

Южный федеральный университет

На правах рукописи

УДК 519.2

Данилова Наталья Викторовна

Методы решения задач оптимального управления для робастных бинарных  
моделей финансовой математики

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант

д.т.н.

Белявский Григорий Исаакович

Ростов-на-Дону

2024

## Список используемых обозначений

VaR – Value-at-Risk

CVaR – Conditional Value-at-Risk

MCD – Minimal Covariance Determinant

ME – Minimal Ellipsoid

## Оглавление

Введение	5
Глава 1. Стохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива	25
Введение	25
1.1. Постановка и схема решения задачи оптимального управления	28
1.2. Модели с наблюдаемой разладкой	37
1.3. Модели с ненаблюдаемой разладкой	43
1.3.1. Постановка и схема решения задачи обнаружения разладки	43
1.3.2. Редукция NP-полной задачи к P-полной задаче	48
1.4. Модели со случайной и с неопределённой волатильностью	49
1.4.1. Модель Хестона	49
1.4.2. Модели с неопределённой волатильностью	52
1.5. Примеры	57
Заключение к первой главе	71
Глава 2. Нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива	73
Введение	73
2.1. Доверительное множество	81
2.2. Робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна	87
2.3. Эллипсоидная модель Марковица	97
2.4. Примеры	100
Заключение ко второй главе	117
Глава 3. Случайное блуждание и метод Монте-Карло	118
Введение	118
3.1. Бинарная аппроксимация	121
3.2. Описание генератора	126
3.3. Бинарная аппроксимация и преобразование Гирсанова	127
3.4. Вычислительные схемы	132
3.5. Уравнения, сводящиеся к уравнению с постоянной	134

волатильностью	
3.6. Вычислительные задачи	134
3.7. Разбиение Карра и факторизация Винера-Хопфа	137
3.8. Кусочно-постоянный семимартингал $W_t^h$	139
3.9. Интеграл, процесс и формула Ито для $W_t^h$	142
3.10. Стохастическое дифференциальное уравнение для $W_t^h$	146
3.11. Случайное блуждание с пропущенными слагаемыми	148
3.12. Случайное разбиение пассажирами винеровского процесса со сносом	151
3.13. Примеры	154
Заключение к третьей главе	165
Глава 4. Описание программного комплекса и анализ эффективности	167
Введение	167
4.1. Модуль BTOD (Binary Tree Observed Disorder)	170
4.2. Модуль BTNOD (Binary Tree Non Observed Disorder)	174
4.3. Модуль UV (Uncertain Volatility)	180
4.4. Модуль COD (Clusterization One Dimension)	183
4.5. Модуль CMD (Clusterization Multi Dimension)	184
4.6. Модуль RCM (Robust Cox-Ross-Rubinstein Model)	191
4.7. Модуль EMM (Ellipsoid Markowitz Model)	194
4.8. Модуль EP (Exit Probability)	196
Заключение к четвёртой главе	200
Заключение	201
Список литературы	206

## **Общая характеристика работы.**

### **Актуальность темы исследования.**

Одним из следствий развития информационных технологий является доступность больших объёмов данных, анализ которых позволяет применять сложные модели, которые раньше не использовались в математическом моделировании. Диссертационное исследование посвящено изучению следующих актуальных задач. Прежде всего, исследование моделей управления случайными процессами и временными рядами, в которых учитывается возможность влияния случайных факторов на поведение случайных процессов и временных рядов, то есть изучаются модели, функционирующие в случайных средах. Далее изучаются робастные модели случайных процессов и временных рядов, тесно связанные с поведением моделей в случайных средах. Изучение связи дискретных и непрерывных моделей через субординацию времени позволяет заложить теоретическую основу для новых численных методов типа Монте-Карло. Среди актуальных прикладных задач рассмотрены задачи, относящиеся к финансовой математике и стохастический гомеостаз. В области финансовой математики получены новые формулы типа Блэка-Шоулса, Кокса-Росса-Рубинштейна и Марковица. Для расчёта стохастического гомеостаза получен эффективный метод вычисления вероятности невыхода случайного процесса из полосы.

В 1973 году Ф. Блэком, М. Шоулсом и Р. Мертоном была предложена стандартная диффузионная модель (B,S)-рынка. Одним из основных недостатков стандартной модели является то, что коэффициенты сноса и волатильности постоянны. В действительности они случайно меняются со временем. В первой главе диссертации рассматриваются модели, в которых параметры модели Блэка-Шоулса зависят от случайной среды. Данные модели относятся к стохастическим робастным моделям эволюции стоимости рискового актива и разделяются на три класса: модели с наблюдаемой разладкой, модели с ненаблюдаемой разладкой и модели с неопределённой волатильностью. В случае наблюдаемой разладки

параметры сноса и волатильности задаются с помощью возрастающей последовательности моментов остановки, с вероятностью единица стремящихся к бесконечности, и двумя детерминированными последовательностями с неравными нулю элементами. Для этой модели решается задача оптимального управления с симметричным (среднеквадратичное хеджирование) и несимметричным (квантильное хеджирование) критериями. В случае ненаблюдаемой разладки используется специальная бинарная последовательность, которая аппроксимирует диффузионный процесс и рассматривается как случайное блуждание по вершинам бинарного дерева. Основным результатом является замена разладки на момент остановки случайного блуждания, разделяющий вершины дерева на два класса, а именно, остановкой является минимальный момент времени, в который случайное блуждание оказывается в вершине первого класса. Этот приём позволяет рассматривать задачу управления как задачу управления на раскрашенном дереве и, в частности, получить формулу типа Кокса-Росса-Рубинштейна с разладкой. Актуальность этого результата является очевидной, поскольку получен метод, позволяющий управлять случайным процессом вблизи случайного пика или случайной впадины. В случае неопределённой волатильности параметр сноса является постоянным, а параметр волатильности принадлежит некоторому заданному интервалу. Эти модели относятся к робастным моделям, и при решении задач управления получены «осторожные» решения, что при определённых условиях является актуальным. В частности, получена «осторожная» формула Кокса-Росса-Рубинштейна с гарантированным с заданной вероятностью риском.

Использование доверительных множеств, которому принадлежат параметры моделей, очень часто предпочтительней точечных оценок этих параметров. В связи с этим в диссертации рассматривается задача оптимального покрытия обучающей выборки либо объединением интервалов в одномерном случае, либо объединением эллипсоидов в многомерном

варианте, которая является актуальной в связи с качественным обобщением модели Кокса-Росса-Рубинштейна и модели Марковица. Необходимость такого обобщения вызвана появлением новых стандартов измерения рисков, например, VaR. В этих моделях естественным образом соединяется стохастический анализ и робастное программирование – актуальные направления математического моделирования за последние десятилетия.

Еще одной постоянно актуальной проблемой является проблема численного решения стохастического дифференциального уравнения. В третьей главе диссертации предложен метод бинарной аппроксимации со случайным разбиением времени. Следует выделить два основных преимущества представленного метода. Во-первых, найдена оценка погрешности приближения в виде доверительного интервала для важного класса дифференциальных уравнений. Во-вторых, предложенный метод позволяет вычислять математическое ожидание от ограниченных функционалов, зависящих от траекторий супремумного и инфимумного процессов для процесса, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения, что для стандартных методов решения стохастических дифференциальных уравнений является задачей нерешённой. В частности, предложенный метод позволяет вычислять вероятность невыхода случайного процесса из заданной полосы, что также является актуальным в связи со стохастическим гомеостазом.

Таким образом, в результате исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, а именно:

- решение задач управления случайными процессами в случайных средах;
- решение задач минимаксного робастного управления случайными процессами, параметры которых принадлежат доверительным множествам, возникающим в результате применения методов непараметрической статистики;

–открытие нового случайного процесса, потраекторно близкого к броуновскому движению, существенно упрощающего моделирование супремумных и инфимумных процессов, играющих ключевую роль в анализе устойчивого развития широкого класса динамических систем.

### **Цели и задачи диссертационной работы.**

**Основной целью** данной работы является исследование стохастических и нестохастических робастных моделей процессов, а также приспособленных для этих моделей методов оптимального управления и разработка комплекса программ для реализации этих численных методов.

Основная цель воплотилась в решение конкретных **задач**:

1.Задача оптимального управления для стохастических и нестохастических робастных моделей процессов.

2.Задача вычисления доверительных множеств по выборке для параметров моделей в рамках непараметрической статистики.

3.Задача вычисления математического ожидания ограниченного функционала, зависящего от траектории супремумного и инфимумного процессов для решения стохастического дифференциального уравнения.

### **Методология исследования.**

Для выполнения поставленных выше целей использовались:

1.Численные и аналитические методы.

2.Методы и результаты теории вероятностей и математической статистики.

3.Методы решения оптимизационных задач. Методы робастной оптимизации.

4.Методы и результаты стохастического анализа.

5.Методы и результаты кластерного анализа.

6.Методы и результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Программная реализация методов и алгоритмов была осуществлена с помощью системы компьютерной алгебры Maple.

**Научную новизну** составляют **положения, выносимые на защиту.**

В каждом положении указывается соответствующий параграф диссертации, в котором это положение изложено.

**В области математического моделирования.**

Исследованы следующие математические модели:

1. Модель оптимального управления, позволяющая сформулировать широкий класс задач финансовой математики (п.1.1).

2. Модели с наблюдаемой (п.1.2), ненаблюдаемой (п.1.3) разладкой и с неопределённой волатильностью (п.1.4.2); изучены методы управления в данных моделях.

3. Нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива (робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна (п.2.2), эллипсоидная модель Марковица (п.2.3)).

4. Модель эволюции стоимости рискового актива, в которой используется новый случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями и дискретным вмешательством случая (модель Кокса-Росса-Рубинштейна со случайным числом слагаемых (п.3.11)).

**В области численных методов.**

Перечислим новые численные методы:

1. Метод решения задач оптимального управления, основанный на использовании теории мартингалов (п.1.1).

2. Метод обнаружения разладки диффузионного процесса с использованием бинарной аппроксимации и кластеризации бинарного дерева, который в отличие от иных методов допускает управление процессом с разладкой (п.1.3).

3. Метод решения задач оптимального управления для диффузионной модели с неопределённой волатильностью, позволяющий получать гарантированные решения (п.1.4.2).

4. Проекционный метод кластеризации выборки, превосходящий по эффективности метод  $k$ -средних (п.2.1).

5.Метод построения доверительного множества по выборке. Для одномерных данных метод позволяет найти объединение интервалов минимальной совокупной длины, содержащее заданное число элементов выборки. В случае многомерных данных метод позволяет найти объединение эллипсоидов минимального объёма, содержащее заданное число элементов выборки. Метод особенно эффективен для засоренных выборок, поскольку не реагирует на отдельные выбросы и занимает свое место среди устойчивых методов непараметрической статистики (п.2.1).

6.Метод решения задач оптимального управления для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Предлагаемый метод основан на теории двойственности. В отличии от классического позволяет получить результат с гарантированной вероятностью (п.2.2).

7.Метод решения задачи построения многошагового динамического портфеля. В предлагаемом методе используется идея рассмотрения портфеля как рискованного актива, доверительное множество возврата которого является объединением интервалов. Поскольку метод позволяет учесть два критерия, то дополнительно ко всему метод можно рассматривать как эффективное решение двухкритериальной проблемы (п.2.3).

8.Метод типа Монте-Карло вычисления математического ожидания для ограниченного функционала, зависящего от траектории супремумного и инфимумного процессов для решения стохастического дифференциального уравнения (3.6). Предлагаемый метод базируется на преобразовании Гирсанова, случайном разбиении, и на стандартных численных методах решения обыкновенного стохастического дифференциального уравнения. Метод превосходит методы Монте-Карло, использующие только стандартные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Главный результат заключается в том, что найден доверительный интервал для оценки погрешности. В стандартных методах оценивается порядок математического ожидания абсолютной величины погрешности (п.3.3).

**В области программного обеспечения.**

Разработан комплекс программ, предназначенный для решения поставленных в диссертационной работе задач. Описание программного комплекса и анализ эффективности методов и алгоритмов приведены в четвёртой главе.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Диссертационная работа носит теоретический характер, относится к фундаментальным исследованиям и позволяет решить сложные и важные задачи управления случайными процессами с параметрами, меняющимися в случайные моменты времени. Она выполнялась в рамках проектов Южного федерального университета (213.01-07.2014/07-ПЧВГ) и Российского научного фонда (17-19-01038). Построенные новые численные методы, алгоритмы, созданные комплексы программ достаточно универсальны и применимы для решения многих теоретических и прикладных задач.

Программный комплекс «Программа дихотомической кластеризации выборки на основе проективного метода  $k$ -средних» зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности: свидетельство №2024619352, дата регистрации 23.04.2024 г. (автор: Данилова Н.В.).

Практическая значимость работы определяется тем, что полученные результаты могут применяться не только в финансовой математике, но и в других областях, где присутствуют нестационарные случайные процессы, к примеру, процессы со сменой режимов, доверительные множества и стохастический гомеостаз. Результаты, полученные в диссертации, используются при чтении курсов в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета, таких, как «Методы оптимизации и исследование операций», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Стохастическая финансовая математика», «Анализ временных рядов», «Эконометрика», «Задачи оптимального управления».

### **Степень достоверности и апробация результатов.**

**Достоверность** полученных в диссертационном исследовании результатов основывается на строгих доказательствах представленных утверждений и теорем; подтверждении теоретических выкладок численными расчётами; представлении результатов диссертационного исследования на различных научных конференциях и научных семинарах.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались на международных и всероссийских симпозиумах, конференциях и семинарах: «Advanced Finance and Stochastics», Москва, 2013; «Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова», Москва, 2023; Всероссийский семинар «Избранные вопросы финансовой математики», приуроченный к 120-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова, Москва, 2023; Научный семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», Москва, 2022; «Nonlinear PDEs and Financial Mathematics», Циттау, Германия, 2015; «Международный стохастический семинар Бранденбургского технического университета», Котбус, Германия, 2021; «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа», Ростов-на-Дону, 2021, 2022, 2023; «Международная научная конференция по стохастическим методам», Дивноморск, 2022, 2023, 2024; «Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике», Сочи, 2009, 2013, 2019, 2020, 2022; «Транспорт», Ростов-на-Дону, 2011, 2013, 2014, 2015, 2016; «Инфоком», Ростов-на-Дону, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017; «Технологии информационного общества», Москва, 2017; «Статистика – язык цифровой цивилизации», Ростов-на-Дону, 2018.

#### **Публикации.**

Результаты диссертационного исследования опубликованы в 59 работах. Из них 5 статей опубликованы в научных журналах, входящих в Перечень ВАК; 18 статей опубликованы в научных изданиях, входящих в Scopus, Web of Science, RSCI; 13 статей опубликованы в журналах,

индексированных в РИНЦ. Все публикации соответствуют научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

#### **Личный вклад автора.**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации некоторых результатов проводилась совместно с соавторами. В совместных публикациях с Белявским Г.И. постановки задач сформулированы совместно; разработка численных методов, программных комплексов, получение, обработка и анализ численных результатов принадлежит соискателю. В совместных работах с Угольницким Г.А., Угольницкому Г.А., как руководителю гранта, принадлежит формулировка направления исследования; остальное принадлежит Белявскому Г.И. и Даниловой Н.В. в пропорциях, описанных ранее. В совместной работе с аспиранткой Земляковой И.А. выполнялись стандартные для руководителя функции: постановка задачи, выбор численного метода и контроль за правильным исполнением. В совместных работах со студентами, кроме перечисленных выше функций, проводилось обучение по тематике исследования на примере конкретной задачи.

#### **Структура и объём диссертации.**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы (133 наименования). Объём диссертационного исследования составляет 217 страниц, включая 43 рисунка и 36 таблиц.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту, д.т.н., проф. Белявскому Г.И., а также д.ф.-м.н., проф. Жукову М.Ю. за консультации в области уравнений математической физики.

#### **Обзор литературы.**

Моделируемые в диссертационной работе процессы с разладкой являются важным подклассом процессов со сменой режимов. В этой связи следует отметить работы [13-20], в которых изучалась задача быстрого

обнаружения разладки. В [13] доказываемся минимаксная оптимальность непрерывной версии метода кумулятивных сумм (CUSUM). В [14] рассматривается задача обнаружения момента достижения случайным процессом своего максимального значения, а также рассматривается задача обнаружения момента изменения вероятностных характеристик случайного процесса на конечном временном интервале. В [15] показана связь между задачей об оптимальной остановке, относящейся к области теории вероятностей, и задачей со свободными границами, относящейся к области анализа. Общая теория оптимальной остановки изложена на уровне базовых принципов в дискретном и непрерывном времени и использует мартингальные и марковские методы. При этом методы решения варьируются от классических (таких, как изменение времени, пространства или меры) до более современных (таких, как локальное пространственно-временное исчисление и нелинейные интегральные уравнения). Приведено много примеров использований полученных результатов: в финансовой математике (американские, русские, азиатские опционы), финансовой инженерии (оптимальное предсказание предельного максимума), математической статистике (последовательное тестирование, быстрое обнаружение) и стохастическом анализе (фундаментальные неравенства). В [16] рассматривается задача определения момента остановки, оценивающего разладку на конечном временном интервале, когда снос наблюдаемого винеровского процесса изменяется с одного значения на другое. Метод решения основан на сведении исходной задачи к параболической задаче со свободной границей, область продолжения которой определяется непрерывной искривленной границей. С помощью формулы замены переменной, содержащей локальное время диффузионного процесса на кривых, показано, что оптимальную границу можно охарактеризовать как единственное решение нелинейного интегрального уравнения. В [17] изучаются статистические процедуры обнаружения разладки. Задача быстрого обнаружения разладки рассматривается

в контексте марковской теории оптимальной остановки, а также изучаются подходы последовательного, байесовского и небайесовского обнаружения разладки. В [18] рассматривается задача обобщённой байесовской разладки в случае дискретного времени с двумя типами штрафной функции: линейной и нелинейной. В [19] рассматриваются задачи об оптимальной остановке броуновского движения и геометрического броуновского движения с разладкой в предположении, что момент разладки имеет равномерное распределение на отрезке. Оптимальные решающие правила находятся в виде моментов первого выхода некоторого марковского процесса (статистики Ширяева-Робертса) на криволинейные границы, которые задаются как решения интегральных уравнений. Рассматриваемые в [19] задачи являются очень актуальными, к примеру, в финансовой математике они могут быть применены в вопросах выбора оптимального момента продажи акции при меняющемся тренде. В [20] представлен обзор алгоритмов обнаружения множественных точек изменения в многомерных временных рядах. Рассматриваемые алгоритмы характеризуются тремя элементами: функцией стоимости, методом поиска и ограничением на количество изменений.

Поскольку в диссертации момент разладки заменяется на её оценку моментом остановки, разбивающей вершины бинарного дерева на два класса, укажем на работы, связанные с бинарной аппроксимацией диффузионных процессов. В [1,2,3] приведена формула Блэка-Шоулса для расчёта справедливой цены европейского опциона для диффузионной модели. В [4] биномиальное приближение диффузии определяется как вычислительно простое, если количество узлов растёт не более чем линейно с количеством временных интервалов. Также в [4] показано, как построить простой в вычислительном отношении биномиальный процесс, который слабо сходится к диффузионному процессу. В [5] приведено доказательство сходимости справедливой цены в модели Кокса-Росса-Рубинштейна к справедливой цене в модели Блэка-Шоулса, когда шаг разбиения

временного интервала стремится к нулю; в [7] приведено более общее доказательство такой сходимости. В [6] приведено исследование работы рынка опционов, исследованы различные теории ценообразования опционов и объяснено использование опционов в институциональных инвестициях. В [8] предлагается новый эффективный алгоритм вычисления греков для европейских и американских опционов с использованием бинарного дерева. В [9] приведены биномиальные модели, в которых рассчитанные цены опционов сходятся к решению Блэка-Шоулса, и ошибка меньше, чем в случае модели Кокса-Росса-Рубинштейна; при этом изменяются только формулы для определения повышающих и понижающих коэффициентов. В [10] приводится скорость сходимости цен опционов в дискретном времени. В [10] показано, что скорость сходимости зависит от гладкости платёжной функции и она достаточно низкая, так как платёжные функции часто относятся к типу «всё или ничего» и не являются непрерывно дифференцируемыми. В [10] предложено два метода для повышения точности: корректировка решения в дискретном времени до наступления срока погашения и сглаживание платёжной функции, чтобы получить решения, которые сходятся к своему пределу в непрерывном времени с максимально возможной скоростью, как в случае с гладкой платёжной функцией. Для производных процентных ставок в [10] представлена высокоточная триномиальная модель. В [11] представлен класс биномиальных моделей, аппроксимирующих модель Блэка-Шоулса; для этого класса моделей доказано существование полных асимптотических разложений цен европейских опционов, причем первые три слагаемые вычисляются явным образом. В [12] представлен класс биномиальных моделей с чётным числом шагов, аппроксимирующих модель Блэка-Шоулса; проанализирована скорость сходимости для различных начальных значений стоимости акции.

В качестве приложения приведённых методов в финансовой математике в первой главе диссертации для моделей с наблюдаемой

разладкой рассматриваются задачи с симметричным критерием (среднеквадратичное хеджирование) и несимметричным критерием (квантильное хеджирование). При выводе соответствующих формул были использованы результаты шестой главы работы [21], посвящённой несовершенным видам хеджирования, результаты восьмой главы работы [22], посвящённой квантильному хеджированию, результаты работы [36], посвящённой биномиальным моделям ценообразования активов, а также результаты работы [37], посвящённой обобщённой лемме Неймана-Пирсона для решения задач хеджирования на неполных рынках.

Модели с неопределённой волатильностью изучаются в большом количестве работ: [27-34]. В [27] приведён метод Монте-Карло для расчёта справедливой цены европейского опциона колл для моделей с неопределённой волатильностью. В [28] приведены формулы для нахождения справедливой цены европейского опциона колл в случае модели с неопределённой волатильностью. Рассматриваются два случая: стохастическая волатильность не зависит от цены акции, стохастическая волатильность коррелирует с ценой акции. Установлено, что цена Блэка-Шоулса часто превышает реальную цену опционов, причем степень завышения цены увеличивается с течением времени до погашения. В [29] рассмотрена задача оценивания европейского опциона в случае, когда доходность актива является диффузионным процессом со стохастической волатильностью. Рассмотрены случаи, когда стохастическая волатильность зависит и не зависит от доходности актива. В [30] рассматриваются диффузионные процессы со стохастической волатильностью, в частности, когда волатильность определяется арифметическим процессом Орнштейна-Уленбека. Приведено применение полученных аналитических результатов для решения задачи оценивания опционов, а также изучена связь между стохастической волатильностью и природой «тяжёлых хвостов» в распределении цен активов. В [31] представлена модель рынка, в которой волатильность неизвестна, но предполагается, что она лежит между двумя

крайними значениями  $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ . Эти границы могут быть получены на основе экстремальных значений ожидаемой волатильности ликвидных опционов или на основе высоких и низких пиков исторической волатильности акций или опционов. Полученные границы можно рассматривать в качестве доверительного интервала для будущих значений волатильности. В [31] показано, что верхняя и нижняя цены европейского опциона могут быть найдены из нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые называются уравнениями Баренблата. Представлен алгоритм решения полученных уравнений с помощью метода конечных разностей или с помощью триномиального дерева. В [32] изучено уравнение Баренблата, полученное из уравнения Блэка-Шоулса с использованием принципа максимума для диффузионных уравнений. В [33] введено новое понятие  $G$ -нормального распределения. Это приводит к новой структуре стохастического исчисления типа Ито (интеграл Ито, формула Ито, уравнение Ито) посредством соответствующего  $G$ -броуновского движения. В [33] также представлены аналитические расчёты и некоторые новые статистические методы, применимые к анализу финансовых рисков для моделей с неопределённой волатильностью. В [33] введено понятие сублинейного пространства, распределения, совместного распределения, мартингального распределения случайных величин, а также некоторые другие понятия. Особенно интересным явлением в сублинейных пространствах является то, что если случайная величина  $Y$  не зависит от случайной величины  $X$ , то это не означает автоматически, что  $X$  не зависит от  $Y$ . Доказаны две важные теоремы: закон больших чисел и центральная предельная теорема. В [34] доказан вариант центральной предельной теоремы для специального класса случайных величин; доказательство основано на технике полурасслабленных пределов из теории аппроксимационных схем полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты, опубликованные в [34], были использованы в первой главе диссертации в случае моделей

с неопределённой волатильностью для доказательства сходимости верхней и нижней цен, полученных с помощью реализации рекуррентных формул на бинарном дереве, к соответствующим значениям, полученных с помощью решения уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Отдельно следует упомянуть работы [35,39,40]. В [35] рассмотрена модель Хестона и получена формула для расчёта справедливой цены европейского опциона; методика решения основана на характеристических функциях. Результаты, опубликованные в [39], были использованы в первой главе диссертации для доказательства единственности вязкостных решений полученных уравнений. Для верификации вязкостных решений как решений задач стохастического оптимального управления была использована верификация Перрона, описанная в [40].

Большое количество литературы посвящено робастным методам и их приложениям в финансовой математике. Близкие исследования – это исследования в области гарантированного детерминистского подхода, при котором неопределённость движения цен рискованных активов описывается с помощью задания некоторого множества сценариев. Гарантированный детерминистский подход представляет собой новый математический аппарат описания неопределённости модели и позволяет решать задачу суперхеджирования. Основные результаты в этой области изложены в [41,42]. В [43,44] изложены основные методы робастной статистики; в [45,46] изложены основные методы робастной оптимизации; в [47-49] изложены основные методы робастной выпуклой оптимизации; в [50-52] изложены основные методы робастной теории игр; в [53-64] изложены примеры применения робастных методов в финансовой математике. В [53,56] приводятся робастные алгоритмы нахождения оптимального портфеля в контексте торговли, требующей быстрого обновления портфеля при поступлении новых данных. В [54] используется стохастическая нестационарная оптимизация для нахождения оптимального портфеля. В [55,59] используется метод обучения без учителя, и применяются методы

робастной оптимизации для нахождения оптимального портфеля. В [57] изложены основные методы робастного оценивания опционов. Представленные методы основаны на предположении, что доходность базового актива принадлежит некоторому множеству, после чего определяется портфель, минимизирующий ошибку репликации в наихудшем случае. В [58] рассматривается задача квантильного хеджирования финансовых обязательств, выплаты по которым находятся в некотором заданном диапазоне. В [60] рассматривается задача робастной оптимизации для нахождения оптимального портфеля с инвестициями для модели с неопределёнными параметрами. В основе этих алгоритмов лежат идеи обработки сигналов и статистики. В [61,62] сформулированы и решены задачи нахождения оптимального портфеля в минимаксной постановке. В [63] изложены основные эконометрические подходы к решению задачи об оптимальном портфеле. В [64] представлен обзор методов робастной оптимизации для нахождения оптимального портфеля как в случае классической (mean-variance) постановки задачи, так и в случае использования меры риска VaR. В работах [65-67] приведены различные функционалы для оценки качества портфеля. Так, в [65] сформулирована и решена задача нахождения оптимального портфеля в случае использования функции риска  $L_1$  (среднего абсолютного отклонения); показаны преимущества представленной модели по сравнению с моделью Марковица. В [66] сформулирована и решена задача нахождения оптимального портфеля в случае использования меры риска CVaR; показаны преимущества меры CVaR по сравнению с мерой VaR. В [67] показано, что менеджеры по риску VaR часто оптимально выбирают большую долю рискованных активов, чем менеджеры, не связанные с риском, и, следовательно, несут большие потери при возникновении убытков. Поэтому в [67] предложена альтернативная модель управления рисками, основанная на ожидании убытка. Анализ общего равновесия в [67] показывает, что присутствие менеджеров по риску

VaR усиливает волатильность фондового рынка в периоды спада на рынках и ослабляет волатильность в периоды роста на рынках.

Во второй главе используется кластерный анализ для построения доверительного множества по выборке; после этого рассчитывается интервал минимальной длины (в случае одномерных данных) или эллипсоид минимального объёма (в случае многомерных данных). В [68-73] приводятся разные методы кластеризации для выборок без засоренностей; в [74-77] приводятся разные методы кластеризации для выборок с засоренностями; при этом следует обратить внимание на эвристический метод оценки параметров для данных с выбросами и байесовский классификатор для отнесения  $m$  объектов к  $n \geq m$  классам при наличии ограничений. В [74] этот метод обработки выбросов в сочетании с классификатором применяется к хорошо известной проблеме автоматической ограниченной классификации хромосом по их биологическим классам. Показано, что это снижает частоту ошибок по сравнению с классической моделью более чем на 50%. В [77] предложен алгоритм кластеризации засоренных выборок, в основе которого лежит идея замены оценок среднего и дисперсии на их робастные версии, основанные на медиане и медианной ковариационной матрице.

В [78-80] приводятся разные алгоритмы построения эллипсоида минимального объёма; в [78] приведён алгоритм Хачияна Л.Г., в [79] приведён алгоритм MCD; в [80] приведён комбинированный метод внутренней точки и активного множества.

Монографии [81,82] посвящены стохастическим дифференциальным уравнениям, в них приведено несколько теорем о существовании и единственности сильного решения уравнения, то есть адаптированного случайного процесса, обращающего уравнение в тождество, для фиксированного стохастического базиса. Одна из таких теорем для полноты изложения приведена в третьей главе.

Численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. В монографии [89]

представлено введение в стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, а также численные методы их решения. В работе [100] изложены методы Рунге-Кутты, которые являются детерминированными, но могут быть адаптированы для стохастического случая. Монография [102] посвящена дифференциальным уравнениям с частными производными и мартингальным методам в ценообразовании опционов. В работе [92] получены эффективные процедуры среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, основанные на кратных рядах Фурье-Лежандра. Данные результаты могут быть использованы для реализации численных методов с порядками сильной сходимости 1.5 и 2 для стохастических дифференциальных уравнений Ито при численном решении задач оптимального стохастического управления и фильтрации сигналов на фоне случайных помех в различных постановках. Работа [96] посвящена приближённому интегрированию стохастических дифференциальных уравнений; материалы данной работы были использованы в третьей главе для получения аналога формулы Мильштейна.

В связи с использованием в третьей главе случайного разбиения Карра стоит отметить работу [86]. В данной работе предложен новый подход к оцениванию американских опционов, основанный на рандомизации Карра. Задача заключается в том, чтобы оценить опционы, срок погашения которых совпадает с  $n$ -м моментом скачка стандартного пуассоновского процесса. Между моментами скачков, в силу свойства отсутствия памяти у экспоненциального распределения, стоимость опциона и цена исполнения являются стационарными по времени. Напротив, в момент скачка стоимость опциона падает, а цена исполнения приближается к контрактной цене. Стационарность по локальному времени позволяет найти полуявное решение для стоимости опциона, тогда как поведение скачка примерно отражает глобальное поведение этого значения. Поскольку число скачков стремится к бесконечности при фиксированном среднем сроке погашения, рандомизированная стоимость опциона плавно сходится снизу до истинной

стоимости американского опциона. Показано, что эту сходимость можно значительно ускорить за счёт использования экстраполяции Ричардсона. Хотя рандомизация может использоваться для оценки срока погашения или барьерных опционов, её главное преимущество заключается в приложении к задачам со свободной границей. Такие задачи возникают, например, при оценке американских экзотических опционов. В работах [87,90,99] приводятся методы моделирования процессов Леви, основанные на методе Монте-Карло и факторизации Винера-Хопфа. Подробное изложение метода Монте-Карло и его применение к решению задач финансовой инженерии можно найти в [88]. При этом рассматриваемые в работе [90] процессы Леви не допускают явной факторизации, поэтому рассматривается приближённая факторизация. В работе [99] предложен алгоритм многоуровневого моделирования процессов Леви. Монографии [83-85] также посвящены процессам Леви.

В работе [91] приведён как классический, так и современный материал по броуновскому движению и связанной с ним винеровской мере на функциональных пространствах. Работа [93] посвящена преобразованию одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры; материалы данной работы были использованы в диссертации для получения преобразования Гирсанова. В работе [94] содержится материал о стохастическом исчислении для семимартингалов; материалы данной работы были использованы в третьей главе для доказательства свойств процесса  $W_t^h$ . В работе [95] изложены мартингальные методы в задачах, связанных с пересечением границ броуновским движением и броуновским движением со сносом; материалы данной работы были использованы в третьей главе для получения свойств и функций плотности распределения некоторых моментов остановки. В работе [97] представлен эффективный метод генерации случайных величин (acceptance-rejection sampling algorithm). Данный алгоритм использовался в третьей главе для генерации шага случайного разбиения. В основе алгоритма лежит идея

приближения исходной плотности сверху более простой плотностью с некоторой константой, большей 1, и последующей генерации случайной величины, имеющей более простую плотность. Монография [101] посвящена характеристическим функциям; материалы данной монографии были использованы в третьей главе для вычисления математического ожидания, необходимого для расчёта справедливой цены в модели случайного блуждания с пропущенными слагаемыми.

# Глава 1. Стохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива.

## Введение.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение  $dS_t = S_t(\mu_s(t)dt + \sigma_s(t)dW_t)$  с начальным значением  $S_0$ . В уравнении  $W_t$  – стандартный винеровский процесс. Если предположить, что  $\mu_s(t) = \mu, \sigma_s(t) = \sigma$ , то есть рисковый актив (цена акции)  $S$  подчиняется геометрическому броуновскому движению, а безрисковый актив (банковский счёт)  $B$  эволюционирует так, что  $dB_t = B_t r dt$  то в финансовой литературе такая модель (B,S)-рынка называется моделью Блэка-Шоулса [1,2,3]. В 1973 г. были получены фундаментальное уравнение и формула для справедливой цены стандартного опциона-колл европейского типа. Под справедливой ценой понимается минимальная величина начального капитала, которая даёт продавцу опциона возможность построения хеджирующего портфеля. Одним из недостатков модели Блэка-Шоулса является тот факт, что волатильность постоянна, хотя в реальности предполагаемая волатильность при фиксированном конечном моменте времени меняется с изменением контрактной цены стандартного европейского опциона колл, будучи функцией, выпуклой вниз. Эта проблема известна как смайл-эффект (улыбка волатильности). Смайл-эффект является тем фактом, который не объясняется стандартной (B,S)-моделью, что привело к разнообразным её обобщениям и усовершенствованиям.

В главе рассматриваются случаи, когда параметры модели  $\mu_s(t), \sigma_s(t)$  не являются постоянными, а именно: модели с разладкой и модели с неопределённой волатильностью. Процессы с разладкой являются важным подклассом процессов со сменой режимов. В этой связи следует отметить работы [13-20], в которых изучалась задача быстрого обнаружения разладки. В главе рассматривается два типа разладки: наблюдаемая и ненаблюдаемая. В случае наблюдаемой разладки сформулированы теоремы, позволяющие находить плотность распределения векторного момента остановки для

модели с двумя барьерами в непрерывном и дискретном случаях. В случае ненаблюдаемой разладки основной результат заключается в замене разладки на момент остановки, разделяющий вершины дерева на два класса, а именно, бинарная последовательность рассматривается как случайное блуждание по вершинам дерева, и оценкой разладки является минимальный момент времени, в который случайное блуждание оказывается в вершине первого класса. Для сокращения вычислений используется алгоритм редукции NP-полной задачи к P-полной задаче. Если редукция не применяется по тем или иным причинам, следует использовать параллельные вычисления, которые широко используются для бинарных деревьев [106]. При нечёткой кластеризации также может быть использована схема Монте-Карло.

В главе рассматривается модель оптимального управления, позволяющая сформулировать широкий класс задач финансовой математики. Приводится метод решения задач оптимального управления, основанный на использовании теории мартингалов. Для моделей с наблюдаемой и ненаблюдаемой разладкой решены задачи оптимального управления с симметричным и несимметричным критериями. Выбор целевой функции в задаче оптимального управления для моделей с наблюдаемой разладкой позволяет решить задачи среднеквадратичного [21] и квантильного [21,22] хеджирования. Выбор целевой функции в задаче оптимального управления для моделей с ненаблюдаемой разладкой даёт возможность решить задачи оптимального динамического управления портфелем инвестиций в окрестностях пиков и впадин.

В главе также рассматриваются модели с неопределённой волатильностью [27-34]. В 1993 г. была предложена модель Хестона [35]. В модели Хестона цена акции и волатильность описываются стохастическими дифференциальными уравнениями с зависимыми винеровскими процессами. Недостатком данной модели является неединственность мартингальной меры, что в свою очередь означает неполноту рынка и замену справедливой цены опциона на интервал

справедливых цен; в модели Хестона вычисление интервала справедливых цен невозможно и вычисляется одна из справедливых цен, которая, тем не менее, лучше приближена к реальным ценам на опционы колл по сравнению с ценой Блэка-Шоулса. Для данной модели рассматривается бинарная аппроксимация, как альтернатива методу линий – численного решения уравнений в частных производных. Далее рассматривается модель с неопределённой волатильностью, для которой также рассматривается бинарная аппроксимация. Рассматриваются два типа моделей. К первому типу относятся модели с волатильностью  $\sigma_t \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ . Ко второму типу относятся модели с волатильностью  $\sigma_t = \sigma_0 \exp\left(\int_0^t \eta_s ds\right), \eta_t \in [\underline{\eta}_t, \bar{\eta}_t]$ . В результате получается неполный рынок, а фундаментальное уравнение Блэка-Шоулса заменяется на два уравнения, не имеющих аналитических решений. Полученные уравнения называются уравнениями Гамильтона-Якоби-Беллмана, а их вязкостные решения определяют интервал справедливых цен. Основной вывод заключается в том, что модели с неопределённой волатильностью являются адекватной заменой модели Хестона в случаях, когда необходимо вычислить интервал справедливых цен.

В главе рассматривается специальная (улучшенная) бинарная аппроксимация процесса  $(S_t)_{t \in [0, T]}$ . В работе [4] гарантируется слабая сходимость кусочно-постоянных случайных траекторий к решению стохастического дифференциального уравнения при выполнении условия единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения, а также непрерывности функций  $\mu_s(t), \sigma_s(t)$ ; кроме этого функция  $\sigma_s(t)$  должна быть неотрицательной и ограниченной. Из слабой сходимости кусочно-постоянных траекторий следует сходимость средних от функционалов на кусочно-постоянных траекториях. Бинарная аппроксимация диффузионных процессов, а также сходимость биномиальной цены финансового обязательства к цене Блэка-Шоулса изучаются в большом

количестве работ: [5-12]. Первое доказательство сходимости биномиальной цены опциона к цене Блэка-Шоулса было дано в работе Кокса, Росса и Рубинштейна [5]. Более общее доказательство сходимости было приведено в работе [7]. Первая оценка разницы между биномиальной ценой и ценой Блэка-Шоулса была дана в работе [10]. Эта оценка была порядка  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Для финансовых обязательств опционов европейского типа эта оценка имеет порядок  $\frac{1}{n}$ . Эту оценку можно найти в работах [6,8,9]. Для специальных случаев были получены оценки более высоких порядков [11,12].

Структура главы такова. В параграфе 1.1 рассматривается постановка и схема решения задачи оптимального управления. В параграфе 1.2 рассматриваются модели с наблюдаемой разладкой. В параграфе 1.3 рассматриваются модели с ненаблюдаемой разладкой. В параграфе 1.3.1 приведена постановка и схема решения задачи обнаружения разладки. В параграфе 1.3.2 приведен алгоритм редукции NP-полной задачи к P-полной задаче. В параграфе 1.4 рассматриваются модели со случайной и с неопределённой волатильностью. В параграфе 1.4.1 рассматривается модель Хестона. В параграфе 1.4.2 рассматриваются две модели с неопределённой волатильностью. В параграфе 1.5 приводятся примеры. В заключении приводятся и анализируются результаты главы.

Результаты главы опубликованы в работах [104,105,106,109,111,112,113,115,116,119,120,124,126,130,132,133].

### **1.1. Постановка и схема решения задачи оптимального управления.**

Рассмотрим стохастический базис  $\langle \Omega, (F_t)_{t \geq 0}, F, P \rangle$ . Пространство элементарных случайных событий  $\Omega$  – это пространство непрерывных на отрезке  $[0, T]$  траекторий, фильтрация  $(F_t)_{t \geq 0}$  наделена набором стандартных свойств,  $\sigma$ -алгебра  $F = F_T = \sigma\left(\bigcup_{t \in [0, T]} F_t\right)$ . Основным источником случайности будем считать стандартный винеровский процесс, канонически заданный

$W_t(\omega) = \omega(t)$ , более того, будем считать, что данный процесс определяет стохастический базис в следующем смысле: вероятностная мера  $P$  является винеровской мерой, фильтрация  $F_t = \sigma(W_s, s \in [0, t] \cup N)$ , где  $N$  –  $\sigma$ -алгебра, содержащая все множества нулевой меры.

Рассмотрим процесс Ито:  $dS(\omega, t) = \mu_s(\omega, t)dt + \sigma_s(\omega, t)dW_t$ .

В следующих ниже формулах траектория  $\omega$  будет опущена там, где это не приводит к непониманию. Начальное значение  $S_0$  известно. Допустим, что коэффициент  $\sigma_s(t) \neq 0$  с вероятностью единица, тогда процесс Ито  $S$  можно

записать в виде  $dS_t = \sigma_s(t) \left( \frac{\mu_s(t)}{\sigma_s(t)} dt + dW_t \right)$ . Далее будем интересоваться

процессом  $dW_t^* = \frac{\mu_s(t)}{\sigma_s(t)} dt + dW_t$ , который будет процессом Ито при

выполнении условия существования интеграла  $P \left( \int_0^T |\chi_s(s)| ds < \infty \right) = 1$ ,

$\chi_s(t) = \frac{\mu_s(t)}{\sigma_s(t)}$ . Для дальнейшего понадобится одно из утверждений теоремы

Гирсанова [1].

**Теорема 1.1.** Рассмотрим процесс  $Z_T = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^T \chi_s^2(s) ds + \int_0^T \chi_s(s) dW_s \right)$ .

Если  $EZ_T = E \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^T \chi_s^2(s) ds + \int_0^T \chi_s(s) dW_s \right) = 1$ , то относительно меры

$dP_T^* = Z_T dP_T$  процесс Ито  $dW_t^* = \chi_s(t)dt + dW_t$  будет стандартным винеровским процессом, а процесс плотности  $Z_T$  будет равномерно интегрируемым мартингалом.

Через  $P_T$  обозначено сужение меры на  $\sigma$ -алгебру  $F_T$ . Достаточным условием выполнения равенства для математического ожидания является

условие  $P \left( \int_0^T \chi_s^2(s) ds < \infty \right) = 1$ . Поскольку  $Z_T > 0$ , то новая мера эквивалентна

исходной мере. Относительно этой новой меры процесс  $S$  выражается

непосредственно через стандартный винеровский процесс  $W^*$  в виде интеграла Ито:  $S_t = S_0 + \int_0^t \sigma_s(s) dW_s^*$ , для существования которого достаточным условием является равенство:  $P\left(\int_0^T \sigma_s^2(s) ds < \infty\right) = 1$ . При выполнении этого условия процесс  $S$  – мартингал с непрерывной траекторией, причем существует единственная мера, относительно которой процесс  $S$  будет мартингалом. Далее используем теорему о представлении мартингалов [1].

**Теорема 1.2.** Пусть  $X$  – мартингал с непрерывной траекторией, тогда существует единственный прогрессивно измеримый процесс  $\sigma_x(t)$ , причём  $P\left(\int_0^T \sigma_x^2(s) ds < \infty\right) = 1$ , для которого  $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_x(s) dW_s^*$ .

**Следствие.** При условии, что  $\sigma_s(t) \neq 0$ , мартингал  $X$  может быть выражен через мартингал  $S$  следующим образом:  $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_{x/s}(s) dS_s$ , где  $\sigma_{x/s}(t) \sigma_s(t) = \sigma_x(t)$ . Причем это представление является единственным.

Рассмотрим задачу оптимального управления на конечном интервале  $[0, T]$  следующего вида:

$$\begin{aligned} \min_{\sigma_{x/s}, X_0} E\Phi(X_T, \xi) & \quad (1.1) \\ X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_{x/s}(s) dS_s, \\ S_t = S_0 + \int_0^t \mu_s(s) ds + \int_0^t \sigma_s(s) dW_s, \\ X_0 \leq a < E^* \xi. \end{aligned}$$

Здесь случайная величина  $\xi$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $F$ , функция двух переменных  $\Phi(x, y)$  – выпуклая функция по первой переменной при произвольном значении второй переменной.

