H(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} \cdot |g(z)|}{v_m(z)} < \infty.$$

(iv) *Оператор умножения $M_g : S^{\{\gamma\}} \to \mathcal{V}H(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:*

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} \cdot |g(z)|}{v_m(z)} < \infty, & 0 < p < 1 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{v_m(z)} < \infty, & 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

Пусть теперь $0 \le \gamma < \infty$ и $0 < p_n \uparrow \gamma, n \to \infty$.

Тогда при некоторых $C_n \ge 1$

$$\|f\|_{H^{p_n}} \le C_n \|f\|_{H^{p_{n+1}}},\ \forall f \in H^{p_{n+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

При этом $H^{p_1} \supset H^{p_2} \supset \ldots$ и, значит, естественно определить проективный предел последовательности пространств Харди

$$H^{(\gamma)} = \bigcap_n H^{p_n}.$$

Аналогичным образом вводятся проективные пределы последовательностей пространств Бергмана, Дирихле и Дирихле-Харди

$$A^{(\gamma)} = \bigcap_n A^{p_n}_\alpha,\quad D^{(\gamma)} = \bigcap_n D^{p_n}_\alpha,\quad S^{(\gamma)} = \bigcap_n S^{p_n}.$$

Теперь сформулируем аналог теоремы 3.3.1 в проективном случае.

Следствие 3.3.2. *Пусть $g \in H(G)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Оператор $M_g D : A^{(\gamma)} \to HV(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:*

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|)^{-\frac{\alpha+2-p}{p}-\frac{1}{m}} \cdot |g(z)|}{v_n(z)} < \infty, & p < \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{(\log\frac{2}{1-|z|^2})^{\frac{1-p}{p}+\frac{1}{m}} \cdot v_n(z)} < \infty, & p = \alpha+2 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{v_n(z)} < \infty, & p > \alpha+2. \end{cases}$$

(ii) *Оператор $M_g D : D^{(\gamma)} \to HV(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{-\frac{\alpha+2}{p}-\frac{1}{m}} \cdot |g(z)|}{v_n(z)} < \infty.$$

(iii) Оператор $M_gD : H^{(\gamma)} \to HV(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{(1-|z|)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{m}} \cdot |g(z)|}{v_n(z)} < \infty, & 0 < p < 1 \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \dfrac{|g(z)|}{v_n(z)} < \infty, & 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

(iv) Оператор $M_gD : S^{(\gamma)} \to HV(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{m}} \cdot |g(z)|}{v_n(z)} < \infty.$$

3.4 Приложения к интегральным операторам Чезаро и Харди

В настоящем разделе полученные ранее в главе 1 результаты об ограниченности и компактности произвольного линейного оператора будут применены к интегральным операторам Чезаро и Харди.

Пусть G — ограниченная односвязная область в комплексной плоскости, содержащая начало координат. Для фиксированной функции $g \in H(G)$ оператор Чезаро определяется по правилу

$$C_g : f \mapsto \frac{1}{z}\int_0^z f(w)g'(w)dw, \ z \neq 0, \ \text{ и } \ C_gf(0) = f(0)g'(0).$$

Как известно (см. [64]), оператор Чезаро C_g тесно связан с интегральным оператором Вольтерра T_g. Именно, пусть X, Y — квазибанаховы пространства, непрерывно вложенные в $H(G)$. Если оператор $S : f \mapsto z \cdot f$ умножения на независимую переменную z непрерывен на Y, и имеет линейный непрерывный левый обратный $\hat{S}$, то справедливы следующие равенства $T_g = SC_g$ и $C_g = \hat{S}T_g$. Отсюда следует, что $T_g : X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен $C_g : X \to Y$.

В связи с вышеизложенным заметим, что линейным левым обратным к S на всём $H(G)$ является оператор

$$\hat{S} : g \mapsto \frac{g(z) - g(0)}{z}. \tag{3.4.1}$$

Итак, верна

Лемма 3.4.1. *Пусть X, Y — квазибанаховы пространства, непрерывно вложенные в $H(G)$. Если операторы S и $\hat{S}$, как в (3.4.1), ограничены на Y, то операторы Чезаро $C_g : X \to Y$ и Вольтерра $T_g : X \to Y$ ограничены или не ограничены одновременно.*

Теперь покажем, что если $Y = H_v(G)$, и $\lim\limits_{z\to\partial G} v(z) = +\infty$, то операторы S и $\hat{S}$ ограничены на $H_v(G)$.

В самом деле, пусть $R := \sup\limits_{z\in G} |z|$. В силу нашего предположения о том, что G — ограниченная область, имеем, что $R < +\infty$. Тогда для любой функции $f \in H_v(G)$ имеем при всех $z \in G$

$$\|Sf(z)\|_{H_v} = \sup_{z\in G} \frac{|z \cdot f(z)|}{v(z)} \leq R \cdot \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = R \cdot \|f\|_{H_v},$$

откуда следует ограниченность оператора $S : H_v(G) \to H_v(G)$.

Теперь рассмотрим оператор $\hat{S}$. Выберем $r > 0$ так, чтобы круг $|z| \leq r$ содержался в области G, и положим $c := \min\limits_{|z|\leq r} v(z)$, $C := \max\limits_{|z|\leq r} v(z)$.

Ясно, что $0 < c \leq C < +\infty$. Поскольку для любой функции $f \in H(G)$ функция $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ также принадлежит $H(G)$, то с учётом принципа максимума аналитических функций имеем

$$\begin{aligned}\max_{|z|\leq r} \frac{|(\hat{S}f)(z)|}{v(z)} &\leq \frac{1}{c} \cdot \max_{|z|=r} |(\hat{S}f)(z)| \\ &= \frac{1}{cr} \cdot \max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| \leq \frac{C}{cr} \cdot \Big(\max_{|z|\leq r} \frac{|f(z)|}{v(z)} + \frac{|f(0)|}{v(0)} \Big) \leq 2\frac{C}{cr} \cdot \|f\|_{H_v}.\end{aligned}$$

Далее, при любом $z \in G$ с $|z| > r$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{|(\hat{S}f)(z)|}{v(z)} &\leq \frac{1}{r} \cdot \frac{|f(z)| + |f(0)|}{v(z)} \\ &\leq \frac{1}{r} \cdot \Big(\|f\|_{H_v} + \frac{v(0)}{v(z)} \cdot \frac{|f(0)|}{v(0)} \Big) \leq \frac{1}{r}(1 + A) \cdot \|f\|_{H_v},\end{aligned}$$

где $A := \frac{v(0)}{\min\limits_{z\in G} v(z)}$.

Отметим, что из свойств веса следует, что $\min\limits_{z\in G} v(z) > 0$ и, следовательно, $A < +\infty$.

Таким образом, имеет место следующий результат

Лемма 3.4.2. *Пусть v — радиальный вес на G. Оператор умножения $S : H_v(G) \to H_v(G)$ на независимую переменную z и его линейный левый обратный $\hat{S} : H_v(G) \to H_v(G)$ ограничены.*

Из доказанного и лемм 3.4.1 и 3.4.2 следует такой результат.

Лемма 3.4.3. *Пусть v — радиальный вес на G, g — фиксированная функция из $H(G)$. Оператор Чезаро $C_g : X \to H_v(G)$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(G)$.*

Его применение к конкретным пространствам приводит к такому результату

Следствие 3.4.4. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, $g \in H(\mathbb{D})$ и $\beta > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Оператор Чезаро $C_g : X \to H_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) Оператор Вольтерра $T_g : X \to H_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(iii) Оператор умножения $M_{g'} : X \to H_{\beta+1}(\mathbb{D})$ ограничен.

(iv)

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\beta+1} |g'(z)| \|\delta_z\|^* < \infty.$$

Замечание 3.4.5. Следствие 3.4.4 обобщает пункт (a) следствия 2.3 из [64] на случай квазибанаховых пространств вместо банаховых.

Перейдем теперь к изучению ограниченности интегральных операторов Вольтерра и Чезаро, действующих в пространство Блоха. Всюду ниже v — радиальный вес на $\mathbb{D}$.

Покажем, что для любой функции $f \in B_v(\mathbb{D})$ справедливо неравенство $\|Sf\|_{B_v} \leq A{\cdot}\|f\|_{B_v}$.

Напомним, что

$$\|f\|_{B_v} = \|f'\|_{H_v} + |f(0)|.$$

Для произвольного линейного оператора справедливо

$$\|Tf\|_{B_v} = \|(Tf)'\|_{H_v} + |Tf(0)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\delta_z(Tf)'|}{v(z)} + |Tf(0)|.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\|Sf\|_{B_v} &= \|(Sf)'\|_{H_v} + |Sf(0)| = \|(z\cdot f(z))'\|_{H_v} + |0\cdot f(0)| \\ &= \|f(z) + z\cdot f'(z)\|_{H_v} \leq \|f\|_{H_v} + \|z\cdot f'(z)\|_{H_v} \leq \|f'\|_{H_v} + \|f\|_{H_v}.\end{aligned}$$

Известно, что $\|f'\|_{H_v} \leq \|f\|_{B_v}$.

Остается показать, что $\|f\|_{H_v} \leq M\cdot\|f\|_{B_v}$, где M — некоторая постоянная.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in B_v$. Имеем при всех $z \in \mathbb{D}$

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \Big| \int_0^z f^{'}(t)dt + f(0) \Big| \le \Big| \int_0^z f^{'}(t)dt \Big| + |f(0)| \\
&\le |z| \cdot \|f\|_{B_v} \cdot v(z) + \frac{|f(0)|}{v(0)} \cdot v(z) \le \Big(\|f\|_{B_v} + \frac{1}{v(0)} \|f\|_{B_v} \Big) \cdot v(z) \\
&= A \cdot \|f\|_{B_v} \cdot v(z),
\end{aligned}
$$

где $A := 1 + \frac{1}{v(0)}$.