Далее процесс  $S$  будем называть базовым процессом, а процесс  $\sigma_{x/s}$  – управлением или стратегией. Для решения этой задачи рассмотрим

мартингальную меру  $P^* : dP_T^* = Z_T dP_T$ . Процесс плотности  $Z$  был определён ранее. Относительно этой новой меры процессы  $S$  и  $X$  – мартингалы с непрерывными траекториями. Процесс  $S$  – мартингал по теореме Гирсанова, процесс  $X$  как интеграл Ито по процессу  $S$ . Предположим, что существует решение задачи

$$\min_{\eta} E\Phi(\eta, \xi) \text{ при условии } E^* \eta \leq a. \quad (1.2)$$

Допустим, что  $\eta^*$  – решение задачи (1.2). Рассмотрим процесс

$$X_t = E^*(\eta^* / F_t), \quad (1.3)$$

который является равномерно интегрируемым мартингалом относительно определённой ранее фильтрации и меры  $P^*$ , поэтому процесс (1.3) выражается в виде:

$$X_t = E^* \eta^* + \int_0^t \sigma_{X/S}(s) dS_s. \quad (1.4)$$

Поскольку  $E^* \eta^* \leq a$  и  $X_T = \eta^*$ , то процесс  $\sigma_{X/S}$  и начальное значение  $X_0 = E^* \eta^*$  являются решением задачи (1.1). При получении разложения (1.4) применено приведенное ранее следствие. Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.3.** Если существует единственная мартингальная мера, если существует решение задачи (1.2), то решение задачи (1.1) существует и вычисляется следующим образом:

1. Определяется мартингальная мера  $P^*$  при помощи процесса плотности

$$dP_T^* = Z_T dP_T, Z_T = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T \chi_s^2(s) ds + \int_0^T \chi_s(s) dW_s\right), \chi_s(t) = \frac{\mu_s(t)}{\sigma_s(t)}.$$

2. Вычисляется  $\eta^*$  – решение задачи (1.2).

3. Вычисляется мартингал  $X_t = E^*(\eta^* / F_t)$  и разложение мартингала  $X$  по

$$\text{мартингалу } S: X_t = E^* \eta^* + \int_0^t \sigma_{X/S}(s) dS_s.$$

На разложении мартингала  $X$  остановимся подробнее. Явный способ вычисления разложения следует из теоремы.

**Теорема 1.4.** Если существует функция  $M(x,t) \in C^{2,1}$ , такая, что  $X_t = M(S_t, t)$ , то

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

и

$$\sigma_{x/s} = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Для доказательства используем формулу Ито. Дифференциал  $dX_t = \left[ \frac{\partial M}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma_s^2(S_t, t) \frac{\partial^2 M(S_t, t)}{\partial x^2} \right] dt + \sigma_s(S_t, t) \frac{\partial M(S_t, t)}{\partial x} dW_t^*$ , с использованием разложения (1.4) – тот же самый дифференциал  $dX_t = \sigma_{x/s}(S_t, t) \sigma_s(S_t, t) dW_t^*$ . Сравнивая дифференциалы, получаем уравнение (1.5) и равенство (1.6).

Поскольку  $\sigma_s(t)$  может зависеть от всей предыстории процесса  $W^*$ , то будем использовать другие соотношения для вычисления разложения (1.4), например, если  $S$  и  $X$  являются квадратично интегрируемыми мартингалами с квадратическими характеристиками  $\langle S \rangle_t$  и  $\langle X \rangle_t$ . Применение этих характеристик позволяет выразить через них интегрант в разложении (1.4):

$$\sigma_{x/s}(t) = \frac{d\langle SX \rangle_t}{d\langle S \rangle_t}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим процесс  $(S_n)_{n=0}^N$  такой, что  $\Delta S_n = a_s((n-1)h)Y_n, Y_n \in \{-1, 1\}, P(Y_n = 1) = p_n$ . Параметры модели определяются из уравнений:

$E(\Delta S_n / F_{n-1}) = \mu_s((n-1)h)h, E((\Delta S_n)^2 / F_{n-1}) = (\sigma_s((n-1)h))^2 h$ , решения которых имеют следующий вид:  $a_n = \sigma_s((n-1)h)\sqrt{h}, p_n = \frac{1}{2} + \frac{\mu_s((n-1)h)\sqrt{h}}{2\sigma_s((n-1)h)}$ , при

выполнении условия  $\mu_s((n-1)h)\sqrt{h} < \sigma_s((n-1)h)$ . Последовательности  $a_n$  и

$p_n$  являются предсказуемыми. Таким образом, бинарная аппроксимация будет иметь вид:

$$\Delta S_n = \sigma_s((n-1)h)\sqrt{h}Y_n, \quad (1.8)$$

$$Y_n \in \{-1, 1\}, P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\mu_s((n-1)h)\sqrt{h}}{2\sigma_s((n-1)h)}.$$

Необходимым и достаточным условием мартингальности меры является равенство  $a_n p_n^* - a_n(1 - p_n^*) = 0$ .

$$\text{Отсюда } p_n^* = \frac{1}{2}.$$

Случайную последовательность  $(Y_n)_{n=1}^N$  можно задавать с помощью одного из трёх способов:

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \tilde{S}_n - S_{n-1} > 0 \\ -1, & \tilde{S}_n - S_{n-1} \leq 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

где  $\Delta \tilde{S}_n = \mu_s((n-1)h)h + \sigma_s((n-1)h)\sqrt{h}\varepsilon_n$ ,  $\tilde{S}_0 = S_0$ ,

$(\varepsilon_n)_{n=1}^N$  — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин.

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \bar{S}_n - S_{n-1} > 0 \\ -1, & \bar{S}_n - S_{n-1} \leq 0 \end{cases}, \quad (1.10)$$

где  $\Delta \bar{S}_n = \mu_s((n-1)h)h + \sigma_s((n-1)h)\sqrt{h}\delta_n$ ,  $\bar{S}_0 = S_0$ ,

$(\delta_n)_{n=1}^N$  — последовательность независимых равномерно распределённых на  $[-1, 1]$  случайных величин.

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \hat{S}_n - S_{n-1} > 0 \\ -1, & \hat{S}_n - S_{n-1} \leq 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

где  $\Delta \hat{S}_n = \mu_s((n-1)h)h + \sigma_s((n-1)h)\sqrt{h}\chi_n$ ,  $\hat{S}_0 = S_0$ ,

$(\chi_n)_{n=1}^N$  — последовательность независимых случайных величин, принимающих два значения, -1 и 1, с равными вероятностями.

Дискретным, бинарным аналогом задачи (1.1) является задача следующего вида:

$$\begin{aligned}
& \min_{\sigma_{X/S}, X_0} E\Phi(X_N, \xi), & (1.12) \\
& \Delta X_n = \sigma_{X/S}((n-1)h)\Delta S_n, \\
& \Delta S_n = \sigma_S((n-1)h)\sqrt{h}Y_n, \\
& Y_n \in \{-1, 1\}, n \in \{1, \dots, N\}, h = T/N, \\
& P(Y_n = -1) = \frac{1}{2} + \frac{\mu_S((n-1)h)\sqrt{h}}{2\sigma_S((n-1)h)}, X_0 \leq a < E^*\xi.
\end{aligned}$$

Задача (1.12) рассматривается на естественном стохастическом базисе:  $(\Omega, F_n, F, P), F_0 = (\Omega, \emptyset), F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n), F = F_N$ . При этом последовательности  $\mu_S$  и  $\sigma_S$  адаптированы к рассматриваемой фильтрации. Определим из равенства  $E^*(\Delta S_n / F_{n-1}) = 0$  мартингальную меру  $P^*(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ .

Для дискретного варианта справедлива теорема, которая аналогична теореме существования решения задачи управления для непрерывной модели.

**Теорема 1.5.** Если существует решение задачи (1.2), то решение задачи (1.12) существует и вычисляется следующим образом:

1. Вычисляется  $\eta^*$  – решение задачи (1.2).
2. Вычисляется мартингал  $X$ :  $X_n = E^*(\eta^* / F_n)$  и разложение мартингала  $X$  по мартингалу  $S$ :  $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_{X/S}(i)\Delta S_i$ . Случайные величины  $\sigma_{X/S}(i)$  в этом разложении – предсказуемые случайные величины ( $\sigma_{X/S}(i) \in F_{i-1}$ ).

Существование разложения следует из единственности мартингальной меры [1]. Таким образом, для решения задачи мартингальным методом требуется существование и единственность мартингальной меры.

Перейдем к рассмотрению примеров. Рассмотрим симметричный штраф. Пусть в задаче (1.1) целевая функция  $\Phi(X_T, \xi) = (\xi - X_T)^2$ . Случайная величина  $\xi$  – квадратично интегрируемая случайная величина относительно исходной и мартингальной мер:  $E\xi^2 < \infty, E^*\xi^2 < \infty$ .

Из [36] следует, что задача (1.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \min_{\eta} E(\bar{\xi} - \eta)^2, \\ E(Z_T \eta) = 0, \\ \bar{\xi} = \xi - a. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Решение задачи (1.13) имеет вид:

$$\eta^* = \bar{\xi} - \frac{E(Z_T \bar{\xi})}{EZ_T^2} Z_T. \quad (1.14)$$

Рассмотрим несимметричный штраф. Пусть в задаче (1.1) целевая функция  $\Phi(X_T, \xi) = (\xi - X_T)^+$ . Случайная величина  $\xi > 0$ , и её математические ожидания по исходной и мартингальной мере меньше бесконечности:  $E\xi < \infty, E^*\xi < \infty$ . Задача (1.2) имеет вид:

$$\min_{\eta} E(\xi - \eta)^+, \quad E^*\eta \leq a. \quad (1.15)$$

Является справедливым следующее утверждение.

**Утверждение 1.1.** Если  $\eta^*$  – решение задачи (1.15), то случайная величина  $\bar{\eta} = \min\{\xi, \eta^*\}$  – решение задачи (1.15).

Действительно, математическое ожидание  $E^*\bar{\eta} \leq E^*\eta^* \leq a$ , то есть  $\bar{\eta}$  – допустимое решение задачи (1.15). Подставим случайную величину  $\eta^*$  в критерий задачи (1.15) и рассмотрим цепочку справедливых равенств:  $E(\xi - \eta^*)^+ = E(I_{\{\eta^* < \xi\}}(\xi - \eta^*)) = E(I_{\{\bar{\eta} < \xi\}}(\xi - \bar{\eta})) = E(\xi - \bar{\eta})^+$ .

Отсюда следует равенство критериев для оптимального решения  $\eta^*$  и допустимого решения  $\bar{\eta}$ . Поэтому допустимое решение  $\bar{\eta}$  является оптимальным решением задачи (1.15).

Данное утверждение позволяет разыскивать решение задачи (1.15) среди случайных величин, не превосходящих случайную величину  $\xi$ . Решение задачи (1.15) не может быть отрицательной случайной величиной, поскольку нулевое решение лучше отрицательного решения (при  $a > 0$ ). Поэтому решение задачи (1.15) можно разыскивать в виде:  $\xi\zeta$ , где случайная величина  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Таким образом, задачу (1.15) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \max E(\xi\zeta), \\ & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ & E^*(\xi\zeta) \leq a. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Рассмотрим две новые меры:  $d\bar{P} = \frac{\xi}{E\xi} dP$  и  $d\bar{P}^* = \frac{\xi}{E^*\xi} dP^*$ ,

относительно которых задача (1.16) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \max \bar{E}\zeta, \\ & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ & \bar{E}\zeta \leq \alpha, \alpha = \frac{a}{E^*\xi}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Задача (1.17) является рандомизированной задачей Неймана-Пирсона. Решение рандомизированной задачи приведено в [37]. Следуя [37], решение этой задачи имеет вид:

$$\zeta^* = I_{\{d\bar{P}-\lambda^*d\bar{P}^*>0\}} + \varepsilon I_{\{d\bar{P}-\lambda^*d\bar{P}^*=0\}}. \tag{1.18}$$

Пусть  $G(\lambda) = \bar{E}I_{\{d\bar{P}-\lambda d\bar{P}^*>0\}}$ , тогда в (1.18)  $\lambda^*$  – наименьшее значение  $\lambda$ , при котором  $G(\lambda) \leq \alpha$  и  $\varepsilon = \frac{\alpha - G(\lambda^*)}{\bar{E}I_{\{d\bar{P}-\lambda^*d\bar{P}^*=0\}}}$ . Так как  $0 \leq \alpha - G(\lambda^*) < \bar{E}I_{\{d\bar{P}-\lambda^*d\bar{P}^*=0\}}$ , то  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

**Замечание.** Если  $\varepsilon = 0$ , то оптимальное решение задачи (1.18) будет одновременно решением классической задачи Неймана-Пирсона.

Пусть  $\xi = f(S_T)$ . Меры  $\bar{P}, \bar{P}^*$  являются абсолютно интегрируемыми мерами, поэтому:  $d\bar{P}(x) = \bar{p}(x)dx$ ,  $d\bar{P}^*(x) = \bar{p}^*(x)dx$ . Функция  $G(\lambda) = \bar{E}I_{\{\bar{p}(S_T) - \lambda \bar{p}^*(S_T) > 0\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(s) I_{\{\bar{p}(s) - \lambda \bar{p}^*(s) > 0\}}(s) ds$ . Очевидно следующее утверждение.

**Утверждение 1.2.** Функция  $G(\lambda)$  является непрерывной.

**Следствие 1.**  $\varepsilon = 0$ .

**Следствие 2.**

Уравнение  $G(\lambda) = \alpha$  имеет решение и  $\lambda^* = \min \{\lambda : G(\lambda) = \alpha\}$ .

Следовательно, оптимальное значение

$$\zeta^*(S_T) = I_{\{\bar{p}(S_T) - \lambda^* \bar{p}(S_T) > 0\}}. \quad (1.19)$$

Далее положим  $\mu_s(t) := S_t \mu_s(t)$ ,  $\sigma_s(t) := S_t \sigma_s(t)$ , то есть дифференциал базового процесса имеет вид:

$$dS_t = S_t (\mu_s(t) dt + \sigma_s(t) dW_t). \quad (1.20)$$

Это необходимо для того, чтобы базовый процесс принимал положительные значения.

## 1.2. Модели с наблюдаемой разрядкой.

После описания вычислительной схемы рассмотрим основной класс исследуемых моделей базового процесса  $S$ . Процессы  $\mu_s(t)$  и  $\sigma_s(t)$ , участвующие в определении базового процесса  $S$ , задаются последовательностью моментов остановки  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$ , с вероятностью единица стремящихся к бесконечности, и двумя детерминированными последовательностями  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\sigma}$  с неравными нулю элементами, следующим образом:

$$\mu_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}_i I_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}}, \sigma_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\sigma}_i I_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}}. \quad (1.21)$$

Поскольку рассматривается конечный отрезок  $[0, T]$ , то уместно определить случайную величину  $\kappa_T = \sup\{n : \tau_n \leq T\}$  и использовать её в качестве верхнего предела сумм в (1.21):

$$\mu_s(t) = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \bar{\mu}_i I_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}} + \bar{\mu}_{\kappa_T+1} I_{\{\tau_{\kappa_T} < t \leq T\}}, \quad (1.22)$$

$$\sigma_s(t) = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \bar{\sigma}_i I_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}} + \bar{\sigma}_{\kappa_T+1} I_{\{\tau_{\kappa_T} < t \leq T\}}.$$

Очевидно, что  $P(\kappa_T < \infty) = 1$  и траектории процессов (1.22) полунепрерывны слева. Является справедливым утверждение.

**Утверждение 1.3.** Если  $|\bar{\mu}_i| \leq \bar{\mu}, \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma}_i \leq \bar{\sigma}$ , то процессы  $\mu_s$  и  $\sigma_s$  – прогрессивно измеримы, и интегралы  $\int_0^T |\mu_s(s)| ds, \int_0^T \sigma_s^2(s) ds$  и  $\int_0^T \left( \frac{\mu_s(s)}{\sigma_s(s)} \right)^2 ds$  – конечны с вероятностью единица.

Действительно, прогрессивность процессов следует из того, что  $\tau_i$  – моменты остановки. Для интегралов справедливы неравенства  $\int_0^T |\mu_s(s)| ds \leq \bar{\mu} \kappa_T < \infty, \int_0^T \sigma_s^2(s) ds \leq (\bar{\sigma})^2 \kappa_T < \infty, \int_0^T \left( \frac{\mu_s(s)}{\sigma_s(s)} \right)^2 ds \leq \left( \frac{\bar{\mu}}{\underline{\sigma}} \right)^2 \kappa_T < \infty,$

которые выполняются с вероятностью единица.

Из утверждения 1.1 следует, что существует единственная мартингальная мера, относительно которой процесс  $S$  является мартингалом, с плотностью:

$$Z_T = \exp\left(-\frac{1}{2} A_T - \sqrt{A_T} \varepsilon\right). \quad (1.23)$$

В (1.23)  $\varepsilon$  – стандартная нормальная случайная величина. Случайная природа процесса  $A$  определяется моментами остановки. Процесс  $A$  имеет вид:

$$A_T = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \left( \frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\sigma}_i} \right)^2 (T \wedge \tau_i - T \wedge \tau_{i-1}) + \left( \frac{\bar{\mu}_{\kappa_T+1}}{\bar{\sigma}_{\kappa_T+1}} \right)^2 (T - T \wedge \tau_{\kappa_T}). \quad (1.24)$$

Относительно мартингальной меры процесс

$$W_t^* = W_t + \sum_{i=1}^{\kappa_T} \frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\sigma}_i} (t \wedge \tau_i - t \wedge \tau_{i-1}) + \frac{\bar{\mu}_{\kappa_T+1}}{\bar{\sigma}_{\kappa_T+1}} (t - t \wedge \tau_{\kappa_T}) \quad (1.25)$$

является винеровским процессом.

Относительно мартингальной меры случайная величина  $S_T$  определяется следующим равенством:

$$S_T = S_0 \exp\left(-\frac{D_T}{2} + \sqrt{D_T} \varepsilon\right), \quad (1.26)$$

где  $D_T = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \bar{\sigma}_i^2 (T \wedge \tau_i - T \wedge \tau_{i-1}) + \bar{\sigma}_{\kappa_T+1}^2 (T - T \wedge \tau_{\kappa_T})$ .

Относительно исходной меры случайная величина  $S_T$  определяется следующим равенством:

$$S_T = S_0 \exp(C_T + \sqrt{D_T} \varepsilon), \quad (1.27)$$

где  $C_T = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \left( \bar{\mu}_i - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2} \right) (T \wedge \tau_i - T \wedge \tau_{i-1}) + \left( \bar{\mu}_{\kappa_T+1} - \frac{\bar{\sigma}_{\kappa_T+1}^2}{2} \right) (T - T \wedge \tau_{\kappa_T})$ .

В качестве примера рассмотрим векторный момент остановки  $(\tau_1, \tau_2)$ , в котором  $\tau_1 = \inf(t > 0 : S_t = M_1)$ , где  $M_1 > S_0$ ;  $\tau_2 = \inf(t > \tau_1 : S_t = M_2)$ , где  $M_2 < S_0$ . Пусть  $\tau_0 = 0, \tau_3 = T$ . Определим параметры базового процесса  $\mu_s(t) = \bar{\mu}_i, \sigma_s(t) = \bar{\sigma}_i, \tau_{i-1} < t \leq \tau_i$  и снос

$$C_t = \left( \bar{\mu}_1 - \frac{\bar{\sigma}_1^2}{2} \right) (t \wedge \tau_1) + \left( \bar{\mu}_2 - \frac{\bar{\sigma}_2^2}{2} \right) (t \wedge \tau_2 - t \wedge \tau_1) + \left( \bar{\mu}_3 - \frac{\bar{\sigma}_3^2}{2} \right) (t - t \wedge \tau_2).$$

Мы предполагаем выполнение следующих неравенств:

$$\bar{\mu}_1 - \frac{\bar{\sigma}_1^2}{2} > 0, \bar{\mu}_2 - \frac{\bar{\sigma}_2^2}{2} < 0, \bar{\mu}_3 - \frac{\bar{\sigma}_3^2}{2} > 0.$$

На рисунке 1.1 представлена компьютерная реализация модели с двумя барьерами при  $M_1 = 7, M_2 = 5, S_0 = 6$ .

Найдем плотность  $p(x, y)$  для векторного момента остановки  $(\tau_1, \tau_2)$ , определённой на множестве  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ , используя равенство для плотности:  $p(x, y) = p(y/x) \cdot p(x)$ . Для определения плотности закона распределения первого момента остановки –  $p(x)$ , воспользуемся тем, что  $\tau_1 = \inf(t : \bar{m}_1 t + \bar{\sigma}_1 W_t = \bar{M}_1)$ , где  $\bar{m}_1 = \bar{\mu}_1 - \frac{\bar{\sigma}_1^2}{2}$ ,  $\bar{M}_1 = \ln \frac{M_1}{S_0}$ . Для определения плотности  $p(y/x)$  условного закона распределения воспользуемся строго марковским свойством винеровского процесса.

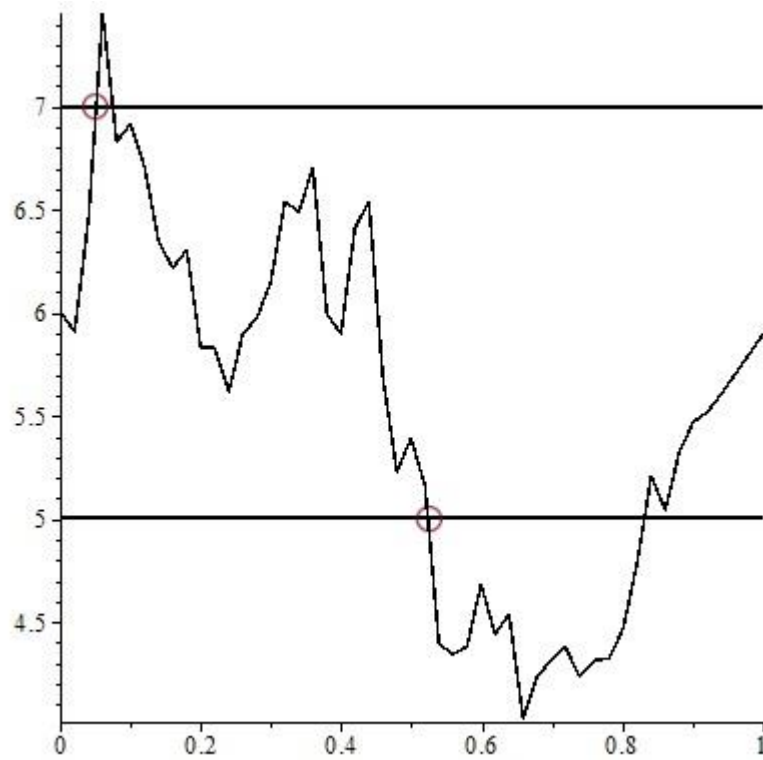


Рисунок 1.1. Компьютерная реализация модели с двумя барьерами.

В соответствии с этим свойством условное поведение второго момента остановки определяется равенством  $\tau_2 = x + \inf(t : \bar{m}_2 t + \bar{\sigma}_2 W_t = \bar{M}_2)$ , где  $\bar{m}_2 = \bar{\mu}_2 - \frac{\bar{\sigma}_2^2}{2}$ ,  $\bar{M}_2 = \ln \frac{M_2}{M_1}$ . Пусть  $p(m, M, \sigma, x)$  – плотность закона распределения момента остановки  $\tau = \inf(t : mt + \sigma W_t = M)$ , определённая на множестве  $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ . Параметры плотности  $m, M, \sigma$  – положительные числа.

$$\text{Плотность } p(m, M, \sigma, x) = \frac{M}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{mM}{\sigma^2}\right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(m^2 x + \frac{M^2}{x}\right)\right),$$

см. [1]. Плотность совместного закона распределения выражается через плотность  $p(m, M, \sigma, x)$  следующим образом:

$$p(x, y) = p(\bar{m}_1, \bar{M}_1, \bar{\sigma}_1, x) p(\bar{m}_2, \bar{M}_2, \bar{\sigma}_2, y - x).$$

**Замечание.** Данная модель легко распространяется на случай векторного момента остановки произвольной размерности  $\tau = (\tau_i)_{i=1}^L$ . Пусть  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_{L+1} = T$ . Параметры базового процесса  $\mu_s(t) = \bar{\mu}_i, \sigma_s(t) = \bar{\sigma}_i, \tau_{i-1} < t \leq \tau_i$ .

Для нечётного номера  $i$  момент остановки с номером  $i+1$  определяется следующим образом:  $\tau_{i+1} = \inf (t > \tau_i : S_t = M_2)$ ,  $M_2 < S_0$ . Для чётного номера  $i$  момент остановки с номером  $i+1$  определяется следующим образом:  $\tau_{i+1} = \inf (t > \tau_i : S_t = M_1)$ ,  $M_1 > S_0$ .

**Теорема 1.6.** При условии:  $(-1)^{i+1} \left( \bar{\mu}_i - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2} \right) > 0$ , существует совместная

плотность распределения векторного момента остановки  $\tau$

$$p_{\tau_1, \dots, \tau_L}^1(x_1, \dots, x_L) = \prod_{i=1}^L p(\bar{m}_i, \bar{M}_i, \bar{\sigma}_i, x_i - x_{i-1}), 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_L, \quad (1.28)$$

параметры  $\bar{m}_i = \bar{\mu}_i - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2}, \quad \bar{M}_i = \ln \frac{M_1}{S_0}, \quad \text{при} \quad i > 1$

$$\bar{M}_i = \begin{cases} \ln \frac{M_1}{M_2}, & i - \text{нечётный номер} \\ \ln \frac{M_2}{M_1}, & i - \text{чётный номер} \end{cases},$$

$$p(m, M, \sigma, x) = \frac{M}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{mM}{\sigma^2}\right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(m^2 x + \frac{M^2}{x}\right)\right).$$

Рассмотрим дискретный аналог модели с двумя барьерами. Пусть задан векторный момент остановки произвольной размерности  $\tau = (\tau_i)_{i=1}^L$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_{L+1} = T$ . Параметры базового процесса  $\mu_s(t) = \bar{\mu}_i, \sigma_s(t) = \bar{\sigma}_i, \tau_{i-1} < t \leq \tau_i$ . Для нечётного номера  $i$  момент остановки с номером  $i+1$  определяется следующим образом:  $\tau_{i+1} = \inf (n > \tau_i : S_n \leq M_2)$ ,  $M_2 < S_0$ . Для чётного номера  $i$  момент остановки с номером  $i+1$  определяется следующим образом:  $\tau_{i+1} = \inf (n > \tau_i : S_n \geq M_1), M_1 > S_0$ .

Определим первый момент остановки  $\tau_1 = \inf \{n : S_n \geq M_1\}$ . Имеем:  $\Delta S_n = S_{n-1} \bar{\sigma}_1 \sqrt{h} Y_n$ , то есть  $S_n = S_{n-1} (1 + \bar{\sigma}_1 \sqrt{h} Y_n)$ . В силу того, что  $h$  мало, последнее равенство можно записать в виде  $S_n = S_{n-1} \exp(\bar{\sigma}_1 \sqrt{h} Y_n)$ , то есть,  $S_n = S_0 \exp(\bar{\sigma}_1 \sqrt{h} \Sigma_n), \Sigma_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Считаем, что  $\bar{\mu}_1 > 0, \bar{\mu}_2 < 0$ . Нетрудно

установить, что  $\tau_1 = \inf \{n : \Sigma_n \geq E_1\}$ ,  $E_1 = \left\lceil \frac{1}{\bar{\sigma}_1 \sqrt{h}} \ln \frac{M_1}{S_0} \right\rceil$ . Определим

порождающую функцию момента  $\varphi_{\tau_1}(\alpha, p_1, E_1) = E\alpha^{\tau_1}$ . Для порождающей функции в монографии [36] доказано равенство:

$$\varphi_{\tau_1}(\alpha, p_1, E_1) = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 p_1 q_1}}{2\alpha q_1} \right)^{E_1}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad p_1 = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\mu}_1 \sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_1} > \frac{1}{2},$$

$q_1 = 1 - p_1$ . Кроме этого,  $P\{\tau_1 < \infty\} = 1, E\tau_1 < \infty$ . Определим второй момент

остановки  $\tau_2 = \tau_1 + \inf \{n : -\Sigma_n \geq E_2\}$ ,  $E_2 = \left\lceil -\frac{1}{\bar{\sigma}_2 \sqrt{h}} \ln \frac{M_2}{S_0 \exp(\bar{\sigma}_1 \sqrt{h} E_1)} \right\rceil$ .

Порождающая функция условного закона распределения

$$\psi_{\tau_2}(\alpha, p_2, E_2) = \varphi_{\tau_2 - \tau_1}(\alpha, p_2, E_2) = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 p_2 q_2}}{2\alpha q_2} \right)^{E_2}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$p_2 = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_2} > \frac{1}{2}, \quad q_2 = 1 - p_2.$$

Рассмотрим порождающую функцию  $\varphi_\tau(\alpha, p, E) = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 p q}}{2\alpha q} \right)^E$ ,  $E$

– целое число, большее либо равное единице. Порождающая функция  $\varphi_\tau(\alpha, p, E)$  может быть разложена в ряд Тейлора

$$\varphi_\tau(\alpha, p, E) = (2q)^{-E} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^E C_E^j \prod_{l=0}^{k-1} \binom{j}{2}^{-l} \frac{(-1)^{k-j} (4pq)^k \alpha^{2k-E}}{k!}. \quad \text{С другой стороны,}$$

$$\varphi_\tau(\alpha, p, E) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i P(\tau = i).$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты, получим формулу для  $P(\tau = i)$ .

**Теорема 1.7.** При условии:  $(-1)^{i-1} \bar{\mu}_i > 0$  существует обобщённая плотность распределения векторного момента остановки  $\tau$

$$p_{\tau_1, \dots, \tau_L}^2(x_1, \dots, x_L) = \prod_{i=1}^L p(E_i, p_i, x_i), \quad 0 < x_1 < \dots < x_L, \quad (1.29)$$

параметры  $p_i = \frac{1}{2} + (-1)^{i-1} \frac{\bar{\mu}_i \sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_i}, \quad E_1 = \left[ \frac{1}{\bar{\sigma}_1 \sqrt{h}} \ln \frac{M_1}{S_0} \right], \quad \text{при } i > 1$

$$E_i = \left[ (-1)^{i-1} \frac{1}{\bar{\sigma}_i \sqrt{h}} \ln \frac{\bar{M}_i}{S_0 \exp\left(\sqrt{h} \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\sigma}_j E_j\right)} \right], \quad p(E_i, p_i, x_i) = \begin{cases} 0, x_i + E_i - \text{нечётное} \\ G_i, x_i + E_i - \text{чётное} \end{cases},$$

$$G_i = (2(1-p_i))^{-E_i} \sum_{j=0}^{E_i} C_{E_i}^j \prod_{l=0}^{k_i-1} \binom{j}{2-l} \frac{(-1)^{k_i-j} (4p_i(1-p_i))^{k_i}}{k_i!}, \quad k_i = \frac{x_i + E_i}{2},$$

$$\bar{M}_i = \begin{cases} M_1, i - \text{нечётный номер} \\ M_2, i - \text{чётный номер} \end{cases}.$$

### 1.3. Модели с ненаблюдаемой разладкой.

#### 1.3.1. Постановка и схема решения задачи обнаружения разладки.

Рассмотрим естественный стохастический базис  $\langle \Omega, (F_n)_{n \geq 1}, F, P \rangle$ . В базисе пространство элементарных случайных событий  $\Omega$  – множество бинарных последовательностей  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots)$ , элементы фильтрации  $\sigma$ -подалгебры  $F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ ,  $\sigma$ -алгебра  $F = \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} F_n\right)$ ,  $P$  – вероятность. Рассмотрим случайную величину  $\theta \in \{1, \dots, n, \dots\}$ , которую будем называть разладкой. Рассмотрим бинарный случайный процесс (бинарную случайную последовательность)  $Y$  со значениями  $Y_i \in \{0, 1\}$  и дискретным временем  $i \in \{1, \dots, n, \dots\}$ . Рассмотрим задачу вычисления момента остановки, оценивающего разладку в этой последовательности, который разделяет вершины дерева на два класса –  $H_1$  и  $H_2$  в смысле, представленном ниже.

Для любой последовательности  $\omega$  определена условная элементарная вероятность  $P(\omega/\theta = n)$ , и определено распределение вероятностей для случайной величины  $\theta$  –  $P(n)$ . Элементарная вероятность вычисляется по формуле полной вероятности  $P(\omega) = \sum_{n \geq 1} P(\omega/\theta = n)P(n)$ . Будем считать, что определены два типа элементарных вероятностей  $P_0(\omega)$  и  $P_\infty(\omega)$ . В этих

элементарных вероятностях содержатся два крайних случая – разрядка наступила с самого начала, и разрядка не наступила. Для условной вероятности будем использовать следующую формулу:

$$P(\omega / \theta = n) = P_\infty(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) P_0(\omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_m, \dots), \quad (1.30)$$

$$P(\omega / \theta = 1) = P_0(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \dots).$$

То есть при фиксированной разрядке  $\theta = n$  последовательность  $\omega$  составляется из двух независимых подпоследовательностей. Кроме этого,  $P_\infty(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \prod_{i < n} P_\infty(\omega_i)$ ,  $P_0(\omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_m, \dots) = \prod_{i \geq n} P_0(\omega_i)$ . Для каждого фактора

в этих формулах справедливо выражение:

$$P_0(\omega_i) = q_0^{\omega_i} (1 - q_0)^{1 - \omega_i}, P_\infty(\omega_i) = q_\infty^{\omega_i} (1 - q_\infty)^{1 - \omega_i}. \quad (1.31)$$

В формуле (1.31)  $q_0 = P(Y_n = 1/n > \theta)$ ,  $q_\infty = P(Y_n = 1/n \leq \theta)$ . В связи с бинарной последовательностью рассмотрим бинарное дерево с набором

вершин  $\left[ (A_i^j)_{j=0}^{2^i-1} \right]_{i=0}^N$ , в котором  $A_i^j \rightarrow \{A_{i+1}^{2j}, A_{i+1}^{2j+1}\}$ . Нетрудно установить

изоморфизм между отрезками бинарной последовательности  $(\omega_k)_{k=1}^i$  и

вершинами дерева  $A_i^j$ . Этот изоморфизм задается стандартным образом:

отрезок бинарной последовательности  $(\omega_k)_{k=1}^i$  изоморфен вершине  $A_i^j$  тогда и

только тогда, когда  $j = \sum_{k=1}^i 2^{i-k} \omega_k$ . Рассмотрим произвольный момент

остановки  $\tau$ . Момент остановки разделяет вершины дерева на два класса

в соответствии с правилом: вершина  $A_i^j$  относится к первому классу ( $H_1$ )

вершин, если  $\tau(A_i^j) = i$ ; если  $A_i^j$  относится к первому классу, то вершины

$A_{i+1}^{2j}, A_{i+1}^{2j+1}$  также относятся к первому классу, естественно,  $\tau(A_{i+1}^{2j}) = \tau(A_{i+1}^{2j+1}) = i$ .

Остальные вершины дерева относятся ко второму классу ( $H_2$ ). Теперь

последовательность  $\omega$  можно рассматривать как случайное блуждание по

бинарному дереву, если блуждание в некоторый момент времени

оказывается в вершине первого класса, то оставшаяся часть блуждания будет

происходить по вершинам этого класса.

Задача обнаружения разладки заключается в вычислении момента остановки  $\tau_*$ , расположенного как можно ближе к случайной величине  $\theta$ . В упомянутых во введении работах задача обнаружения разладки рассматривается как задача оптимальной остановки марковского процесса. Линейный критерий в задаче об оптимальной остановке имеет вид:  $P(\theta > \tau) + \alpha E(\tau - \theta)^+$ . Первое слагаемое – вероятность «ложной тревоги», второе – среднее запаздывание. Стандартным образом показывается, что задача об оптимальной остановке для дискретного времени и конечным горизонтом с приведённым критерием сводится к следующей задаче оптимальной остановки:

$$V = \min_{0 \leq \tau \leq T} E \left[ 1 - \varphi_\tau + \alpha \sum_{i=1}^{\tau-1} \varphi_i \right]. \quad (1.32)$$

В (1.32)  $\varphi_n = P(\theta \leq n / F_n)$  – последовательность апостериорных вероятностей. По формуле Байеса:  $\varphi_n = \frac{\sum_{j=1}^n P(Y_1, \dots, Y_n / \theta = j) P(\theta = j)}{P(Y_1, \dots, Y_n)}$ .

Одновременно с этой последовательностью рассмотрим последовательность

$$\text{отношений правдоподобия: } \psi_n = \frac{\varphi_n}{1 - \varphi_n} = \frac{\sum_{j=1}^n P(Y_1, \dots, Y_n / \theta = j) P(\theta = j)}{P_\infty(Y_1, \dots, Y_n) P(\theta > n)}$$

Задача (1.32) выражается в терминах этой последовательности следующим образом:

$$V = \min_{1 \leq \tau \leq T} E \left[ \frac{1}{1 + \psi_\tau} + \alpha \sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{\psi_i}{\psi_i + 1} \right]. \quad (1.33)$$

Таким образом, в данной задаче последовательность отношений правдоподобия является достаточной статистикой для оценки разладки, кроме этого она может быть использована непосредственно для оценки разладки, например, следующим образом:  $\tau = \inf \{n : \psi_n \geq a\}$ . Порог  $a$  может быть выбран, исходя из разных соображений. Например, исходя из ограничения:  $E(\tau / \theta = \infty) \geq T$ , где  $T$  – параметр, принимающий большое

значение. Смысл ограничения заключается в следующем. Среднее время неправильного обнаружения разладки (ложной тревоги) должно быть большим. С помощью последовательности отношений правдоподобия можно реализовать нечёткую кластеризацию вершин дерева. Будем считать, что принадлежность вершины  $A_n^i$  к первому классу является случайным событием, вероятность которого  $P(A_n^i \in H_1) = \frac{\psi_n(A_n^i)}{1 + \psi_n(A_n^i)}$ . При нечёткой

кластеризации может быть использована схема Монте-Карло. В этой схеме одновременно с вычислением отношений правдоподобия генерируется последовательность независимых равномерно распределённых на интервале  $[0,1]$  случайных величин  $v_n$ , и оценка разладки вычисляется следующим

$$\text{образом: } \tau = \inf \left\{ n : v_n \leq \frac{\psi_n}{1 + \psi_n} \right\}.$$

Для кластеризации вершин дерева необходимо вычислить значение последовательности отношений правдоподобия  $\psi_n$  в каждой вершине дерева. При независимости и одинаковой распределённости нужные вероятности

$$\text{имеют следующий вид: } P_\infty(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = (1 - q_\infty)^{k-1} \left( \frac{q_\infty}{1 - q_\infty} \right)^{\sum_{i=1}^{k-1} Y_i},$$

$$P_0(Y_k, \dots, Y_n) = (1 - q_0)^{n-k-1} \left( \frac{q_0}{1 - q_0} \right)^{\sum_{i=k}^n Y_i}. \text{ Отсюда}$$

$$\psi_n(Y_1, \dots, Y_n) = \frac{1}{P(\theta > n)} \sum_{k=1}^n L^{n-k+1} R^{\sum_{i=k}^n Y_i} P(\theta = k), \quad (1.34)$$

$$L = \frac{1 - q_0}{1 - q_\infty}, R = \frac{q_0(1 - q_\infty)}{q_\infty(1 - q_0)}.$$

Для вывода рекуррентного уравнения рассмотрим

$$\psi_{n+1}(Y_1, \dots, Y_{n+1}) = \frac{P(\theta > n)}{P(\theta > n+1)} \left[ \frac{LR^{Y_{n+1}}}{P(\theta > n)} \sum_{k=1}^{n+1} L^{n-k+1} R^{\sum_{i=k}^{n+1} Y_i} P(\theta = k) \right] =$$

$$= \frac{P(\theta > n)}{P(\theta > n+1)} \left[ LR^{Y_{n+1}} \left( \psi_n(Y_1, \dots, Y_n) + \frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} \right) \right].$$

Данное рекуррентное уравнение можно связать с вершинами дерева:

$$\psi_{n+1}(A_{n+1}^{2i+1}) = \frac{P(\theta > n)}{P(\theta > n+1)} \left[ LR \left( \psi_n(A_n^i) + \frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} \right) \right], \quad (1.35)$$

$$\psi_{n+1}(A_{n+1}^{2i}) = \frac{P(\theta > n)}{P(\theta > n+1)} \left[ L \left( \psi_n(A_n^i) + \frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} \right) \right],$$

$$\psi_1(A_1^1) = LR \frac{P(\theta = 1)}{P(\theta > 1)},$$

$$\psi_1(A_1^0) = L \frac{P(\theta = 1)}{P(\theta > 1)}.$$

Формулы (1.35) позволяют вычислить отношение правдоподобия для всех вершин дерева. Рассмотрим пример с геометрическим законом распределения разладки  $P(\theta = j) = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}$ ,  $j = 1, \dots$ . Необходимые для

расчётов отношения:  $\frac{P(\theta > n)}{P(\theta > n+1)} = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} = 1 - \lambda$  являются

постоянными, что позволяет записать равенство (1.35) следующим образом:

$$\psi_n(Y_1, \dots, Y_n) = (1 - \lambda) \left( \frac{L}{\lambda} \right)^{n+1} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\lambda}{L} \right)^k R^{\sum_{i=k}^n Y_i}.$$

Пусть параметры базового процесса  $S$  такие, что

$$\mu_s(t) = \bar{\mu}_1 I(t \leq \theta) + \bar{\mu}_2 I(t > \theta), \quad (1.36)$$

$$\sigma_s(t) = \bar{\sigma}_1 I(t \leq \theta) + \bar{\sigma}_2 I(t > \theta).$$

Назовем полученную модель «моделью Блэка-Шоулса с ненаблюдаемой разладкой». Разобьём интервал  $[0, T]$  на  $N$  частей с шагом

$h = \frac{T}{N}$ . Дискретная аппроксимация модели (1.36) имеет вид:

$\Delta S_n = S_{n-1} \sigma_s((n-1)h) \sqrt{h} Y_n$ ,  $Y_n \in \{-1, 1\}$ . Условные вероятности вычисляются по

формулам  $q_\infty = P(Y_n = 1/nh \leq \theta) = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\mu}_1 \sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_1}$ ,  $q_0 = P(Y_n = 1/nh > \theta) = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_2}$ .

### 1.3.2. Редукция NP-полной задачи к P-полной задаче.

Опишем алгоритм редукции NP-полной задачи к P-полной задаче на примере «модели Кокса-Росса-Рубинштейна с ненаблюдаемой разладкой». В этой модели значение базового процесса выражается через случайное блуждание следующим образом:

$$S_n = S_0 \left( \frac{1+b}{1+a} \right)^{\zeta_n} (1+a)^n, \quad \text{где}$$

$\zeta_n = \sum_{i=1}^n Y_i, Y_i \in \{0,1\}$ . Мы предполагаем, что параметры базового процесса постоянны,  $q_\infty = P(Y_n = 1/n \leq \theta)$ ,  $q_0 = P(Y_n = 1/n > \theta)$ .

В случае NP-полной задачи рассматривается бинарное дерево с вершинами  $\left[ \left( A_n^i \right)_{i=0}^{2^n-1} \right]_{n=0}^N$  и дугами  $A_n^i \rightarrow \{A_{n+1}^{2i}, A_{n+1}^{2i+1}\}$ . Исходная мера

$$P(A_{n+1}^{2i}) = \begin{cases} (1-q_0)P(A_n^i), A_n^i \in H_1 \\ (1-q_\infty)P(A_n^i), A_n^i \in H_2 \end{cases}, \quad P(A_{n+1}^{2i+1}) = \begin{cases} q_0P(A_n^i), A_n^i \in H_1 \\ q_\infty P(A_n^i), A_n^i \in H_2 \end{cases}. \quad \text{Мартингальная}$$

мера  $P(A_{n+1}^{2i}) = \frac{b-r}{b-a} P(A_n^i)$ ,  $P(A_{n+1}^{2i+1}) = \frac{r-a}{b-a} P(A_n^i)$ . При этом  $P(A_0^0) = P^*(A_0^0) = 1$ .