Отсюда заключаем

$$
\|f\|_{H_v} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{v(z)} \le A \cdot \|f\|_{B_v}.
$$

Таким образом,

$$
\|Sf\|_{B_v} \le \|f\|_{B_v} + A \cdot \|f\|_{B_v} = (1 + A) \cdot \|f\|_{B_v}.
$$

Откуда следует ограниченность $S : B_v(\mathbb{D}) \to B_v(\mathbb{D})$.

Теперь рассмотрим оператор $\hat{S}$. Для любой функции $f \in H(\mathbb{D})$ функция $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ также принадлежит $H(\mathbb{D})$ а, следовательно, и $\Big(\frac{f(z)-f(0)}{z}\Big)'$ также принадлежит $H(\mathbb{D})$. Имеем

$$
(\hat{S}f)^{'}(z) = \Big(\frac{f(z) - f(0)}{z} \Big)' = \frac{f'(z) \cdot z - (f(z) - f(0))}{z^2} = \frac{f'(z) - (\hat{S}f)(f)}{z}.
$$

При $|z| \le \frac{1}{2}$ с учётом принципа максимума модуля имеем

$$
\begin{aligned}
\max_{|z| \le \frac{1}{2}} \frac{|(\hat{S}f)^{'}(z)|}{v(z)} &= \max_{|z| \le \frac{1}{2}} \Big| \frac{f'(z) - (\hat{S}f)(z)}{z} \Big| \cdot \frac{1}{v(z)} \\
&\le \frac{2}{v(0)} \cdot \max_{|z| = \frac{1}{2}} |f'(z) - (\hat{S}f)(z)| \le \frac{2v(\frac{1}{2})}{v(0)} \cdot \max_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{|f'(z) - (\hat{S}f)(z)|}{v(z)} \\
&= \frac{2v(\frac{1}{2})}{v(0)} \cdot \max_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{|(\hat{S}f)^{'}(z)|}{v(z)}.
\end{aligned}
$$

Заметим теперь, что из представления $f(z) - f(0) = \int_0^z f^{'}(t)dt$ следует, что
$\dfrac{|f(z) - f(0)|}{v(z)} \le \max_{\xi \in [0,z]} \dfrac{|f^{'}(\xi)|}{v(\xi)} \le \|f^{'}\|_{H_v}$ при любом $z \in \mathbb{D}$. Поэтому при $\frac{1}{2} \le |z| < 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
\sup_{\frac{1}{2} \le |z| < 1} \frac{|(\hat{S}f)^{'}(z)|}{v(z)} &= \sup_{\frac{1}{2} \le |z| < 1} \frac{|f'(z) - (\hat{S}f)(z)|}{|z| \cdot v(z)} \\
&\le 2 \cdot \Big(\sup_{\frac{1}{2} \le |z| < 1} \frac{|f'(z)|}{v(z)} + \sup_{\frac{1}{2} \le |z| < 1} \frac{|(\hat{S}f)(z)|}{v(z)} \Big) \\
&\le 2 \Big(\|f^{'}\|_{H_v} + \sup_{\frac{1}{2} \le |z| < 1} \frac{|f(z) - f(0)|}{|z| \cdot v(z)} \Big) \le 2 \Big(\|f^{'}\|_{H_v} + 2 \sup_{\frac{1}{2} \le |z| < 1} \frac{|f(z) - f(0)|}{v(z)} \Big) \le 6 \cdot \|f^{'}\|_{H_v}.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из оценки при $|z| \le \frac{1}{2}$ следует, что

$$\|(\hat{S}f)^{'}\|_{H_v} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|(\hat{S}f)(z)|}{v(z)} \le \frac{12v(\frac{1}{2})}{v(0)} \cdot \|f^{'}\|_{H_v} \le \frac{12v(\frac{1}{2})}{v(0)} \cdot \|f\|_{B_v}.$$

Далее, $\hat{S}f(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)-f(0)}{z} = f^{'}(0)$. Поэтому

$$|\hat{S}f(0)| = |f^{'}(0)| = v(0) \cdot \frac{|f^{'}(0)|}{v(0)} \le v(0) \cdot \|f^{'}\|_{H_v} \le v(0) \cdot \|f\|_{B_v}.$$

Отсюда и из предыдущего заключаем, что

$$\|\hat{S}f\|_{B_v} = \|(\hat{S}f)^{'}\|_{H_v} + |(\hat{S}f)(0)| \le \Big(\frac{12v(\frac{1}{2})}{v(0)} + v(0)\Big) \cdot \|f\|_{B_v}.$$

Откуда следует ограниченность $\hat{S} : B_v(\mathbb{D}) \to B_v(\mathbb{D})$. Следовательно, справедлив такой результат

Лемма 3.4.6. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$. Оператор умножения $S : B_v(\mathbb{D}) \to B_v(\mathbb{D})$ на независимую переменную z и его линейный левый обратный $\hat{S} : B_v(\mathbb{D}) \to B_v(\mathbb{D})$ ограничены.*

Таким образом, ранее приведенная лемма 3.4.3 об одновременной ограниченности или неограниченности операторов Чезаро и Вольтерра справедлива и в случае, когда оператор умножения и оператор, обратный ему, ограничены на пространстве Блоха. Именно, имеет место следующий результат

Лемма 3.4.7. *Если операторы S и $\hat{S}$ ограничены на $B_v(\mathbb{D})$, то операторы Чезаро $C_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ и Вольтерра $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничены или не ограничены одновременно.*

Из проведенных рассуждений и леммы 3.4.7 вытекает такой результат.