В случае P-полной задачи рассматривается дерево с вершинами  $\{A_n^i\}_{i=0}^n, n=0, \dots, N$  и дугами  $A_n^i \rightarrow A_{n+1}^i, A_{n+1}^{i+1}$ . Для управления процессами с разладкой требуется классификация вершин дерева с использованием двух классов. Для данного дерева используется нечёткая классификация. Принадлежность вершины классу рассматривается как случайное событие, которое наступает с апостериорной вероятностью  $P(A_n^i \in H_1) = p_{n,i}$ . Исходная мера вычисляется с помощью рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} P(A_0^0) &= 1, \\ P(A_n^0) &= P(A_{n-1}^0) \left( (1-q_0)p_{n-1,0} + (1-q_\infty)(1-p_{n-1,0}) \right), \\ P(A_n^n) &= P(A_{n-1}^{n-1}) \left( q_0 p_{n-1,n-1} + q_\infty (1-p_{n-1,n-1}) \right), \\ P(A_n^i) &= P(A_{n-1}^i) \left( (1-q_0)p_{n-1,i} + (1-q_\infty)(1-p_{n-1,i}) \right) + \\ &+ P(A_{n-1}^{i-1}) \left( q_0 p_{n-1,i-1} + q_\infty (1-p_{n-1,i-1}) \right), i \neq 0, i \neq n. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Пусть  $\zeta_n(i) = P(\zeta_n = i / \theta \leq n)$ . Величины  $\zeta_n(i)$  позволяют вычислить отношения правдоподобия  $\psi_n(i) = \frac{P(\theta \leq n / \zeta_n = i)}{P(\theta > n / \zeta_n = i)} = \frac{\zeta_n(i)P(\theta \leq n)}{C_n^i q_\infty^i (1 - q_\infty)^{n-i} P(\theta > n)}$ , а отношения правдоподобия, в свою очередь, позволяют вычислить вероятности  $p_{n,i} = \frac{\psi_n(i)}{1 + \psi_n(i)}$ .

Рассмотрим рекуррентное уравнение, связывающее  $\zeta_n(i)$  и  $\zeta_{n+1}(i)$ . Для начальных значений справедливы равенства:  $\zeta_1(0) = P(Y_1 = 0 / \theta = 1) = 1 - q_0$ ,  $\zeta_1(1) = P(Y_1 = 1 / \theta = 1) = q_0$ .

Сначала приведём формулу для  $\zeta_{n+1}(0) = P(\zeta_{n+1} = 0 / \theta \leq n + 1) = (1 - q_0)\zeta_n(0) + (1 - q_\infty)^{n+1} P(\theta = n + 1)$ , затем для  $\zeta_{n+1}(n + 1) = P(\zeta_{n+1} = n + 1 / \theta \leq n + 1) = q_0 \zeta_n(n) + q_\infty^{n+1} P(\theta = n + 1)$ , и, наконец, для  $\zeta_{n+1}(i) = P(\zeta_{n+1} = i / \theta \leq n + 1) = q_0 \zeta_n(i - 1) + (1 - q_0)\zeta_n(i) + C_{n+1}^i q_\infty^i (1 - q_\infty)^{n+1-i} P(\theta = n + 1)$ .

Мартингальная мера  $P^*(A_n^i) = C_n^i \left(\frac{r - a}{b - a}\right)^i \left(\frac{b - r}{b - a}\right)^{n-i}$ ,  $n = 0, \dots, N; i = 0, \dots, N$ .

Отметим, что число необходимых вычислений сократилось с  $2^N$  до  $N^2$ .

#### 1.4. Модели со случайной и с неопределённой волатильностью.

##### 1.4.1. Модель Хестона.

Пусть параметры базового процесса  $S$ , описывающего динамику стоимости рискового актива,  $\mu_s(t) = r, \sigma_s(t) = \sqrt{\sigma_t}$ ,  $r$  – процентная ставка. Дифференциал процесса банковского счёта  $dB_t = rB_t dt$ . Согласно формуле Ито [1], дифференциал дисконтированного процесса стоимости акции имеет вид  $d \frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_t} \sqrt{\sigma_t} dW_t$  и является мартингалом относительно исходной меры  $P$ .

Предположим, что

$$d\sigma_t = k(\theta - \sigma_t)dt + \nu\sqrt{\sigma_t}d\bar{W}_t. \quad (1.38)$$

Процессы  $W$  и  $\bar{W}$  являются винеровскими с  $dW_t d\bar{W}_t = \rho dt$ ; параметры  $k, \theta, \nu$  – константы.

Введем функцию  $X(t, S_t, \sigma_t)$ , которая выражается через платёжное обязательство  $f(S_T)$  согласно следующей формуле:  $X(t, S_t, \sigma_t) = \exp(-r(T-t))E(f(S_T)/F_t^{S, \sigma})$ . Тогда  $X(0, S_0, \sigma_0)$  – справедливая цена опциона с платёжной функцией  $f(S_T)$ . Из формулы Ито следует уравнение

$$-rX + X'_t + X'_S rS + X'_\sigma k(\theta - \sigma) + \frac{1}{2} X''_{SS} S^2 \sigma + \frac{1}{2} X''_{\sigma\sigma} \nu^2 \sigma + X''_{S\sigma} S \nu \rho = 0 \quad (1.39)$$

с краевым условием  $X(T, S, \sigma) = f(S)$ .

Приведём дискретную модель, аппроксимирующую модель Хестона:

$$\begin{cases} \Delta S_n = S_{n-1} (rh + \sqrt{\sigma_{n-1}} h \varepsilon_n) \\ \Delta \sigma_n = k(\theta - \sigma_{n-1})h + \nu \sqrt{\sigma_{n-1}} h \bar{\varepsilon}_n \end{cases} \quad (1.40)$$

$n = 1, \dots, N.$

Последовательности  $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$  и  $(\bar{\varepsilon}_n)_{n=1}^N$  состоят из нормальных случайных величин с  $E\varepsilon_n = 0, E\bar{\varepsilon}_n = 0, E(\varepsilon_n)^2 = 1, E(\bar{\varepsilon}_n)^2 = 1, \text{cov}(\varepsilon_n, \bar{\varepsilon}_n) = \rho$ .

Приведем бинарную модель, аппроксимирующую модель (1.40):

$$\begin{cases} \Delta S_n = S_{n-1} \sqrt{\sigma_{n-1}} h Y_n \\ \Delta \sigma_n = \nu \sqrt{\sigma_{n-1}} h \bar{Y}_n \end{cases} \quad (1.41)$$

$n = 1, \dots, N.$

Последовательности  $(Y_n)_{n=1}^N$  и  $(\bar{Y}_n)_{n=1}^N$  состоят из независимых бинарных случайных величин, принимающих значения 1 и -1, вероятности

$$p_n = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{\sigma_{n-1}}} \right), \quad \bar{p}_n = P(\bar{Y}_n = 1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k\sqrt{h}(\theta - \sigma_{n-1})}{\nu\sqrt{\sigma_{n-1}}} \right),$$

$$\text{cov}(Y_n, \bar{Y}_n) = \rho.$$

Справедливая цена опциона  $X(0, S_0, \sigma_0)$  может быть вычислена с помощью метода Монте-Карло. Для дискретной аппроксимации (1.40) необходимо в каждом эксперименте генерировать случайные величины  $\varepsilon_n, \bar{\varepsilon}_n$  согласно следующему правилу. Сначала генерируются независимые, стандартные нормальные случайные величины  $\delta_n, \bar{\delta}_n$ . Затем  $\varepsilon_n := \delta_n, \bar{\varepsilon}_n := \delta_n \rho + \bar{\delta}_n \sqrt{1 - \rho^2}$ . Для бинарной аппроксимации (1.41) необходимо в каждом эксперименте генерировать случайные величины  $Y_n, \bar{Y}_n$  согласно следующему правилу. Сначала генерируется случайная величина  $Y_n$  с вероятностью  $p_n$ . Если  $Y_n = 1$ , то случайная величина  $\bar{Y}_n$  генерируется с вероятностью  $P(\bar{Y}_n = 1 / Y_n = 1) = \frac{\rho}{p_n} + \bar{p}_n$ . Если  $Y_n = -1$ , то случайная величина  $\bar{Y}_n$  генерируется с вероятностью  $P(\bar{Y}_n = 1 / Y_n = -1) = \bar{p}_n - \frac{\rho}{1 - p_n}$ .

Справедливая цена  $X(0, S_0, \sigma_0)$  может быть вычислена с помощью рекуррентных формул, в которых используется последовательность функций Беллмана  $V(n, x, y)$ , связанных уравнением Беллмана  $V(n-1, x, y) = EV(n, x + x\sqrt{yh}Y_n, y + v\sqrt{yh}\bar{Y}_n)$ . Применение формулы Тейлора второго порядка существенно упрощает данные уравнения:

$$V(n-1, x, y) = V(n, x, y) + V'_x(n, x, y)xrh + V'_y(n, x, y)k(\theta - y)h + \frac{1}{2}(V''_{xx}(n, x, y)x^2(r^2h^2 + yh) + 2V''_{xy}(n, x, y)x(k(\theta - y)rh^2 + vyh\rho) + V''_{yy}(n, x, y)(k^2(\theta - y)^2h^2 + v^2h)).$$

Окончательно, убирая слагаемые второго порядка малости, получим:

$$V(n-1, x, y) = V(n, x, y) + \left( V'_x(n, x, y)xr + V'_y(n, x, y)k(\theta - y) + \frac{1}{2}(V''_{xx}(n, x, y)x^2y + 2V''_{xy}(n, x, y)xvy\rho + V''_{yy}(n, x, y)v^2) \right)h.$$

Краевое условие  $V(N, x, y) = f(x)$ .

Справедливая цена  $X(0, S_0, \sigma_0) = \exp(-rT)V(0, S_0, \sigma_0)$ .

**Замечание.** Заметим, что данные формулы инвариантны по отношению к моделям (1.40) и (1.41).

### 1.4.2. Модели с неопределённой волатильностью.

#### Первая модель с неопределённой волатильностью.

Пусть параметры базового процесса  $S$   $\mu_s(t) = r, \sigma_s(t) \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ . Тогда

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(s)}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s\right) = S_0 \exp(R_t). \quad \text{Введём функцию}$$

$\varphi(x) = f(S_0 \exp(x))$ . Чтобы оценить верхнюю и нижнюю цены, нам необходимо решить следующие задачи оптимального управления:

$$\sup_{\sigma} E\varphi(R_T), \inf_{\sigma} E\varphi(R_T). \quad (1.42)$$

Введём функции  $\bar{v}(t, x) = \exp(-r(T-t)) \sup_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} E(\varphi(R_T) / R_t = x)$ ,

$\underline{v}(t, x) = \exp(-r(T-t)) \inf_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} E(\varphi(R_T) / R_t = x)$ , тогда верхняя цена  $\bar{v}(0,0)$  и

нижняя цена  $\underline{v}(0,0)$ . Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для функций

$\bar{v}(t, x)$  и  $\underline{v}(t, x)$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + r \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \sup_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = r \bar{v}, \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + r \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + \inf_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \right) = r \underline{v}.$$

с краевыми условиями  $\bar{v}(T, x) = \underline{v}(T, x) = \varphi(x)$ .

Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (r - A) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + B \left| \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right| = r \bar{v}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (r - A) \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + A \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} - B \left| \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \right| = r \underline{v},$$

$$A = \frac{\bar{\sigma}^2 + \underline{\sigma}^2}{4}, B = \frac{\bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2}{4}.$$

с краевыми условиями  $\bar{v}(T, x) = \underline{v}(T, x) = \varphi(x)$ .

Уравнения (1.44) являются уравнениями  $G$ -теплопроводности с нелинейными операторами:

$$G_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = A\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right| \text{ и}$$

$$G_2\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = A\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - B\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right|.$$

Если функция  $\varphi(x)$  непрерывна и ограничена, то уравнения (1.44) имеют единственные вязкостные решения [39]. Верификация Перрона вязкостных решений (1.44) как решений задач стохастического оптимального управления (1.42) выполняется так же, как и в [40].

Далее рассмотрим бинарную аппроксимацию данной задачи. Введём дисконтированный процесс  $\bar{S} = \frac{S}{B}$  и рассмотрим эквивалентный  $(\bar{S}, 1)$ -рынок

и финансовое обязательство  $\varphi(x) = \frac{f(xB_T)}{B_T}$ . Уравнение для

дисконтированной стоимости  $d\bar{S}_t = \sigma(t)dW_t, \underline{\sigma} \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}$ . Произведём разбиение интервала  $[0, T]$  на  $N$  частей с шагом  $h = \frac{T}{N}$ . Бинарный аналог

будет иметь вид:  $\Delta S_n = S_{n-1}\sigma_n\sqrt{h}Y_n, \underline{\sigma} \leq \sigma_n \leq \bar{\sigma}, Y_n \in \{-1, 1\}, p = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ .

Чтобы оценить верхнюю и нижнюю цены, нам необходимо решить следующие задачи оптимального управления:

$$\sup_{\sigma_1^N \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} E\varphi(\bar{S}_N), \inf_{\sigma_1^N \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} E\varphi(\bar{S}_N). \quad (1.45)$$

Введём функции  $\bar{v}^N(n, x) = \sup_{\sigma_{n+1}^N \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} E(\varphi(\bar{S}_N) / \bar{S}_n = x),$

$\underline{v}^N(n, x) = \inf_{\sigma_{n+1}^N \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} E(\varphi(\bar{S}_N) / \bar{S}_n = x),$  тогда верхняя цена  $\bar{C} = \exp(-rT)\bar{v}^N(0, S_0)$  и

нижняя цена  $\underline{C} = \exp(-rT)\underline{v}^N(0, S_0).$

Задачи (1.45) могут быть решены с помощью рекуррентных формул:

$$\bar{v}^N(n-1, x) = \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} (\bar{v}^N(n, x(1 + \sigma\sqrt{h})) + \bar{v}^N(n, x(1 - \sigma\sqrt{h}))), \bar{v}^N(N, x) = \bar{\varphi}(x).$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.8.** Если функция  $\bar{\varphi}(x)$  непрерывна и ограничена, то  $\bar{v}(0,0) = \exp(-rT) \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{v}^N(0, S_0)$ ,  $v(0,0) = \exp(-rT) \lim_{N \rightarrow \infty} v^N(0, S_0)$ .

Доказательство теоремы 1.8 аналогично доказательству, приведённому в [34].

### Вторая модель с неопределённой волатильностью.

Во второй модели волатильность  $d\sigma_t = \sigma_t \eta_t dt$ ,  $\eta_t \in [\underline{\eta}_t, \bar{\eta}_t]$ . Функции  $\underline{\eta}_t$  и  $\bar{\eta}_t$  являются детерминированными. Тогда

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s\right) = S_0 \exp(R_t). \quad \text{Введём функцию}$$

$\varphi(x) = f(S_0 \exp(x))$  и множество  $\Delta_{t_1}^{t_2} = \{\eta_t, t \in [t_1, t_2]\}$ . Чтобы оценить верхнюю и нижнюю цены, нам необходимо решить следующие задачи оптимального управления:

$$\sup_{\Delta_0^{t_1}} E\varphi(R_{t_1}), \inf_{\Delta_0^{t_1}} E\varphi(R_{t_1}). \quad (1.46)$$

Введём функции  $\bar{v}(t, x, y) = \exp(-r(T-t)) \sup_{\Delta_t^{t_1}} E(\varphi(R_{t_1}) / R_t = x, \sigma_t = y)$ ,  $v(t, x, y) = \exp(-r(T-t)) \inf_{\Delta_t^{t_1}} E(\varphi(R_{t_1}) / R_t = x, \sigma_t = y)$ , тогда верхняя цена  $\bar{v}(0,0, \sigma_0)$  и нижняя цена  $v(0,0, \sigma_0)$ . Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для функций  $\bar{v}(t, x, y)$  и  $v(t, x, y)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + r \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + A_t y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + B_t y \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right| &= r \bar{v}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A_t y \frac{\partial v}{\partial y} - B_t y \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| &= r v, \\ A_t = \frac{\bar{\eta}_t + \underline{\eta}_t}{2}, B_t = \frac{\bar{\eta}_t - \underline{\eta}_t}{2}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

с краевыми условиями  $\bar{v}(T, x, y) = v(T, x, y) = \varphi(x)$ .

Уравнения (1.47) являются двумерными уравнениями  $G$ -теплопроводности с

$$G_1\left(y, t, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A_t y \frac{\partial v}{\partial y} + B_t y \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \text{ и}$$

$$G_2\left(y, t, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A_t y \frac{\partial v}{\partial y} - B_t y \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|.$$

Если функция  $\varphi(x)$  непрерывна и ограничена,  $A_t$  и  $B_t$  являются непрерывными функциями на интервале  $[0, T]$ , то уравнения (1.47) имеют единственные вязкостные решения [39]. Верификация Перрона вязкостных решений (1.47) как решений задач стохастического оптимального управления (1.46) выполняется так же, как в [40]. В финансовой литературе уравнения (1.47) известны как уравнения Баренблата [32], когда  $A_t$  и  $B_t$  являются константами.

В симметричном случае, когда  $\bar{\eta}_t = \alpha_t, \underline{\eta}_t = -\alpha_t$ , уравнения (1.47) имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + r \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \alpha_t y \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right| = r \bar{v}, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + r \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \right) - \alpha_t y \left| \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} \right| = r \underline{v}.$$

с краевыми условиями  $\bar{v}(T, x, y) = \underline{v}(T, x, y) = \varphi(x)$ .

Бинарное представление аналогично бинарному представлению первой модели. Добавим уравнение для волатильности:  $\Delta \sigma_n = \sigma_{n-1} h \eta_n, \underline{\eta}_n \leq \eta_n \leq \bar{\eta}_n$ .

Чтобы оценить верхнюю и нижнюю цены, нам необходимо решить следующие задачи оптимального управления:

$$\sup_{\eta_1, \dots, \eta_N} E \varphi(S_N), \inf_{\eta_1, \dots, \eta_N} E \varphi(S_N). \quad (1.49)$$

Введём функции  $\bar{v}^N(n, x, y) = \sup_{\eta_{n+1}, \dots, \eta_N} E(f(S_N) / S_n = x, \sigma_n = y)$ ,

$\underline{v}^N(n, x, y) = \inf_{\eta_{n+1}, \dots, \eta_N} E(f(S_N) / S_n = x, \sigma_n = y)$ , тогда верхняя цена  $\bar{v}^N(0, S_0, \sigma_0)$  и нижняя цена  $\underline{v}^N(0, S_0, \sigma_0)$ .

Задачи (1.49) могут быть решены с помощью рекуррентных формул:

$$\bar{v}^N(n-1, x, y) = \sup_{y(1+h\eta) \leq \sigma \leq y(1+h\bar{\eta})} \frac{1}{2} \left( \bar{v}^N \left( n, x \left( 1 + x \left( 1 + \sigma \sqrt{h} \right) \right), \sigma \right) + \right. \\ \left. \bar{v}^N \left( n, x \left( 1 + x \left( 1 - \sigma \sqrt{h} \right) \right), \sigma \right) \right), \quad \bar{v}^N(N, x, y) = \varphi(x).$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.9.** Если функция  $f(x)$  непрерывна и ограничена, то  $\bar{v}(0,0,\sigma_0) = \exp(-rT) \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{v}^N(0, S_0, \sigma_0)$ ,  $\underline{v}(0,0,\sigma_0) = \exp(-rT) \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{v}^N(0, S_0, \sigma_0)$ .

Доказательство теоремы 1.9 повторяет доказательство аналогичной теоремы в работе [34].

Заметим, что и в этом случае может быть использована формула Тейлора. Например, для первой модели рекуррентные уравнения будут иметь вид:

$$\bar{V}(n-1, x) = \bar{V}(n, x) + \max_{\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}} \frac{x^2 \sigma^2 h}{2} \bar{V}_{xx}''(n, x) = \bar{V}(n, x) + \frac{x^2 h}{2} \left( (\bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2) \bar{V}_{xx}''(n, x) + \right. \\ \left. (\bar{\sigma}^2 + \underline{\sigma}^2) \bar{V}_{xx}''(n, x) \right).$$

Индекс  $N$  опущен, чтобы не загромождать выкладки. В частности, если  $\underline{\sigma} = 0$ , то рекуррентные уравнения будут иметь вид:

$$\bar{V}(n-1, x) = \bar{V}(n, x) + \max_{\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}} \frac{x^2 \sigma^2 h}{2} \bar{V}_{xx}''(n, x) = \bar{V}(n, x) + \frac{x^2 h \bar{\sigma}^2}{2} \left( \bar{V}_{xx}''(n, x) + \right. \\ \left. \bar{V}_{xx}''(n, x) \right),$$

что соответствует модели  $\Delta S_n = S_{n-1} \delta_n \sigma_n \sqrt{h} Y_n$ ,  $\delta_n \in \{0,1\}$ , то есть модели с пропущенными слагаемыми, которая будет подробно изучена в третьей главе диссертации.

В случае, если параметры базового процесса  $S$   $\mu_s(t) = r$ ,  $\sigma_s(t) = \sigma \equiv \text{const}$ , для расчёта справедливой цены  $v(0,0)$ , где  $v(t, x) = \exp(-r(T-t)) E(\varphi(R_T) / R_t = x)$ , может быть использована формула Блэка-Шоулса [1]:

$$v(t, x) = S_0 \exp(x) \Phi(d_+(x)) - K \exp(-r(T-t)) \Phi(d_-(x)), \quad (1.50)$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad d_{\pm}(x) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + x + (T-t)\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

В дискретном случае для расчёта справедливой цены  $v^N(0, S_0)$  может быть использована формула Кокса-Росса-Рубинштейна [1]:

$$v^N(n, S_n) = (1 + rh)^{n-N} \sum_{k=0}^{N-n} C_{N-n}^k f\left(S_n (1 + \sigma\sqrt{h})^k (1 - \sigma\sqrt{h})^{N-n-k}\right) p^k (1-p)^{N-n-k}, \quad (1.51)$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r\sqrt{h}}{\sigma}\right), \quad f(x) = \max(x - K, 0).$$

Эти формулы будут применены в примерах для верификации полученных результатов.

### 1.5. Примеры.

#### Пример 1.1. Модель с барьером.

Для модели с одним барьером  $M_1 = 6.5$ , начальным значением базового процесса  $S_0 = 6$  и параметрами базового процесса  $\bar{\mu}_1 = 0.1, \bar{\sigma}_1 = 0.15$  построить график функции распределения на отрезке  $[0,1]$ . Рассмотреть случаи дискретного и непрерывного времени.

**Решение.** Известно, что  $L = 1, \tau = \tau_1$ . Пусть  $x \in [0,1]$ , число разбиений временного интервала  $N = 100$ , шаг разбиения  $h = 0.01$ . В случае непрерывного времени функция распределения (сплошная линия) находится по формуле  $F_{\tau_1}^1(x) = \int_0^x p_{\tau_1}^1(y) dy$ . В случае дискретного времени функция распределения (точечная линия) находится по формуле  $F_{\tau_1}^2(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor xN \rfloor} p_{\tau_1}^2(i)$ .

Из рисунка 1.2 видно, что графики функций распределения в случае непрерывного и дискретного времени находятся близко друг к другу.

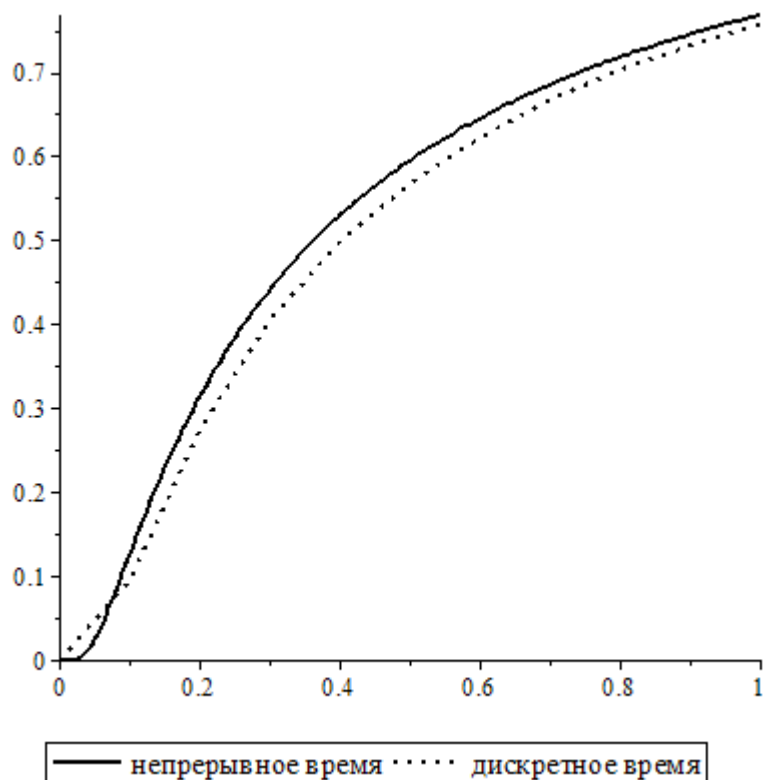


Рисунок 1.2. Графики функций распределения.

**Пример 1.2. Модель с двумя барьерами.**

Для модели с двумя барьерами  $M_1 = 7, M_2 = 5$ , векторным моментом остановки  $(\tau_1, \tau_2)$ , начальным значением базового процесса  $S_0 = 6$ ,

параметрами базового процесса  $\mu_s(t) = \begin{cases} 0.1, t \in (0, \tau_1] \\ -0.1, t \in (\tau_1, \tau_2] \\ 0.1, t \in (\tau_2, T] \end{cases}$

$\sigma_s(t) = \begin{cases} 0.15, t \in (0, \tau_1] \\ 0.11, t \in (\tau_1, \tau_2] \\ 0.05, t \in (\tau_2, T] \end{cases}$  и контрактной ценой  $K = S_0$  найти для европейского

опциона колл:

1. Справедливую цену совершенного хеджирования.
2. Начальный капитал и стратегию в случае среднеквадратичного хеджирования.
3. Начальный капитал и стратегию в случае квантильного хеджирования.

**Решение.**

1. Справедливая цена совершенного хеджирования.

Решение данной задачи состоит из двух этапов.

а) Найти справедливую цену совершенного хеджирования  $C(\tau_1, \tau_2)$  при условии, что моменты остановки фиксированы.

Согласно (1.26), относительно мартингальной меры случайная величина  $S_T$  определяется следующим равенством:

$$S_T = S_0 \exp\left(-\frac{D_T}{2} + \sqrt{D_T} \varepsilon\right), \quad D_T = \bar{\sigma}_1^2 \tau_1 + \bar{\sigma}_2^2 (\tau_2 - \tau_1) + \bar{\sigma}_3^2 (T - \tau_2).$$

Поэтому

$$C(\tau_1, \tau_2) = E^* f_T(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T\left(S_0 \exp\left(-\frac{D_T}{2} + \sqrt{D_T} x\right)\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

б) Найти справедливую цену совершенного хеджирования как  $EC(\tau_1, \tau_2)$  с использованием формулы для совместной плотности распределения  $p_{\tau_1, \tau_2}^1(x_1, x_2)$  векторного момента остановки.

$$EC(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T \int_x^T C(x, y) p_{\tau_1, \tau_2}^1(x, y) dx dy + \int_0^T \int_T^{+\infty} C(x, y) p_{\tau_1, \tau_2}^1(x, y) dx dy + \\ + C(T, T) \int_T^{+\infty} \int_T^{+\infty} p_{\tau_1, \tau_2}^1(x, y) dx dy \approx 0.38.$$

На рисунке 1.3 приведены графики зависимости справедливой цены совершенного хеджирования от ширины коридора  $M_1 - M_2$ . Сплошная линия соответствует расчету  $E^* f(S_T)$  для непрерывного времени, точечная линия соответствует расчету  $E^* f(S_N)$  для дискретного времени.

Из рисунка видно, что при увеличении ширины коридора значения совершенной цены стремятся к константе, равной 0.38. Эта константа равна цене Блэка-Шоулса в непрерывном времени и близка к цене Кокса-Росса-Рубинштейна в дискретном времени.

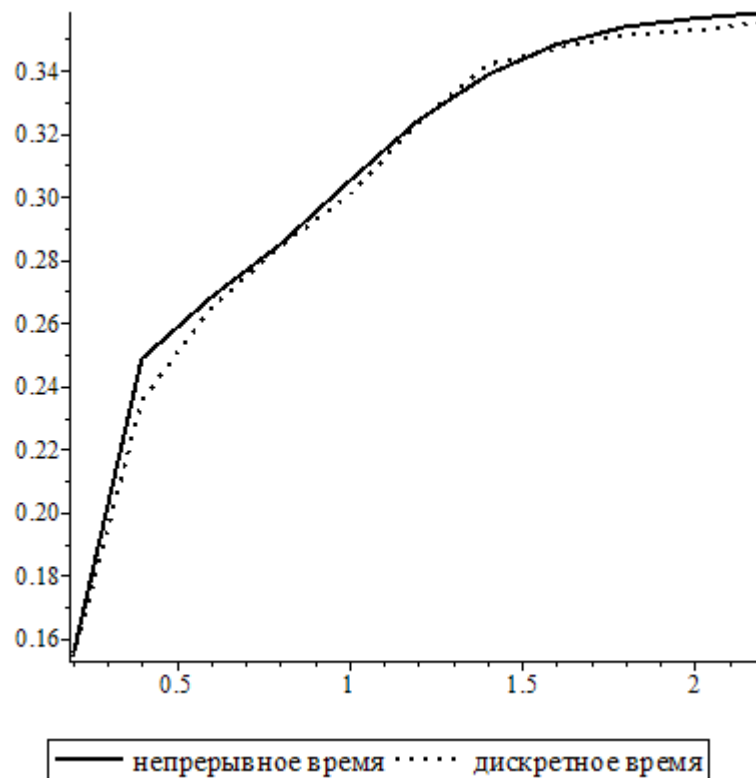


Рисунок 1.3. Графики зависимости справедливой цены совершенного хеджа от ширины коридора.

2. Начальный капитал и стратегия в случае среднеквадратичного хеджирования.

3. Начальный капитал и стратегия в случае квантильного хеджирования.

Расчёты в пунктах 2 и 3 проведём на бинарном дереве.

Положим  $\alpha = 0.25$ . Для расчётов в пункте 3 вычислим значение

$$\alpha = \frac{0.25}{0.38} \approx 0.7 \text{ и решим уравнение } G(\lambda) = \alpha, \text{ из которого следует, что } \lambda^* \approx 0.7,$$

что подтверждает график на следующем рисунке.

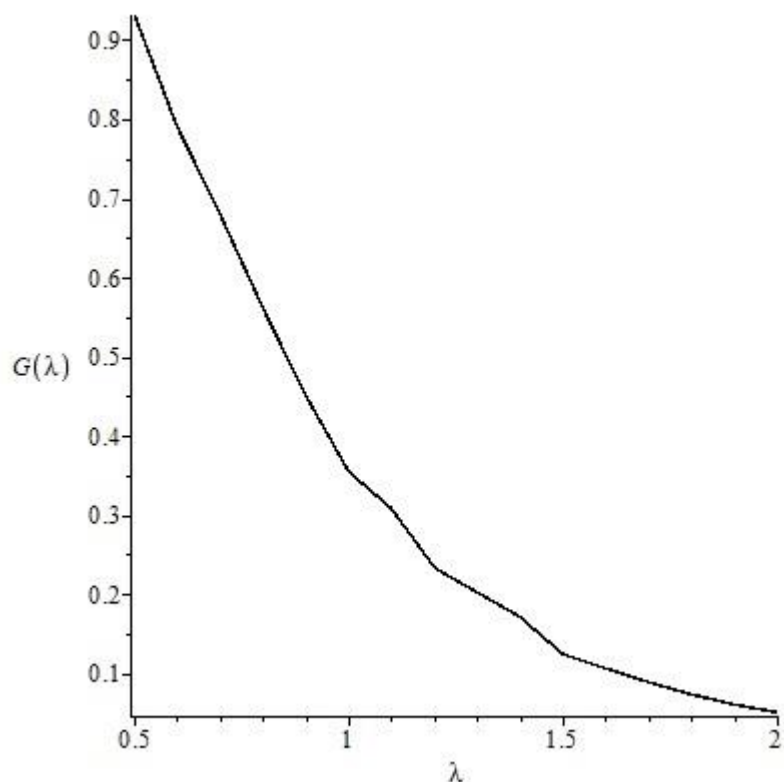


Рисунок 1.4. Зависимость  $G(\lambda)$  от  $\lambda$ .

На рисунке 1.5 приведены графики зависимости значений симметричного и несимметричного критериев от значений параметра  $a$ . По оси абсцисс расположены значения параметра  $a$ , по оси ординат расположены оптимальные значения критериев.

Видно, что при стремлении  $a$  к  $E^*f(S_T)$  оптимальные значения критериев стремятся к 0. Ранее отмечалось, что оптимальные значения критериев при  $a$ , равном справедливой цене финансового обязательства, равны нулю. Это очевидный плюс примененного вычислительного метода, связанного с дискретной аппроксимацией.

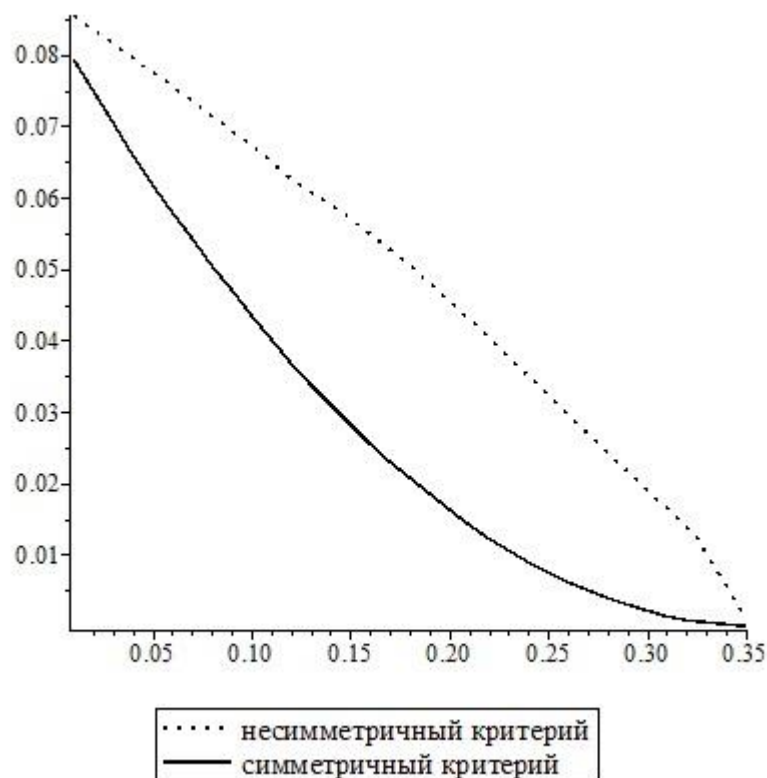


Рисунок 1.5. Зависимость симметричного и несимметричного критериев от  $a$ .

**Пример 1.3. Модель Блэка-Шоулса с разладкой.**

Для модели Блэка-Шоулса с разладкой, имеющей показательный закон распределения с плотностью  $p_\theta(x) = \mu \exp(-\mu x)$ , начальным значением базового процесса  $S_0 = 5$  и параметрами базового процесса  $\bar{\mu}_1 = 0.5, \bar{\mu}_2 = 1.5, \bar{\sigma}_1 = 0.2, \bar{\sigma}_2 = 0.25$  найти:

1. Среднюю квадратическую ошибку аппроксимации базового процесса бинарной последовательностью с использованием трёх случаев задания  $(Y_n)_{n=1}^N$ , описанных ранее.

2. Среднюю абсолютную ошибку оценки разладки моментом остановки с использованием трёх случаев задания  $(Y_n)_{n=1}^N$ . Разладку оценить с помощью метода Монте-Карло и с помощью рекуррентных формул на бинарном дереве.

**Решение.**

Пусть временной интервал  $[0,1]$ ,  $N=100$  – число точек разбиения временного интервала  $[0,1]$ , шаг  $h = \frac{1}{N}$ ,  $M = 10000$  – количество экспериментов.

В непрерывном времени плотность показательного закона распределения  $p_\theta(x) = \mu \exp(-\mu x)$ .

В дискретном времени вероятности геометрического закона распределения  $P(\theta = j) = (1-\lambda)\lambda^{j-1}$ .

Положим  $\lambda = \exp(-\mu h)$ , параметр  $\mu$  будем искать из условия  $P(\theta > 1) \leq \alpha, \alpha = 0.0005$ . Тогда  $\mu = \ln \frac{1}{\alpha}$ .

Процессы  $(Y_i^j)_{i=0}^N, (\tilde{S}_i^j)_{i=0}^N, (\bar{S}_i^j)_{i=0}^N, (\hat{S}_i^j)_{i=0}^N, (S_i^j)_{i=0}^N$  соответствуют эксперименту с номером  $j$ .

Экспериментальные вероятности вычисляются по формулам  $q_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{k_0^j}{N - \tau^j}, q_\infty = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{k_\infty^j}{\tau^j}$ ,  $\tau^j$  – значение полученного момента остановки в эксперименте с номером  $j$ ,  $k_\infty^j$  – число  $Y_i^j = 1, i = 1, \dots, \tau^j$ ,  $k_0^j$  – число  $Y_i^j = 1, i = \tau^j + 1, \dots, N$ .

Средние квадратические ошибки аппроксимации:

$$1. m_1 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{S}_i^j - \bar{S}_i^j)^2}$$

$$2. m_2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{S}_i^j - S_i^j)^2}$$

$$3. m_3 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{S}_i^j - S_i^j)^2}$$

Средняя абсолютная ошибка при вычислении разладки  $m = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |\tau^j - \theta^j|$ ,  $\theta^j$  – значение сгенерированного момента остановки в эксперименте с номером  $j$ .

Результаты эксперимента приведены в следующей таблице.

Таблица 1.1. Результаты эксперимента.

	Случай 1	Случай 2	Случай 3
Эмпирические вероятности $q_0, q_\infty$	$q_0 \approx 0.8671$ $q_\infty \approx 0.6115$	$q_0 \approx 0.8724$ $q_\infty \approx 0.6236$	$q_0 \approx 0.8662$ $q_\infty \approx 0.5857$
Величина ошибки аппроксимации	0.0377	0.0167	0.0404
Величина ошибки при вычислении разладки детерминированным методом	0.0003	0.0037	0.0001
Величина ошибки при вычислении разладки методом Монте-Карло	0.0000	0.0038	0.0003

В первой строке приведены эмпирические вероятности  $q_0, q_\infty$  для каждого рассматриваемого случая. Эти вероятности приблизительно совпадают с заданными для данной модели:  $q_0 = 0.875, q_\infty = 0.625$ . Во второй строке приведена среднеквадратическая ошибка аппроксимации. Видно, что самая маленькая ошибка получилась во втором случае. Это объясняется тем, что значения стандартной нормальной случайной величины концентрируются возле нуля в то время, как значения равномерной случайной величины распределены по всему интервалу  $[-1, 1]$ . В третьем случае случайная величина принимает только два значения,  $-1$  и  $1$ , что, естественно, сказывается на величине ошибки. В третьей строке приведена средняя абсолютная ошибка обнаружения разладки, вычисленная с помощью рекуррентных формул на бинарном дереве. В четвёртой строке приведена средняя абсолютная ошибка обнаружения разладки, вычисленная с помощью

метода Монте-Карло. Сопоставление третьей и четвертой строк говорит о том, что для первого случая ошибка метода Монте-Карло меньше ошибки, полученной в результате использования рекуррентных формул на бинарном дереве. Во втором и третьем случае наоборот. Этому есть естественное объяснение. Метод Монте-Карло зависит от распределения вероятностей и не обладает робастным свойством. На рисунке 1.5 приведена иллюстрация аппроксимации процесса  $\tilde{S}$  процессом  $S$ . Сплошная линия соответствует процессу  $\tilde{S}$ . Точечная линия соответствует процессу  $S$ .

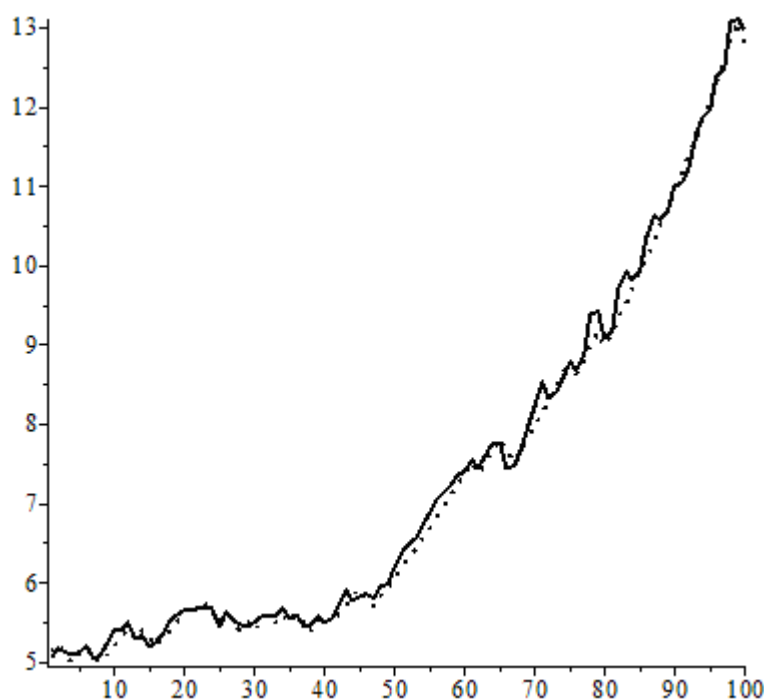


Рисунок 1.6. Иллюстрация аппроксимации процесса  $\tilde{S}$  процессом  $S$ .

Из рисунка можно сделать вывод о хорошем качестве аппроксимации.

#### Пример 1.4. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна с разладкой.

Для модели Кокса-Росса-Рубинштейна с разладкой, имеющей геометрический закон распределения  $P(\theta = j) = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, \lambda = 0.5$ , начальным значением базового процесса  $S_0 = 5$ , параметрами базового процесса  $a_n \equiv a, b_n \equiv b, b = -a, b = 0.02$ , а также вероятностями  $q_\infty = 0.8, q_0 = 0.2$  найти:

1. Значение симметричного и несимметричного критериев при

$$\xi = \alpha \frac{S_N}{S_0}, \alpha > 1 \text{ в случае NP-полной и P-полной задач.}$$

2. Построить графики зависимости симметричного и несимметричного критериев от  $\alpha$  в случае NP-полной и P-полной задач.

**Решение.**

Пусть  $N = 5$  для NP-полной задачи и  $N = 2^5 = 32$  для P-полной задачи. На рисунках 1.7 и 1.8 представлена зависимость значений симметричного и несимметричного критериев от параметра  $\alpha$ . Линия “1” соответствует NP-полной задаче, линия “2” соответствует P-полной задаче. Заметим, что значения критериев практически совпадают. Также отметим, что с увеличением параметра  $\alpha$  значения критериев растут. Это можно объяснить тем, что с ростом доходности растёт и риск.

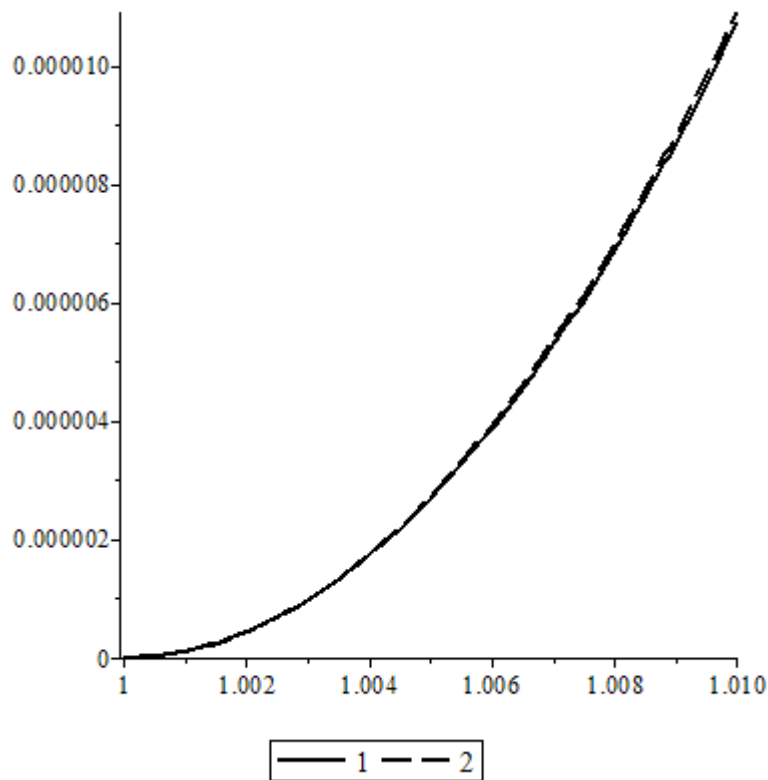


Рисунок 1.7. Зависимость значений симметричного критерия от параметра  $\alpha$ .

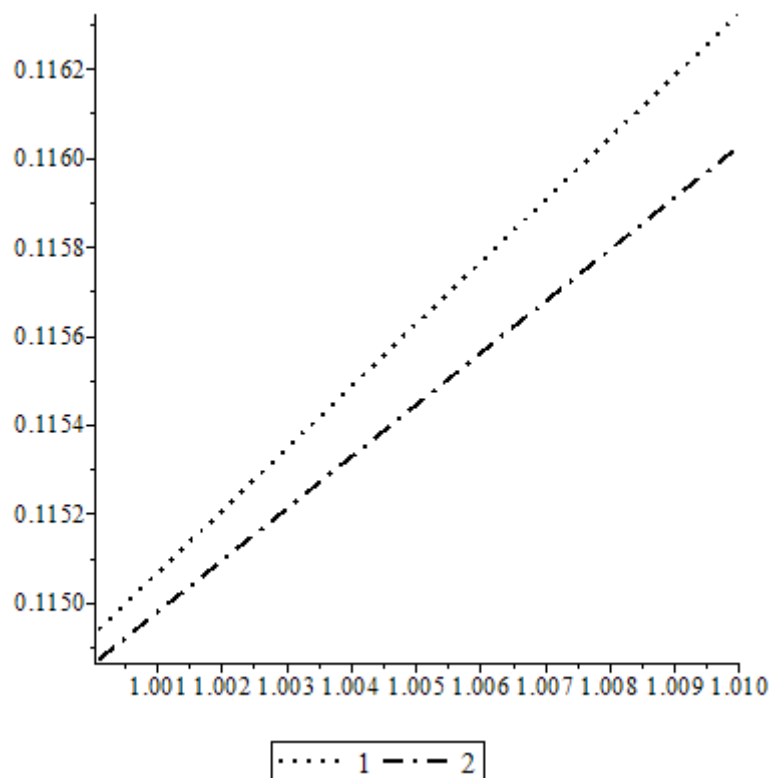


Рисунок 1.8. Зависимость значений несимметричного критерия от параметра  $\alpha$ .

На рис. 1.7 наблюдается исключительное совпадение линий. На рис. 1.8 различие заметно, однако, не столь уж велико, особенно для начальных значений доходностей. Это означает, что редукция вполне применима для сокращения объёма вычислений.

#### Пример 1.5. Модель Хестона.

Пусть  $r = 0.05, \sigma_0 = 0.05, S_0 = 8, T = 1, k = 0.05, \theta = 0.05, \nu = 0.05, \rho = 0.05$ .

Рассчитать значение справедливой цены европейского опциона колл для  $K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  с помощью решения краевой задачи и метода Монте-Карло ( $M = 1000, N = 1000$ ) в случае модели Хестона. Для расчётов по рекуррентным формулам с краевым условием из краевой задачи, параметр  $N = 1000$ .

Решение примера приведено в таблице 1.2.

Таблица 1.2. Зависимость справедливой цены от контрактной цены  
в модели Хестона.

$K$	$X(0, S_0, \sigma_0)$ (решение краевой задачи)	$X(0, S_0, \sigma_0)$ (метод Монте- Карло, аппроксимация бинарными с.в.)	$X(0, S_0, \sigma_0)$ (метод Монте- Карло, аппроксимация нормальными с.в.)	$X(0, S_0, \sigma_0)$ (рекуррентные формулы
1	7.0491	7.0693	7.0586	7.0475
2	6.0982	6.1500	6.1274	6.0963
3	5.1473	5.1089	5.1639	5.1451
4	4.1965	4.2932	4.2349	4.1938
5	3.2481	3.2443	3.2752	3.2456
6	2.3198	2.3539	2.3916	2.3175
7	1.4783	1.5841	1.5263	1.4727
8	0.8331	0.8695	0.8749	0.8296

Среднеквадратическое расхождение с первым столбцом для второго столбца: 0.0588, для третьего столбца: 0.0397, для четвёртого столбца: 0.0030.

**Пример 1.6. Первая модель с неопределённой волатильностью.**

Пусть  $r = 0.1, S_0 = 5, K = 5, T = 1, \sigma \in [0.1, 0.9]$ .

Рассчитать интервал справедливых цен европейского опциона колл с помощью решения краевых задач и рекуррентных формул в случае первой модели с неопределённой волатильностью. Сравнить со справедливой ценой, вычисленной по формуле Блэка-Шоулса для  $\sigma = 0.5$ .

**Решение** примера приведено в таблице 1.3 и на рисунке 1.9.

На рисунке 1.9 приведены графики зависимости значений  $v(0, x), \underline{v}(0, x), \bar{v}(0, x)$  от  $x$ . Сплошной линией нарисован график зависимости значений  $\bar{v}(0, x)$  от  $x$ . Пунктирной линией нарисован график зависимости

значений  $v(0, x)$  от  $x$ . Точечной линией нарисован график зависимости значений  $\underline{v}(0, x)$  от  $x$ .

Таблица 1.3. Интервал справедливых цен в первой модели с неопределённой волатильностью.

Метод	Нижняя цена	Справедливая цена (формула БШ)	Верхняя цена
Решение краевой задачи	0.5305	1.2156	1.9220
Рекуррентные формулы на бинарном дереве	0.5343		1.9287

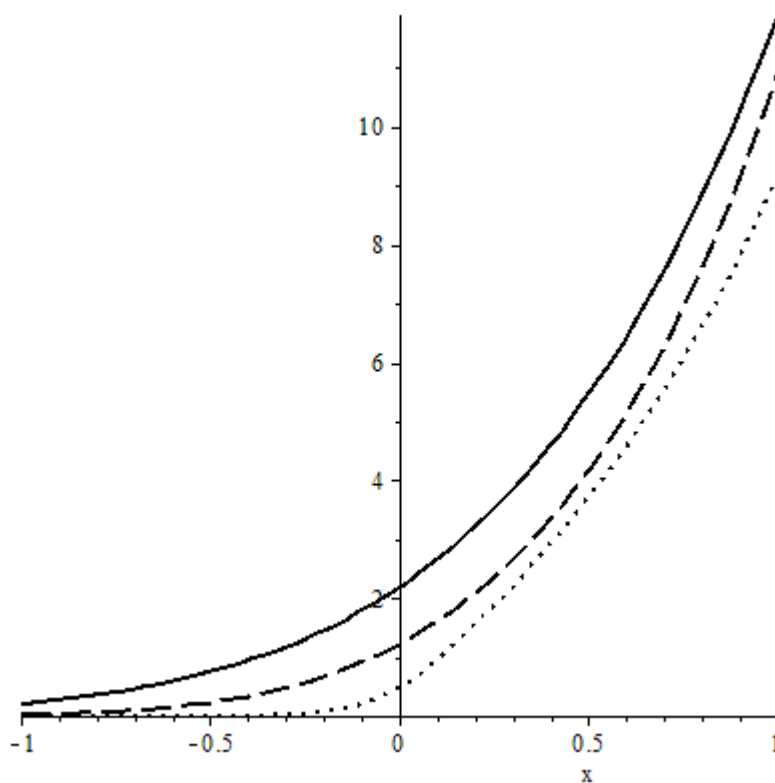


Рисунок 1.9. Графики зависимости значений  $v(0, x)$ ,  $\underline{v}(0, x)$ ,  $\bar{v}(0, x)$  от  $x$  в первой модели с неопределённой волатильностью.

**Пример 1.7. Вторая модель с неопределённой волатильностью.**

Пусть  $r = 0.1, S_0 = 5, K = 5, T = 1, \sigma_0 = 0.1, \eta_t \equiv \eta \in [-1, 1]$ .

Рассчитать интервал справедливых цен европейского опциона колл с помощью решения краевых задач и рекуррентных формул для  $N = 10$  в случае второй модели с неопределённой волатильностью. Сравнить со справедливой ценой, вычисленной по формуле Блэка-Шоулса для  $\sigma = 0.1$ .

**Решение** примера приведено в таблице 1.4.

Таблица 1.4. Интервал справедливых цен во второй модели с неопределённой волатильностью.

Метод	Нижняя цена	Справедливая цена (формула БШ)	Верхняя цена
Решение краевой задачи	0.4615	0.5154	0.6613
Рекуррентные формулы	0.4636		0.6685

## **Заключение к первой главе.**

В главе получены следующие основные результаты.

В области математического моделирования.

Построена модель оптимального управления и схема её решения, использующая мартингальную реализацию. Показано, что широкий класс задач описывается в рамках модели.

Изучены модели с наблюдаемой и ненаблюдаемой разладками, а также модели с неопределённой волатильностью. Для наблюдаемой разладки подробно исследована новая модель с векторной разладкой, и как пример представлена модель с двумя барьерами. Для этих моделей решена задача оптимального управления в предложенной постановке.

В области численных методов.

Вычислительные методы используют прямую бинарную аппроксимацию случайного процесса, сводя задачу вычисления оптимального управления к прямым вычислениям на бинарном дереве. Бинарная аппроксимация позволяет использовать бинарные траектории в методе Монте-Карло, существенно сокращающие вычисления. Для ненаблюдаемой разладки этот вычислительный приём является критически важным, поскольку сводит решение задачи управления к расчётам на бинарном дереве с предварительно раскрашенными вершинами вместо перебора по разным вариантам разладки. Для модели неопределённой волатильности этот приём, напоминающий сеточный метод, позволяет исключить расчёты в тех областях, где присутствие процесса маловероятно.

Существенное сокращение расчётов на дереве связано с действием, названным редукцией. Редукция в отдельных случаях позволяет свести NP-полную задачу к P-полной задаче.

В случае, если редукция не применима по тем или иным причинам, можно использовать параллельные вычисления на бинарном дереве.

В области комплексов программ.

Численные методы главы доведены до программной реализации с использованием среды программирования Maple. Приведены результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие и эмпирически подтверждающие теоретические результаты.

Прежде всего, отметим, что полученные в главе результаты доказаны с помощью строгих математических рассуждений и подтверждены результатами вычислительных экспериментов. Исследование, проведенное в данной главе, направлено на получение нового результата, который позволяет решать сложные задачи управления инвестициями для нестационарных процессов эволюции стоимости рискового актива. В качестве математических моделей нестационарных процессов применены диффузионные процессы с разладкой, процессы со стохастической и неопределённой волатильностью. Исследованы наблюдаемая и ненаблюдаемая разладки. В результате получены новые методы расчёта, которые по сравнению с аналогичными методами расчёта (Блэка-Шоулса, Кокса-Росса-Рубинштейна) позволяют управлять инвестициями для процессов, удерживаемых в полосе, а также вблизи пиков и впадин случайных процессов. Новые методы управления инвестициями для моделей с изменчивой волатильностью позволяют справиться с серьёзной проблемой, известной как «улыбка волатильности» в модели Блэка-Шоулса. В вычислительных методах для ненаблюдаемой разладки, которые находят решение задач оптимального управления, использована бинарная аппроксимация случайных процессов с разладкой. В случае с ненаблюдаемой разладкой использована классификация вершин бинарного дерева с помощью момента остановки, наиболее близкого к ненаблюдаемой разладке. С вычислительной точки зрения важным элементом является редукция NP-полной задачи к P-полной задаче; для этого использована нечёткая классификация вершин бинарного дерева. В новых вычислительных методах для модели применена теория вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана в сочетании с бинарной аппроксимацией.

## **Глава 2. Нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива.**

### **Введение.**

Робастная оптимизация и робастная статистика используются в качестве математического аппарата во второй главе. В робастной постановке продолжается исследование задач управления случайным процессом, предпринятое в первой главе. Напомним, что параметры задачи управления изменялись в случайные моменты времени, в моменты остановки, создавая неопределённость и затрудняя вычисление оптимальных решений. В этой главе задача управления рассматривается в условиях неопределённости, также связанной с параметрами модели управления. Теперь на основе выборки наблюдений за объектом определяются множества возможных значений неопределённых параметров (доверительные множества), и решение вычисляется в минимаксной постановке. Нетрудно проследить связь с моделями неопределённой волатильности. По-прежнему, главное приложение результатов главы – это задачи финансовой математики. Таким образом, содержание главы посвящено робастным методам финансовой математики.

Близкие исследования – это исследования в области гарантированного детерминистского подхода, при котором неопределённость движения цен рискованных активов описывается с помощью задания определённого множества сценариев. Гарантированный детерминистский подход представляет собой новый математический аппарат описания неопределённости модели и позволяет решать задачу суперхеджирования. Основные результаты в этой области получены Смирновым С.Н. см., например, [41]. Один частный, но очень важный для нашего исследования случай детерминированного суперхеджирования изложен в работе [42]. Различие между результатами диссертации и [42] заключается в следующем. Суперхеджирование предполагает учёт всех сценариев, поэтому стратегии, вычисляемые с помощью гарантированного подхода, являются

суперосторожными, рассчитанными по отношению к наихудшему варианту, который может не реализоваться. В нашем исследовании вычисляется «оптимальное» множество сценариев, которому «реализуемые» на финансовом рынке сценарии принадлежат с определённой доверительной вероятностью. Доверительное множество вложено в множество всех сценариев и, как правило, число элементов оптимального множества значительно меньше числа элементов множества всех сценариев. Это приводит к лучшему хеджированию, правда, с доверительной вероятностью, не равной единице. В этом смысле исследование ближе к квантильному хеджированию, которое упоминалось в первой главе. Доверительные множества сценариев вычисляются с использованием математической статистики и методов оптимизации. Доверительные множества скорее относятся к параметрам модели, поэтому используются термины “робастная статистика” и “робастное математическое программирование”.

Робастные методы в финансовой математике представляют большой интерес для изучения. Робастные методы, как правило, обладают устойчивостью по отношению к различного рода помехам [43]. Кроме этого, робастные методы снижают влияние случайных выбросов на окончательный результат [44]. Основу робастных методов составляют робастные оптимизационные методы [45,46]. Методы робастной выпуклой оптимизации изложены в работах [47-49]. В силу большой актуальности, робастные методы имеют много приложений. Например, одним из приложений является теория игр [114,117,118,122,131]. В работах [50-52] рассматриваются модели игр с неполной (конфиденциальной) информацией, выигрыш которых неопределён, и тем не менее находятся условия равновесия различной природы. Помимо теории игр, робастные модели имеют многочисленные приложения, как уже упоминалось, в финансовой математике [25,26,53-64]. Указанные работы различаются моделями и допустимыми множествами для параметров модели. Единственное, что объединяет все эти работы, это минимаксная постановка. Для вычисления допустимых множеств в этих

моделях используется априорная информация о совместных законах распределений доходностей компонентов портфеля. Это разнообразие методов и постановок не позволяет говорить об общем математическом аппарате.

В предлагаемом в диссертации методе содержится общая схема решения разнообразных задач финансовой математики. Метод опирается на выборку векторов возвратов или доходностей рискованных активов, составляющих портфель, на основе которой вычисляется множество возможных значений вектора возвратов или доходностей. Вероятность принадлежности множеству считается заданной. Для одномерного случая доверительное множество – объединение интервалов. Для многомерного случая – объединение эллипсоидов. При построениях используется одинаковая распределённость и независимость элементов выборки, что в свою очередь позволяет использовать усиленный закон больших чисел, позволяющий использовать частоту наступления случайного события «элемент выборки принадлежит заданному множеству», которая стремится почти наверное к вероятности этого случайного события с ростом объёма выборки, вне зависимости от закона распределения элементов выборки, что делает метод робастным по отношению к закону распределения элементов выборки.

Еще раз, более систематично, опишем важные элементы модели, которые встречались в первой главе. Рассмотрим  $(B,S)$ -рынок с безрисковым активом  $B$  и рискованным активом  $S$ . При стохастическом рассмотрении возврат рискованного актива  $\rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}$  является случайной величиной, например, в модели Кокса-Росса-Рубинштейна носитель распределения состоит из двух точек  $\{a, b\}$ . Для безрискового актива возврат  $r = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}$  является константой. Предполагается заданным стохастический базис:  $\langle \Omega, (F_n), F \rangle$ , на котором рассматривается множество мартингальных мер

$P^* = \left\{ p : \left\langle \frac{S_n}{B_n}, F_n, p \right\rangle - \text{мартингал} \right\}$ . Если множество мартингальных мер –

непустое множество, то есть (B,S)-рынок безарбитражный, то величина

$C^* = \frac{B_0}{B_N} \sup_{p \in P^*} E_p f$  называется верхней ценой [1] финансового обязательства  $f$

европейского опциона. Величина  $C_* = \frac{B_0}{B_N} \inf_{p \in P^*} E_p f$  – нижняя цена [1]

финансового обязательства. В этих формулах случайная величина  $f \geq 0$  и

$E_p f < \infty$ . Если существуют конечные значения для  $C_*$  и  $C^*$ , то  $C_* \leq C^*$ , и

интервал  $[C_*, C^*]$  называют интервалом справедливых цен. Поскольку цена

$C < C_*$  создаёт арбитраж (возможность заработать, не рискуя) для

покупателя, а цена  $C > C^*$  создаёт арбитраж для продавца. При решении

статистической задачи вычисления интервала справедливых цен приходится

сталкиваться с двумя проблемами. Первая проблема – это описание

множества мартингальных мер, вторая проблема заключается в том, что

параметры модели требуется оценить. Мы считаем, что источником

информации является выборка, с помощью которой вычисляются оценки

параметров модели. Любая оценка является случайной величиной,

следовательно, интервал справедливых цен является случайным, зависящим

от выборки.

Далее мы будем рассматривать самофинансируемый портфель,

дисконтированный капитал которого выражается формулой

$\frac{X_n}{B_n} = \frac{X_0}{B_0} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta \left( \frac{S_i}{B_i} \right)$ . В гарантированной постановке задача вычисления

верхней цены финансового обязательства  $f$ , которое мы будем считать

функцией от  $S_N$ , будет выглядеть следующим образом:  $\min \frac{X_0}{B_0}$  при условии

выполнения неравенств:  $\frac{X_N}{B_N} \geq \frac{f(S_N)}{B_N}$ , которое сводится к неравенствам:

$$\frac{X_0}{B_0} \geq \frac{f(S_N)}{B_N} - \sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta \left( \frac{S_i}{B_i} \right) = \frac{f(S_N)}{B_N} - \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r), \forall \rho_i \in M. \quad \text{Под } M$$

будем понимать множество значений, которые могут принимать величины  $\rho_i, i=1, \dots, N$ . Данная задача эквивалентна задаче

$$\min_{\gamma} \max_{\rho} \left( \frac{f(S_N)}{B_N} - \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \right) \quad \text{при ограничениях: } \rho_i \in M,$$

$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n), B_n = B_{n-1}(1 + r)$ . Предполагается, что начальные значения  $S_0$  и

$$B_0 - \text{известны. Величина } C^* = B_0 \min_{\gamma} \max_{\rho} \left( \frac{f(S_N)}{B_N} - \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \right)$$

является верхней ценой европейского опциона с финансовым обязательством  $f(S_N)$ . Эта цена обеспечивает достаточность капитала  $X_N^{\pi}$  самофинансируемого портфеля для оплаты финансового обязательства в случае наихудшего сценария на (B,S)-рынке.

Аналогичная постановка задачи вычисления оценки снизу справедливой цены европейского опциона является максиминной задачей

$$\text{следующего вида: } \max_{\gamma} \min_{\rho} \left( \frac{f(S_N)}{B_N} - \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \right) \quad \text{при ограничениях:}$$

$\rho_i \in M, S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n), B_n = B_{n-1}(1 + r)$ . Предполагается, что начальные значения  $S_0$  и  $B_0$  – известны. Величина

$$C_* = B_0 \max_{\gamma} \min_{\rho} \left( \frac{f(S_N)}{B_N} - \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \right) \quad \text{является нижней ценой}$$

европейского опциона с финансовым обязательством  $f(S_N)$ . Эта цена обеспечивает отсутствие арбитража для продавца опциона в случае наилучшего сценария на (B,S)-рынке.

В отличие от «классического» определения верхней и нижней цен финансового обязательства, см., например [1],  $\rho$  не является случайной величиной. Таким образом, в главе рассматривается робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна, в которой параметры классической модели  $a$  и  $b$  заменяются доверительным множеством, являющимся объединением

интервалов. Решаются задачи вычисления верхней и нижней цен для выпуклого финансового обязательства. Для вычисления доверительных интервалов применяется разработанная для исследуемой модели техника обработки данных.

Вторая часть главы посвящена диверсификации по Марковицу. Диверсификация по Марковицу – одно из наиболее востребованных средств вычисления портфеля. С момента публикации пионерской работы Марковица [23] насчитывается более 25000 цитирований этой работы. Подробный анализ работ по оптимальному портфелю можно найти в работах [62] и [63]. Задача об оптимальном портфеле заключается в выборе вектора

(портфеля)  $x = (x_i)_{i=1}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , качество которого определяется параметрами –

доходность и риск. Доходность портфеля  $x$  вычисляется как среднее

$E(\rho, x) = (\bar{\rho}, x)$ ,  $\rho$  – вектор случайных доходностей активов, входящих

в портфель, риск – это дисперсия:  $D(\rho, x) = (Cx, x)$ ,  $C$  – ковариационная

матрица:  $C = E\rho\rho^T - \bar{\rho}\bar{\rho}^T$ . Здесь  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение. Портфель

следует выбирать таким образом, чтобы доходность была как можно больше,

а риск как можно меньше. По своей структуре задача об оптимальном

портфеле относится к задачам с векторным критерием. Под решением задачи

с векторным критерием:  $\min_{x \in S} F(x)$ ,  $F(x) = (f_i(x))_{i=1}^m$  обычно понимается

множество не улучшаемых стратегий – множество Парето. Проблема

заключается в том, что вероятностная мера  $P$ , по которой вычисляются

среднее значение и дисперсия – неизвестна. Вместо неизвестной меры мы

можем использовать обучающую выборку  $V = \langle \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N \rangle$ , на основе

которой можно сформировать представление о вероятностной мере.

Например, неизвестную меру заменить эмпирической мерой

$P_N(dz) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\rho_i}(dz)$ , в которой используется мера Дирака –

$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ . Для эмпирической меры  $\bar{\rho}$  – выборочное среднее,  $C$  –

выборочная ковариационная матрица. Можно использовать обучающую выборку для оценки параметров неизвестной плотности распределения вероятностей одним из статистических методов, например, методом максимального правдоподобия. Выборочное среднее, выборочная ковариационная матрица или максимально правдоподобные оценки параметров неизвестного распределения позволяют найти решение проблемы, которое, к сожалению, зависит от выборки. Для нормального закона максимально правдоподобные оценки неизвестных параметров совпадают с выборочным средним и выборочной ковариационной матрицей. Как отмечают многочисленные исследователи, среди которых можно отметить работу [64], эти оценки не являются устойчивыми по отношению к изменению выборки. Поэтому подстановка выборочного среднего и выборочной ковариационной матрицы вместо неизвестных параметров приводит к неустойчивому решению задачи об оптимальном портфеле. Естественным выглядит стремление сделать решение задачи об оптимальном портфеле устойчивым. Для достижения этой цели возможны различные подходы. Во второй главе рассматривается, как уже отмечалось, гарантированный метод, в котором множество возможных сценариев является объединением эллипсоидов, полученное в результате обработки выборки. Кроме mean-variance для оценки качества портфеля могут быть использованы и другие функционалы, по этому поводу полезно ознакомиться с работами [24,65-67]. Например, оценить качество портфеля можно величиной порога доходности портфеля  $\alpha_\beta(x) = \max \alpha, P((x, \rho) \geq \alpha) \geq \beta$  при заданном уровне значимости  $\beta$ . Кроме алгоритма для построения одношагового портфеля, в главе также предлагается алгоритм для построения динамического портфеля, в котором пропорции включения активов в портфель не изменяются, изменяются инвестиции в портфель.

Как уже отмечалось, важным элементом робастной технологии является вычисление доверительного множества. Опишем метод построения доверительного множества по выборке. Метод включает два вычислительно

независимых элемента. Первый – это широко распространённый в математической статистике кластерный анализ [68-73], второй связан с вычислением либо интервала минимальной длины, содержащем подвыборку заданного объёма, либо с вычислением эллипсоида минимального объёма, также содержащем подвыборку заданного объёма [78-80]. Наиболее близкие работы составляют содержание робастного кластерного анализа. Отметим работы [74-77], в которых приводятся разные методы кластеризации, применяемые для выборок с засоренностями. Робастные методы связаны с оценкой кластеров и распознаванием засоренных элементов выборки. Популярной является схема, при которой к имеющимся кластерам добавляется еще один кластер, и задача рассматривается как задача вычисления максимума функции правдоподобия:

$$\max \sum_{i=1}^N \ln \left[ \sum_{j=1}^q p(x_i / \theta_j) p_j + \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{1}{\text{Val}} \right],$$

в которой необходимо определить два параметра:  $r$  – объём незасоренной части выборки, и плотность –  $\frac{1}{\text{Val}}$ ,

которая определяет засоренную часть выборки, здесь  $\text{Val}$  – объём области возможных значений элементов выборки. Альтернативной является схема, в которой отбираются элементы выборки (возможно, все элементы выборки), для которых решается задача кластеризации с использованием метода максимального правдоподобия, затем с использованием результатов кластеризации заново отбираются элементы выборки, для которых заново выполняется кластеризация. Для отбора может быть использовано байесовское решающее правило:  $\max p(x / \theta_i) p_i \geq \alpha$ . Проблемой является параметр  $\alpha$ , который можно связать с объёмом незасоренной части выборки.

Метод, используемый в диссертации, состоит в применении кластеризации для всей выборки, с последующей оценкой параметров интервалом минимальной длины или эллипсоидом минимального объёма для каждого кластера. При этом можно использовать любой из методов кластеризации. В работе делается акцент на проекционной модификации

метода  $k$ -средних. Отметим, что засоренность для каждого кластера определяется независимо и пропорциональна числу элементов каждого кластера.

Структура главы такова. В параграфе 2.1 рассматривается задача вычисления доверительного множества для одномерных и многомерных данных. В параграфе 2.2 изучается задача хеджирования для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. В параграфе 2.3 рассматривается робастная модель портфеля с произвольным числом рисков активы. В параграфе 2.4 приводятся результаты вычислительных экспериментов. В заключении приводятся и анализируются результаты главы.

Результаты главы опубликованы в работах [123,125,127,128].

### 2.1. Доверительное множество.

В основе метода  $k$ -средних [70] лежит оптимизационная задача:

$$\min_{m, \delta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L (\rho_i - m_j)^2 \delta_{i,j}, \quad \delta_{i,j} \in \{0,1\}, \quad \sum_{j=1}^L \delta_{i,j} = 1. \quad (2.1)$$

Метод  $k$ -средних это, по сути дела, решение задачи (2.1) методом спуска по обобщённым координатам  $m, \delta$ . Он заключается в следующем.

0 итерация) Выбираем  $m_1^0, \dots, m_L^0$ .

$t$  итерация) Вычисляем  $\delta^*$ , решая задачу  $\min_{\delta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \delta_{i,j} (\rho_i - m_j^{t-1})^2$ ,

$\delta_{i,j} \in [0,1]$ . Для этого вычисляем для каждого  $i$  значение

$$j^* = \arg \min_j (\rho_i - m_j^{t-1})^2 \text{ и полагаем } \delta_{i,j}^* = \begin{cases} 1, & j = j^* \\ 0, & j \neq j^* \end{cases}, \quad m_j^t = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_{i,j}^* \rho_i}{\sum_{i=1}^N \delta_{i,j}^*}.$$

Условие остановки: когда центры кластеров практически не изменяются. Хорошо известно, что, являясь монотонным, метод не гарантирует сходимости к решению оптимизационной задачи.

Для одномерных данных существует алгоритм, который позволяет найти точное решение задачи. Для двух классов задача (2.1) имеет вид:

$$\min_{m, \delta} \sum_{i=1}^N [(\rho_i - m_1)^2 \delta_i + (\rho_i - m_2)^2 (1 - \delta_i)]. \quad (2.2)$$

Рассмотрим упорядоченную по неубыванию выборку одномерных данных  $V = \{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ . Алгоритм заключается в следующем.

1. Определяем  $V_1 = \{\rho_1\}, V_2 = \{\rho_2, \dots, \rho_N\}, k = 1$ .
2. Вычисляем  $m_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \rho_i, m_2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N \rho_i$ . Вычисляем  $k = k + 1$ .

3. Вычисляем следующее разбиение

$$W = \begin{cases} V_1 + \{\rho_{k+1}\}, & d(\rho_{k+1}, m_1) < d(\rho_{k+1}, m_2) \\ V_1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$V_2 = V \setminus W.$$

4. Если  $W = V_1$ , то стоп, иначе  $V_1 = W$ . Переход к 2.

Справедливо очевидное утверждение.

**Утверждение 2.1.** Приведённый алгоритм находит решение задачи (2.2).

**Доказательство.** Пусть найдено оптимальное решение задачи (2.2):  $\delta^*, m_1^* < m_2^*$ . Далее  $V_1 = \{\rho_i : \delta_i^* = 1\}, V_2 = V \setminus V_1$  и  $\rho_{i^*} = \max\{\rho : \rho \in V_1\}, \rho_{j^*} = \min\{\rho : \rho \in V_2\}$ . Допустим, что данное решение не вычисляется алгоритмом, тогда  $\rho_{i^*} > \rho_{j^*}$ . Отсюда  $(m_1^* - \rho_{j^*})^2 < (m_1^* - \rho_{i^*})^2$  и  $(m_2^* - \rho_{i^*})^2 < (m_2^* - \rho_{j^*})^2$ . Поэтому замены  $\delta_{i^*}^*$  на ноль и  $\delta_{j^*}^*$  на единицу приводят к уменьшению целевой функции. Это противоречит оптимальности решения. Следовательно, оптимальное решение вычисляется алгоритмом.

Переходим к многомерным данным. Допустим, удалось найти решение задачи (2.2), то есть  $\delta = \{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ . Для центроидов справедливы равенства:

$$m_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \delta_i} \sum_{i=1}^N \delta_i \rho_i, m_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (1 - \delta_i)} \sum_{i=1}^N (1 - \delta_i) \rho_i. \text{ Наоборот известны центроиды,}$$

$$\text{тогда } \delta_i = \begin{cases} 1, \text{dist}(\rho_i, m_1) < \text{dist}(\rho_i, m_2) \\ 0, \text{dist}(\rho_i, m_1) \geq \text{dist}(\rho_i, m_2) \end{cases}, \text{ или } \delta_i = \begin{cases} 1, (m_2 - m_1, \rho_i) < \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \\ 0, (m_2 - m_1, \rho_i) \geq \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \end{cases}.$$

Итак, если бы был известен вектор  $l = m_2 - m_1$ , то мы могли бы спроектировать выборку на этот вектор и рассмотреть задачу кластеризации для одномерного случая, применив алгоритм, о котором речь шла выше. Поскольку вектор  $l$  неизвестен, то алгоритм будет состоять в следующем:

0 итерация) Выбрать вектор  $l$ .

$t$  итерация) Решить задачу кластеризации для проекции выборки на вектор  $l$ . Для этой кластеризации выбрать новый вектор  $l$ .

Условие остановки: когда центры кластеров практически не изменяются.

Для выбора вектора  $l$  предлагается использовать следующий критерий:

$$\min_{\|l\|=1} \frac{(C_{\text{in}} l, l)}{(m_2 - m_1, l)^2}, \quad (2.3)$$

$$\text{где } C_{\text{in}} = \sum_{i=1}^N \delta_i (\rho_i - m_1)(\rho_i - m_1)^T + \sum_{i=1}^N (1 - \delta_i) (\rho_i - m_2)(\rho_i - m_2)^T -$$

внутрикластерная матрица рассеивания.

Для разбиения выборки на несколько кластеров используется дихотомический алгоритм, который заключается в следующем.

0 итерация) Разбиваем выборку на два кластера, используя представленные ранее алгоритмы. Полагаем  $t = 1$ .

$t$  итерация) Исходная выборка разбита на  $t + 1$  кластеров:  $V = V_1^t \cup V_2^t \cup \dots \cup V_{t+1}^t$ . Для каждого кластера вычисляется разброс  $d_j^t = \sum_{\rho \in V_j^t} (\rho - m_j^t)^2$ . Определяется кластер, для которого разброс

максимальный:  $d_j^t = \max\{d_1^t, d_2^t, \dots, d_{t+1}^t\}$ . Выбранный кластер разбивается на два,  $t = t + 1$ .

Если условие остановки выполнено, то стоп, иначе переход к итерации  $t$ .

Условие остановки может быть разным. Можно останавливаться по числу кластеров, или по максимальному разбросу.

Является справедливым следующее утверждение.

**Утверждение 2.2.** Пусть выборка  $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Разброс выборки  $d > \max\{d_1, d_2\}$ , где  $d_1$  и  $d_2$  – разбросы кластеров  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

Действительно,

$$d = \sum_{\rho \in V} (\rho - m)^2 = \sum_{\rho \in V_1} (\rho - m)^2 + \sum_{\rho \in V_2} (\rho - m)^2 \geq \sum_{\rho \in V_1} (\rho - m_1)^2 + \sum_{\rho \in V_2} (\rho - m_2)^2 =$$

$d_1 + d_2$ , где  $m$  – центростид  $V$ ,  $m_1$  – центростид  $V_1$  и  $m_2$  – центростид  $V_2$ . Отсюда  $d > d_1$  и  $d > d_2$ . Таким образом, для алгоритма последовательность максимальных разбросов является убывающей.

**Интервал минимальной длины.** Следующая задача, которую необходимо решить, заключается в вычислении интервала минимальной длины, который содержит заданное число  $L$  элементов выборки  $V = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ . Будем считать, что элементы выборки упорядочены по неубыванию. Алгоритм заключается в следующем.

1. Положим  $i = 1, j = N, k = 1$ .

2. Вычисляем

$$i = \begin{cases} i+1, \rho_{i+1} - \rho_i > \rho_j - \rho_{j-1} \\ i, \rho_{i+1} - \rho_i \leq \rho_j - \rho_{j-1} \end{cases}, \quad j = \begin{cases} j, \rho_{i+1} - \rho_i > \rho_j - \rho_{j-1} \\ j-1, \rho_{i+1} - \rho_i \leq \rho_j - \rho_{j-1} \end{cases}, \quad k = k + 1.$$

3. Если  $k > N - L$ , то  $a = \rho_i, b = \rho_j$ , стоп.

4. Переход к 2.

Очевидно утверждение.

**Утверждение 2.3.** Алгоритм вычисляет минимальный интервал.

Действительно, получение любого интервала, содержащего заданное число точек упорядоченной выборки, можно представить как последовательное удаление левой крайней точки или правой крайней точки из упорядоченного подмножества. Алгоритм выбирает крайнюю точку для удаления оптимально.

Итак, задана доверительная вероятность  $\eta$ , число кластеров либо задано, либо не задано. Алгоритм вычисления доверительного множества состоит из двух действий: вычисление кластеров:  $V_1, V_2, \dots, V_k$  и вычисления интервалов минимальной длины, содержащих заданное число элементов кластеров  $L_j = \lfloor \eta |V_j| \rfloor + 1$ . Доверительное множество – объединение полученных интервалов.

**Эллипсоид минимального объёма.** Многомерным аналогом минимального интервала является эллипсоид минимального объёма.

Чтобы найти эллипсоид минимального объёма, содержащий заданные точки  $\rho_1, \dots, \rho_L$ , необходимо решить оптимизационную задачу [79]:

$$\min_{m, A \in S} \left( n \ln \left( \max_i (A(\rho_i - m), \rho_i - m) \right) - \ln \Delta(A) \right). \quad (2.4)$$

В (2.3)  $S$  – множество симметричных и положительно определённых матриц,  $\Delta(A)$  – определитель матрицы  $A$ ,  $n$  – размерность пространства. Предположим, что задача (2.4) имеет решение  $m^*, A^*$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$   $m^*, \alpha A^*$  также является решением. Поэтому, вместо задачи (2.4) можно рассмотреть задачу с более простой целевой функцией, но с дополнительным ограничением:

$$\begin{aligned} \min_{m, A \in S} \left( n \ln \left( \max_i (A(\rho_i - m), \rho_i - m) \right) \right), \\ \ln \Delta(A) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Запишем функцию Лагранжа для задачи (2.5):

$$F(m, A, \nu, \lambda, \mu) = \nu + \sum_i \lambda_i (A(\rho_i - m), \rho_i - m) - \nu \sum_i \lambda_i - \mu \ln \Delta(A).$$

Из условия оптимальности и условия Куна-Таккера следуют уравнения:

$$\sum_i \lambda_i = 1, m(\lambda) = \sum_i \lambda_i \rho_i, C(\lambda) = \sum_i \lambda_i (\rho_i - m(\lambda))(\rho_i - m(\lambda))^T, \quad (2.6)$$

$$A(\lambda) = (\Delta C(\lambda))^{1/n} C^{-1}(\lambda),$$

$C(\lambda)$  – невырожденная матрица. Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (2.6):

$$\max_{\lambda} \sum_i \lambda_i (A(\lambda)(\rho_i - m(\lambda)), (\rho_i - m(\lambda))), \quad (2.7)$$

$$\sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$$

Пусть  $\lambda^*$  – оптимальное решение двойственной задачи (2.7). Из теоремы о двойственности [38] вытекает следующее равенство:

$$n(\Delta C(\lambda^*))^{1/n} = \max_i (A(\lambda^*)(\rho_i - m(\lambda^*)), \rho_i - m(\lambda^*)). \quad (2.8)$$

Основная задача – найти эллипсоид минимального объёма, содержащий  $L$  элементов выборки. Для точного решения задачи необходимо найти эллипсоиды для  $C_{|V|}^L$  подвыборок из  $L$  элементов из выборки  $V$  объёма  $|V|$ . Чтобы упростить задачу, применим метод MCD [79] с заменой шага.

Новый шаг метода состоит в следующем. Для любой подвыборки  $H$  объёма  $L$  выборки  $V$  вычисляем  $\lambda^1$  – решение двойственной задачи (2.7). Далее, находим упорядоченную перестановку  $\pi: \pi(i) < \pi(j)$ , если  $(A(\lambda^1)(\rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)), \rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)) < (A(\lambda^1)(\rho_{\pi(j)} - m(\lambda^1)), \rho_{\pi(j)} - m(\lambda^1))$ . На основе этой перестановки формируется подвыборка  $H = \{\rho_{\pi(i)}, i = 1, \dots, L\}$ . Пусть  $\lambda^2$  – решение двойственной задачи (2.7). Справедливо следующее неравенство:

$(\Delta C(\lambda^1))^{1/n} \geq \max_i (A(\lambda^1)(\rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)), \rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1))$ . В силу того, что  $A(\lambda^2), m(\lambda^2)$  – решения задачи (2.7), справедливо следующее неравенство:

$$\max_i (A(\lambda^1)(\rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)), \rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)) \geq \max_i (A(\lambda^2)(\rho_{\pi(i)} - m(\lambda^2)), \rho_{\pi(i)} - m(\lambda^2)).$$

Из последних двух неравенств следует, что  $\Delta C(\lambda^1) \geq \Delta C(\lambda^2)$ . Зададим начальную подвыборку  $H = \{\rho_1, \dots, \rho_L\}$  и сформулируем алгоритм МЕ.

1. Найти  $\lambda^1$  из двойственной задачи (2.7).

2. Сформировать упорядоченную перестановку  $\pi: \pi(i) \prec \pi(j)$ , если  $(A(\lambda^1)(\rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)), \rho_{\pi(i)} - m(\lambda^1)) < (A(\lambda^1)(\rho_{\pi(j)} - m(\lambda^1)), \rho_{\pi(j)} - m(\lambda^1))$ .
3. Найти подвыборку  $H = \{\rho_{\pi(i)}, i = 1, \dots, L\}$ .
4. Найти  $\lambda^2$  из двойственной задачи (2.7).
5. Если  $\Delta C(\lambda^2) < \Delta C(\lambda^1)$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2$ , переход к шагу 2. Иначе стоп.

Как было отмечено выше, алгоритм генерирует неубывающую последовательность определителей. Алгоритм останавливается за конечное число шагов, так как число различных подвыборок объёма  $L$  ограничено. Поскольку задача не является выпуклой, отметим, что в результате работы алгоритма можно не найти точного решения, поэтому необходимо повторить расчёты для различных начальных подвыборок.

После остановки получается подвыборка  $H$  из  $L$  элементов, вектор  $m(H)$  и матрица  $C(H)$ .

Итак, задана доверительная вероятность  $\eta$ , число кластеров либо задано, либо не задано. Алгоритм вычисления доверительного множества состоит из двух действий: вычисление кластеров:  $V_1, V_2, \dots, V_k$  и вычисления эллипсоидов минимального объёма, содержащих заданное число элементов кластеров  $L_j = \lceil \eta |V_j| \rceil + 1$ . Доверительное множество – объединение полученных эллипсоидов.

## 2.2. Робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна.

**Базовые задачи.** Здесь рассматриваются задачи, решения которых будут использованы далее в многошаговых моделях. Первая задача заключается в следующем:

$$\min \frac{x}{B_0}, \frac{x}{B_0} \geq \max_{\rho} \left[ \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right], \rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], a_2 < a_3 \quad (2.9)$$

$$\Delta B_1 = B_0 r, \quad a_2 < r < a_3.$$

Предполагается, что  $f(y)$  – выпуклая функция. Так как для всех значений  $\gamma$  функция  $\frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho-r}{1+r}$  является выпуклой по переменной  $\rho$ , поэтому  $\max_{\rho} \left[ \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho-r}{1+r} \right] =$   
 $= \max \left[ \frac{f(S_0(1+a_1))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{a_1-r}{1+r}, \frac{f(S_0(1+a_4))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{a_4-r}{1+r} \right]$ .