Лемма 3.4.8. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Чезаро $C_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор Вольтерра $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$.*

Из леммы 3.4.8 следует такое утверждение.

Следствие 3.4.9. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, $g \in H(\mathbb{D})$ и $\beta > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Оператор Чезаро $C_g : X \to B_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) Оператор Вольтерра $T_g : X \to B_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(iii) Оператор умножения $M_{g'} : X \to H_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(iv)

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\beta \, |g'(z)| \|\delta_z\|^* < \infty.$$

Замечание 3.4.10. Следствие 3.4.9 обобщает пункт (b) следствия 3.2 из [64] на случай квазибанаховых пространств вместо банаховых.

Заметим, что если $g(z) \equiv z$ в G, то оператор Чезаро C_g превращается в оператор Харди и обозначается через H; таким образом, $H : f \mapsto \frac{1}{z}\int_0^z f(w)dw$. Применив основные результаты данного раздела — следствия 3.4.4 и 3.4.9 к оператору Харди, приходим к следующим результатам.

Следствие 3.4.11. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, $\beta > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Оператор Харди $H : X \to H_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) Интегральный оператор $I : X \to H_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(iii)

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\beta+1} \|\delta_z\|^* < \infty.$$

Следствие 3.4.12. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, $\beta > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Оператор Харди $H : X \to B_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(ii) Интегральный оператор $I : X \to B_\beta(\mathbb{D})$ ограничен.

(iii)

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\beta} \|\delta_z\|^* < \infty.$$

Приведем еще один результат о компактности оператора Вольтерра.

Лемма 3.4.13. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, и v — радиальный вес на $\mathbb{D}$. Оператор Чезаро $C_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда компактен оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор Чезаро $C_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ компактен. Так как оператор умножения $S : H_v(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ на независимую переменную z ограничен, то $T_g = SC_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ компактен, как композиция компактного и ограниченного операторов.

Достаточность. Пусть оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ компактен. По лемме 3.4.2 линейный левый обратный оператор $\hat{S} : H_v(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ к оператору $S : H_v(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен. Следовательно, оператор Чезаро $C_g = \hat{S}T_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ компактен, как композиция компактного и ограниченного операторов. □

Из предложения 1.5.22 и леммы 3.4.13 следует такой результат

Предложение 3.4.14. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, и v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (1.5.1). Оператор Чезаро $C_g : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z \to 1} \frac{(1 - |z|) \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

Полагая $g(z) \equiv z$, из приложения 3.4.14 получаем критерий компактности оператора Харди.

Предложение 3.4.15. *Пусть X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$, и v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (1.5.1). Оператор Харди $H : X \to H_{v,0}(\mathbb{D})$ компактен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z \to 1} \frac{(1 - |z|) \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

Замечание 3.4.16. Применяя предложения 3.4.14 и 3.4.15 к пространствам Бергмана, Дирихле, Харди и Дирихле-Харди, можно получить аналог следствия 3.1.3.

Приложение

Список обозначений пространств

$H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в области G, **стр. 15**

$H_v(G)$ — пространство функций, голоморфных в области G с sup-нормой, **стр. 15**

$B_v(G)$ — пространство Блоха, **стр. 15**

$H_{v,0}(G)$ — пространство голоморфных в области G функций f с sup-нормой, таких что $f \in H_v(G)$ и $\lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{|f(z)|}{v(z)} = 0$, **стр. 15**

$B_{v,0}(G)$ — пространство голоморфных в области G функций f с sup-нормой, таких что $f \in B_v(G)$ и $\lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{|f'(z)|}{v(z)} = 0$, **стр. 15**

$HV(G) = \bigcap\limits_n H_{v_n}(G)$ — проективный предел последовательности банаховых пространств $(H_{v_n}(G))_n$, **стр. 21**

$\mathcal{V}H(G) = \bigcup\limits_n H_{v_n}(G)$ — индуктивный предел последовательности банаховых пространств $(H_{v_n}(G))_n$, **стр. 21**

$\mathcal{X} = \bigcup\limits_n X_n$ — индуктивный предел последовательности банаховых пространств X_n, **стр. 21**

$H_v^0(\mathbb{D})$ — пространство голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций f, таких что $f \in H_v(\mathbb{D})$ и $f(0) = 0$, **стр. 37**

$H_w(G)$ — пространство функций, голоморфных в области G, задаваемое весом $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$, **стр. 37**

$H_{\alpha,\beta}(\mathbb{C})$ — пространство голоморфных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций, задаваемое весом $v(r) = r^\alpha e^{\beta r}$, $r \in (0,\infty), \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0$, **стр. 42**