В результате получаем задачу линейного программирования:

$$\min \frac{x}{B_0}, \frac{x}{B_0} + \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{a_i-r}{1+r} \geq \frac{f(S_0(1+a_i))}{B_1}, i=1,4. \quad (2.10)$$

Рассмотрим двойственную задачу линейного программирования. Поскольку в прямой задаче переменные  $x$  и  $\gamma$  могут быть как отрицательными, так и положительными, то в двойственной задаче ограничения – это равенства:  $y_1 + y_2 = 1, y_1 a_1 + y_2 a_4 = r$ , поскольку в исходной задаче ограничения – это неравенства (неважно какого знака), то двойственные переменные  $y_i \geq 0$ , наконец, целевая функция задачи  $F = y_1 \frac{f(S_0(1+a_1))}{B_1} + y_2 \frac{f(S_0(1+a_4))}{B_1}$ . Таким образом, двойственная задача заключается в следующем:

$$\max \left[ y_1 \frac{f(S_0(1+a_1))}{B_1} + y_2 \frac{f(S_0(1+a_4))}{B_1} \right], y_1 + y_2 = 1, y_1 a_1 + y_2 a_4 = r, \quad (2.11)$$

$$y_i \geq 0.$$

Система линейных уравнений имеет единственное решение:

$$y_1 = \frac{a_4 - r}{a_4 - a_1}, y_2 = \frac{r - a_1}{a_4 - a_1}. \text{ Это решение будет допустимым так как } a_1 < r < a_4.$$

Таким образом, оптимальное значение

$$x^* = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{a_4 - r}{a_4 - a_1} f(S_0(1+a_1)) + \frac{r - a_1}{a_4 - a_1} f(S_0(1+a_4)) \right]. \quad (2.12)$$

Из условий Куна-Таккера вычисляется оптимальное значение для

$$\gamma^* = \frac{f(S_0(1+a_4)) - f(S_0(1+a_1))}{S_0(a_4 - a_1)}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим вторую задачу:

$$\max \frac{x}{B_0}, \frac{x}{B_0} \leq \min_{\rho} \left[ \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right]; \quad (2.14)$$

$$\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], a_2 < a_3; \Delta B_1 = B_0 r; a_2 < r < a_3.$$

Пусть  $r \in (a_2, a_3)$ . Рассмотрим секущую прямую, проходящую через точки  $(a_2, f(S_0(1+a_2)))$ ;  $(a_3, f(S_0(1+a_3)))$ :

$$y = k\rho + b, k = \frac{f(S_0(1+a_3)) - f(S_0(1+a_2))}{a_3 - a_2}, b = f(S_0(1+a_2)) - ka_2. \quad (2.15)$$

Для всех  $\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]$  выполняется неравенство

$$\frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \geq \frac{k\rho + b}{B_1} + \gamma \frac{S_0(\rho - r)}{B_1}.$$

Отсюда

$$\max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) \geq \max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{k\rho + b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho - r)}{B_1} \right).$$

$$\text{Далее } \max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{k\rho + b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho - r)}{B_1} \right) =$$

$$\max_{\gamma} \min \left( \frac{ka_2 + b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_2 - r)}{B_1}, \frac{ka_3 + b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_3 - r)}{B_1} \right) =$$

$$\max_{\gamma} \min \left( \frac{f(S_0(1+a_2))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_2 - r)}{B_1}, \frac{f(S_0(1+a_3))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_3 - r)}{B_1} \right).$$

$$\text{С другой стороны, } \max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) \leq$$

$$\max_{\gamma} \min \left( \frac{f(S_0(1+a_2))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_2 - r)}{B_1}, \frac{f(S_0(1+a_3))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_3 - r)}{B_1} \right).$$

Поэтому

$$\max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) = \quad (2.16)$$

$$\max_{\gamma} \min \left( \frac{f(S_0(1+a_2))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_2-r)}{B_1}, \frac{f(S_0(1+a_3))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(a_3-r)}{B_1} \right).$$

Из (2.16) решение задачи  $x^*$  имеет вид:

$$x^* = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{a_3-r}{a_3-a_2} f(S_0(1+a_2)) + \frac{r-a_2}{a_3-a_2} f(S_0(1+a_3)) \right], \quad (2.17)$$

и

$$\gamma^* = \frac{f(S_0(1+a_3)) - f(S_0(1+a_2))}{S_0(a_3-a_2)}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим случай  $r \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4)$ . Проведём через точку  $(r, f(S_0(1+r)))$  опорную прямую  $y = k(\rho - r) + b$ . Воспользуемся

неравенством 
$$\frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_0(1+r)} \geq \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} + \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1}.$$

Отсюда

$$\max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_0(1+r)} \right) \geq \max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right).$$

Далее

$$\max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right) \geq \max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_4]} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right).$$

Далее

$$\max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_4]} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right) \geq \max_{|\gamma| \leq \alpha} \min_{\rho \in [a_1, a_4]} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right),$$

для  $\forall \alpha > 0$ . Применим сильную теорему о седловой точке [38]

$$\max_{|\gamma| \leq \alpha} \min_{\rho \in [a_1, a_4]} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right) = \min_{\rho \in [a_1, a_4]} \max_{|\gamma| \leq \alpha} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right).$$

Обозначим  $F(\rho) = \max_{|\gamma| \leq \alpha} \left( \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} - \gamma \frac{S_0(\rho-r)}{B_1} \right)$ . Функция

$$F(\rho) = \begin{cases} \frac{b}{B_1}, \rho = r \\ \frac{k(\rho-r)+b}{B_1} + \alpha \frac{S_0}{B_1} |\rho-r|, \rho \neq r \end{cases}. \quad \text{Выберем } \alpha \text{ таким образом, чтобы}$$

$$\min_{\rho \in [a_1, a_4], \rho \neq r} \left( \frac{k(\rho - r) + b}{B_1} + \alpha \frac{S_0}{B_1} |\rho - r| \right) > \frac{b}{B_1} = \frac{f((1+r)S_0)}{B_1}. \quad \text{Отсюда и из}$$

предыдущих неравенств следует

$$\max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) \geq \frac{f((1+r)S_0)}{B_1}.$$

$$\text{Далее} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) \leq \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) \Big|_{\rho=r} =$$

$$\frac{f((1+r)S_0)}{B_1}. \quad \text{Отсюда} \max_{\gamma} \min_{\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]} \left( \frac{f(S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right) = \frac{f((1+r)S_0)}{B_1}.$$

Следовательно,

$$x^* = \frac{1}{1+r} f(S_0(1+r)), \quad \gamma^* - \text{произвольное.} \quad (2.19)$$

Третья и четвёртая задачи заключаются в следующем. Требуется найти

$$\min \frac{x}{B_0}, \frac{x}{B_0} \geq \max_{\rho} \left[ \frac{f(S_0(1+\rho), S_0 + S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right],$$

$$\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], a_2 < a_3$$

$$\Delta B_1 = B_0 r, \quad a_2 < r < a_3.$$

$$\max \frac{x}{B_0}, \frac{x}{B_0} \leq \min_{\rho} \left[ \frac{f(S_0(1+\rho), S_0 + S_0(1+\rho))}{B_1} - \gamma \frac{S_0}{B_0} \frac{\rho - r}{1+r} \right];$$

$$\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], a_2 < a_3;$$

$$\Delta B_1 = B_0 r; \quad a_2 < r < a_3.$$

Третья и четвёртая задачи эквивалентны первой и второй задачам, если функция  $f(u, v)$  – выпуклая функция, поэтому мы приведём их решения без необходимых расчётов:

$$x^* = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{a_4 - r}{a_4 - a_1} f(S_0(1+a_1), S_0 + S_0(1+a_1)) + \frac{r - a_1}{a_4 - a_1} f(S_0(1+a_4), S_0 + S_0(1+a_4)) \right]$$

$$\gamma^* = \frac{f(S_0(1+a_4), S_0 + S_0(1+a_4)) - f(S_0(1+a_1), S_0 + S_0(1+a_1))}{S_0(a_4 - a_1)} - \text{решение третьей}$$

задачи;

$$x^* = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{a_3 - r}{a_3 - a_2} f(S_0(1+a_2), S_0 + S_0(1+a_2)) + \frac{r - a_2}{a_3 - a_2} f(S_0(1+a_3), S_0 + S_0(1+a_3)) \right]$$

$$\gamma^* = \frac{f(S_0(1+a_3), S_0 + S_0(1+a_3)) - f(S_0(1+a_2), S_0 + S_0(1+a_2))}{S_0(a_3 - a_2)} \quad - \quad \text{решение}$$

четвёртой задачи, для  $r \in (a_2, a_3)$ ;  $x^* = \frac{1}{1+r} f(S_0(1+r), S_0 + S_0(1+r))$ ,  $\gamma^*$  – произвольное, для  $r \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4)$ .

**Многошаговые задачи.** Рассмотрим многошаговый вариант первой задачи:

$$X_0(x) = \min_{\gamma_1^N} y,$$

$$\frac{y}{B_0} + \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \geq \frac{f\left(x \prod_{i=1}^N (1 + \rho_i)\right)}{B_N}, \forall \rho_i \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4],$$

$\Delta S_i = S_{i-1} \rho_i, \Delta B_i = B_{i-1} r, x = S_0$ . Здесь использовано обозначение

$\gamma_r^s = \{\gamma_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_s\}$ . Многошаговая задача является задачей динамического программирования. Для её решения рассмотрим функции Беллмана  $X_k(x)$ :

$$X_k(x) = \min_{\gamma_{k+1}^N} y,$$

$$\frac{y}{B_k} + \frac{1}{1+r} \sum_{i=k+1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \geq \frac{f\left(x \prod_{i=k+1}^N (1 + \rho_i)\right)}{B_N}, \forall \rho_i \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4],$$

$\Delta S_i = S_{i-1} \rho_i, \Delta B_i = B_{i-1} r, x = S_k$ .

То есть для того, чтобы вычислить значение функции  $X_k(x)$ , которую далее будем называть капиталом, требуется решить задачу оптимизации с бесконечным числом ограничений. Тем не менее, вычисление значения  $X_k(x)$  определяется несложной формулой, которая является результатом следующей теоремы.

**Теорема 2.1(Задача продавца).** Если  $f(x)$  – выпуклая функция, то для капитала  $X_k(x)$  справедлива следующая формула:

$$X_k(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-k}} \sum_{j=0}^{N-k} C_{N-k}^j f(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j}) (p^*)^j (q^*)^{N-k-j}, \quad (2.20)$$

$$p^* = \frac{r-a_1}{a_4-a_1}, q^* = 1-p^*, x = S_k.$$

**Доказательство.**

Докажем теорему методом математической индукции. Для доказательства формулы при  $k = N-1$  надо использовать результат, приведённый выше для одношаговой задачи, а именно, формулу (2.12):

$$X_{N-1}(x) = \frac{1}{1+r} [q^* f(x(1+a_1)) + p^* f(x(1+a_4))].$$

Таким образом, для  $N-1$  формула справедлива. Предположим, что формула справедлива для  $k+1$ :

$$X_{k+1}(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-k-1}} \sum_{j=0}^{N-k-1} C_{N-k-1}^j f(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j-1}) (p^*)^j (q^*)^{N-k-j-1}.$$

Отметим, что при этом предположении  $X_{k+1}(x)$  является выпуклой функцией как линейная комбинация выпуклых функций. Для вычисления  $X_k(x)$  следует решить задачу:

$$X_k(x) = \min_y y, \frac{y}{B_k} + \gamma \frac{x}{B_k} \frac{\rho-r}{1+r} \geq \frac{X_{k+1}(x(1+\rho))}{B_{k+1}}, \forall \rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4].$$

Поскольку  $X_{k+1}(x(1+\rho))$  – выпуклая функция по переменной  $\rho$ , то мы можем воспользоваться результатом, полученным для одношаговой модели, поэтому имеет место формула:

$$X_k(x) = \frac{1}{1+r} (X_{k+1}(x(1+a_4))p^* + X_{k+1}(x(1+a_1))q^*), x = S_k. \quad (2.21)$$

Отсюда

$$X_k(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-k}} \left( \sum_{j=0}^{N-k-1} C_{N-k-1}^j f(x(1+a_4)^{j+1} (1+a_1)^{N-k-j-1}) (p^*)^{j+1} (q^*)^{N-k-j-1} + \sum_{j=0}^{N-k-1} C_{N-k-1}^j f(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j}) (p^*)^j (q^*)^{N-k-j} \right).$$

В первой сумме сделаем замену переменных  $j := j+1$ . Тогда

$$X_k(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-k}} \left( \sum_{j=1}^{N-k} C_{N-k-1}^{j-1} f(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j}) (p^*)^j (q^*)^{N-k-j} + \right.$$

$$+ \sum_{j=0}^{N-k-1} C_{N-k-1}^j f\left(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j} (p^*)^j (q^*)^{N-k-j-1}\right).$$

Пользуясь тем, что  $C_{N-k-1}^{j-1} + C_{N-k-1}^j = C_{N-k}^j$ , получим:

$$\begin{aligned} X_k(x) &= \frac{1}{(1+r)^{N-k}} \left( \sum_{j=1}^{N-k-1} C_{N-k}^j f\left(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j} (p^*)^j (q^*)^{N-k-j}\right) + \right. \\ &+ \left. f\left(x(1+a_4)^{N-k} (p^*)^{N-k}\right) + f\left(x(1+a_1)^{N-k} (q^*)^{N-k}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-k}} \sum_{j=0}^{N-k} C_{N-k}^j f\left(x(1+a_4)^j (1+a_1)^{N-k-j} (p^*)^j (q^*)^{N-k-j}\right). \end{aligned}$$

**Теорема доказана.**

Очевидно, что для вычисления портфеля следует использовать формулу, аналогичную (2.13):

$$\gamma_{k+1}^*(x) = \frac{X_{k+1}(x(1+a_4)) - X_{k+1}(x(1+a_1))}{x(a_4 - a_1)}, x = S_k. \quad (2.22)$$

Подобная теорема справедлива для задачи покупателя при  $r \in (a_2, a_3)$ :

$$X_0(x) = \max_{\gamma_1^N} y,$$

$$\frac{y}{B_0} + \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \leq \frac{f\left(x \prod_{i=1}^N (1 + \rho_i)\right)}{B_N}, \forall \rho_i \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4],$$

$\Delta S_i = S_{i-1} \rho_i, \Delta B_i = B_{i-1} r, x = S_0$ . Определим капитал  $X_k(x)$  для задачи покупателя:

$$X_k(x) = \max_{\gamma_{k+1}^N} y, \frac{y}{B_k} + \frac{1}{1+r} \sum_{i=k+1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \leq \frac{f\left(x \prod_{i=k+1}^N (1 + \rho_i)\right)}{B_N},$$

$$\forall \rho_i \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], \Delta S_i = S_{i-1} \rho_i, \Delta B_i = B_{i-1} r, x = S_k.$$

**Теорема 2.2(Задача покупателя).** Если  $f(x)$  – выпуклая функция,  $r \in (a_2, a_3)$ , для капитала  $X_k(x)$  справедлива следующая формула:

$$X_k(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-k}} \sum_{j=0}^{N-k} C_{N-k}^j f\left(x(1+a_2)^j (1+a_3)^{N-k-j} (p^*)^j (q^*)^{N-k-j}\right), \quad (2.23)$$

$$p^* = \frac{r - a_2}{a_3 - a_2}, q^* = 1 - p^*, x = S_k.$$

Для вычисления портфеля следует использовать формулу, аналогичную (2.18):

$$\gamma_{k+1}^*(x) = \frac{X_{k+1}(x(1+a_3)) - X_{k+1}(x(1+a_2))}{x(a_3 - a_2)}, x = S_k. \quad (2.24)$$

Для  $r \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4)$  в задаче покупателя

$$X_k(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-k}} f(x(1+r)^{N-k}), x = S_k, \Delta S_k = S_{k-1}r,$$

$C_* = X_0 = \frac{1}{(1+r)^N} f(S_0(1+r)^N)$ . Последовательность  $\gamma^*$  является произвольной.

Рассмотрим многошаговые третью и четвёртую задачи с функцией  $f\left(S_N, \sum_{i=0}^N S_i\right)$ , опционы с последствием, см. [1].

Определим аналогично предыдущему капитал продавца

$$X_k(u, v) = \min y, \quad (2.25)$$

$$\frac{y}{B_k} + \frac{1}{1+r} \sum_{i=k+1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \geq \frac{f\left(u \prod_{i=k+1}^N (1+\rho_i), v + \sum_{i=k+1}^N S_i\right)}{B_N},$$

$$\Delta S_i = S_{i-1} \rho_i, \Delta B_i = B_{i-1} r, \forall \rho_i \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], u = S_k, v = \sum_{i=0}^k S_i.$$

Предположим, что в момент времени  $k+1$  оптимальный капитал  $X_{k+1}(u, v)$  известен. Для капитала  $X_k(u, v)$  справедливо равенство:

$$X_k(u, v) = \min y, \frac{y}{B_k} + \gamma \frac{S_k}{B_k} \frac{\rho - r}{1+r} \geq \frac{X_{k+1}(u(1+\rho), v + u(1+\rho))}{B_{k+1}}, \quad (2.26)$$

$$\forall \rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], u = S_k, v = \sum_{i=0}^k S_i.$$

Предположим, что функция  $X_{k+1}(u, v)$  является выпуклой, тогда  $X_{k+1}(u(1+\rho), v + u(1+\rho))$  – выпуклая функция по  $\rho$ . Исходя из этого и используя решение третьей одношаговой задачи, получим рекуррентные формулы для расчёта оптимального капитала и портфеля:

$$X_k(u, v) = \frac{1}{1+r} [q^* X_{k+1}(u(1+a_1), v+u(1+a_1)) + p^* X_{k+1}(u(1+a_4), v+u(1+a_4))], \quad (2.27)$$

$$X_N(u, v) = f_N(u, v), \quad p^* = \frac{r-a_1}{a_4-a_1}, \quad q^* = 1-p^*,$$

$$\gamma_{k+1}^*(u, v) = \frac{X_{k+1}(u(1+a_4), v+u(1+a_4)) - X_{k+1}(u(1+a_1), v+u(1+a_1))}{u(a_4-a_1)}, \quad (2.28)$$

$$u = S_k, \quad v = \sum_{i=0}^k S_i.$$

Равенство (2.27) приводит к справедливости легко проверяемого утверждения.

**Утверждение 2.4.** Функции  $X_k(u, v)$  являются выпуклыми функциями.

Выпуклость функций  $X_k(u, v)$  легко устанавливается обратной индукцией.

Определим аналогично предыдущему капитал покупателя

$$X_k(u, v) = \max y, \quad (2.29)$$

$$\frac{y}{B_k} + \frac{1}{1+r} \sum_{i=k+1}^N \gamma_i \frac{S_{i-1}}{B_{i-1}} (\rho_i - r) \leq \frac{f\left(u \prod_{i=k+1}^N (1+\rho_i), v + \sum_{i=k+1}^N S_i\right)}{B_N},$$

$$\Delta S_i = S_{i-1} \rho_i, \Delta B_i = B_{i-1} r, \forall \rho_i \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], u = S_k, v = \sum_{i=0}^k S_i.$$

Предположим, что в момент времени  $k+1$  оптимальный капитал  $X_{k+1}(u, v)$  известен. Для капитала  $X_k(u, v)$  справедливо равенство:

$$X_k(u, v) = \max y, \quad \frac{y}{B_k} + \gamma \frac{S_k}{B_k} \frac{\rho - r}{1+r} \leq \frac{X_{k+1}(u(1+\rho), v+u(1+\rho))}{B_{k+1}}, \quad (2.30)$$

$$\forall \rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], u = S_k, v = \sum_{i=0}^k S_i.$$

Если  $r \in (a_2, a_3)$ , то аналогичные формулы для задачи покупателя имеют следующий вид:

$$X_k(u, v) = \frac{1}{1+r} [q^* X_{k+1}(u(1+a_2), v+u(1+a_2)) + p^* X_{k+1}(u(1+a_3), v+u(1+a_3))], \quad (2.31)$$

$$X_N(u, v) = f_N(u, v), \quad p^* = \frac{r-a_2}{a_3-a_2}, \quad q^* = 1-p^*,$$

$$\gamma_{k+1}^*(u, v) = \frac{X_{k+1}(u(1+a_3), v+u(1+a_3)) - X_{k+1}(u(1+a_2), v+u(1+a_2))}{u(a_3 - a_2)}, \quad (2.32)$$

$$u = S_k, v = \sum_{i=0}^k S_i.$$

Если  $r \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4)$ , то в задаче покупателя:

$$X_k(u, v) = \frac{1}{(1+r)^{N-k}} f\left(u(1+r)^{N-k}, v + \frac{S_0((1+r)^{N+1} - (1+r)^{k+1})}{r}\right), \quad (2.33)$$

$$u = S_k, v = \sum_{i=0}^k S_i, \Delta S_i = S_{i-1}r,$$

$\gamma^*$  – произвольное.

**Замечание** о нецелесообразности рассмотрения объединения трёх и большего числа интервалов. Допустим, рассматривается объединение трёх интервалов:  $\rho \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4] \cup [a_5, a_6]$ . Если  $r \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup (a_5, a_6)$ , то из полученных результатов следует, что можно рассмотреть один интервал  $[a_1, a_6]$ . Если  $r$  принадлежит одному из промежутков, то достаточно рассмотреть объединение двух интервалов. Например, если  $r \in (a_2, a_3)$ , то результаты расчётов не изменятся, если рассмотреть объединение двух интервалов:  $[a_1, a_2] \cup [a_3, a_6]$ .

### 2.3. Эллипсоидная модель Марковица.

В этом параграфе рассматривается портфель – вектор  $x$ , с удовлетворяющими равенству  $(I, x) = 1$  компонентами. Вектор  $x$  определяет пропорции входящих в портфель активов. Размерность вектора определяется числом активов. Входящие в портфель активы определяют случайный вектор возвратов  $\rho$ . Возврат портфеля выражается через вектор возвратов входящих в портфель активов как скалярное произведение  $(x, \rho)$ . Будем считать, что известно множество (доверительное множество), которому принадлежит вектор возвратов  $\rho$  с заданной доверительной вероятностью, большей либо равной  $\eta$ . В данном параграфе доверительное множество является объединением эллипсоидов:

$D = \bigcup_{i=1}^p El_i, El_i = \{\rho : (C_i^{-1}(\rho - m_i), \rho - m_i) \leq 1\}$ . Для  $i$ -го эллипсоида определим

минимальный возврат  $\alpha(i, x) = \min_{\rho \in El_i} (x, \rho)$ , максимальный возврат

$\beta(i, x) = \max_{\rho \in El_i} (x, \rho)$ , средний возврат  $\gamma(i, x) = \frac{\alpha(i, x) + \beta(i, x)}{2}$  портфеля и

вариацию  $\sigma(i, x) = \frac{\beta(i, x) - \alpha(i, x)}{2}$ . Очевидно, что  $\alpha(i, x) = (x, m_i) - \sqrt{(C_i x, x)}$ ,

$\beta(i, x) = (x, m_i) + \sqrt{(C_i x, x)}$ ,  $\gamma(i, x) = (x, m_i)$  и  $\sigma(i, x) = \sqrt{(C_i x, x)}$ . Отсюда для

портфеля  $x$  минимальный возврат вычисляется следующим образом:

$\alpha(x) = \min \alpha(i, x) = \min \left( (x, m_i) - \sqrt{(C_i x, x)} \right)$ , минимальный средний возврат

$\gamma(x) = \min \gamma(i, x) = \min (x, m_i)$ , максимальная вариация

$\sigma(x) = \max \sigma(i, x) = \max \sqrt{(C_i x, x)}$ .

В связи с этим аналогом mean-variance портфеля, который является решением задачи  $\max (x, m)$  при ограничениях:  $(C x, x) \leq b, (I, x) = 1$ , где  $m = E\rho$ ,  $C = E\rho\rho^T - mm^T$ , является портфель, который является решением задачи:

$$\max \gamma(x) \text{ при ограничениях: } \sigma(x) \leq b, (I, x) = 1. \quad (2.34)$$

Аналогично рассуждая, можно получить две другие постановки mean-variance задачи:

$$\min \sigma(x) \text{ при ограничениях: } \gamma(x) \geq b, (I, x) = 1. \quad (2.35)$$

$$\max (\gamma(x) - \lambda \sigma(x)) \text{ при ограничении: } (I, x) = 1. \quad (2.36)$$

Аналогом VaR портфеля – решения задачи  $\max a$ , при ограничениях  $P((x, \rho) \geq a) \geq \eta, (I, x) = 1$ , является портфель, который является решением задачи:

$$\max \alpha(x) \text{ при ограничении: } (I, x) = 1. \quad (2.37)$$

Следующий портфель является аналогом портфеля с минимальным риском, портфель является решением задачи:

$$\min \sigma(x) \text{ при ограничении: } (I, x) = 1. \quad (2.38)$$

Обозначим оптимальное значение целевой функции задачи (2.37) через  $\alpha^*$  (гарантированный возврат); оптимальное значение целевой функции задачи (2.38) через  $\sigma^*$  (гарантированный риск).

Попытаемся совместить достоинства портфелей (2.37) и (2.38) с помощью динамической стратегии.

Итак, пусть доверительное множество возвратов активов, входящих в портфель, является объединением  $p$  эллипсоидов

$D = \bigcup_{i=1}^p El_i, El_i = \{\rho : (C_i^{-1}(\rho - m_i), \rho - m_i) \leq 1\}$ . Выберем портфель  $x$ , решая

задачу (2.38). Для портфеля  $x$ , который мы рассматриваем как рисковый актив  $S$ , доверительное множество возврата является объединением

интервалов:  $M = \bigcup_{i=1}^p M_i, M_i = [\alpha(i, x), \beta(i, x)]$ . Эволюция стоимости портфеля

имеет вид:  $S_1 = (1 + \rho)S_0$ . Начальная стоимость портфеля  $S_0 = 1$ , а  $\rho \in M$ . Для

безрискового актива  $B_1 = (1 + r)B_0$  с  $B_0 = 1$ . Разобьем интервал  $[0, 1]$  на  $N$

частей и вычислим самофинансируемый портфель из раздела (2.2), то есть

предсказуемую последовательность  $\{(\gamma_n, \beta_n)\}$ , с капиталом

$X_{n/N} = \gamma_n S_{n/N} + \beta_n B_{n/N}$  и  $S_{n/N} = (1 + \rho/N)S_{(n-1)/N}, B_{n/N} = (1 + r/N)B_{(n-1)/N}$ . Цель

управления портфелем – это финансовое обязательство

$f(S_1) = (\alpha^* - (S_1 - 1))^+$ . Данное финансовое обязательство связано с желанием

превзойти максимальный гарантированный возврат для одношагового

портфеля. Напомним, что верхняя цена финансового обязательства  $f(S_1)$  –

$C^* = \min X_0, X_1 \geq f(S_1)$ . Верхняя цена связана с риском переплатить.

Пусть  $a_1 = \min_i \alpha(i, x), a_4 = \max_i \beta(i, x)$ . Тогда для вычисления верхней цены следует использовать формулу:

$$C^* = \frac{1}{(1+r/N)^N} \left[ (\alpha^* + 1) \sum_{j=0}^{j_0} C_N^j (p^*)^j (q^*)^{N-j} - \sum_{j=0}^{j_0} C_N^j (\bar{p})^j (\bar{q})^{N-j} \right],$$

$$p^* = \frac{r - a_1}{a_4 - a_1}, q^* = 1 - p^*, \bar{p} = \left(1 + \frac{a_4}{N}\right) p^*, \bar{q} = \left(1 + \frac{a_1}{N}\right) q^*, j_0 = \left\lfloor \log_{i_0} \frac{\alpha^* + 1}{S_0 (1 + a_1/N)^N} \right\rfloor,$$

$$i_0 = \frac{1 + a_4/N}{1 + a_1/N}.$$

## 2.4. Примеры.

Ниже приведены примеры вычислений, связанных с содержанием главы. Примеры предназначены для иллюстрации эффективности расчётов, основанных на математических моделях и методах данной главы. Первый пример относится к робастной модели.

### Пример 2.1. Робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна.

Рассмотрим выборку  $V = (\rho_i)_{i=1}^N, N = 2000$ . Разделим её на два кластера.

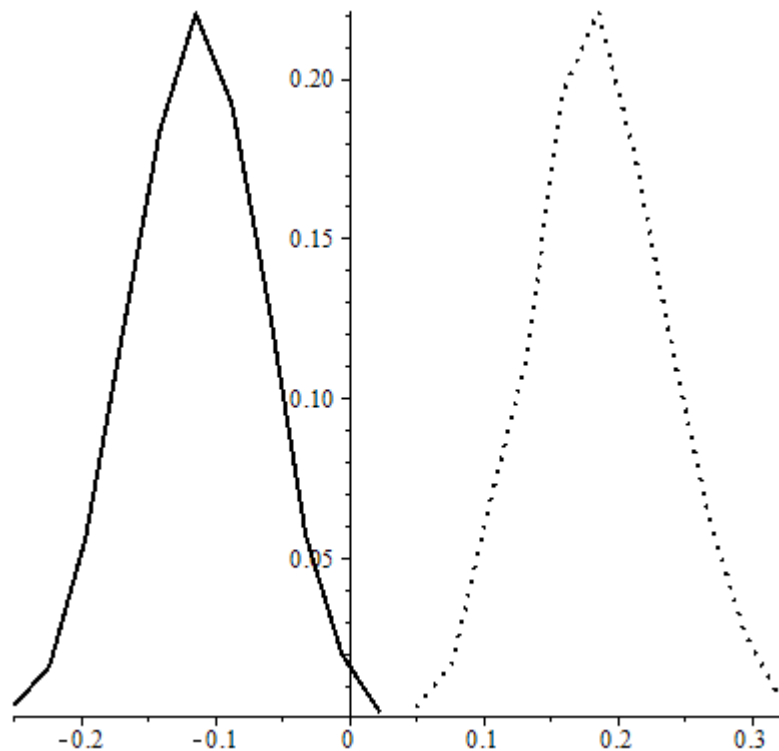


Рисунок 2.1. Эмпирические плотности распределения.

Для доверительной вероятности  $\alpha = 0.95$  были получены интервалы  $[-0.1842, 0.0015], [0.1151, 0.3118]$ . Для модели Кокса-Росса-Рубинштейна в качестве параметров предлагается брать медиану каждого кластера, то есть  $a = -0.0914, b = 0.2134$ . Процентная ставка  $r = 0.0583$ . Начальная цена акции  $S_0 = 4500$ , контрактная цена  $K = S_0$ .

В таблице 2.1 приведены значения капитала оптимального портфеля для одной реализации значений цен актива в случае опциона колл. В таблице 2.2 приведены значения капитала оптимального портфеля в случае опциона с последствием.

Таблица 2.1. Зависимость капитала от времени в случае опциона колл.

Момент времени	Цена акции	Капитал покупателя (робастная модель)	Капитал (модель Кокса-Росса-Рубинштейна)	Капитал продавца (робастная модель)
0	4500	1945.80	2028.91	2275.51
1	5316.95	2613.92	2667.30	2895.76
2	4826.33	1965.79	2047.83	2333.87
3	4354.47	1327.26	1458.52	1810.40
4	4967.81	1763.85	1864.01	2213.27
5	4717.86	1327.22	1465.26	1877.29
6	4238.99	650.78	871.02	1365.15
7	5013.87	1204.03	1346.51	1841.10
8	4748.88	717.05	911.76	1492.62
9	5773.92	1507.16	1601.06	2161.52
10	5214.49	699.12	798.49	1490.95

Таблица 2.2. Зависимость капитала от времени в случае опциона с последствием.

Момент времени	Цена акции	Капитал покупателя (робастная модель)	Капитал (модель Кокса-Росса-Рубинштейна)	Капитал продавца (робастная модель)
0	4500	1258.84	1287.56	1437.80
1	4958.07	1386.98	1418.63	1584.16
2	6115.55	1692.76	1732.49	1937.38
3	7269.07	1981.41	2029.90	2274.43
4	8405.76	2252.56	2310.27	2593.97
5	8291.32	2284.04	2338.28	2617.17
6	7398.59	2217.72	2257.93	2504.42
7	8786.94	2487.79	2541.84	2835.77
8	10536.58	2777.86	2852.83	3201.83
9	9282.98	2846.20	2896.21	3208.25
10	11346.56	3101.55	3179.19	3548.52

В таблице 2.1 значение финансового обязательства  $f_N = f(S_N) = (S_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0) = 714.49$ . Капитал продавца в робастной модели и капитал в модели Кокса-Росса-Рубинштейна в финальный момент времени больше значения финансового обязательства, а капитал покупателя в робастной модели меньше значения финансового обязательства.

В таблице 2.2 значение финансового обязательства  $f_N = f\left(S_N, \sum_{i=0}^N S_i\right) = \left(S_N - \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N S_i\right)^+ = \max\left(S_N - \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N S_i, 0\right) = 3447.34$ .

Капитал продавца в робастной модели больше значения финансового обязательства, а капитал покупателя в робастной модели и капитал в модели Кокса-Росса-Рубинштейна меньше значения финансового обязательства.

**Пример 2.2. Эллипсоидная модель Марковица. Случай двух кластеров. Два актива.**

Рассмотрим выборку  $V = (\rho_i)_{i=1}^N, N = 2000$ .

На рисунке 2.2 представлены значения возвратов рассматриваемых активов:

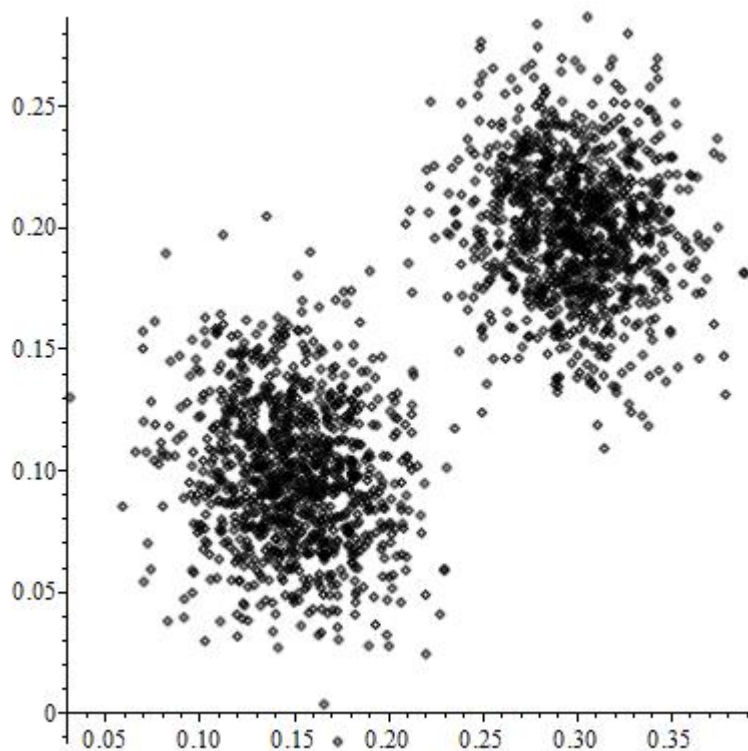


Рисунок 2.2. Компьютерная реализация элементов выборки  $V$ .

Разделим выборку на два кластера, после чего в каждом кластере построим эллипсоид минимального объёма с доверительной вероятностью  $\eta$ . Получили два эллипсоида  $H_1$  и  $H_2$ . Рассмотрим два случая.

**Случай 1.  $\eta = 0.4$ .**

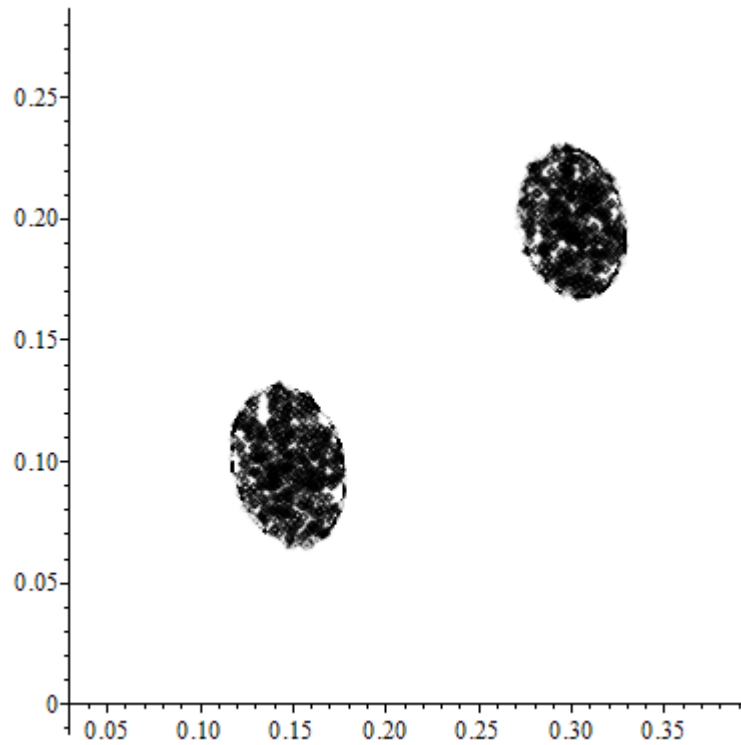


Рисунок 2.3. Эллипсоиды минимального объёма ( $\eta = 0.4$ ).

Пусть  $m_1, m_2$  – центры эллипсоидов,  $C_1, C_2$  – матрицы эллипсоидов.

В нашем случае  $m_1 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.1 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 0.001 & -0.0002 \\ -0.0002 & 0.001 \end{pmatrix}$ .

Рассматривается портфель из двух активов  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$ . На рисунке 2.4 представлен график гарантированного возврата  $\alpha(x_1)$ .

Судя по графику, следует ожидать, что  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \alpha(x_1) = \infty$ . Проанализируем эту ситуацию.

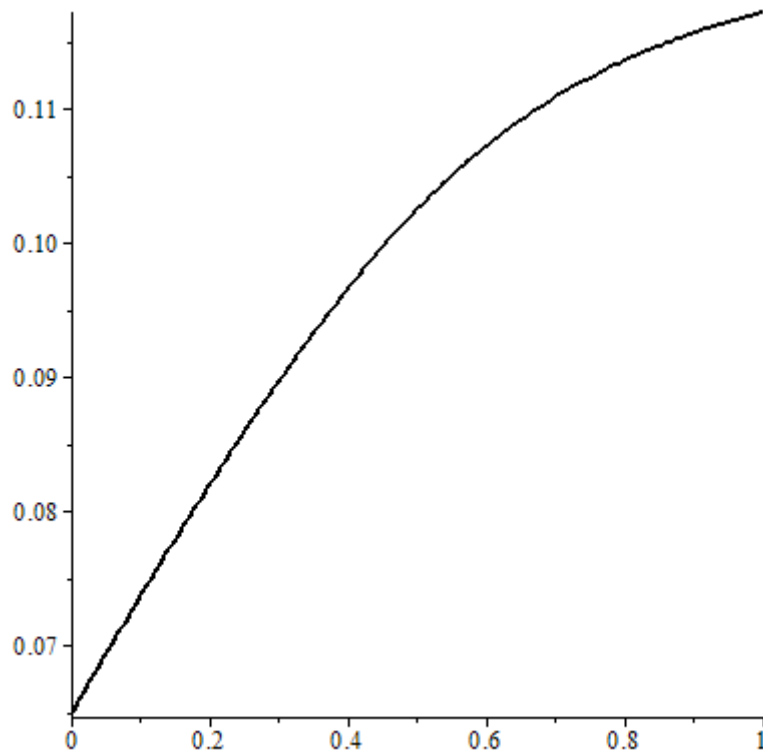


Рисунок 2.4. График функции  $\alpha(x_1)$ .

Рассмотрим задачу о максимальной гарантированной доходности при равных матрицах:  $C_1 = C_2$ . Задача будет выглядеть так:

$\alpha(x) = \min \{m_1(x), m_2(x)\} - \sqrt{(Cx, x)}$ ,  $\max \alpha(x)$ . Рассмотрим уравнение первой и второй прямой  $y = (m_1^1 - m_2^1)x_1 + m_2^1$ ,  $y = (m_1^2 - m_2^2)x_1 + m_2^2$ . В нашем случае:

$$y = 0.05x_1 + 0.1, \quad y = 0.1x_1 + 0.2. \quad \text{Найдем решение}$$

$$\text{уравнения: } (m_1^1 - m_2^1)x_1 + m_2^1 = (m_1^2 - m_2^2)x_1 + m_2^2, \quad a = \frac{m_2^2 - m_2^1}{(m_1^1 - m_2^1) - (m_1^2 - m_2^2)}.$$

В нашем случае  $0.05x_1 + 0.1 = 0.1x_1 + 0.2$ ,  $a = -2$ . Далее для точки  $b < a$

вычислим  $y_1 = (m_1^1 - m_2^1)b + m_2^1$  и  $y_2 = (m_1^2 - m_2^2)b + m_2^2$ . В нашем случае  $b = -3$ ,

$$y_1 = -0.05, y_2 = -0.1. \text{ Если } y_1 < y_2, \text{ то } \alpha(x) = \alpha_1(x) = (m_1, x) - \sqrt{(Cx, x)} \text{ для } x_1 \leq a$$

и  $\alpha(x) = \alpha_2(x) = (m_2, x) - \sqrt{(Cx, x)}$  для  $x_1 > a$ . Если  $y_1 > y_2$ , то  $\alpha(x) = \alpha_2(x)$  для

$x_1 \leq a$  и  $\alpha(x) = \alpha_1(x)$  для  $x_1 > a$ . В нашем случае  $y_1 > y_2$ , следовательно,

$$\alpha(x) = 0.1x_1 + 0.2 - \sqrt{0.001x_1^2 - 0.0004x_1 + 0.001(1 - x_1)^2} \quad \text{для } x_1 \leq -2,$$

$$\alpha(x) = 0.05x_1 + 0.1 - \sqrt{0.001x_1^2 - 0.0004x_1 + 0.001(1 - x_1)^2} \quad \text{для } x_1 > 2. \text{ Поскольку}$$

$0.05 > \sqrt{0.002}$ , то  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \alpha(x_1) = \infty$ . Следовательно, гарантированная доходность может стать сколь угодно большой. Ситуация, которая в литературе называется арбитражем.

**Случай 2.**  $\eta = 0.6$ .

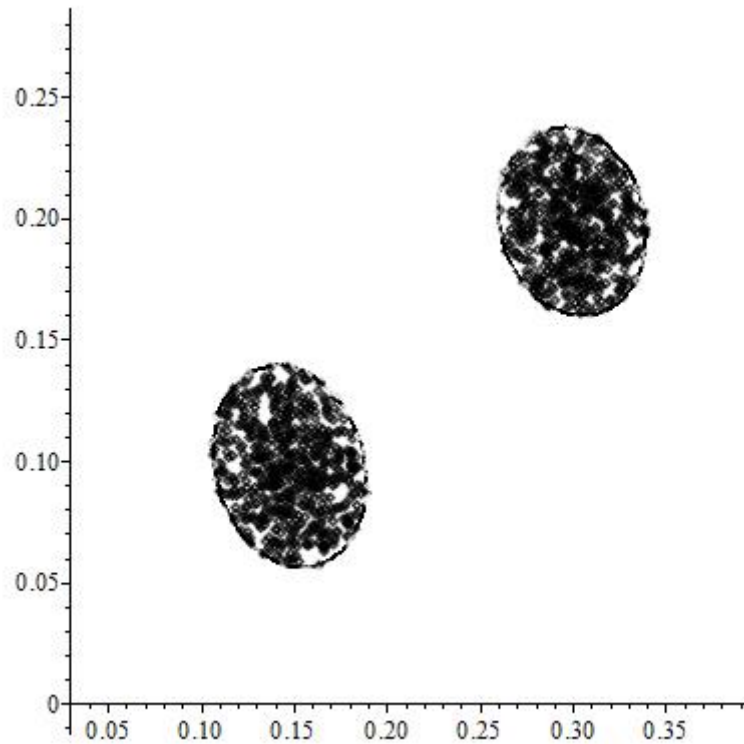


Рисунок 2.5. Эллипсоиды минимального объёма ( $\eta = 0.6$ ).

В нашем случае  $m_1 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ ,  $m_2 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ ,  $C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 0.002 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.002 \end{pmatrix}$ .

Отметим, что в случае 2 значения  $m_1, m_2$  получились такие же, как в случае 1. Матрицы  $C_1$  и  $C_2$  одинаковые, но принимают другие значения по сравнению со случаем 1.

Следовательно,  $\alpha(x) = 0.1x_1 + 0.2 - \sqrt{0.002x_1^2 - 0.0002x_1 + 0.002(1-x_1)^2}$  для  $x_1 \leq -2$ ,  $\alpha(x) = 0.05x_1 + 0.1 - \sqrt{0.002x_1^2 - 0.0002x_1 + 0.002(1-x_1)^2}$  для  $x_1 > 2$ . Поскольку  $0.05 < \sqrt{0.004}$ , то  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \alpha(x_1) = \infty$  и  $\alpha^* = \max \alpha(x_1) = 0.11, x_1 = 1, x_2 = 0$ .

На рисунке 2.6 представлен график функции  $\alpha(x_1)$ .

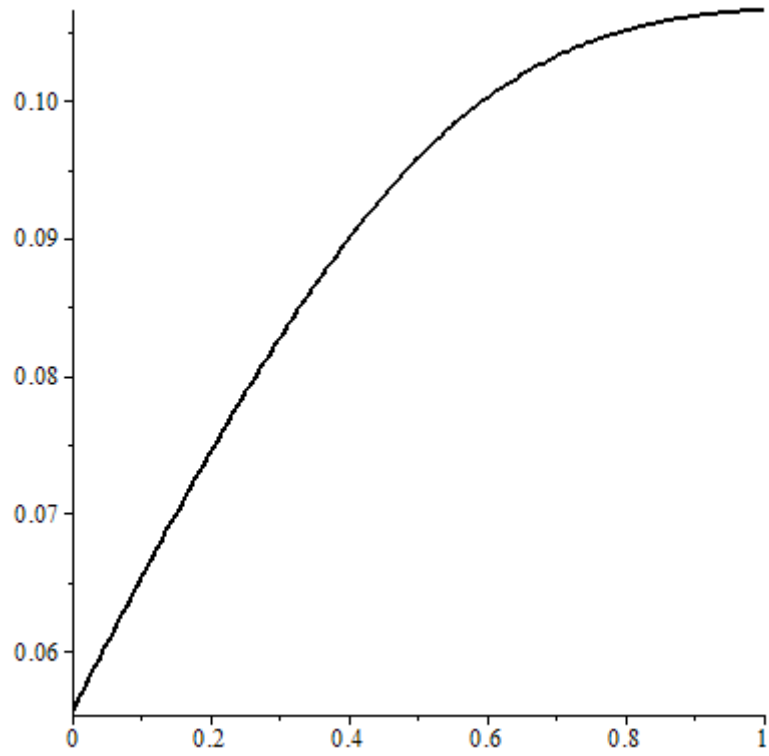


Рисунок 2.6. График функции  $\alpha(x_1)$ .

На рисунке 2.7 представлен график функции  $\sigma(x_1)$ .

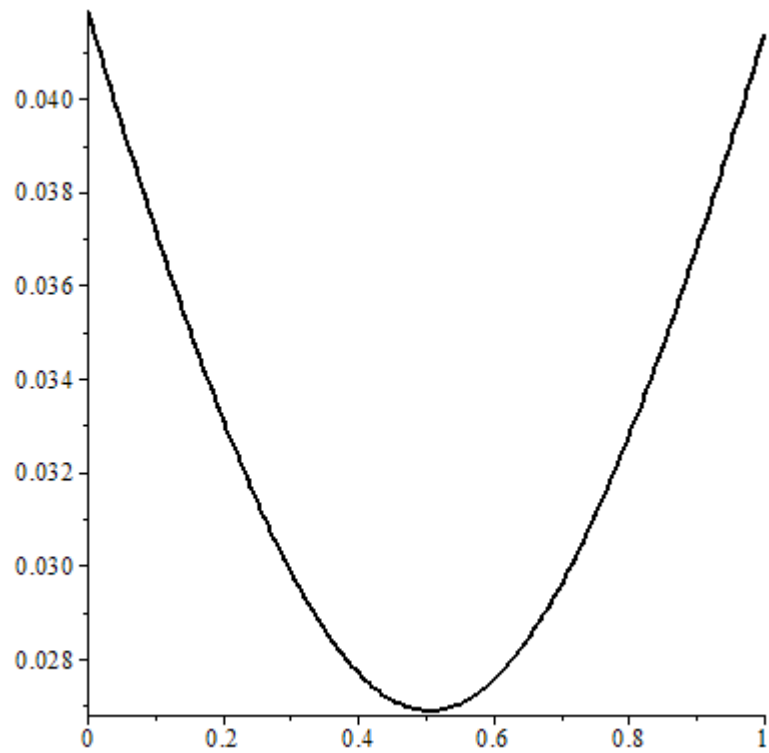


Рисунок 2.7. График функции  $\sigma(x_1)$ .

Гарантированный риск  $\sigma^* = \min \sigma(x_1) = 0.03, x_1 = 0.51, x_2 = 0.49$ .

Рассмотрим динамический портфель для этого же примера, для этого рассчитаем интервал  $a_1 = 0.10, a_4 = 0.28$ . Положим  $\alpha^* = 0.2, r = 0.18 \in (a_1, a_4)$ .

На рисунке 2.8 приведён график зависимости цены продавца от числа шагов  $N$  динамического портфеля.

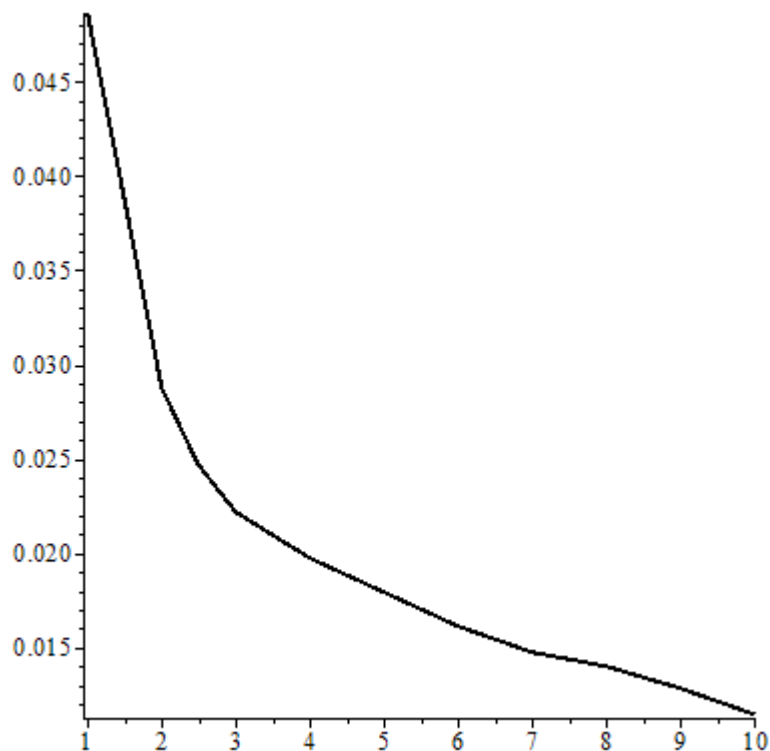


Рисунок 2.8. Зависимость цены продавца от  $N$ .

Из рисунка видно, что цена продавца с ростом  $N$  убывает и стремится к 0. При  $N = 10$  цена продавца  $C^* = 0.01$ . То есть, получим динамический портфель с минимальным гарантированным риском и гарантированной доходностью  $\alpha^* = 0.2$  за цену  $C^* = 0.01$ .

На рисунке 2.9 приведён эллипсоид минимального объёма, построенный для всей выборки с доверительной вероятностью  $\eta = 0.6$ .

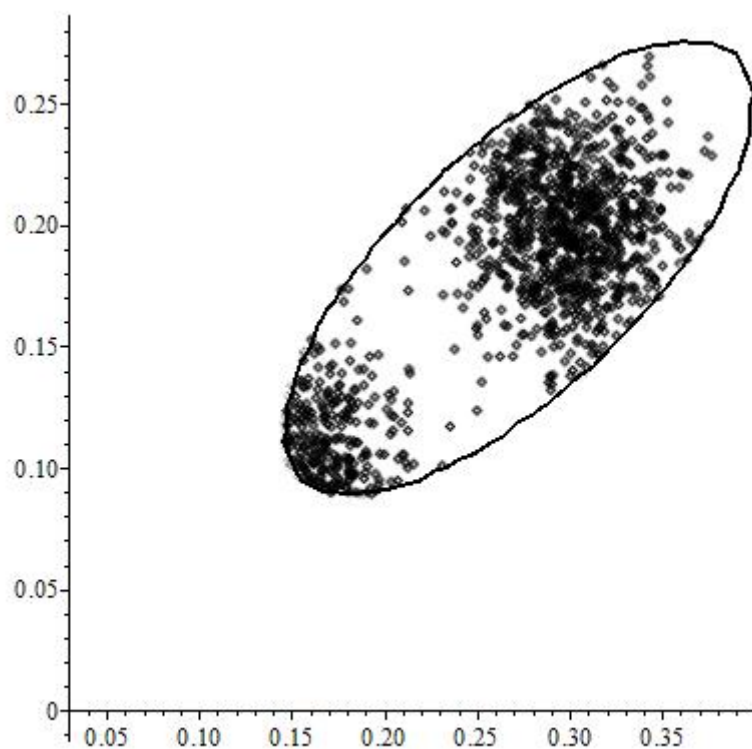


Рисунок 2.9. Эллипсоид минимального объёма ( $\eta = 0.6$ ).

На рисунке 2.10 представлен график функции  $\sigma(x_1)$ .

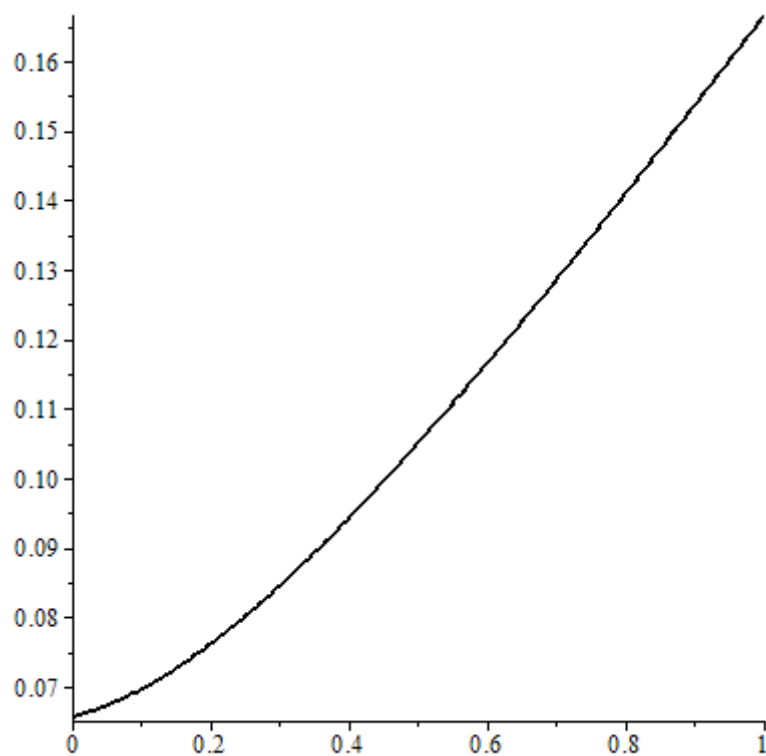


Рисунок 2.10. График функции  $\sigma(x_1)$ .

Гарантированный риск  $\sigma^* = \min \sigma(x_1) = 0.07, x_1 = 0, x_2 = 1$ .

### **Выводы.**

1. Гарантированный риск в случае с двумя эллипсоидами равен 0.03, в случае с одним эллипсоидом 0.07, что примерно в 2 раза больше.

2. Суммарный объём двух эллипсоидов равен 0.2355. Объём одного эллипсоида равен 0.5887, что примерно в 2.5 раза больше.

**Пример 2.3. Эллипсоидная модель Марковица. Случай пяти кластеров.**

Рассмотрим выборку  $V = (\rho_i)_{i=1}^N, N = 5000$ .

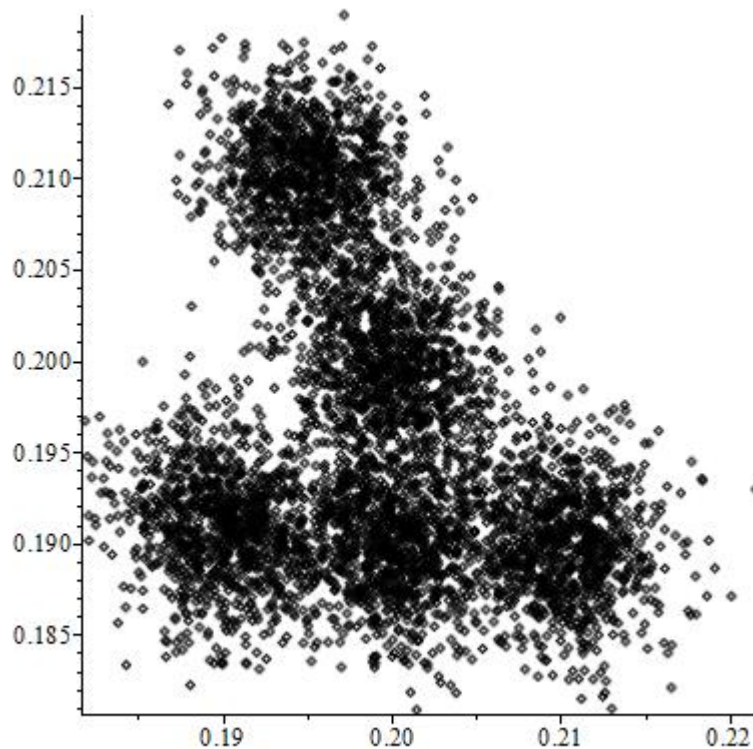


Рисунок 2.11. Компьютерная реализация элементов выборки  $V$ .

Разделим выборку на пять кластеров, после чего в каждом кластере построим эллипсоид минимального объёма с доверительной вероятностью  $\eta = 0.9$ . Получили пять эллипсоидов.

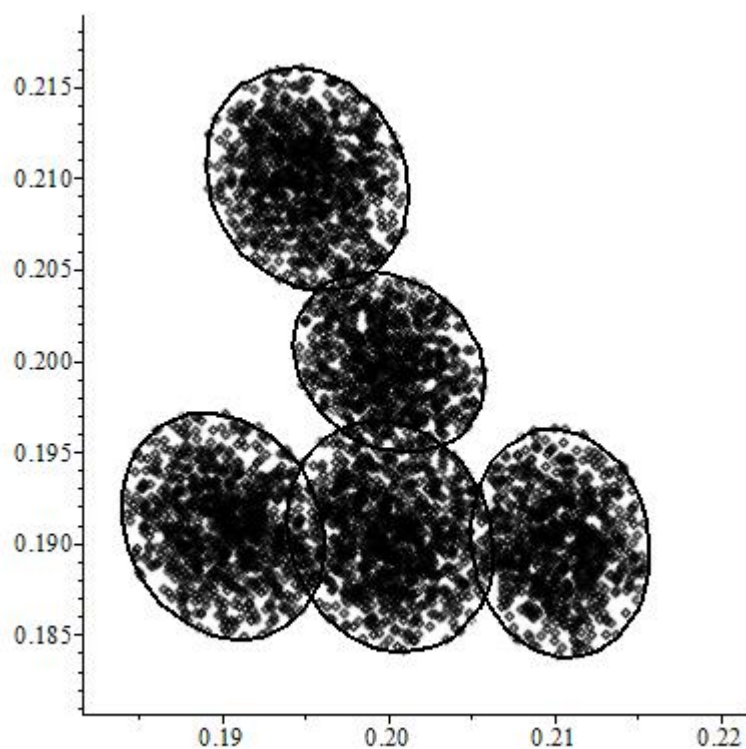


Рисунок 2.12. Эллипсоиды минимального объёма ( $\eta = 0.9$ ).

На рисунке 2.13 представлен график функции  $\alpha(x_1)$ .

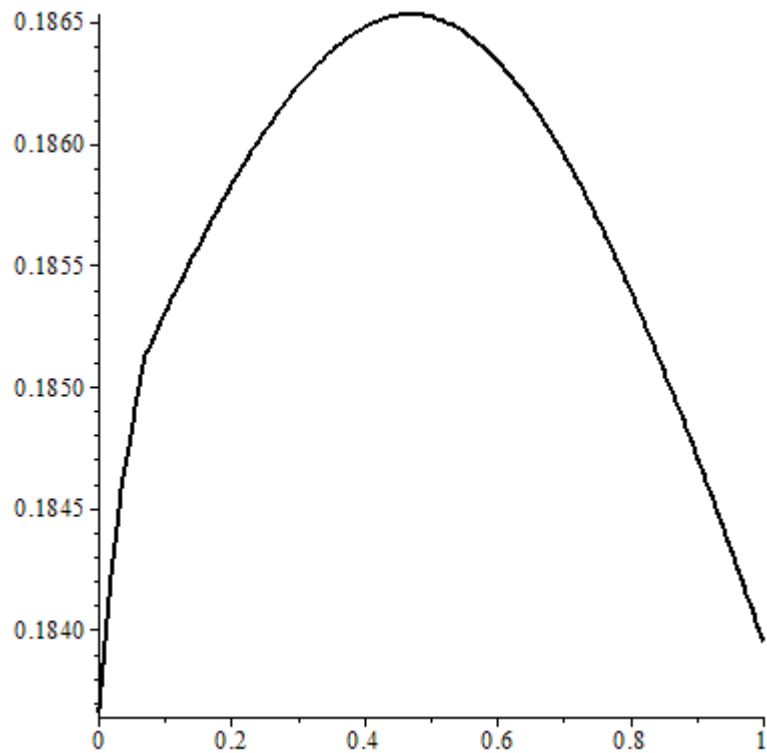


Рисунок 2.13. График функции  $\alpha(x_1)$ .

Гарантированный возврат  $\alpha^* = \max \alpha(x_1) = 0.187, x_1 = 0.47, x_2 = 0.53$ .

На рисунке 2.14 представлен график функции  $\sigma(x_1)$ .

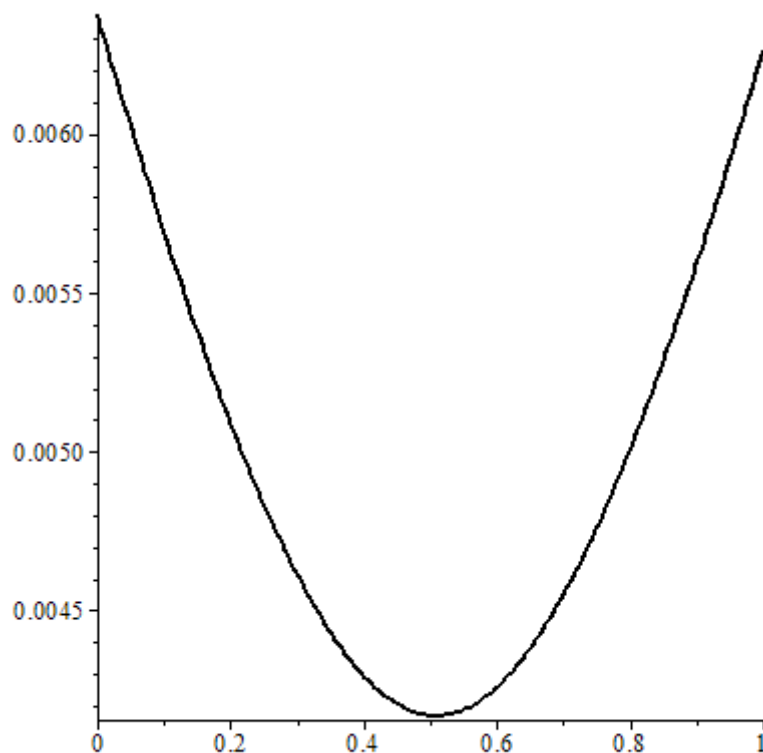


Рисунок 2.14. График функции  $\sigma(x_1)$ .

Гарантированный риск  $\sigma^* = \min \sigma(x_1) = 0.0042, x_1 = 0.51, x_2 = 0.49$ .

Рассчитаем интервал  $a_1 = 0.186, a_4 = 0.206$ . Пусть  $\alpha^* = 0.22$ ,  $r = 0.195 \in (a_1, a_4)$ .

На рисунке 2.15 приведён график зависимости цены продавца от числа шагов  $N$  динамического портфеля.

Из рисунка видно, что цена продавца с ростом  $N$  убывает и стремится к 0. Причем при  $N = 10$  цена продавца  $C^* = 0.005$ . За данную цену достигается доходность  $\alpha^* = 0.22$ .

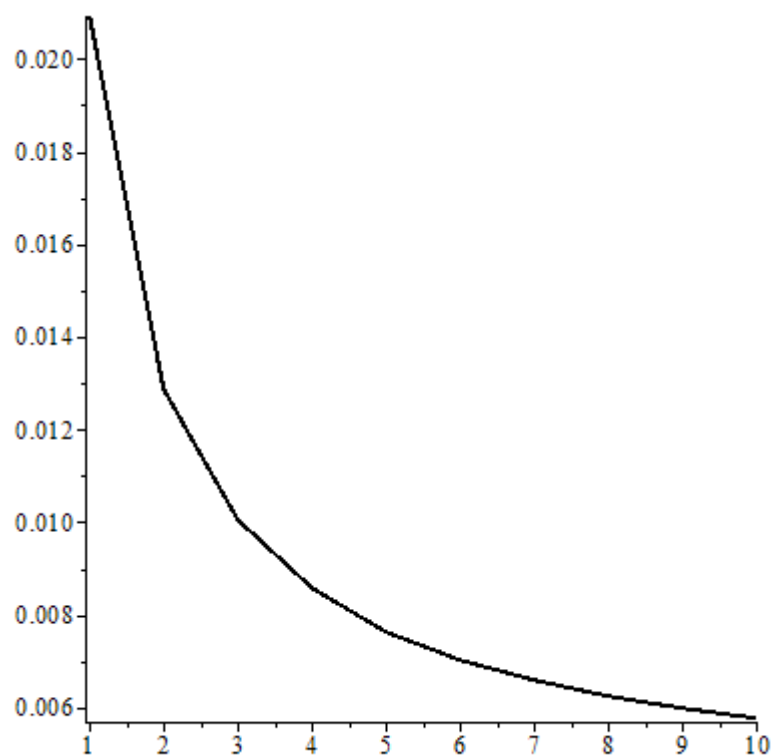


Рисунок 2.15. Зависимость цены продавца от  $N$ .

На рисунке 2.16 приведён эллипсоид минимального объёма, построенный для всей выборки с доверительной вероятностью  $\eta = 0.9$ .

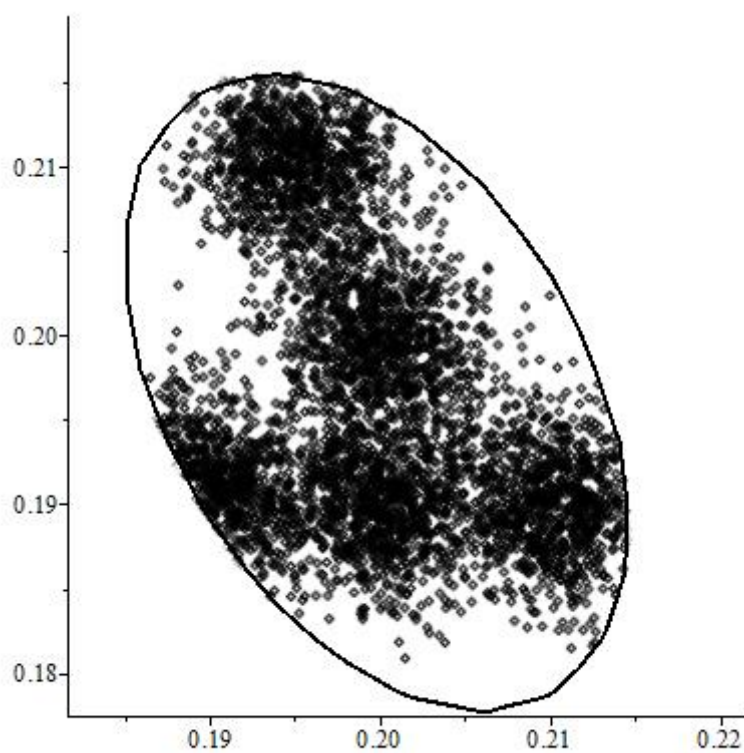


Рисунок 2.16. Эллипсоид минимального объёма ( $\eta = 0.9$ ).

На рисунке 2.17 представлен график функции  $\sigma(x_1)$ .

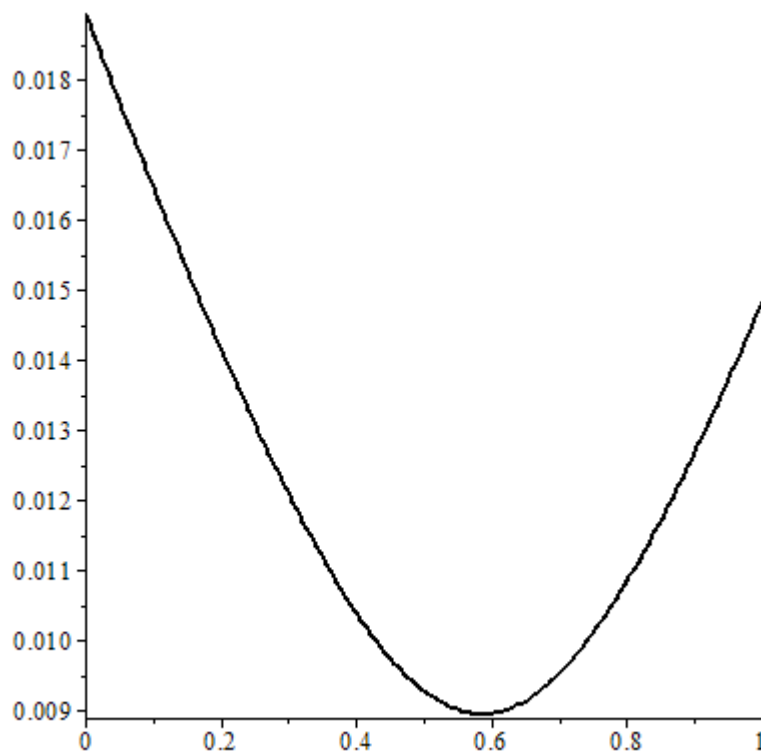


Рисунок 2.17. График функции  $\sigma(x_1)$ .

Гарантированный риск  $\sigma^* = \min \sigma(x_1) = 0.0090, x_1 = 0.59, x_2 = 0.41$ .

#### **Выводы.**

1. Гарантированный риск в случае с пятью эллипсоидами равен 0.0042, в случае с одним эллипсоидом 0.0090, что примерно в 2 раза больше.

2. Суммарный объём пяти эллипсоидов без учета их пересечения равен 0.7359. Объём одного эллипсоида равен 1.0205, что примерно в 1.5 раза больше.

#### **Пример 2.4. Эллипсоидная модель Марковица. Случай пяти кластеров и десяти фирм.**

Рассмотрим выборку  $V = (\rho_i)_{i=1}^N, N = 298$ .

В рассмотрении участвовали акции десяти российских фирм (“Алроса”, “Русолово”, “Артген Биотех”, “Газпром”, “Группа ЛСР”, “Группа ПИК”, “Сбербанк”, “Московская Биржа”, “Магнит”, “Черкизово”) за период с 27.06.2014 по 19.03.2021.

Разделим выборку на пять кластеров, после чего в каждом кластере построим эллипсоид минимального объёма с доверительной вероятностью  $\eta = 0.9$ . Получили пять эллипсоидов.

Гарантированный возврат  $\alpha^* = 0.1040$ .

Портфель с гарантированным возвратом

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5968, x_3 = 0.4032, x_4 = 0, x_5 = 0,$$

$$x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.$$

Гарантированный риск  $\sigma^* = 0.0044$ .

Портфель с гарантированным риском

$$x_1 = 0, x_2 = 0.2888, x_3 = 0.0814, x_4 = 0, x_5 = 0.1382,$$

$$x_6 = 0.1392, x_7 = 0.2228, x_8 = 0.0292, x_9 = 0, x_{10} = 0.1004.$$

Рассчитаем интервал  $a_1 = -0.0362, a_4 = 0.1192$ .

Пусть  $\alpha^* = 0.15, r = 0.1 \in (a_1, a_4)$ .

На рисунке 2.18 приведён график зависимости цены продавца от числа шагов  $N$  динамического портфеля.

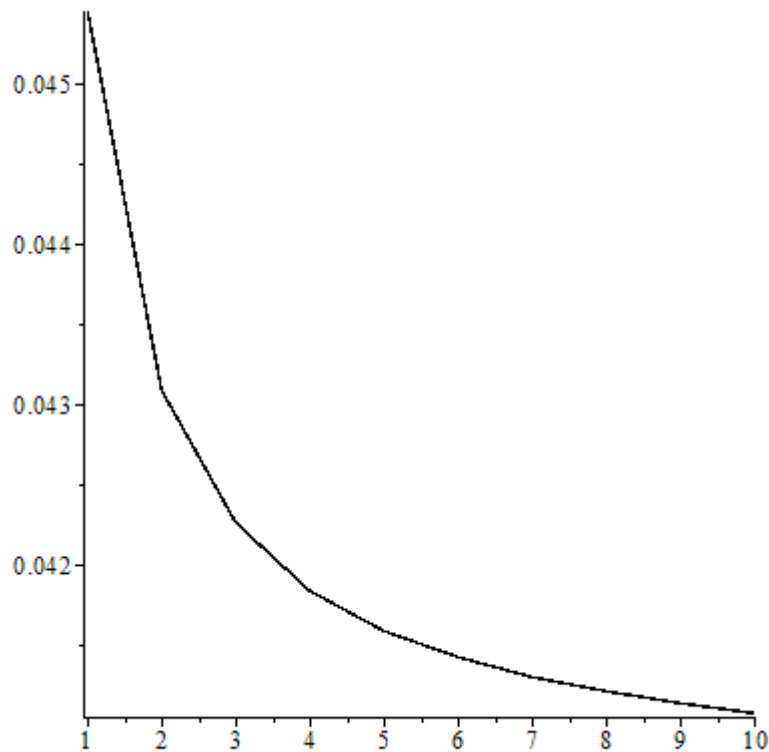


Рисунок 2.18. Зависимость цены продавца от  $N$ .

Из рисунка видно, что цена продавца с ростом  $N$  убывает и стремится к 0. Причем при  $N = 10$  цена продавца  $C^* = 0.041$ .

Построим эллипсоид минимального объема для всей выборки с доверительной вероятностью  $\eta = 0.9$ . Гарантированный риск  $\sigma^* = 0.0139$ .

Портфель с гарантированным риском

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.1055, x_2 = 0.0298, x_3 = 0.0125, x_4 = 0.1115, \\x_5 &= 0.1464, x_6 = 0.1825, x_7 = 0.0722, x_8 = 0.1335, \\x_9 &= 0.0935, x_{10} = 0.1126.\end{aligned}$$

### **Выводы.**

1. Гарантированный риск в случае с пятью эллипсоидами равен 0.0044, в случае с одним эллипсоидом 0.0139, что примерно в 3 раза больше.

2. Суммарный объем пяти эллипсоидов без учёта их пересечения равен 0.2077. Объем одного эллипсоида равен 0.7561, что примерно в 3.5 раза больше.

## **Заключение ко второй главе.**

В главе получены следующие основные результаты.

В области математического моделирования.

Предложена модель гарантированного оптимального управления с заданным уровнем доверия. В модели применяются доверительные множества сценариев, которым принадлежат траектории развития элементов модели с заданной доверительной вероятностью.

С использованием общей модели рассмотрены задачи многошагового управления одним рисковым активом, одношагового управления портфелем с несколькими рисковыми активами и многошагового управления фиксированным портфелем с несколькими рисковыми активами.

В области численных методов.

Предложены и теоретически обоснованы доказанными теоремами новые численные методы решения минимаксных задач гарантированного оптимального управления.

Предложен и теоретически обоснован доказанными теоремами новый метод вычисления доверительных множеств с заданной доверительной вероятностью. Использован проективный метод  $k$ -средних кластерного анализа, метод вычисления интервала минимальной длины, содержащего заданное число элементов выборки в одномерном случае и эллипсоида минимального объёма, содержащего заданное число элементов выборки в многомерном случае.

В области комплексов программ.

Численные методы главы доведены до программной реализации с использованием среды программирования Maple. Приведены результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие и эмпирически подтверждающие теоретические результаты.

### Глава 3. Случайное разбиение и метод Монте-Карло.

#### Введение.

В третьей главе рассматривается дискретная аппроксимация (дискретизация) решения дифференциального уравнения:  $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$  на интервале  $[0, T]$ , с коэффициентами, которые удовлетворяют стандартным требованиями существования и единственности строгого решения задачи Коши с начальным значением  $X_0$ , не зависящим от винеровского процесса и математическим ожиданием  $E|X_0| < \infty$ . Решение рассматривается на стохастическом базисе  $\langle \Omega, (F_t)_{t \geq 0}, F, P \rangle$ , в котором  $\Omega$  – множество непрерывных траекторий, фильтрация и вероятность порождаются винеровским процессом  $W$ . Подробное описание теории данного уравнения можно найти в монографиях [81,82]. Предлагаемый численный метод использует бинарную аппроксимацию, связанную с равномерным разбиением фазовой оси, и согласованное случайное разбиение времени. Обзор численных методов, связанных с бинарной аппроксимацией, приведен в первой главе диссертации. Случайное время применяется в исследованиях по субординации случайных процессов, достаточно подробный обзор данных работ приведён в монографиях [83,84,85]. Результаты главы также связаны со случайным разбиением Карра с помощью независимых и одинаково распределённых по показательному закону распределения случайных величин [86] применительно к процессам Леви. Разбиение Карра сочетается с факторизацией Винера-Хопфа, что позволяет для процессов Леви генерировать процессы максимума и минимума и использовать их в методах Монте-Карло. В силу того, что метод Монте-Карло часто применяется для вычислений различной природы, имеется много статей, посвящённых применению метода для вычисления функционалов на траекториях случайных процессов. Обратим внимание на следующие работы. Работа [88] содержит подробный обзор, посвящённый применению метода в финансовой инженерии, причем уделяется внимание и

моделям диффузии с использованием численного метода Эйлера-Мурояма. Аппроксимации Винера-Хопфа в сочетании с моделированием процессов Леви посвящены работы [87,90,99].

Проведённое в главе исследование связано с принципиально иными способами случайного разбиения времени. В одном разбиении участвуют пассажи модуля винеровского процесса, в другом – пассажи модуля винеровского процесса со сносом, что в конечном итоге сводится к бинарным моделям в случайной среде, в третьем используется смесь из пассажиров верхнего и нижнего уровней винеровского процесса со сносом. В связи с пассажирами полезна монография [95]. Напомним, что бинарным моделям много внимания уделено в первой главе. Здесь же изучается влияние случайного времени на качество решения стохастического дифференциального уравнения.

Численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Подробный анализ численных методов представлен в монографии [89]. Можно выделить два направления. Для первого направления характерно применение адаптированных для стохастического случая детерминированных методов, например, методы Рунге-Кутты или пристрелки. Описание данных методов можно найти в монографии [100]. Методы, характерные для второго направления, используют формулу Тейлора в сочетании с формулой Ито. Характерной особенностью этих методов является появление многомерных интегралов Ито. Методы вычисления этих интегралов можно найти, например, в работе [92]. Необходимость в разработке нового численного метода связана, прежде всего, с вычислением математического ожидания  $Ef(\underline{X}_T, \overline{X}_T)$ . Здесь  $f(x, y)$  – ограниченная функция,  $\underline{X}_t = \min_{0 \leq s \leq t} X_s$ ,  $\overline{X}_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$ . В главе данная задача рассматривается для единственного сильного решения стохастического дифференциального уравнения, которое является процессом Леви только при постоянных коэффициентах. В работе рассматривается класс уравнений,

в котором второй коэффициент (локальная волатильность) является величиной постоянной. Предлагаются два метода решения задачи. В первом используется разбиение с помощью пассажей абсолютной величины винеровского процесса, во втором разбиение Карра с факторизацией Винера-Хопфа. В обоих численных методах применяется преобразование Гирсанова [93]. Данные численные методы естественно распространяются на класс уравнений, сводящихся к уравнению с постоянной волатильностью заменой переменных и формулой Ито.

В первом методе разбиения естественно возникает кусочно-постоянный семимартингал  $W^h$  [91,94], исследование асимптотических свойств которого проведено в главе. Замена винеровского процесса на семимартингал  $W^h$  в стохастическом дифференциальном уравнении приводит к серии моделей со случайным числом слагаемых и к формулам, обобщающим формулы Кокса-Росса-Рубинштейна.

Разбиение времени пассажами винеровского процесса со сносом непосредственно связано с методом Эйлера-Мурояма и базируется на том факте, что липшицева функция может на любом компакте аппроксимирована с любой степенью точности кусочно-постоянной функцией, например, в равномерной норме.

Структура главы такова. В параграфе 3.1 рассматривается бинарная аппроксимация единственного сильного решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения со случайным разбиением времени пассажами абсолютной величины винеровского процесса. Результатом главы являются три вычислительные схемы. Первая схема – бинарный аналог схемы Эйлера-Мурояма, вторая схема – аналог схемы Мильштейна, третья схема – оригинальная схема. Использована формула Тейлора в сочетании с формулой Ито. В параграфе 3.2 описывается генератор случайного разбиения времени пассажами абсолютной величины винеровского процесса. Параграф 3.3 посвящён вычислительному методу аппроксимации единственного сильного решения стохастического

дифференциального уравнения с постоянной волатильностью. Применяется преобразование Гирсанова и ряд Тейлора. Вычисляется оценка погрешности с заданной доверительной вероятностью, при этом используется мартингальный вариант центральной предельной теоремы. В параграфе 3.4 приводятся две вычислительные схемы с различной точностью аппроксимации. Параграф 3.5 посвящён уравнениям, сводящимся к уравнениям с постоянной волатильностью. В параграфе 3.6 изучаются две вычислительные задачи. Первая задача связана с вычислением вероятности невыхода сильного решения из полосы на фиксированном временном интервале. Во второй задаче вычисляется средний штраф в связи с задачей о гомеостазе. В параграфе 3.7 добавляется разбиение Карра и факторизация Винера-Хопфа. В параграфе 3.8 изучается кусочно-постоянный семимартингал, который возникает в связи с бинарной аппроксимацией со случайным разбиением. В параграфе 3.9 рассматривается интеграл, процесс типа Ито и формула Ито для данного семимартингала. В параграфе 3.10 изучается стохастическое дифференциальное уравнение, в котором случайная составляющая определяется с помощью кусочно-постоянного семимартингала. Из дифференциального уравнения естественным образом получаются модели с общим названием «модели со случайным числом слагаемых», которые занимают промежуточную нишу между моделью Кокса-Росса-Рубинштейна и Блэка-Шоулса. Этим моделям посвящён параграф 3.11. В параграфе 3.12 рассматривается бинарная аппроксимация со случайным разбиением времени пассажирами винеровского процесса со сносом. В параграфе 3.13 рассматриваются примеры. В заключении приводятся и анализируются результаты главы.

Результаты главы опубликованы в работах [107,108,110,121,129].

### **3.1. Бинарная аппроксимация.**

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (3.1)$$

с постоянным начальным условием  $X_0 = x_0$  на стохастическом базисе  $\langle C(R^+), (F_t^W)_{t \geq 0}, F_\infty^W, P^W \rangle$ ,  $F_t^W = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t)$ ,  $F_\infty^W = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} F_t^W\right)$ ,  $P^W$  – мера, относительно которой  $W$  – винеровский процесс.

Существует несколько теорем о существовании и единственности сильного решения уравнения, то есть адаптированного случайного процесса, обращающего уравнение в тождество, для фиксированного стохастического базиса [81,82]. Одна из таких теорем приводится далее.

**Теорема 3.1.** [81]

Если в уравнении (3.1) коэффициенты  $\mu$  и  $\sigma$  удовлетворяют условию Липшица:  $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|$ , условию линейного роста:  $|\mu(x)| + |\sigma(x)| \leq C(1 + |x|)$ , где  $K$ ,  $C$  и  $D$  – некоторые константы, и  $X_0$  – независимая от винеровского процесса абсолютно интегрируемая случайная величина, то существует непрерывное решение  $X_t$  уравнения (3.1). Причём это решение единственное и математическое ожидание  $E \int_0^T X_t^2 dt < \infty$ .

Далее рассмотрим траекторию винеровского процесса –  $\omega$ , для которой определим двумерную случайную последовательность  $\bar{\omega} = \{(\tau_1, \delta_1), (\tau_2, \delta_2), \dots, (\tau_n, \delta_n), \dots\}$ . В этой последовательности

$$\tau_i(\omega) = \min \left\{ \tau_{i-1}(\omega) \leq t : |W_t(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega)| = h \right\}, \tau_0(\omega) = 0,$$

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 1, & W_{\tau_i}(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) = h \\ -1, & W_{\tau_i}(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) = -h \end{cases}$$

Стохастические свойства последовательности  $\bar{\omega}$ . Приведём ряд простых утверждений.

Сначала приведём утверждения, касающиеся первой координаты.

**Утверждение 3.1.** Последовательность  $\tau$  является возрастающей последовательностью моментов остановки.

Действительно, последовательность  $\tau$  является последовательностью пассажиров согласованного процесса.

**Утверждение 3.2.** Для всех  $i$  разности  $\tau_i - \tau_{i-1} = \nu_i$  – независимые и одинаково распределённые случайные величины.

Используем строго марковское свойство винеровского процесса, а также то, что элементы последовательности  $\tau$  – моменты остановки и рассмотрим разность  $W_t - W_{\tau_{i-1}}$ .

Разность не зависит от  $W_{\tau_{i-1}}$  и по распределению равна  $W_{t-\tau_{i-1}}$ . Сделаем замену переменных:  $s = t - \tau_{i-1}$  и определим  $\nu = \min \{s : |W_s| \geq h\}$ . Случайные величины  $\nu_i$  – независимые и одинаково распределённые случайные величины, по распределению равные  $\nu$ .

Плотность их общего закона распределения имеет вид:

$$p_\nu(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h(1+2k)}{t} \varphi_t(h(1+2k)), \quad \varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right). \quad (3.2)$$

Формула (3.2) приведена в [95]. Там же приведены математическое ожидание  $E\nu = h^2$  и дисперсия  $D\nu = h^4$ .

Для приближённого решения уравнения (3.1) на интервале с помощью моментов остановки  $\tau$  зададим разбиение  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$ . Рассмотрим случайную величину  $\tau_N = \sum_{i=1}^N \nu_i$ . Пусть  $E\tau_N = T$ . Отсюда при выбранном

числе точек разбиения определяется  $h = \sqrt{\frac{T}{N}}$  и дисперсия  $D\tau_N = \frac{T^2}{N^2}$ .

Применение центральной предельной теоремы позволяет оценить вероятность случайного события  $P\{|\tau_N - T| \leq \varepsilon\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon N}{T}\right) - 1$  для любого положительного  $\varepsilon$ . Из последнего соотношения определяется  $N$  при заданной доверительной вероятности  $\beta$  и точности  $\varepsilon$ .

Далее понадобятся свойства бинарной последовательности  $\delta$ . Следующее утверждение связано со свойствами бинарной последовательности  $\delta$ .

**Утверждение 3.3.** Бинарная последовательность  $\delta$  состоит из независимых и одинаково распределённых элементов с вероятностями  $P(\delta_i = 1) = P(\delta_i = -1) = 0.5$ .

Действительно, независимость и одинаковая распределённость очевидны, доказательство второго факта можно найти в уже упомянутой монографии [95].