$B_v^0(\mathbb{D})$ — пространство Блоха, состоящее из функций f, таких что $f \in B_v(\mathbb{D})$ и $f(0) = 0$, **стр. 43**

$H_{\alpha,\beta,0}(\mathbb{C})$ — пространство голоморфных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций f, таких что $f \in H_{\alpha,\beta}(\mathbb{C})$ и $\lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{|f(z)|}{v(z)} = 0$, **стр. 48**

A^p_α — пространство Бергмана, **стр. 53**

D^p_α — пространство Дирихле, **стр. 53**

H^p — пространство Харди, **стр. 53**

S^p — пространство Дирихле-Харди, **стр. 53**

F^p_α — классическое пространство Фока, **стр. 54**

F^ψ_p — обобщённое пространство Фока, задаваемое весом ψ, **стр. 55**

$F^{p,q}_\alpha$ — обобщённое пространство Фока, задаваемое весом $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q$, **стр. 55**

Ψ_0 — класс весов, удовлетворяющих условию (2.3.4), **стр. 58**

$F^{\rho(r)}_p$ — обобщённое пространство Фока, задаваемое весом $r^{\rho(r)}$, **стр. 63**

H_β — пространство всех функций, голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$, задаваемое весом $v(z) = (1-|z|^2)^{-\beta},\ \beta > 0$, **стр. 69**

$H_{\beta,0}$ — пространство всех функций, голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$, таких, что $f \in H_\beta$ и $\lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{|f(z)|}{v(z)} = 0$, **стр. 69**

$H^{\{\gamma\}}(\mathbb{D}) = \bigcup\limits_n H^{p_n}(\mathbb{D})$ — индуктивный предел последовательности пространств Харди, **стр. 81**

$A^{\{\gamma\}} = \bigcup\limits_n A^{p_n}_\alpha$ — индуктивный предел последовательности пространств Бергмана, **стр. 81**

$D^{\{\gamma\}} = \bigcup\limits_n D^{p_n}_\alpha$ — индуктивный предел последовательности пространств Дирихле, **стр. 81**

$S^{\{\gamma\}} = \bigcup\limits_n S^{p_n}$ — индуктивный предел последовательности пространств Дирихле-Харди, **стр. 81**

$H^{(\gamma)} = \bigcap\limits_n H^{p_n}$ — проективный предел последовательности пространств Харди, **стр. 82**

$A^{(\gamma)} = \bigcap\limits_n A^{p_n}_\alpha$ — проективный предел последовательности пространств Бергмана, **стр. 82**

$D^{(\gamma)} = \bigcap\limits_n D^{p_n}_\alpha$ — проективный предел последовательности пространств Дирихле, **стр.**

$S^{(\gamma)} = \bigcap\limits_n S^{p_n}$ — проективный предел последовательности пространств Дирихле-Харди, **стр. 82**

$B_\beta := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{B_\beta} = \sup\limits_{z\in G} |f^{'}(z)| \cdot (1-|z|^2)^\beta + |f(0)| < \infty \right\}$ — пространство Блоха, порождённое весом $(1-|z|^2)^\beta$, **стр. 85**

Список обозначений операторов

$\delta_z : f \mapsto f(z)$ — дельта-функция, вычисляющая значение каждой функции f в наперёд заданной точке $z \in G$, **стр. 17**

$\delta_z^{'} : f \mapsto f^{'}(z)$ — дельта-функция, вычисляющая значение каждой функции $f^{'}$ в наперёд заданной точке $z \in G$, **стр. 17**

$D : f \mapsto f^{'}$ — оператор дифференцирования, **стр. 19**

$(W_{g,\varphi}f)(z) = g(z) \cdot f(\varphi(z)),\ f \in H(G),\ z \in G$ — оператор весовой композиции, **стр.29**

$C_\varphi : f \mapsto f(\varphi(z))$ — оператор обычной композиции, **стр. 30**

$M_g : f \mapsto g \cdot f$ — оператор умножения на $g(z)$, **стр. 30**

$(M_g Df)(z) = g(z) \cdot f^{'}(z)$ — композиция операторов умножения и дифференцирования, **стр. 30**

$T_g : f \mapsto \int_0^z f(w)g'(w)dw,\ z \in G$ — интегральный оператор Вольтерра, **стр. 35**

$S_g : f \mapsto \int_0^z f'(w)g(w)dw,\ z \in G$ — интегральный оператор союзный с оператором Вольтерра, **стр. 35**

$I : f \mapsto \int_0^z f(w)dw$ — интегральный оператор, **стр. 35**

$C_g : f \mapsto \frac{1}{z}\int_0^z f(w)g'(w)dw,\ z \neq 0,$ и $C_g f(0) = f(0)g'(0)$ — интегральный оператор Чезаро, **стр. 83**

$S : f \mapsto z \cdot f$ — оператор умножения на независимую переменную z, **стр. 83**

$\hat{S} : g \mapsto \frac{g(z)-g(0)}{z}$ — линейный левый обратный к S на всём $H(G)$, **стр. 88**

$H : f \to \frac{1}{z}\int_0^z f(w)dw$ — оператор Харди, **стр. 88**

Литература

[1] Абанин, А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения / А. В. Абанин. — М.: Наука, 2007. — 222 с.