Вернемся к уравнению (3.1), в точках случайного разбиения значения решения:

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_{i-1}} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu(X_s) ds + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma(X_s) dW_s. \quad (3.3)$$

Воспользуемся равенствами:

$$\begin{aligned} \mu(X_s) &= \mu(X_{\tau_{i-1}}) + \int_{\tau_{i-1}}^s \left[ \mu(X_u) \mu'(X_u) + \frac{1}{2} \mu''(X_u) \sigma^2(X_u) \right] du + \mu'(X_u) \sigma(X_u) dW_u; \\ \sigma(X_s) &= \sigma(X_{\tau_{i-1}}) + \int_{\tau_{i-1}}^s \left[ \sigma(X_u) \sigma'(X_u) + \frac{1}{2} \sigma''(X_u) \sigma^2(X_u) \right] du + \sigma'(X_u) \sigma(X_u) dW_u. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее применим приближённую формулу:

$$\begin{aligned} \mu(X_s) &\approx \mu(X_{\tau_{i-1}}) + \left( \mu(X_{\tau_{i-1}}) \mu'(X_{\tau_{i-1}}) + \frac{1}{2} \mu''(X_{\tau_{i-1}}) \sigma^2(X_{\tau_{i-1}}) \right) (s - \tau_{i-1}) + \\ &\mu'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma(X_{\tau_{i-1}}) (W_s - W_{\tau_{i-1}}); \\ \sigma(X_s) &\approx \sigma(X_{\tau_{i-1}}) + \left( \sigma(X_{\tau_{i-1}}) \sigma'(X_{\tau_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sigma''(X_{\tau_{i-1}}) \sigma^2(X_{\tau_{i-1}}) \right) (s - \tau_{i-1}) + \\ &\sigma'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma(X_{\tau_{i-1}}) (W_s - W_{\tau_{i-1}}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В результате приближённая формула будет иметь вид:

$$\begin{aligned} X_{\tau_i} &\approx X_{\tau_{i-1}} + \mu(X_{\tau_{i-1}}) \nu_i + \sigma(X_{\tau_{i-1}}) h \delta_i + \\ &\frac{1}{2} \left( \mu(X_{\tau_{i-1}}) \mu'(X_{\tau_{i-1}}) + \frac{1}{2} \mu''(X_{\tau_{i-1}}) \sigma^2(X_{\tau_{i-1}}) \right) \nu_i^2 + \\ &\mu'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma(X_{\tau_{i-1}}) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (W_s - W_{\tau_{i-1}}) ds + \\ &\left( \sigma(X_{\tau_{i-1}}) \sigma'(X_{\tau_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sigma''(X_{\tau_{i-1}}) \sigma^2(X_{\tau_{i-1}}) \right) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (s - \tau_{i-1}) dW_s + \\ &\sigma'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma(X_{\tau_{i-1}}) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (W_s - W_{\tau_{i-1}}) dW_s. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим интегралы, входящие в данную формулу. К первому из них применим формулу интегрирования по частям и формулу трапеций:

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (W_s - W_{\tau_{i-1}}) ds = h\delta_i\nu_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (s - \tau_{i-1}) dW_s \approx \frac{h\delta_i\nu_i}{2},$$

возникающая дополнительная погрешность имеет порядок  $\sqrt{\nu_i^3}$ , к третьему интегралу применим формулу

$$\text{Ито: } \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (W_s - W_{\tau_{i-1}}) dW_s = \frac{1}{2}h^2\delta_i^2 - \frac{1}{2}\nu_i.$$

Сохраним слагаемые с первыми степенями  $\nu$  и  $h$ , в результате получим формулу первого порядка (аналог формулы Эйлера):

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_{i-1}} + \mu(X_{\tau_{i-1}})\nu_i + \sigma(X_{\tau_{i-1}})h\delta_i. \quad (3.7)$$

Далее сохраним слагаемые с  $\nu$ ,  $h$  и  $h^2$ , в результате получим более точную формулу (аналог формулы Мильштейна [96]):

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_{i-1}} + \frac{1}{2}\sigma(X_{\tau_{i-1}})\sigma'(X_{\tau_{i-1}})h^2\delta_i^2 + \left( \mu(X_{\tau_{i-1}}) - \frac{1}{2}\sigma(X_{\tau_{i-1}})\sigma'(X_{\tau_{i-1}}) \right)\nu_i + \sigma(X_{\tau_{i-1}})h\delta_i. \quad (3.8)$$

Если сохранить все слагаемые, то получим формулу:

$$X_{\tau_i} \approx X_{\tau_{i-1}} + \mu(X_{\tau_{i-1}})\nu_i + \sigma(X_{\tau_{i-1}})h\delta_i + \frac{1}{2}\left( \mu(X_{\tau_{i-1}})\mu'(X_{\tau_{i-1}}) + \frac{1}{2}\mu''(X_{\tau_{i-1}})\sigma^2(X_{\tau_{i-1}}) \right)\nu_i^2 + \left( \mu'(X_{\tau_{i-1}})\sigma(X_{\tau_{i-1}}) + \sigma(X_{\tau_{i-1}})\sigma'(X_{\tau_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sigma''(X_{\tau_{i-1}})\sigma^2(X_{\tau_{i-1}}) \right)\frac{h\nu_i\delta_i}{2} + \sigma'(X_{\tau_{i-1}})\sigma(X_{\tau_{i-1}})\frac{h^2\delta_i^2 - \nu_i}{2}. \quad (3.9)$$

Для использования данных формул требуются генераторы двух случайных величин:  $\delta$  и  $\nu$ . Генератор случайных  $\delta$  устроен просто, например, пусть  $r \approx \sum_{i=1}^N \bar{\delta}_i 2^{-i}$ ,  $r$  – равномерно распределённая случайная величина на интервале  $[0,1]$ , тогда  $\delta_i = 2\bar{\delta}_i - 1$ . Генератор  $\nu$  устроен сложнее.

### 3.2. Описание генератора.

Важным элементом алгоритма является генератор моментов остановки с использованием плотности  $p_\nu(t)$  из (3.2). В виде ряда можно получить и функцию распределения:  $F_\nu(t) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( 1 - \Phi \left( \frac{h(1+2k)}{\sqrt{t}} \right) \right)$ . Здесь  $\Phi(x)$  – функция Лапласа. Универсальный метод генерации случайной величины с известной функцией распределения, как в данном случае, связан с обращением функции распределения:  $\nu = F_\nu^{-1}(U)$ . Здесь  $U$  – равномерная на интервале  $[0,1]$  случайная величина. Поскольку данный способ генерации потребует больших вычислительных затрат, то будем использовать более эффективный метод – acceptance-rejection sampling algorithm, см., например, [97]. Метод заключается в следующем. Исходная плотность  $f(x)$  приближается сверху более простой плотностью  $g(x)$ :  $f(x) < Mg(x)$  с константой  $M > 1$ . Генерируются случайная величина  $X$  с плотностью  $g(x)$  и равномерная на интервале  $[0,1]$  случайная величина  $U$ . Если  $U < \frac{f(X)}{Mg(X)}$ , то возвращаем  $X$ , иначе повторяем заново.

Для плотности из (3.2) справедливо неравенство:  $p_\nu(t) \leq 2 \frac{h}{t} \varphi_t(h)$ .

Функция распределения для плотности  $\frac{h}{t} \varphi_t(h)$  имеет вид:

$F_h(t) = 2 \left( 1 - \Phi \left( \frac{h}{\sqrt{t}} \right) \right)$ . Вероятность выполнения неравенства

$P \left( U < \frac{f(X)}{Mg(X)} \right) = \frac{1}{M}$ . Для данного случая  $P \left( U < \frac{f(X)}{2g(X)} \right) = \frac{1}{2}$ . Таким образом,

чтобы получить момент остановки, необходимо сгенерировать два равномерно распределённых на интервале  $[0,1]$  случайных числа –  $U_1$  и  $U_2$ ,

вычислить случайную величину  $X = \left( \frac{h}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{U_2}{2}\right)} \right)^2$  и проверить

неравенство:  $U_1 < \frac{Xp_\nu(X)}{2h\varphi_x(h)}$ , при выполнении которого случайная величина

$\nu = X$ . Причём среднее число повторений равно двум.

Эффективность этого метода иллюстрирует рисунок 3.1. На рисунке 3.1 представлены эмпирическая и реальная плотности распределения случайной величины  $\nu$ . На рисунке объём выборки равен 10000.

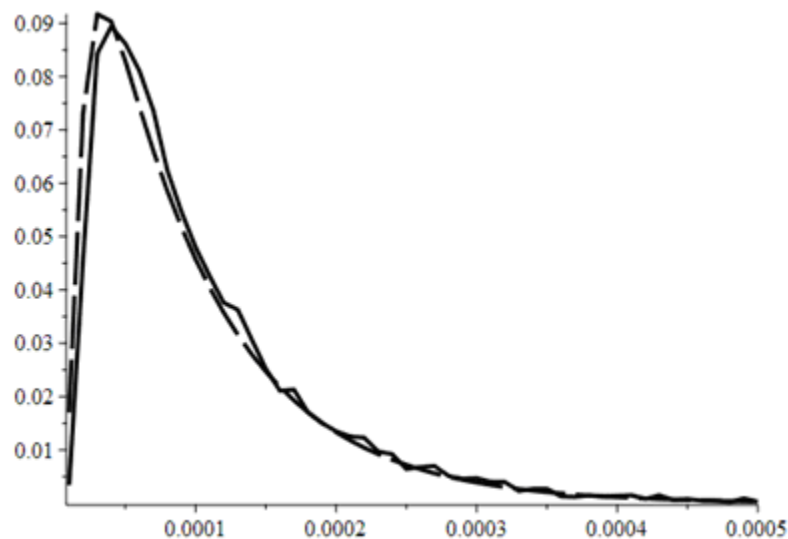


Рисунок 3.1. Эмпирическая и реальная плотности распределения случайной величины  $\nu$ .

На рисунке 3.1 эмпирическая плотность – сплошная линия; реальная плотность – пунктирная линия. Из рисунка 3.1 можно сделать вывод о хорошем качестве метода acceptance-rejection sampling algorithm.

### 3.3. Бинарная аппроксимация и преобразование Гирсанова.

Рассмотрим уравнение (3.1) с постоянной волатильностью. В связи с этим уравнением с постоянной волатильностью рассмотрим преобразование Гирсанова [93], которое вместо уравнения (3.1) позволяет рассмотреть систему уравнений:

$$dZ_t = \frac{\mu(X_t)}{\sigma} Z_t dW_t^*, dX_t = \sigma dW_t^*, Z_0 = 1. \quad (3.10)$$

В системе (3.10) процесс  $Z_t$  – процесс плотности, то есть  $dP_t = Z_t dP_t^*$ ,  $P_t$  – сужение исходной меры на  $F_t$ ,  $P_t^*$  – сужение меры  $P^*$  на  $F_t$ . Процесс  $W_t^* = \frac{\mu(X_t)}{\sigma} + W_t$  является винеровским процессом относительно меры  $P^*$ .

Решение второго уравнения системы (3.10) имеет вид:  $X_t = X_0 + \sigma W_t^*$ . Таким образом, остаётся первое уравнение системы (3.10). Заменяем переменную  $Y_t = \ln Z_t$  и применим формулу Ито. В результате получим уравнение:

$$dY_t = -\frac{\mu^2(X_0 + \sigma W_t^*)}{2\sigma^2} dt + \frac{\mu(X_0 + \sigma W_t^*)}{\sigma} dW_t^*.$$

Опустим звездочку и введём обозначения  $\varphi(W_t) = -\frac{\mu^2(X_0 + \sigma W_t)}{2\sigma^2}, \psi(W_t) = \frac{\mu(X_0 + \sigma W_t)}{\sigma}$ . Определим

разбиение  $\tau^N : 0 = \tau_0^N < \tau_1^N < \dots < \tau_N^N, \nu_i^N = \tau_i^N - \tau_{i-1}^N$  – независимые случайные величины с общим законом распределения, причем  $E\tau_N = T$  или  $N(h_N)^2 = T$ .

Будем считать, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  являются достаточно гладкими, чтобы можно было использовать формулу Тейлора на интервале  $[\tau_{j-1}^N, \tau_j^N]$ :

$$\varphi(W_s) = \sum_{i=0}^k \frac{\varphi^{(i)}(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + \lambda_j (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(k+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{k+1}, \quad (3.11)$$

$$\psi(W_s) = \sum_{i=0}^m \frac{\psi^{(i)}(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^i + \frac{\psi^{(m+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + (1-\theta_j)(W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(m+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{m+1}$$

Решение в финальной точке разбиения при заданном  $N$

$$Y_{\tau_N} = \sum_{j=1}^N \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \left( \sum_{i=0}^k \frac{\varphi^{(i)}(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + (1-\lambda_j)W_s)}{(k+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{k+1} \right) ds + \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \left( \sum_{i=0}^m \frac{\psi^{(i)}(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^i + \frac{\psi^{(m+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + (1-\theta_j)W_s)}{(m+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{m+1} \right) dW_s.$$

Коэффициенты  $\lambda_j$  и  $\theta_j$  зависят от  $W_{\tau_{j-1}^N}$ , от разности  $W_s - W_{\tau_{j-1}^N}$ , и от функций  $\varphi$  и  $\psi$ ,  $0 \leq \lambda_j \leq 1, 0 \leq \theta_j \leq 1$ . Приближённое решение

$$\bar{Y}_{\tau_N} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^k \frac{\varphi^{(i)}(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}) ds + \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^m \frac{\psi^{(i)}(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}) dW_s. \quad (3.13)$$

Погрешность:

$$\Delta_N = \sum_{j=1}^N \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \frac{\varphi^{(k+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + \lambda_j (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(k+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{k+1} ds +$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \frac{\psi^{(m+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + \theta_j (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(m+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{m+1} dW_s.$$

Предположим, что  $|\varphi^{(k+1)}(x)| \leq M_1, |\psi^{(m+1)}(x)| \leq M_2$ , тогда

$$|\Delta_N| \leq \sum_{j=1}^N \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \left| \frac{\varphi^{(k+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + \lambda_j (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(k+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{k+1} \right| ds +$$

$$\left| \sum_{j=1}^N \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \frac{\psi^{(m+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + \theta_j (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(m+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{m+1} dW_s \right| \leq \frac{M_1 \left( \sqrt{\frac{T}{N}} \right)^{k+1}}{(k+1)!} \tau_N^N + |S_N|.$$

В этой формуле случайная величина  $S_N = \sum_{j=1}^N \xi_j^N$ ,

$$\xi_j^N = \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \frac{\psi^{(m+1)}(W_{\tau_{j-1}^N} + \theta_j (W_s - W_{\tau_{j-1}^N}))}{(m+1)!} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^{m+1} dW_s.$$

Рассмотрим последовательность  $(\xi_j^N, F_{\tau_j^N}^N)_{j=1}^N$ . Здесь  $F_{\tau_j^N}^N$  –  $\sigma$ -алгебры, порождённые моментами остановки  $\tau_j^N$ . Является справедливым следующее утверждение.

**Утверждение 3.4.** Последовательность  $(\xi_j^N, F_{\tau_j^N}^N)_{j=1}^N$  является квадратично интегрируемым мартингалом-разностью.

Действительно,

а) условное математическое ожидание  $E\left(\xi_j^N / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right)$  совпадает

с математическим ожиданием от интеграла Ито по винеровскому процессу. Математическое ожидание от интеграла Ито по винеровскому процессу равно нулю [91];

б) условное математическое ожидание  $E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right) =$

$$E\left(\left(\int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \frac{\psi^{(m+1)}\left(W_{\tau_{j-1}^N} + \theta_j\left(W_s - W_{\tau_{j-1}^N}\right)\right)}{(m+1)!} \left(W_s - W_{\tau_{j-1}^N}\right)^{m+1} dW_s\right)^2 / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right) =$$

$$E\left(\left(\int_0^{\nu_j} \frac{\psi^{(m+1)}\left(W_{\tau_{j-1}^N} + \theta_j W_s\right)}{(m+1)!} \left(W_s\right)^{m+1} dW_s\right)^2 / W_{\tau_{j-1}^N}\right), \text{ последнее равенство следует из}$$

строгого марковского свойства винеровского процесса, далее из изометрии Ито и из независимости и одинаковой распределённости элементов последовательности  $\nu$  следует неравенство:

$$E\left(\left(\int_0^{\nu_j} \frac{\psi^{(m+1)}\left(W_{\tau_{j-1}^N} + \theta_j\left(W_s - W_{\tau_{j-1}^N}\right)\right)}{(m+1)!} \left(W_s\right)^{m+1} dW_s\right)^2 / W_{\tau_{j-1}^N}\right) \leq \frac{M_2^2 \left(\frac{T}{N}\right)^{m+2}}{((m+1)!)^2}, \text{ поэтому}$$

$$\text{математическое ожидание } E\left(\xi_j^N\right)^2 = E\left(E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right)\right) \leq \frac{M_2^2 \left(\frac{T}{N}\right)^{m+2}}{((m+1)!)^2}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим сумму  $\sum_{j=1}^N E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right)$ , для которой справедливо

$$\text{неравенство: } \sum_{j=1}^N E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right) \leq \frac{M_2^2 \left(\frac{T}{N}\right)^{m+2} N}{((m+1)!)^2}. \text{ Отсюда следует, что}$$

$\sum_{j=1}^N E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right) \rightarrow 0$  с вероятностью, равной единице, что в свою очередь

обеспечивает выполнение условия Линдеберга:  $\sum_{j=1}^N E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 I_{|\xi_j^N| \geq \varepsilon} / F_{\tau_{j-1}^N}^N\right) \rightarrow 0$  по

вероятности.

Далее используем один из вариантов центральной предельной теоремы.

**Теорема 3.2.** [91]

Пусть для квадратично интегрируемых мартингалов  $(\xi_j^N, F_{\tau_j^N}^N)_{j=1}^N$  выполнено условие Линдеберга: для  $\varepsilon > 0$   $\sum_{j=1}^N E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 I_{|\xi_j^N| \geq \varepsilon} / F_{\tau_j^N}^N\right) \rightarrow 0$  по вероятности. Тогда из сходимости  $\sum_{j=1}^N E\left(\left(\xi_j^N\right)^2 / F_{\tau_j^N}^N\right) \rightarrow \sigma$  по вероятности следует сходимость  $S_N = \sum_{j=1}^N \xi_j^N$  к  $N(0, \sigma)$  по распределению.

Зафиксируем  $N$  и вычислим математическое ожидание  $ES_N = \sum_{j=1}^N E\xi_j^N = \sum_{j=1}^N EE(\xi_j^N / F_{\tau_{j-1}^N}^N) = 0$ . Для вычисления дисперсии суммы установим, прежде всего, что слагаемые – некоррелированные случайные величины. Для этого рассмотрим математическое ожидание произведения  $E\xi_k^N \xi_l^N$ , причём  $k > l$ ,  $E\xi_k^N \xi_l^N = EE(\xi_k^N \xi_l^N / F_{\tau_{k-1}^N}^N) = E\xi_l^N E(\xi_k^N / F_{\tau_{k-1}^N}^N) = 0$ .

Применение центральной предельной теоремы позволяет с заданной доверительной вероятностью  $\beta$  написать неравенство:

$$|S_N| \leq \Phi^{-1}\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \sqrt{\frac{M_2^2 \left(\frac{T}{N}\right)^{m+2} N}{((m+1)!)^2}}. \quad (3.14)$$

Как было отмечено ранее, для вычисления вероятности  $P(\tau_N^N \leq \varepsilon)$  можно использовать центральную предельную теорему, поэтому неравенство  $\tau_N^N \leq T + \Phi^{-1}(\beta) \frac{T}{\sqrt{N}}$  выполняется с доверительной вероятностью  $\beta$ . Таким образом, доказано утверждение.

**Утверждение 3.5.** Для абсолютной величины погрешности выполняется неравенство:

$$|\Delta_N| \leq \frac{M_1 T^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)!} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{k+1}{2}} \left(T + \Phi^{-1}(\beta) \frac{T}{\sqrt{N}}\right) + \Phi^{-1}\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \frac{M_2 T^{\frac{m+2}{2}}}{(m+1)!} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m+1}{2}} \quad (3.15)$$

с вероятностью, превосходящей  $2\beta - 1$ . С целью упрощения выражения

$$(3.15) \quad \text{введём обозначения} \quad A_k(\beta) = \frac{M_1 T^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)!} \left( T + \Phi^{-1}(\beta) \frac{T}{\sqrt{N}} \right) \quad \text{и}$$

$$B_m(\beta) = \Phi^{-1} \left( \frac{\beta+1}{2} \right) \frac{M_2 T^{\frac{m+2}{2}}}{(m+1)!}. \quad \text{В этих обозначениях неравенство (3.15) будет}$$

$$\text{иметь вид: } |\Delta_N| \leq A_k(\beta) \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{k+1}{2}} + B_m(\beta) \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{m+1}{2}}.$$

### 3.4. Вычислительные схемы.

Рассмотрим приближение нулевого порядка (схема Эйлера). Положим  $m = k = 0$ . Приближение решения вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{Y}_{\tau_n} = \bar{Y}_{\tau_{n-1}} + \varphi(W_{\tau_{n-1}}) \nu_n + h \psi(W_{\tau_{n-1}}) \delta_n, \quad W_{\tau_n} = W_{\tau_{n-1}} + h \delta_n, \quad W_{\tau_0} = 0, \quad \bar{Y}_{\tau_0} = Y_0. \quad (3.16)$$

$$\text{Погрешность } |Y_{\tau_n} - \bar{Y}_{\tau_n}| \leq (A_0(\beta) + B_0(\beta)) \frac{1}{\sqrt{N}} = C_0(\beta) \frac{1}{\sqrt{N}}$$

с вероятностью  $2\beta - 1$ .

Рассмотрим приближение первого порядка. Положим  $m = k = 1$ . Приближённое решение вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{\tau_n} = \bar{Y}_{\tau_{n-1}} + \frac{1}{2} h^2 \delta_n^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left( \varphi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}}) \right) \nu_n + \psi(W_{\tau_{n-1}}) h \delta_n + \\ h \delta_n \nu_n \varphi'(W_{\tau_{n-1}}) - \varphi'(W_{\tau_{n-1}}) \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} (s - \tau_{n-1}) d(W_s - W_{\tau_{n-1}}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В (3.17) использована формула интегрирования по частям

$$\int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} (W_s - W_{\tau_{n-1}}) ds = \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} (W_s - W_{\tau_{n-1}}) d(s - \tau_{n-1}) = h \delta_n \nu_n - \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} (s - \tau_{n-1}) d(W_s - W_{\tau_{n-1}}).$$

Рассмотрим

$$\tilde{Y}_{\tau_n} = \tilde{Y}_{\tau_{n-1}} + \frac{1}{2} h^2 \delta_n^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left( \varphi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}}) \right) \nu_n + \psi(W_{\tau_{n-1}}) h \delta_n + h \delta_n \nu_n \varphi'(W_{\tau_{n-1}})$$

$$\text{и оценим разность } \bar{Y}_{\tau_n} - \tilde{Y}_{\tau_n} = \sum_{n=1}^N \zeta_n, \quad \zeta_n = -\varphi'(W_{\tau_{n-1}}) \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} (s - \tau_{n-1}) d(W_s - W_{\tau_{n-1}}).$$

Последовательность  $\{(\zeta_n, F_{\tau_n})\}$  является квадратично интегрируемым

мартингалом-разностью. Условное математическое ожидание

$$E(\zeta_n^2 / F_{\tau_{n-1}}) \leq \frac{1}{3} L^2 E v_n^3 = \frac{61}{45} L^2 h^6 = \frac{61}{45} L^2 \left( \frac{T}{N} \right)^3. \quad \text{При дополнительном}$$

предположении об ограниченности производной  $|\phi'(x)| \leq L$ . Для суммы

$$\text{выполняется неравенство:} \quad \sum_{n=1}^N E(\zeta_n^2 / F_{\tau_{n-1}}) \leq \frac{61}{45} L^2 \frac{T^3}{N^2}, \quad \text{поэтому}$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N E(\zeta_n^2 / F_{\tau_{n-1}}) = 0$ . Применение центральной предельной теоремы для

суммы позволяет оценить абсолютную величину разности  $|\bar{Y}_{\tau_N} - \tilde{Y}_{\tau_N}|$

$$\text{следующим образом:} \quad |\bar{Y}_{\tau_N} - \tilde{Y}_{\tau_N}| \leq \Phi^{-1}(2\beta - 1) L T \sqrt{\frac{61T}{45}} \frac{1}{N} = D_1(\beta) \frac{1}{N} \quad \text{при}$$

достаточно большом  $N$ , с доверительной вероятностью  $\beta$ . Объединив

данное неравенство с предыдущим неравенством, получим оценку для

ошибки приближения первого порядка:

$$|Y_{\tau_N} - \tilde{Y}_{\tau_N}| \leq |Y_{\tau_N} - \bar{Y}_{\tau_N}| + |\bar{Y}_{\tau_N} - \tilde{Y}_{\tau_N}| \leq (C_1(\beta) + D_1(\beta)) \frac{1}{N} = G_1(\beta) \frac{1}{N}, \quad (3.18)$$

с доверительной вероятностью  $3\beta - 2$ .

Таким образом, приближённая формула будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{\tau_n} = \tilde{Y}_{\tau_{n-1}} + \frac{1}{2} h^2 \delta_n^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left( \phi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}}) \right) v_n + \\ h(v_n \phi'(W_{\tau_{n-1}}) + \psi(W_{\tau_{n-1}})) \delta_n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) может быть представлено в эквивалентном виде:

$$\tilde{Y}_{\tau_n} = \tilde{Y}_{\tau_{n-1}} + h(v_n \phi'(W_{\tau_{n-1}}) + \psi(W_{\tau_{n-1}})) \bar{\delta}_n. \quad (3.20)$$

В формуле (3.20) случайные величины  $\bar{\delta}_n \in \{-1, 1\}$  и условное математическое ожидание

$$E(\bar{\delta}_n / F_{\tau_{n-1}} \vee v_n) = \frac{1}{2} h^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left( \phi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}}) \right) v_n$$

$\left(-1 \leq \frac{1}{2} h^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left(\varphi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}})\right) v_n \leq 1\right)$ , то есть условная вероятность

$$P(\bar{\delta}_n = 1 / F_{\tau_{n-1}} \vee v_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{2} h^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left(\varphi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}})\right) v_n}{h \left( v_n \varphi'(W_{\tau_{n-1}}) + \psi(W_{\tau_{n-1}}) \right)} + 1 \right).$$

Обобщим полученные результаты на более широкий класс уравнений.

### 3.5. Уравнения, сводящиеся к уравнению с постоянной волатильностью.

Рассмотрим уравнение  $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$  и замену переменных  $Y_t = f(X_t)$ , функция  $f(x)$  дважды дифференцируемая функция, причём для неё существует обратная функция  $f^{-1}(y)$ . Применим формулу Ито  $dY_t = \left( f'(X_t)\mu(X_t) + \frac{1}{2} f''(X_t)\sigma^2(X_t) \right) dt + f'(X_t)\sigma(X_t)dW_t$ . Подберём функцию  $f(x)$ , решая обыкновенное дифференциальное уравнение  $f'(x)\sigma(x) = 1$ . Если  $\sigma(x) > 0$  и существует производная  $\sigma'(x)$ , то любое частное решение данного уравнения можно использовать для замены переменных и получить для новой переменной уравнение с постоянной волатильностью:

$$dY_t = \left( \frac{\mu(f^{-1}(Y_t))}{\sigma(f^{-1}(Y_t))} - \frac{1}{2} \sigma'(f^{-1}(Y_t)) \right) dt + dW_t. \quad (3.21)$$

### 3.6. Вычислительные задачи.

**Первая задача.** Для решения уравнения (3.1) с постоянной волатильностью требуется вычислить математическое ожидание  $Ef(X_{\tau_N}) I_{\{\bar{X}_{\tau_N} \leq b\} \wedge \{\underline{X}_{\tau_N} \geq a\}}$ . Здесь  $\bar{X}_{\tau_N} = \sup_{t \leq \tau_N} X_t$ ,  $\underline{X}_{\tau_N} = \inf_{\tau \leq \tau_N} X_t$ . Напомним, что применяется преобразование Гирсанова, и уравнение (3.1) преобразуется в систему (3.10), поэтому справедливо равенство:  $Ef(X_{\tau_N}) I_{\{\bar{X}_{\tau_N} \leq b\} \wedge \{\underline{X}_{\tau_N} \geq a\}} = E^* Z_{\tau_N} f(\sigma W_{\tau_N} + X_0) I_{\{\bar{W}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b-X_0)\} \wedge \{\underline{W}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a-X_0)\}}$ . Определим случайные величины:  $\bar{U}_{\tau_N} = \sup_{1 \leq i \leq N} W_{\tau_i}$ ,  $\underline{U}_{\tau_N} = \inf_{1 \leq i \leq N} W_{\tau_i}$ .

Далее нам понадобится следующее утверждение:

**Утверждение 3.6.**

Если  $\frac{1}{\sigma}(a - X_0) \in \{ih, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $\frac{1}{\sigma}(b - X_0) \in \{ih, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $a < X_0 < b$ ,

то справедливо равенство индикаторов:

$$I_{\left\{\bar{U}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0)\right\} \wedge \left\{\underline{U}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)\right\}} = I_{\left\{\bar{W}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0)\right\} \wedge \left\{\underline{W}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)\right\}}.$$

Рассмотрим множества

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \bar{W}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0) \right\}, B = \left\{ \omega \in \Omega : \bar{U}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0) \right\}. \quad \text{Пусть } \omega \in A,$$

тогда существует такое  $k \leq N$ , что  $W_{\tau_k} = \frac{1}{\sigma}(a - X_0)$ . Поскольку  $\bar{U}_{\tau_N} \geq W_{\tau_k}$ ,

справедливо неравенство  $\bar{U}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)$ . Следовательно,  $\omega \in B$ .

Пусть  $\omega \in B$ , так как  $\bar{W}_{\tau_N} \geq \bar{U}_{\tau_N}$ , то  $\bar{W}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)$ . Следовательно,

$\omega \in A$ , то есть  $A = B$ .

Пусть теперь

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \underline{W}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0) \right\}, B = \left\{ \omega \in \Omega : \underline{U}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0) \right\}. \quad \text{Аналогично}$$

доказывается, что  $A = B$ . Подводя итог, устанавливаем равенство индикаторов.

Напомним, что  $Y_N = \ln Z_N$ ,  $\bar{Y}_N = \ln \bar{Z}_N$ , где  $\bar{Y}_N$  – приближение  $Y_N$  и

$\Delta_N = Y_N - \bar{Y}_N = \ln \frac{Z_N}{\bar{Z}_N}$ . Применим утверждение и оценим разность между

точным значением и приближённым

$$\bar{\Delta}_N = EZ_N f(X_0 + \sigma W_{\tau_N}) I_{\left\{\bar{U}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0)\right\} \wedge \left\{\underline{U}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)\right\}} -$$

$$E\bar{Z}_N f(X_0 + \sigma W_{\tau_N}) I_{\left\{\bar{U}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0)\right\} \wedge \left\{\underline{U}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)\right\}} =$$

$$Ef(X_0 + \sigma W_{\tau_N}) I_{\left\{\bar{U}_{\tau_N} \leq \frac{1}{\sigma}(b - X_0)\right\} \wedge \left\{\underline{U}_{\tau_N} \geq \frac{1}{\sigma}(a - X_0)\right\}} (Z_N - \bar{Z}_N).$$

Абсолютная величина  $|\bar{\Delta}_N| \leq LE|Z_N - \bar{Z}_N|$ . В последнем неравенстве  $L = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ . Далее воспользуемся равенством  $\ln \frac{\bar{Z}_N}{Z_N} = -\Delta_N$ . Будем считать,

что  $N$  достаточно велико, чтобы с заданной доверительной вероятностью считать, что  $|\Delta_N| < 1$ . Таким образом,

$$|\bar{\Delta}_N| \leq 2L \left( A_k(\beta) \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{k+1}{2}} + B_m(\beta) \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{m+1}{2}} \right) E^* Z_N =$$

$$2L \left( A_k(\beta) \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{k+1}{2}} + B_m(\beta) \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{m+1}{2}} \right).$$

**Вторая задача.** Рассмотрим класс функций следующего вида:

$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^n \varphi_k I_{\{(x \leq b_k) \wedge (y \geq a_k)\}}$ . Набор чисел  $a_i$  и  $b_i$  упорядочен следующим образом:  $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1} < b_n$ , коэффициенты  $\varphi_k \geq 0$ .

Требуется вычислить математическое ожидание  $E\Psi(\bar{X}_{\tau_N}, \underline{X}_{\tau_N}) = E^* Z_{\tau_N} \Psi(\sigma \bar{W}_{\tau_N} + X_0, \underline{W}_{\tau_N} + X_0)$ ,  $X$  – решение уравнения (3.1).

Очевидно, что предыдущее утверждение распространяется и на данный класс функций.

### Утверждение 3.7.

Если  $\frac{1}{\sigma}(a_i - X_0) \in \{jh, j = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $\frac{1}{\sigma}(b_i - X_0) \in \{jh, j = 0, \pm 1, \dots\}$ , причём  $a_1 < X_0 < b_1$ , то справедливо равенство  $\Psi(\bar{W}_{\tau_N}, \underline{W}_{\tau_N}) = \Psi(\bar{U}_{\tau_N}, \underline{U}_{\tau_N})$ .

Поскольку доказательство данного утверждения совпадает с доказательством предыдущего утверждения, то мы считаем возможным опустить его.

Если  $\Psi(x, y) = I_{\{(x \leq b) \wedge (y \geq a)\}}$ , то математическое ожидание  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$  – вероятность невыхода случайного процесса из полосы  $\Pi = \{(x, t): a \leq x \leq b, t \leq T\}$ . Опишем еще один метод решения данных задач с использованием кусочно-линейной аппроксимации решения. В этом методе

используется то, что кусочно-линейная аппроксимация является конкатенацией процессов Леви.

### 3.7. Разбиение Карра и факторизация Винера-Хопфа.

Для решения дифференциального уравнения  $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma dW_t$  с начальным значением  $X_0$  необходимо вычислить математическое ожидание  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T, X_T)$ . Как и выше, применим преобразование Гирсанова  $Z_t = \exp(Y_t)$ , связанное с решением дифференциального уравнения  $dY_t = \varphi(W_t)dt + \psi(W_t)dW_t$ ,  $W$  – стандартный винеровский процесс, и нулевым начальным значением. Далее рассмотрим случайное разбиение Карра [86]:  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$ , где случайные величины  $\nu_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  – независимые и одинаково распределённые случайные величины, с показательным законом распределения, плотность которого  $p_\nu(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ ,  $x \geq 0$ . Пусть число точек разбиения равно  $N$ , и уравнение рассматривается на интервале  $[0, T]$ .

Математическое ожидание  $E\tau_N = \frac{N}{\lambda}$ ; из равенства  $E\tau_N = T$  находим  $\lambda = \frac{N}{T}$ .

Далее воспользуемся равенством, связанным с заменой меры:  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T, X_T) = E^* Z_T \Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T, X_T) \approx E^* Z_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}, \underline{X}_{\tau_n}, X_{\tau_n})$ . В новой мере  $\bar{X}_{\tau_n} = \sigma \bar{W}_{\tau_n} + X_0$ ,  $\underline{X}_{\tau_n} = \sigma \underline{W}_{\tau_n} + X_0$ ,  $X_{\tau_n} = \sigma W_{\tau_n} + X_0$ . Далее для вычисления  $\bar{X}_{\tau_n}$  и  $\underline{X}_{\tau_n}$  применяются рекуррентные формулы:

$$\bar{W}_{\tau_n} = \max \left\{ \bar{W}_{\tau_{n-1}}, W_{\tau_{n-1}} + \max_{\tau_{n-1} \leq t \leq \tau_n} (W_t - W_{\tau_{n-1}}) \right\}^d = \max \left\{ \bar{W}_{\tau_{n-1}}, W_{\tau_{n-1}} + \xi_n^1 \right\}, \quad (3.22)$$

$$\underline{W}_{\tau_n} = \min \left\{ \underline{W}_{\tau_{n-1}}, W_{\tau_{n-1}} + \min_{\tau_{n-1} \leq t \leq \tau_n} (W_t - W_{\tau_{n-1}}) \right\}^d = \min \left\{ \underline{W}_{\tau_{n-1}}, W_{\tau_{n-1}} - \xi_n^2 \right\},$$

$$W_{\tau_n} = W_{\tau_{n-1}} + (\xi_n^1 - \xi_n^2).$$

В этих формулах использовано строго марковское свойство винеровского процесса и факторизация Винера-Хопфа [87,99], которая позволяет для винеровского процесса, как процесса Леви, записать равенство по распределению:  $W_\nu = \bar{W}_\nu + \underline{W}_\nu$ . В этой формуле случайная величина  $\nu$  распределена по показательному закону с интенсивностью  $\lambda$ ,

случайные величины  $\bar{W}_v, \underline{W}_v$  – независимые случайные величины, случайная величина  $\bar{W}_v$  распределена по показательному закону с интенсивностью  $\sqrt{2\lambda}$ , случайная величина  $\underline{W}_v$  также распределена по показательному закону с той же интенсивностью. Поэтому в формуле (3.22) независимые последовательности  $\xi^1$  и  $\xi^2$  состоят из независимых и одинаково распределённых элементов с общим показательным законом с интенсивностью  $\sqrt{2\lambda}$ .

Оценим погрешность вычисления. Будем предполагать, что для функций  $\varphi$  и  $\psi$  справедливы формулы Тейлора (3.11). Точное и приближённое решения уравнения имеют вид (3.12) и (3.13). К сожалению, центральная предельная теорема неприменима при оценке погрешности решения в данной ситуации, поскольку точки разбиения Карра не являются моментами остановки. Для погрешности решения справедливо неравенство:

$$E|\Delta_N| \leq \frac{M_1}{(k+1)!} E(\xi)^{k+1} T + \frac{M_2}{(m+1)!} \sqrt{E(\bar{\xi})^{2(m+1)} NT}. \quad (3.23)$$

В этой формуле случайные величины  $\xi, \bar{\xi}$  – независимые показательные случайные величины с одинаковыми интенсивностями  $\sqrt{2\lambda}$ . Для показательного закона распределения с интенсивностью  $\lambda$  момент  $E\xi^n = \frac{(n)!}{(\sqrt{2\lambda})^n}$ . Используем эту формулу, формулу (3.23) и равенство  $\lambda = \frac{N}{T}$ ,

в результате получим оценку:

$$E|\Delta_N| \leq \frac{M_1(\sqrt{T})^{k+1}}{\sqrt{2}^{k+1}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{k+1}{2}} T + \frac{M_2(\sqrt{T})^{m+2} \sqrt{(2m+2)!}}{(m+1)! \sqrt{2}^{m+1}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m}{2}}. \quad (3.24)$$

Пусть в этой формуле  $m = k + 1$ , тогда  $E|\Delta_N| \leq A(k, T) \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{k+1}{2}}$ . Для  $k = 0$

вычисления выглядят следующим образом:

$$\bar{Y}_{\tau_n} = \bar{Y}_{\tau_{n-1}} + \varphi(W_{\tau_{n-1}}) \nu_n + \psi(W_{\tau_{n-1}}) (\xi_n^1 - \xi_n^2) + \frac{1}{2} \psi'(W_{\tau_{n-1}}) ((\xi_n^1 - \xi_n^2)^2 - \nu_n).$$

Далее для вычисления математического ожидания применяется метод Монте-Карло.

**Параболическое уравнение.** Еще один способ решения задачи вычисления математического ожидания  $Ef(X_T)I_{\{\bar{X}_T \leq b\} \wedge \{X_T \geq a\}}$  связан с решением краевой задачи для параболического уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \mu(x) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0, \\ V(t, b) = V(t, a) &= 0, 0 \leq t \leq T, \\ V(T, x) &= f(x), a \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Если  $V^*(t, x)$  – решение уравнения, то искомое математическое ожидание  $Ef(X_T)I_{\{\bar{X}_T \leq b\} \wedge \{X_T \geq a\}} = V^*(0, X_0)$  (формула Фейнмана-Каца).

В параграфе 3.13 приведены результаты сравнительных вычислительных экспериментов для линейной модели с постоянной волатильностью (процесс Орнштейна-Уленбека) и нелинейной модели с непостоянной волатильностью (процесс квадратного корня). Для каждой модели при разных значениях параметров применяются три различных вычислительных метода.

### 3.8. Кусочно-постоянный семимартингал $W_t^h$ .

Используя случайную двумерную последовательность  $(\delta_i, \tau_i)$  (см. параграф (3.1)), определим случайный процесс:

$$W_{\tau_i} = W_{\tau_{i-1}} + h\delta_i, W_t^h = W_{\tau_{i-1}}, \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, i = 1, 2, \dots, \tau_0 = 0. \quad (3.26)$$

Траектории этого процесса полунепрерывны справа и имеют предел слева (CADLAG), поэтому следует дополнить  $\Omega$  и фильтрацию такими траекториями.

Очевидны равенства  $W_{\tau_n}(\omega) = h \sum_{j=1}^n \delta_j = h(2M_n - n), n = 0, 1, 2, \dots$ . В этой формуле случайная величина  $M_n$  распределена по закону Бернулли:

$$P(M_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \text{ Использование центральной предельной теоремы [98]}$$

позволяет при большом  $n$  использовать приближённое равенство

$P(W_{\tau_n}^h \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x}{h\sqrt{n}}\right)$ . Если рассмотреть серию с  $h_n = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$ , то приближённое

равенство для серии будет выглядеть следующим образом:

$P(W_{\tau_n}^h \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ . Является справедливым следующее важное

утверждение.

**Утверждение 3.8. Траекторное свойство.** Для траекторий процессов  $W_t(\omega)$  и  $W_t^h(\omega)$  неравенство  $\sup_t |W_t(\omega) - W_t^h(\omega)| < h$  выполняется с вероятностью единица.

Для доказательства используем равенство  $\sup_t |W_t(\omega) - W_t^h(\omega)| = \sup_i \sup_{\tau_{i-1}(\omega) \leq t \leq \tau_i(\omega)} |W_t(\omega) - W_t^h(\omega)|$ .

Далее на любом интервале  $[\tau_{i-1}(\omega), \tau_i(\omega)]$  справедливо неравенство:  $|W_t(\omega) - W_t^h(\omega)| = |W_t(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) + W_{\tau_{i-1}}(\omega) - W_t^h(\omega)| \leq |W_t(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega)| + |W_{\tau_{i-1}}(\omega) - W_t^h(\omega)| \leq 2h$ , из которого следует доказательство утверждения.

**Утверждение 3.9.** Процесс  $W_t^h$  – стохастически непрерывный процесс.

Рассмотрим случайное событие  $\{W_{t_1}^h - W_{t_2}^h \leq \varepsilon\}$ , причём  $\varepsilon < h$ . Это случайное событие эквивалентно случайному событию:

$A(t_1, t_2) = \{\omega : \exists i(\tau_i(\omega) < t_1 < t_2 < \tau_{i+1}(\omega))\}$ . Очевидно, что вероятность  $P(\tau_i < \tau_{i+1}) = 1$  для всех  $i$ . Установим, что для каждого конечного  $t_1$  и

$i^* \tau_{i^*} < t_1 < \tau_{i^*+1}$ . Если это не выполняется, то ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j < t_1$ , и, следовательно,

сходится, что противоречит бесконечности математического ожидания:

$$E \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j = \infty.$$

**Утверждение 3.10.** Процесс  $W_t^h$  является мартингалом, ограниченном на любом компакте.

**1.Ограниченность.** Для любого  $t < \infty$  рассмотрим равенство:

$$W_t^h = \sum_{s \leq t} \Delta W_s^h = h \sum_{i=1}^{N_t} \delta_i, \text{ в котором случайная величина } N_t = \max\{n : \tau_n \leq t\}.$$

Отсюда  $|W_t^h| \leq hN_t$ . Рассмотрим случайную величину  $N_t$ . Докажем, что  $P(N_t < \infty) = 1$ . Предположим противное:  $P(N_t < \infty) < 1$ . Отсюда математическое ожидание  $EN_t = \infty$ .

Далее воспользуемся неравенством  $\tau_N \leq t$ . Из этого неравенства следует неравенство:  $E\tau_N = h^2 EN_t \leq t$ . Отсюда следует неравенство:

$$EN_t \leq \frac{t}{h^2} < \infty. \text{ Возникшее противоречие доказывает равенство } P(N_t < \infty) = 1,$$

следовательно, процесс  $W_t^h$  ограничен на любом компакте.

**2.Мартингальность.** Мартингальность проверяется непосредственно.

1.Абсолютная интегрируемость:  $E|W_t^h| < \infty$  является следствием ограниченности.

2.Мартингальное равенство. Пусть  $t \geq s$ , тогда  $E(W_t^h - W_s^h / F_s) = hE\sum_{i=1}^{N_{s,t}} \delta_i$ ,  $N_{s,t}$  – число скачков на интервале  $(s, t]$  – ограниченная случайная величина, поэтому  $E(W_t^h - W_s^h / F_s) = hE\sum_{i=1}^{N_{s,t}} \delta_i = 0$ .

**Утверждение 3.11.** Процесс  $W^h$  – процесс с ограниченной вариацией.

Действительно,  $(\text{Var}W^h)_t \leq hN_t < \infty$ .

Определим квадратическую вариацию

$$[W^h]_t = (W_t^h)^2 - 2 \sum_{s \leq t} W_{s-} \Delta W_s = h^2 \left( \left( \sum_{i=1}^{N_t} \delta_i \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^{N_t} \delta_j \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) = h^2 \sum_{j=1}^{N_t} \delta_j^2 = h^2 N_t, \quad \text{и}$$

квадратическую характеристику  $\langle W^h \rangle_t = \sum_{s \leq t} E((\Delta W_s)^2 / F_{s-}) = h^2 N_t$ , здесь

$F_{s-} = \vee(F_r, r < s)$ . Отметим, что квадратическая вариация и квадратическая характеристика процесса  $W^h$  совпадают. Кроме этого, легко устанавливается следующий факт.

**Утверждение 3.12.** В  $L_2$  при  $h \rightarrow 0$  случайная величина  $h^2 N_t^h \rightarrow t, N_t^h = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ . Прежде всего, установим, что при  $h \rightarrow 0$  произведение  $h^2 E N_t^h \rightarrow t$ . Данный факт следует из неравенства:  $0 \leq t - h^2 E N_t^h \leq h^2$ .