[2] Абанин, А. В. О некоторых признаках слабой достаточности / А. В. Абанин // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 4. С. 442 — 454.

[3] Абанин, А. В. Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций / А. В. Абанин, Ф. Ч. Тиен // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2017. — Т. 142. С. 3 — 13.

[4] Баладай, Р. А. От интегральных оценок функций к равномерным и локально усредненным / Р. А. Баладай, Б. Н. Хабибуллин // Изв. вузов. Математика. — 2017. — № 10. С. 15 — 25.

[5] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 543 с.

[6] Лелон, П. Целые функции многих комплексных переменных / П. Лелон, Л. Груман. — М.: Мир, 1989. — 350 с.

[7] Макаров, Б. М. Об индуктивных пределах нормированных пространств / Б. М. Макаров // Вестник ЛГУ. — 1965. — Т. 20, № 13. С. 50 — 58.

[8] Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. — М.: Лань, 2009. Т. 1. — 496 с.

[9] Привалов, И. И. Субгармонические функции / И. И. Привалов. — М.;Л.: Гостехиздат, 1937. — 201 с.

[10] Робертсон, А. П. Топологические векторные пространства / А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. — М.: Мир, 1967. — 258 с.

[11] Ронкин, Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л. И. Ронкин. — М.: Наука, 1971. — 432 с.

[12] Себаштьян-и-Силва, Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях / Ж. Себаштьян-и-Силва // Математика. — 1957. — Т. 1, № 1. С. 60 — 77.

[13] Хёрмандер, Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных / Л. Хёрмандер. — М.:Мир, 1967. — 280 с.

[14] Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.

[15] Юлмухаметов, Р. С. Аппроксимация субгармонических функций / Р. С. Юлмухаметов // Analysis Mathematica. — 1985. — Т. 11, № 3. С. 257 — 282.

[16] Abanin, A. V. Path components of the space of (weighted) composition operators on Bergman spaces / A. V. Abanin, L. H. Khoi, P. T. Tien // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2021. — Vol. 93, № 1. P. 1 — 24.

[17] Abanin, A. V. Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions / A. V. Abanin, P. T. Tien // Math. Nachr. — 2017. — Vol. 290, № 8–9. P. 1144 — 1162.

[18] Aleman, A. An integral operator on H^p / A. Aleman, A. G. Siskakis // Complex Var. Theory Appl. — 1995. — Vol. 28. P. 149 — 158.

[19] Anderson, A. M. Multiplication and Integral Operators on Banach Spaces of Analytic Functions / A. M. Anderson — PhD Thesis, University of Hawaii, 2010.

[20] Atzmon, A. Surjectivity and invariant subspaces of differential operators on weighted Bergman spaces of entire functions, Bergman spaces and related topics in complex analysis / A. Atzmon, B. Brive // Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI. — 2006. — Vol. 404. P. 27 — 39.

[21] Basallote, M. Volterra operators and semigroups in weighted Banach spaces of analytic functions / M. Basallote, M. D. Contreras, C. Hernández-Mancera // Collect Math. Soc. — 2014. — Vol. 65, № 2. P. 233 — 249.

[22] Beltrán, M. J. Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions / M. J. Beltrán, J. Bonet, C. Fernández // Proc. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 141, № 12. P. 4293 — 4303.

[23] Bierstedt, K. D. Duality and Biduality in Fréchet and (LB)–Spaces / K. D. Bierstedt, J. Bonet // Progress in Functional Analysis, North–Holland Math., Amsterdam. — 1992. — Vol. 170. P. 113–133.

[24] Bierstedt, K. D. Associated weights and spaces of holomorphic functions / K. D. Bierstedt, J. Bonet, J. Taskinen // Studia Math. — 1998. — Vol. 127, № 2. P. 137 — 168.

[25] Bierstedt, K. D. A Projective Description of Weighted Inductive Limits / K. D. Bierstedt, R. Meis, W. H. Summers // Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 272. P. 107 — 106.

[26] Bonet, J. Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them / J. Bonet // Univ. Sevilla Secr. Publ. — 2003. — Vol. 64. P. 117 — 138.

[27] Bonet, J. Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions / J. Bonet // Math. Z. — 2009. — Vol. 261. P. 649 — 657.

[28] Bonet, J. Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions / J. Bonet, P. Domański, M. Lindström // J. Aust. Math. Soc. — 1998. — Vol. 64. P. 101 — 118.

[29] Bonet, J. Weakly compact composition operators on locally convex spaces / J. Bonet, M. Friz // Math. Nachr. — 2002. — Vol. 245. P. 26 — 44.

[30] Bonet, J. Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions / J. Bonet, M. Friz, E. Jorda // Publ. Math. Debrecen. — 2005. — Vol. 67. P. 333 — 348.

[31] Bonet, J. A note about Volterra operators on weighted Banach spaces of entire functions / J. Bonet, J. Taskinen // Math. Nachr. — 2015. — Vol. 288, №11–12. P. 1216 — 1225.

[32] Bonet, J. A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions / J. Bonet, E. Wolf // Arch. Math. (Basel). — 2003. — Vol. 81. P. 650 — 654.

[33] Carswell, B. Composition operators on the Fock space / B. Carswell, B. MacCluer, A. Schuster // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2003. — Vol. 69. P. 871 — 887.

[34] Constantin, O. A Volterra-type integration operator on Fock spaces / O. Constantin // Proc. Amer. Math. Soc. — 2012. — Vol. 140. P. 4247 — 4257.

[35] Constantin, O. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood-Paley formula on weighted Fock spaces / O. Constantin, J. A. Peláez // J. Geom. Anal. Soc. — 2016. — Vol. 26, № 2. P. 1109 — 1154.

[36] Contreras, M. Weighted composition operators in weighted Banach spacs of analytic functions / M. Contreras, A. G. Hernández-Diaz // J. Austral. Math. Soc.Ser. A. — 2000. — Vol. 69. P. 41 — 60.

[37] Contreras, M. D. Compact-type operators defined on H^∞ / M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal // Contemp. Math. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 232. P. 111 — 118.

[38] Cowen, C. C. Composition operators on spaces of analytic functions / C. C. Cowen, B. D. MacCluer // CRC Press, Boca Raton. — 1995. — 400 p.

[39] Eklund, T. Weighted Composition and Volterra Operators on Banach Spaces of Analytic Functions: Compactness and Spectral Properties / T. Eklund // Abo Akademi University Press, 2018. P. 1 — 40.

[40] Gao, Y. Order bounded weighted compostion operators mapping into the Dirichlet type spaces / Y. Gao, S. Kumar, C. Zhou // Chin. Ann. Math. Ser. B. — 2016. — Vol. 37. P. 585 — 594.

[41] Harutyunyan, A. On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions / A. Harutyunyan, W. Lusky // Studia Math. — 2008. — Vol. 184, № 1. P. 233 — 245.

[42] Hedenmalm, H. Theory of Bergman spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu // New York: Springer, 2000. — 286 p.

[43] Hoffman, K. Banach spaces of analytic functions / K. Hoffman. — Dover, New York, 1988. — 271 p.

[44] Hu, Z. Extended Cesaro operators on mixed norm spaces / Z. Hu // Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131, № 7. P. 2171 — 2179.

[45] Jarchow, H. Some functional analytic properties of composition operators / H. Jarchow // Quaestions Math. — 1995. — Vol. 18. P. 229 — 256.

[46] Lin, Q. Volterra type operators between Bloch type spaces and weighted Banach spaces / Q. Lin // Integr. Equ. Oper. Theory, https://doi.org/10.1007/s00020-019-2512-8. — 2019. — Vol. 91, № 2. Article 13.

[47] Lin, Q. Order boundedness of weighted compostion operators on weighted Dirichlet spaces and derivative Hardy spaces / Q. Lin, J. Liu, Y. Wu // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2020. — Vol. 27, № 4. P. 627 — 637.

[48] Lusky, W. On the structure of $H_{v,0}(\mathbb{D})$ and $h_{v,0}(\mathbb{D})$ / W. Lusky // Math. Nachr. — 1992. — Vol. 159. P. 279 — 289.

[49] Maccluer, B. D. Compact composition operators on $H^p(B_N)$ / B. D. Maccluer // Michigan J. Math. — 1985. — Vol. 32. P. 237 — 248.

[50] Mengestie, T. Spectral properties of Volterra-type integral operators on Fock–Sobolev spaces / T. Mengestie // J. Korean Math. Soc. — 2017. — Vol. 54, № 6. P. 1801 — 1816.

[51] Mengestie, T. Integral, differential and multiplication operators on generalized Fock spaces / T. Mengestie, S-I. Ueki // Complex Anal. Oper. Theory. — 2019. — Vol. 13, № 3. P. 935 — 953.

[52] Montes-Rodriguez, A. Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions / A. Montes-Rodriguez // J. Lond. Math. Soc. — 2000. — Vol. 61, № 2. P. 872 — 884.

[53] Ohno, S. Weighted composition operators from reproducing Hilbert spaces to Bloch spaces / S. Ohno, K. Stroethoff // Houst. J. Math. — 2011. — Vol. 37, № 2. P. 537 — 558.

[54] Shapiro, J. N. Composition operators and classical function theory / J. N. Shapiro // New York: Springer-Verlag, 1993. — 389 p.

[55] Taskinen, J. Compact composition operators on general weighted spaces / J. Taskinen // Houston J. Math. — 2011. — Vol. 27. P. 203 — 218.

[56] Tien, P. T. Weighted composition operators between different Fock spaces / P. T. Tien, L. H. Khoi // Potent.Anal. — 2019. — Vol. 50. P. 171 — 195.

[57] Tjani, M. Compact composition operators on Besov spaces / M. Tjani // Trans. Am. Math. Soc. — 2003. — Vol. 355, № 11. P. 4683 — 4698.

[58] Wojtaszczyk, P. Banach Spaces for Analysts / P. Wojtaszczyk // Cambridge Stud. Adv. Math. — 1991. — Vol. 25. — 400 p.

[59] Wu, Z. Function theory and operator theory on the Dirichlet space / Z. Wu // Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge Univ. Press. — 1998. — Vol. 33. P. 179 — 199.

[60] Zhu, K. Operator theory in function spaces / K. Zhu. — Marcel Dekker, New York, 1990. — 258 p.

[61] Zhu, K. Bloch type spaces of analytic functions / K. Zhu // Rocky Mt. J. Math. — 1993. — Vol. 23, № 3. P. 1143 — 1177.

[62] Zhu, K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball / K. Zhu // New York: Springer. —- 2005. — Vol. 271. — 274 p.

[63] Zhu, K. Analysis on Fock spaces. Graduate texts in Mathematics / K. Zhu. New York: Springer, 2012. — № 346. — 263 p.

[64] Zorboska, N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces / N. Zorboska // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2017. — Vol. 87, № 4. P. 581 — 600.

[65] Абанин, А. В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций / А. В. Абанин, Ю. В. Кораблина // Владикавказский математический журнал. — 2020. — Т. 22, № 3. С. 5 — 17.

[66] Абанин, А. В. Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций / А. В. Абанин, Ю. В. Кораблина // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4-1. С. 83 — 89.

[67] Кораблина, Ю. В. Непрерывные линейные операторы из абстрактных банаховых пространств голоморфных функций в аналогичные пространства с равномерной нормой / Ю. В. Кораблина // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с. Цей, 15–20 июля 2019 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. — 2019. С. 80 — 81.

[68] Кораблина, Ю. В. О непрерывных линейных операторах из абстрактных банаховых пространств голоморфных функций в аналогичные пространства с равномерной нормой / Ю. В. Кораблина // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа–симпозиум по спектральным и эволюционным задачам: сборник материалов международной конференции КРОМШ–2019: ПОЛИПРИНТ. — 2019. С. 18 — 20.

[69] Кораблина, Ю. В. О непрерывности классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Тезисы докладов XV Владикавказской Молодёжной Математической Школы (г. Владикавказ, 20–25 сентября 2020 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. — 2020. — С. 34.

[70] Кораблина, Ю. В. Непрерывность классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах общего и конкретного вида / Ю. В. Кораблина // XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа–симпозиум по спектральным и эволюционным задачам: сборник материалов международной конференции КРОМШ–2021 — Симферополь: ПОЛИПРИНТ. — 2021. — С. 7.

[71] Кораблина, Ю. В. О критериях непрерывности классических операторов на весовых пространствах Бергмана, Блоха и Фока / Ю. В. Кораблина // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVI Международной научной конференции (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20-24 сентября 2021г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. — 2021. С. 37 —38.

[72] Кораблина, Ю. В. Об ограниченности классических операторов на весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школ — 2022» (г. Уфа, 28 сентября–01 октября 2022г.). Уфа: РИЦ БашГУ. — 2022. С. 119 — 120.

[73] Кораблина, Ю. В. Компактные операторы в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа — 2023» (г. Уфа, 04-08 октября 2023 г.). Уфа: РИЦ БашГУ. — 2023. — Т. 1. С. 86 — 88.

[74] Кораблина, Ю. В. О компактности классических операторов в весовых пространствах целых функций / Ю. В. Кораблина // Порядковый анализ и смежные вопросы математиче-

ского моделирования: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня–05 июля 2023г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. — 2023. С. 68 — 69.

[75] Кораблина, Ю. В. Топологические свойства композиционных операторов на квазибанаховых пространствах / Ю. В. Кораблина // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (г. Воронеж, 27 января–01 февраля 2023г.). Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2023. С. 204 — 206.

[76] Кораблина, Ю. В. Непрерывность линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций / Ю. В. Кораблина // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2024. — № 4-1. С. 24 — 30.

[77] Кораблина, Ю. В. Непрерывность линейных операторов на проективных и индуктивных пределах квазибанаховых пространств голоморфных функций. Общие результаты и приложения / Ю. В. Кораблина // Сборник материалов XIX Владикавказской Молодёжной Математической Школы (онлайн, 24–28 июня 2024 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. — 2024. С. 60 — 61.

[78] Korablina, Yu. V. On conditions of boundedness of linear operators on weighted quasi-Banach spaces / Yu. V. Korablina // Book of abstracts Tenth International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis —X». (Rostov-on-Don). — 2021. — P. 28.

[79] Korablina, Yu. V. On the boundedness of the classical operators on weighted quasi-Banach spaces of holomorphic functions / Yu. V. Korablina // Book of abstracts International Conference «Complex Analysis and Related Topics». (Kazan). — 2022. — P. 34 — 35.