Далее вычислим математическое ожидание  $E(t - \tau_{N_t^h})^2 \leq 2h^4$ . Отсюда следует, что  $E(t - \tau_{N_t^h})^2 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Далее

$$E(t - \tau_{N_t^h})^2 = E(t^2 - 2th^2 N_t^h + (h^2 N_t^h)^2) + h^4 E N_t^h = E(t - h^2 N_t^h)^2 + h^4 E N_t^h.$$

Объединив последнее с установленными ранее фактами, получаем доказательство утверждения.

Утверждения данного параграфа позволяют рассматривать процесс  $W_t^h$  как хорошее приближение винеровского процесса. В следующем параграфе мы покажем, что этот процесс можно рассматривать как самостоятельное средство моделирования.

### 3.9. Интеграл, процесс и формула Ито для $W_t^h$ .

Из утверждений (3.11) и (3.10) следует, что процесс  $W_t^h$  является семимартингалом [91,94]. То есть  $W^h = M^h + A^h$ , причём либо  $M^h = W^h, A^h = 0$ , либо  $M^h = 0, A^h = W^h$ , здесь  $M^h$  – локальный мартингал,  $A^h$  – процесс ограниченной вариации.

Эта факт предоставляет выбор при определении стохастического интеграла по процессу  $W_t^h$ . Далее остановимся на следующем определении стохастического интеграла.

**Определение.** Стохастический интеграл от прогрессивно измеримой функции  $f(t, \omega)$  по семимартингалу  $W^h$  определяется как конечная сумма:

$$I_t^h(f) = \sum_{s \leq t} f(s-) \Delta W_s^h = h \sum_{i=1}^{N_t} f(\tau_i -) \delta_i. \quad (3.27)$$

Достаточным условием существования интеграла является ограниченность подынтегральной функции. Интеграл (3.27) обладает всеми

свойствами интеграла по семимартингалу [91,94]. Математическое ожидание интеграла  $EI_t^h(f) = 0$ , дисперсия  $DI_t^h(f) = h^2 E \sum_{i=1}^{N_t} Ef^2(\tau_i -)$ . Данные равенства следуют из прогрессивной измеримости подынтегральной функции и независимости последовательностей  $\tau$  и  $\delta$ .

Далее рассмотрим процесс  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t^h$  или:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \sum_{s \leq t} \sigma_s \Delta W_s^h, X_t = X_{\tau_{i-1}} + \int_{\tau_{i-1}}^t \mu_s ds, \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, \quad (3.28)$$

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_{i-1}} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_s ds + h \sigma_{\tau_{i-1}} \delta_i.$$

Предполагается выполнение достаточных условий существования интегралов:  $P\left(\int_0^t |\mu_s| ds < \infty\right) = 1$ ,  $\sigma_s$  – ограниченная функция,  $\mu_s(\omega)$  и  $\sigma_s(\omega)$  – прогрессивно измеримые функции. Данный процесс естественно назвать процессом Ито. Известна формула Ито для семимартингалов [91,94], которая для процесса  $X_t$  имеет вид:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) \mu_s ds + \sum_{s \leq t} (f(X_{s-} + \Delta X_s) - f(X_{s-})) =$$

$$f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) \mu_s ds + h \sum_{i=1}^{N_t^h} f'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma_{\tau_{i-1}} \delta_i +$$

$$\sum_{i=1}^{N_t^h} (f(X_{\tau_{i-1}} + h \sigma_{\tau_{i-1}} \delta_i) - f(X_{\tau_{i-1}}) - f'(X_{\tau_{i-1}}) h \sigma_{\tau_{i-1}} \delta_i).$$

Таким образом, формула Ито имеет следующий вид:

$$f(X_s) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \mu_s ds + \int_0^t f'(X_s) dW_t^h + \sum_{i=1}^{N_t^h} (f(X_{\tau_{i-1}} + h \sigma_{\tau_{i-1}} \delta_i) - f(X_{\tau_{i-1}}) - f'(X_{\tau_{i-1}}) h \sigma_{\tau_{i-1}} \delta_i), \quad (3.29)$$

если  $f \in C^1$ . Обсудим асимптотическое поведение последнего слагаемого.

**Утверждение 3.13.** Если функция  $\sigma$  и третья производная функции  $f$  —ограничены, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N_i^h} (f(X_{\tau_i^-} + h\sigma_{\tau_i} \delta_i) - f(X_{\tau_i^-}) - f'(X_{\tau_i^-})h\sigma_{\tau_i} \delta_i) = \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s^-}) \sigma_s^2 ds.$$

Прежде всего, применим формулу Тейлора:

$$\sum_{i=1}^{N_i^h} (f(X_{\tau_i^-} + h\sigma_{\tau_i} \delta_i) - f(X_{\tau_i^-}) - f'(X_{\tau_i^-})h\sigma_{\tau_i} \delta_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 h^2 +$$

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_i^h} f'''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^3 h^3 \delta_i. \text{ Абсолютная величина второго слагаемого не превосходит}$$

$Ch^3 N_i^h$ , поэтому стремится к нулю в  $L_2$ . Первое слагаемое перепишем

$$\text{следующим образом: } \sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 h^2 = \sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 (h^2 - \nu_i) + \sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 \nu_i.$$

Математическое ожидание первого слагаемого  $E\left(\sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 (h^2 - \nu_i)\right) = 0$ ,

дисперсия первого слагаемого  $E\left(\sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 (h^2 - \nu_i)\right)^2 \leq Ch^4 EN_i^h$ . Таким

образом, первое слагаемое стремится к нулю в  $L_2$ . Сумма

$$\sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 \nu_i + f''(X_{\tau_{N_i^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_i^h}^-}^2 (t - \tau_{N_i^h})$$

является интегральной суммой со

случайным разбиением интервала  $[0, t]$ . Длины элементарных интервалов

стремятся к нулю в  $L_2$ , поэтому интегральная сумма стремится к интегралу

$$\int_0^t f''(X_{s^-}) \sigma_s^2 ds. \text{ Поскольку } f''(X_{\tau_{N_i^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_i^h}^-}^2 (t - \tau_{N_i^h}) \text{ стремится к нулю в } L_2, \text{ то сумма}$$

$\sum_{i=1}^{N_i^h} f''(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i}^2 \nu_i$  стремится к интегралу  $\int_0^t f''(X_{s^-}) \sigma_s^2 ds$ . Отсюда следует

доказательство утверждения.

Следующее утверждение касается третьего элемента формулы Ито (3.35).

**Утверждение 3.14.** Если выполняются условия:

$$1) |f'(x)| < m_1, \sigma(x) < m_2;$$

$$2) |f(x) - f(y)| \leq l_1 |x - y|, |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq l_2,$$

$$\text{то в } L_2 \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i} \delta_i = \int_0^t f'(X_{s^-}) \sigma_s dW_s.$$

Действительно,

$$h \sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i} \delta_i = \sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i} (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}}) + f'(X_{\tau_{N_t^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_t^h}} (W_t - W_{\tau_{N_t^h}}) - f'(X_{\tau_{N_t^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_t^h}} (W_t - W_{\tau_{N_t^h}}).$$

Сумма  $\sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma_{\tau_{i-1}} (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}}) + f'(X_{\tau_{N_t^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_t^h}} (W_t - W_{\tau_{N_t^h}})$  является интегральной

суммой для интеграла Ито  $\int_0^t f'(X_{s^-}) \sigma_s dW_s$ , поэтому при выполнении условий

утверждения

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma_{\tau_{i-1}} (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}}) + f'(X_{\tau_{N_t^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_t^h}} (W_t - W_{\tau_{N_t^h}}) \right) = \int_0^t f'(X_{s^-}) \sigma_s dW_s \text{ в } L_2.$$

Так как в  $L_2 \lim_{h \rightarrow 0} f'(X_{\tau_{N_t^h}^-}) \sigma_{\tau_{N_t^h}} (W_t - W_{\tau_{N_t^h}}) = 0$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma_{\tau_{i-1}} (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}}) = \int_0^t f'(X_{s^-}) \sigma_s dW_s.$$

Далее рассмотрим разность  $\Delta_h = \sum_{i=1}^{N_t^h} (f'(X_{\tau_i^-}) \sigma_{\tau_i} - f'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma_{\tau_{i-1}}) (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}})$ . При

выполнении условий утверждения справедлива оценка разности:  $|\Delta_h| \leq Kh \tau_{N_t^h}$ ,

здесь  $K$  – некоторая константа. Отсюда следует, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h = 0$  в  $L_2$ .

Поэтому,  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N_t} f'(X_{\tau_{i-1}}) \sigma_{\tau_{i-1}} (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}}) = \int_0^t f'(X_{s^-}) \sigma_s dW_s$  в  $L_2$ .

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.3.** При выполнении условий утверждений 3.13 и 3.14

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(X_t) =$$

$$\int_0^t \left( f'(X_{s^-}) \mu_s + \frac{1}{2} f''(X_{s^-}) \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t f'(X_{s^-}) \sigma_s dW_s \text{ в } L_2. \text{ То есть, в пределе}$$

получается классическая формула Ито.

После доказанных утверждений и теоремы выглядит естественным рассмотрение для процесса  $W_t^h$  стохастического дифференциального уравнения.

### 3.10. Стохастическое дифференциальное уравнение для $W_t^h$ .

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение, которое для процесса  $W_t^h$  будет иметь следующий вид:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_t^h. \quad (3.30)$$

Решение данного уравнения будем рассматривать как конкатенацию решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными начальными условиями:

$$X_t = X_{\tau_{i-1}} + \int_{\tau_{i-1}}^t \mu(X_s) ds, \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, X_{\tau_i} = X_{\tau_i^-} + \sigma(X_{\tau_i^-}) \delta_i h, \quad (3.31)$$

$$X_{\tau_0} = X_0, X_{\tau_i^-} = X_{\tau_{i-1}} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu(X_s) ds.$$

Условия единственности и существования решения данного уравнения определяются условиями существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [100].

**Модель Блэка-Шоулса для процесса  $W_t^h$ .** Модель Блэка-Шоулса представлена ниже в виде системы дифференциальных уравнений:

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t^h), \quad (3.32)$$

$$dB_t = B_t r dt.$$

Решение первого уравнения:

$$S_t = S_{\tau_{i-1}} \exp(\mu(t - \tau_{i-1})), \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, S_{\tau_i} = S_{\tau_{i-1}} \exp(\mu v_i) (1 + h \sigma \delta_i). \quad (3.33)$$

Решение второго уравнения:

$$B_t = B_0 \exp(rt). \quad (3.34)$$

Важным элементом модели является дисконтированная стоимость

$$\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_{\tau_{i-1}}}{B_{\tau_{i-1}}} \exp((\mu - r)(t - \tau_{i-1})), \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, \frac{S_{\tau_i}}{B_{\tau_i}} = \frac{S_{\tau_{i-1}}}{B_{\tau_{i-1}}} \exp((\mu - r)v_i) (1 + h \sigma \delta_i).$$

Отсюда, как и в модели Блэка-Шоулса, для мартингальной меры уравнение для рискованного актива будет иметь вид:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t^h). \quad (3.35)$$

**Справедливая цена финансового обязательства.** Рассмотрим финансовое марковское обязательство  $f(S_T)$ . Функция  $f(x) \geq 0$  и  $Ef(S_T) < \infty$ , что гарантирует существование условных математических ожиданий. Здесь и далее интегрирование происходит по мартингальной мере. Справедливая цена вычисляется следующим образом:  $C = \exp(-rT)Ef(S_T)$ . Далее применим метод Монте-Карло:

$$C \approx \frac{\exp(-rT)}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{2}\right)^{N_T^h(i)} \sum_{k=0}^{N_T^h(i)} C_{N_T^h(i)}^k f\left(S_0 \exp(r\tau_N(i))(1+\sigma h)^k (1-\sigma h)^{N_T^h(i)-k}\right) \quad (3.36)$$

Здесь  $N_T^h(i) = \max\{n : \tau_n \leq T\}$  для  $i$ -го случайного разбиения.

#### Две асимптотические формулы.

Зададим  $N$  и выберем  $h = \sqrt{\frac{T}{N}}$ , при этом выборе математическое ожидание  $E\tau_N = T$ , дисперсия  $D\tau_N = \frac{T^2}{N}$ . При достаточно большом  $N$  справедливая цена  $C \approx \exp(-rT)Ef(S_{\tau_N})$ . Следовательно,

$$C \approx \left(\frac{1}{2}\right)^N \exp(-rT) \sum_{k=0}^N C_N^k Ef\left(S_0 \exp(r\tau_N)(1+\sigma h)^k (1-\sigma h)^{N-k}\right). \text{ Поскольку } \tau_N = \sum_{i=1}^N v_i,$$

то есть сумма независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией, то при большом  $N$  можно воспользоваться центральной предельной теоремой. В результате:

$$C \approx \left(\frac{1}{2}\right)^N \exp(-rT) \frac{\sqrt{N}}{T\sqrt{2\pi}} \quad (3.37)$$

$$\sum_{k=0}^N C_N^k \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0 \exp(rx)(1+\sigma h)^k (1-\sigma h)^{N-k}\right) \exp\left(-\frac{N(x-T)^2}{2T^2}\right) dx.$$

Для нормального закона распределения предел

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-T)^2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-T) dx = f(T). \text{ Поэтому, при}$$

достаточно большом значении  $N$  может быть использована более простая приближённая формула:

$$C \approx \left(\frac{1}{2}\right)^N \exp(-rT) \sum_{k=0}^N C_N^k f(S_0 \exp(rT)(1 + \sigma h)^k (1 - \sigma h)^{N-k}). \quad (3.38)$$

### 3.11. Случайное блуждание с пропущенными слагаемыми.

Вернемся к уравнению (3.1), точнее, к его дискретному аналогу

$$\Delta X_n = \mu(X_{n-1})m + \sigma(X_{n-1})\Delta W_n, \quad (3.39)$$

который рассматривался в первой главе, и предложим еще один способ бинарной аппроксимации, а именно, модель случайного блуждания с пропущенными слагаемыми. В (3.39)  $m$  – шаг равномерного разбиения оси времени. Приращения  $\Delta W_n$  – независимые и одинаково распределённые случайные величины с общей дисперсией  $m$ . В первой главе рассматривалась бинарная аппроксимация следующего вида:

$$\Delta Y_n = \sigma\sqrt{m}\delta_n, \delta_n = \text{Sign}(X_n - Y_{n-1}). \quad (3.40)$$

В связи с рассматриваемой в этой главе моделью внесем изменение в формулу (3.41):

$$\Delta Y_n = \sigma\sqrt{m}\beta_n\delta_n, \beta_n = I_{\{|X_n - Y_{n-1}| \geq h_m\}}. \quad (3.41)$$

Параметр  $h_m = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{m}$ . Модель (3.41) обеспечивает более точное приближение по сравнению с (3.40). Действительно, пусть  $X_n - Y_{n-1} > 0$ , тогда

$$\delta_n = 1. \quad \text{Следовательно,} \quad |X_n - Y_n| = \begin{cases} |X_n - Y_{n-1} - \sigma\sqrt{m}|, & \beta_n = 1 \\ X_n - Y_{n-1}, & \beta_n = 0 \end{cases}. \quad \text{Рассмотрим}$$

неравенство  $|X_n - Y_{n-1} - \sigma\sqrt{m}| > X_n - Y_{n-1}$ . Отсюда следует неравенство

$$X_n - Y_{n-1} < \frac{1}{2}\sigma\sqrt{m}. \quad \text{Поэтому} \quad \beta_n = 0. \quad \text{Таким образом,}$$

$|X_n - Y_n| = \min\{|X_n - Y_{n-1} - \sigma\sqrt{m}|, |X_n - Y_{n-1}|\}$ . Аналогично рассматривается случай

$$X_n - Y_{n-1} < 0.$$

Опираясь на предыдущий раздел и (3.41), далее рассмотрим модель эволюции стоимости рискового актива:

$$S_n = S_{n-1} e^{rm} (1 + a\beta_n \delta_n) \text{ или} \quad (3.42)$$

$$S_n = S_0 e^{rnm} \prod_{i=1}^{\xi_n(\beta)} (1 + a\delta_i) = S_0 e^{rnm} (1 + a)^{\eta_n(\delta)} (1 - a)^{\xi_n(\beta) - \eta_n(\delta)},$$

$$\xi_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \beta_i, \eta_n(\delta) = \sum_{i=1}^{\xi_n(\beta)} \max\{\delta_i, 0\}, a = \sigma\sqrt{m}, n = 1, 2, \dots, N.$$

В данной модели случайная величина  $\xi_n(\beta)$  определяет число скачков на заданном временном интервале. Таким образом, цена финансового обязательства вычисляется как усреднение формулы Кокса-Росса-Рубинштейна по числу скачков:

$$C = \exp(-rNm) E_{\xi_N(\beta)} \left[ \frac{1}{2^{\xi_N(\beta)}} \sum_{i=0}^{\xi_N(\beta)} C_{\xi_N(\beta)}^i f(S_0 \exp(rNm) (1 + a)^i (1 - a)^{\xi_N(\beta) - i}) \right]. \quad (3.43)$$

Пусть случайная величина  $\xi_n(\beta)$  распределена по закону Бернулли. Для закона Бернулли справедливая цена финансового обязательства вычисляется как двойная сумма:

$$C = \exp(-rNm) \sum_{k=0}^N C_N^k \left(\frac{p}{2}\right)^k (1 - p)^{N-k} \sum_{i=0}^k C_k^i f(S_0 \exp(rNm) (1 + a)^i (1 - a)^{k-i}). \quad (3.44)$$

В (3.44)  $p$  – вероятность локального скачка. Нетрудно заметить, что формула (3.44) совпадает с формулой Кокса-Росса-Рубинштейна при вероятности локального скачка, равной единице.

Теперь предположим, что последовательность  $\beta$  является однородной марковской цепью с двумя состояниями и матрицей переходных вероятностей  $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ . Для вычисления по формуле (3.43) можно использовать метод Монте-Карло:

$$C = \frac{\exp(-rNm)}{M} \sum_{k=1}^M \left[ \frac{1}{2^{\xi_N(\beta^k)}} \sum_{i=0}^{\xi_N(\beta^k)} C_{\xi_N(\beta^k)}^i f(S_0 \exp(rNm) (1 + a)^i (1 - a)^{\xi_N(\beta^k) - i}) \right]. \quad (3.45)$$

Альтернативой методу Монте-Карло является метод, в котором при вычислении математического ожидания используется характеристическая функция [101]. Допустим, существует такое  $\rho > 0$ , что у функции  $\varphi(x)\exp(-\rho x)$  существует прямое и обратное преобразование Фурье. Пусть

$$\psi_\rho(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\exp(-\rho x)\exp(iyx)dx \quad - \text{ преобразование Фурье функции}$$

$$\varphi(x)\exp(-\rho x), \text{ тогда математическое ожидание } E\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\rho(y)\chi_\xi(-i\rho - y)dy.$$

В этой формуле  $\chi_\xi$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ .

$$\text{В нашем случае } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} C_{\lfloor x \rfloor}^i f(S_0 \exp(rNm)(1+a)^i(1-a)^{\lfloor x \rfloor - i}), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \text{ Параметр}$$

$\rho$  выбирается, исходя из свойств функции  $f$ . Например, для функции

линейного роста на положительной полуоси параметр  $\rho = 1$ . Заметим, что

линейный рост характерен для европейского опциона call.

Характеристическая функция данной случайной величины

$$\chi_\xi(y) = \sum_{\beta_1} p(\beta_1)\exp(iy\beta_1) \sum_{\beta_2} p(\beta_2 / \beta_1)\exp(iy\beta_2) \dots \sum_{\beta_N} p(\beta_N / \beta_{N-1})\exp(iy\beta_N).$$

$$\text{Обозначим через } v_k(\beta_{k-1}, y) = \sum_{\beta_k} p(\beta_k / \beta_{k-1})\exp(iy\beta_k) \dots \sum_{\beta_N} p(\beta_N / \beta_{N-1})\exp(iy\beta_N)$$

функцию Беллмана. Для функций Беллмана является справедливой теорема.

**Теорема 3.4.** Для функций Беллмана справедливо равенство:

$$v_k(\beta_{k-1}, y) = A_k(y) + B_k(y)\beta_{k-1}. \quad (3.46)$$

Теорема доказывается методом математической индукции. Для  $k = N$

$$v_N(\beta_{N-1}, y) = (p + \exp(iy)(1-p)) + (q-p)(1 - \exp(iy))\beta_{N-1}, \text{ то есть формула (3.46)}$$

справедлива для  $k = N$  при  $A_N(y) = p + \exp(iy)(1-p)$ ,

$B_N(y) = (q-p)(1 - \exp(iy))$  Пусть она справедлива для  $k = n$ . Определим

$$v_{n-1}(\beta_{n-2}, y) = \sum_{\beta_{n-1}} p(\beta_{n-1} / \beta_{n-2})\exp(iy\beta_{n-1})(A_n(y) + B_n(y)\beta_{n-1}) =$$

$$pA_n(y) + (1-p)\exp(iy)(A_n(y) + B_n(y)) + (q-p)(A_n(y) - \exp(iy)(A_n(y) + B_n(y)))\beta_{n-2},$$

поэтому формула (3.46) справедлива при

$$A_{n-1}(y) = pA_n(y) + (1-p)\exp(iy)(A_n(y) + B_n(y)),$$

$B_{n-1}(y) = (q-p)(A_n(y) - \exp(iy)(A_n(y) + B_n(y)))$ . Таким образом, теорема доказана.

Данная теорема позволяет вычислить характеристическую функцию:

$$\chi_\xi(y) = A_2(y)p(\beta_1 = 0) + (A_2(y) + B_2(y))\exp(iy)(1 - p(\beta_1 = 0))$$

и использовать её при вычислении математического ожидания.

### 3.12. Случайное разбиение пассажирами винеровского процесса со сносом.

Ниже мы рассмотрим две модели, которые порождаются двумерной случайной последовательностью  $\{(v_i, \delta_i)\}$ .

**Первая модель.** Определим последовательность моментов остановки:

$$\tau_0 = 0, \dots, \tau_i = \inf \{ \tau_{i-1} \leq t : |b(t - \tau_{i-1}) + (W_t - W_{\tau_{i-1}})| \geq a \}.$$

Строго марковское

свойство винеровского процесса позволяет записать следующее равенство

для данных моментов остановки:  $\tau_i = \tau_{i-1} + v_i, v_i = \inf \{ t : |bt + W_t| \geq a \}$ . При этом

случайные величины  $v_i$  являются независимыми. Уравнение для плотности

имеет вид [95]:

$$p_v(t) = 2\text{ch}(a|b|) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{a(2k+1)}{t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[ \frac{a^2(2k+1)^2}{t} + b^2 t \right]\right). \quad (3.47)$$

Справедливо неравенство:  $p_v(t) \leq 2\text{ch}(a|b|) \frac{a}{t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[ \frac{a^2}{t} + b^2 t \right]\right)$ .

В связи с последним неравенством можно рассмотреть обратное гауссовское

распределение с плотностью:  $p_{\text{ig}}(t) = \frac{a \exp(a|b|)}{t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[ \frac{a^2}{t} + b^2 t \right]\right)$ . Таким

образом,  $p_v(t) \leq \frac{\exp(a|b|) + \exp(-a|b|)}{\exp(a|b|)} p_{\text{ig}}(t)$ . Следовательно, обратно-

гауссовское распределение можно использовать для генерации случайных величин  $v$  методом, описанным ранее.

Обратимся к случайной величине  $\delta$  и рассмотрим два момента остановки:  $\nu_a = \inf(t : bt + W_t \geq a)$   $\nu_{-a} = \inf(t : bt + W_t \leq -a)$ . Случайная

величина  $\delta = \begin{cases} 1, \nu_a < \nu_{-a} \\ -1, \nu_a > \nu_{-a} \end{cases}$ . Определим вероятность  $P(\delta = 1) = P(\nu_a < \nu_{-a})$ . Для

этого рассмотрим дифференциальное уравнение:  $bV' + V'' = 0$ ,  $x \in [-a, a]$  с условиями  $V(a) = 1, V(-a) = 0$  и искомая вероятность  $P(\delta = 1) = V(0)$  (см.,

например, [102]). Решение уравнения  $V(x) = \frac{\exp(ba) - \exp(-bx)}{\exp(ba) - \exp(-ba)}$ .

Следовательно, вероятность  $P(\delta = 1) = \frac{\exp(ba) - 1}{\exp(ba) - \exp(-ba)}$ . Случайная

величина  $\delta$  не зависит от случайной величины  $\nu$ .

**Вторая модель.** Рассмотрим в качестве момента остановки случайную величину  $\nu = \min\{\nu_a, \nu_{-a}\} = \begin{cases} \nu_a, \delta = 1 \\ \nu_{-a}, \delta = -1 \end{cases}$ , которая зависит от случайной

величины  $\delta$ .

Функция распределения момента остановки вычисляется с помощью формулы полной вероятности:  $F_\nu(t) = F_{\nu_a}(t)P(\delta = 1) + F_{\nu_{-a}}(t)P(\delta = -1)$ .

Плотность  $p_\nu(t) = p_{\nu_a}(t)P(\delta = 1) + p_{\nu_{-a}}(t)P(\delta = -1)$ . Для плотностей справедливы формулы:

$$p_{\nu_a}(t) = \frac{a}{t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a - |bt|)^2}{2t}\right), p_{\nu_{-a}}(t) = \frac{a}{t^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a + |bt|)^2}{2t}\right) \quad (3.48)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$ . Воспользуемся тем, что функции  $\mu(x)$  и

$\sigma(x)$  удовлетворяют условию Липшица и могут с любой степенью точности  $\varepsilon$  в равномерной метрике быть приближены кусочно-постоянными функциями:

$$\bar{\mu}(x) = \sum_i \mu(x_{i-1}) I_{[x_{i-1}, x_i)}(x), \bar{\sigma}(x) = \sum_i \sigma(x_{i-1}) I_{[x_{i-1}, x_i)}(x). \quad (3.49)$$

Здесь  $\{x_i\}$  – равномерное разбиение вещественной оси с шагом разбиения  $h = \min\left\{\frac{\varepsilon}{L_\mu}, \frac{\varepsilon}{L_\sigma}\right\}$ ,  $L_\mu, L_\sigma$  – константы Липшица. Далее приведём бинарную приближённую формулу:

$$Y_{\tau_i} = Y_{\tau_{i-1}} + h\delta_i, Y_{\tau_0} = X_0, \tau_i = \tau_{i-1} + \nu_i, \tau_0 = 0. \quad (3.50)$$

Последовательность  $\{(\nu_i, \delta_i)\}$  порождается либо моделью 1, либо моделью 2, при этом параметры законов распределений вычисляются следующим образом  $a_i = \frac{h}{\sigma(Y_{\tau_{i-1}})}, b_i = \frac{\mu(Y_{\tau_{i-1}})}{\sigma(Y_{\tau_{i-1}})}$ .

### Модель с дивидендами.

В этой модели рассматривается случайное разбиение временного интервала. В модели рассматривается ситуация, когда изменение капитала осуществляется не только за счет изменений в рыночных стоимостях активов, но и с учётом дивидендов. Дисконтированный капитал портфеля в этой модели описывается уравнением:  $d\left(\frac{X_t}{B_t}\right) = \gamma_t \left( d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + d\left(\frac{C_t}{B_t}\right) \right), t \in [0, T]$ .

Процесс  $C$  описывает начисление дивидендов, поэтому естественно предположить, что он зависит от стоимости актива:  $d\left(\frac{C_t}{B_t}\right) = \frac{g(S_t)}{B_t} dt$ .

В результате

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \\ dB_t &= B_t r dt, \\ d\left(\frac{X_t}{B_t}\right) &= \gamma_t \left( \left( \frac{S_t}{B_t}(\mu - r) + \frac{g(S_t)}{B_t} \right) dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Для вычисления капитала оптимального самофинансируемого портфеля необходимо перейти к эквивалентной мере, относительно которой дисконтированный капитал будет мартингалом. Это эквивалентно замене уравнений (3.51) на уравнения:

$$\begin{aligned}
dS_t &= S_t \left( \left( r - \frac{g(S_t)}{S_t} \right) dt + \sigma dW_t \right), \\
dB_t &= B_t r dt, \\
d\left( \frac{X_t}{B_t} \right) &= \gamma_t \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Приближённое решение первого уравнения можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
S_{\tau_{N_T}} &= S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T - \sum_{i=1}^{N_T} \frac{g(S_{\tau_{i-1}})}{S_{\tau_{i-1}}} v_i - \frac{g(S_{\tau_{N_T}})}{S_{\tau_{N_T}}} (T - \tau_{N_T}) + \sigma \sqrt{T} \xi \right), \\
N_T &= \max \{ n : \tau_n \leq T \}, S_{\tau_i} = S_{\tau_{i-1}} (1 + \delta_i h), S_{\tau_0} = S_0, \xi \in N(0,1).
\end{aligned}$$

Входящие в данную формулу случайные величины  $(v, \delta)$  могут быть получены либо с помощью первой модели, либо с помощью второй.

Необходимые для этого функции  $\mu(x) = r - \frac{g(x)}{x}, \sigma(x) = \sigma$ . Для данной

модели справедливая цена финансового обязательства

$$C = \exp(-rT) Ef \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T - \sum_{i=1}^{N_T} \frac{g(S_{\tau_{i-1}})}{S_{\tau_{i-1}}} v_i - \frac{g(S_{\tau_{N_T}})}{S_{\tau_{N_T}}} (T - \tau_{N_T}) + \sigma \sqrt{T} \xi \right) \right).$$

### 3.13. Примеры.

#### Пример 3.1. Процесс Орнштейна-Уленбека.

Рассматривается задача вычисления математического ожидания  $EI_{\{\bar{X}_T \leq a\} \wedge \{\underline{X}_T \geq -a\}}$  для процесса Орнштейна-Уленбека, удовлетворяющего дифференциальному уравнению:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \text{ на интервале } [0, T], \tag{3.53}$$

с начальным значением  $X_0 = 0$ .

Для первого и второго методов необходимо вычислить преобразования Гирсанова, найдя приближённое решение дифференциального уравнения

$$dY_t = -\frac{\alpha^2}{2} W_t^2 dt - \alpha W_t dW_t.$$

Для бинарной аппроксимации применим вычислительную схему порядка  $m = n = 1$ . В результате получим рекуррентные уравнения:

$$W_0 = Y_0 = 0, \quad (3.54)$$

$$W_{\tau_i} = W_{\tau_{i-1}} + h\delta_i, Y_{\tau_i} = Y_{\tau_{i-1}} - \frac{\alpha}{2}(W_{\tau_i}^2 - W_{\tau_{i-1}}^2 - v_i) - \frac{\alpha^2 W_{\tau_{i-1}} W_{\tau_i} v_i}{2},$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Для второго метода с преобразованием Винера-Хопфа применим вычислительную схему порядка  $m=0, n=1$ . В результате получим рекуррентные уравнения:

$$W_0 = Y_0 = 0, \quad (3.55)$$

$$W_{\tau_i} = W_{\tau_{i-1}} + \xi_1^i - \xi_2^i, Y_{\tau_i} = Y_{\tau_{i-1}} - \frac{\alpha}{2}(W_{\tau_i}^2 - W_{\tau_{i-1}}^2 - v_i) - \frac{\alpha^2 W_{\tau_{i-1}}^2 v_i}{2},$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Третий способ связан с численным решением дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (3.56)$$

с краевыми условиями:

$$V(t, a) = V(t, -a) = 0, 0 \leq t \leq T,$$

$$V(T, x) = 1, -a \leq x \leq a.$$

Результаты расчётов приведены на рисунке 3.2. Значения параметров  $a = 0.1, \sigma = 0.1, T = 1, N = 100$ .

Сплошной линией изображён график, построенный с помощью решения краевой задачи; пунктирной линией изображён график, полученный с помощью преобразования Винера-Хопфа; точечной линией изображён график, полученный с помощью бинарной аппроксимации.

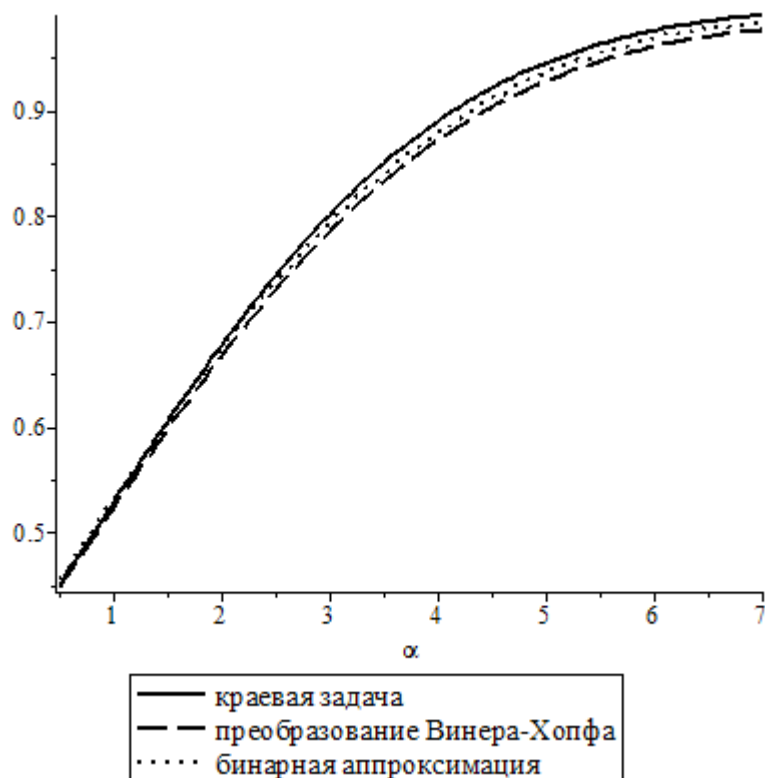


Рисунок 3.2. Вероятность невыхода процесса Орнштейна Уленбека из ПОЛОСЫ.

### Пример 3.2. Процесс квадратного корня.

Рассматривается задача вычисления вероятности того, что волатильность, удовлетворяющая уравнению

$$dX_t = \alpha(\sigma_0^2 - X_t)dt + \beta\sqrt{X_t}dW_t, X_0 = \sigma_0^2, \quad (3.57)$$

на интервале  $[0, T]$  не отклонится от начального значения  $\sigma_0^2$  на величину, не превосходящую  $\gamma$ . Иными словами, рассматривается задача вычисления математического ожидания  $EI_{\{|X_T - \sigma_0^2| \leq \gamma\}}$ . Предполагается, что  $\sigma_0^2 - \gamma > 0$ .

Отметим, что данная задача связана с задачами, которые изучались в первой главе. Напомним, что неравенство  $2\alpha\sigma_0^2 > \beta^2$  (условие Феллера) гарантирует строгую положительность процесса  $X_t$ . Применение метода бинарной аппроксимации с разбиением интервала моментами остановки и метода с разложением Винера-Хопфа и разбиением Карра требует некоторых предварительных манипуляций, связанных с непостоянством волатильности. Итак, нам необходимо сделать замену переменной  $U_t = f(X_t)$ . Как было

показано ранее, функция  $f$  должна удовлетворять уравнению  $\sigma f'(x)\sqrt{x} = 1$ .

Отсюда  $f(x) = \frac{2}{\sigma}\sqrt{x}$ . Таким образом, для  $U_t = \frac{2}{\sigma}\sqrt{X_t}$  справедливо уравнение

$$dU_t = \frac{1}{\sigma U_t} \left( \alpha \left( \frac{\sigma^2 U_t^2}{4} - \sigma_0^2 \right) - \frac{\sigma}{4U_t} \right) dt + dW_t, U_0 = \frac{2\sigma_0}{\sigma},$$

для решения которого требуется вычислить математическое ожидание

$$EI_{\{|x_T - \sigma_0^2| \leq \gamma\}} = EI_{\{a \leq U_T \leq b\}}, a = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\sigma_0^2 - \gamma}, b = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\sigma_0^2 + \gamma}.$$

Математическое ожидание  $EI_{\{|x_T - \sigma_0^2| \leq \gamma\}}$  может быть вычислено

в результате решения краевой задачи:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(x) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (3.58)$$

$$V(t, \sigma_0^2 + \gamma) = V(t, \sigma_0^2 - \gamma) = 0, 0 \leq t \leq T,$$

$$V(T, x) = 1, -a \leq x \leq b.$$

Искомое математическое ожидание  $EI_{\{|x_T - \sigma_0^2| \leq \gamma\}} = V(0,0)$ . Результаты расчётов приведены на рисунке 3.3. Значения параметров  $\gamma = 0.36, \sigma_0 = 0.7, \beta = 0.7, T = 1, N = 100$ .

Сплошной линией изображён график, построенный с помощью решения краевой задачи; пунктирной линией изображён график, полученный с помощью преобразования Винера-Хопфа; точечной линией изображён график, полученный с помощью бинарной аппроксимации.

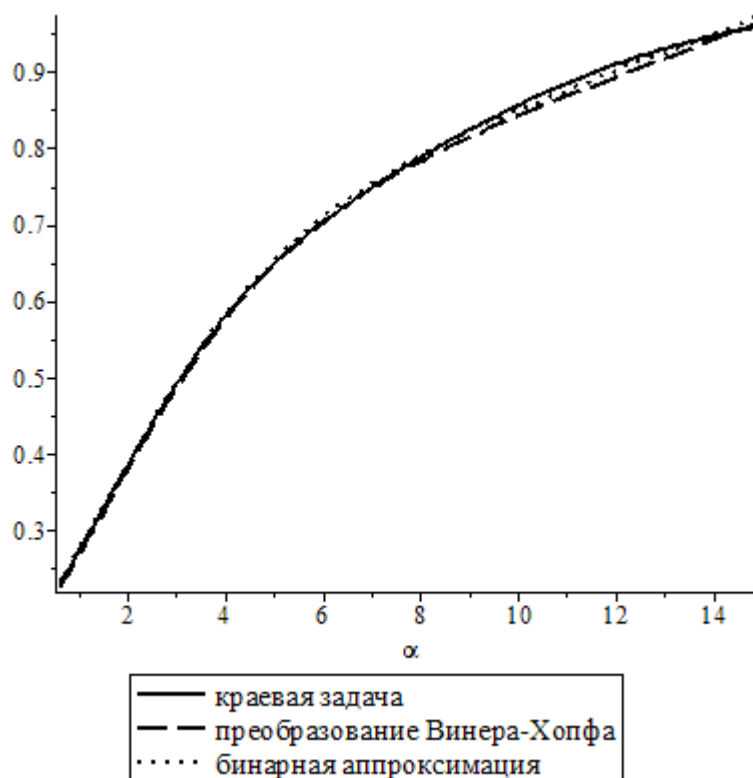


Рисунок 3.3. Вероятность невыхода процесса квадратного корня из полосы.

**Пример 3.3. Модель Блэка-Шоулса для процесса  $W_t^h$ .**

Рассматривается задача вычисления справедливой цены для семимартингальной модели Блэка-Шоулса с помощью метода Монте-Карло. Параметры модели  $S_0 = K = 5, r = 0.1, \sigma = 0.15, T = 1$ . Количество экспериментов метода Монте-Карло  $M = 50$ .

В таблице 3.1 и на рисунке 3.4 приведена зависимость справедливой цены  $C$  от параметра  $N$ . Из таблицы 3.1 и из рисунка 3.4 видно, что при увеличении параметра  $N$  справедливая цена  $C$  стремится к асимптотическому значению, равному 0.5920.

Таблица 3.1. Зависимость  $C$  от  $N$ .

$N$	$C$
5	0.6622
10	0.6215
15	0.6166
20	0.6031
25	0.5989
30	0.5941
35	0.5933

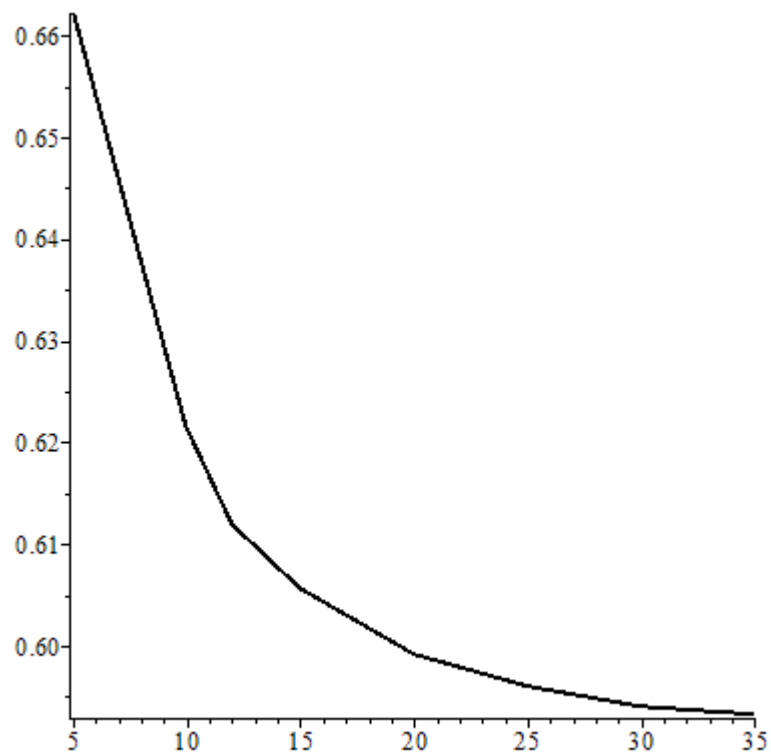


Рисунок 3.4. Зависимость  $C$  от  $N$ .

**Пример 3.4. Модель случайного блуждания с пропущенными слагаемыми.**

Рассмотрим задачу вычисления справедливой цены в модели случайного блуждания с пропущенными слагаемыми. Параметры модели:  $S_0 = 5, r = 0.1, \sigma = 0.25, T = 1$ . Число разбиений временного отрезка  $[0, T]$   $N = 100$ ; количество экспериментов метода Монте-Карло  $M = 1000$ .

Пусть последовательность  $\beta$ , определяющая число скачков на заданном временном интервале, является однородной марковской цепью с двумя состояниями и матрицей переходных вероятностей  $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ , где  $p = 0.1, q = 0.9, P(\beta_1 = 1) = 0.5$ . В таблице 3.2 приведена зависимость справедливой цены европейского опциона-колл  $C$  от контрактной цены  $K$ .

Таблица 3.2. Зависимость  $C$  от  $K$ .

$K$	$C$ (аналитическая формула)	$C$ (метод Монте-Карло)
1	4.0019	4.0951
2	3.1177	3.1903
3	2.2854	2.2854
4	1.3917	1.3919
5	0.6309	0.6310

**Пример 3.5. Модель Блэка-Шоулса с дивидендами.**

Рассматривается задача вычисления справедливой цены европейского опциона-колл для модели с дивидендами  $g(x) = \Delta x^\alpha$ . В таблице 3.3 приведена зависимость справедливой цены от параметра  $\alpha$ . Параметры модели:  $\sigma = 0.15, r = 0.2, t = 0, T = 1, S_0 = 5, K = 5, h = 0.1, \Delta = 0.1, \alpha \in [0,1]$  с шагом 0.05. Количество экспериментов метода Монте-Карло  $M = 200$ . Рассматриваются две модели случайного разбиения пассажирами винеровского процесса со сносом. На рисунке 3.5 изображены графики зависимости справедливой цены европейского опциона колл от параметра  $\alpha$  для двух моделей случайного разбиения пассажирами винеровского процесса со сносом. Сплошная линия – первая модель, точечная линия – вторая модель. Из таблицы 3.3 и рисунка 3.5 можно сделать вывод о том, что чем больше параметр  $\alpha$ , тем больше дивиденды и, следовательно, меньше справедливая цена финансового обязательства.

Таблица 3.3. Зависимость справедливой цены европейского опциона колл от параметра  $\alpha$ .

$\alpha$	$C$ (первая модель)	$C$ (вторая модель)
0	0.8480	0.8465
0.05	0.8420	0.8392
0.1	0.8343	0.8318
0.15	0.8237	0.8227
0.2	0.8159	0.8158
0.25	0.8047	0.8045
0.3	0.7953	0.7920
0.35	0.7840	0.7829
0.4	0.7694	0.7680
0.45	0.7566	0.7561
0.5	0.7406	0.7395
0.55	0.7257	0.7236
0.6	0.7070	0.7120
0.65	0.6947	0.6889
0.7	0.6703	0.6745
0.75	0.6533	0.6530
0.8	0.6307	0.6300
0.85	0.6043	0.6058
0.9	0.5823	0.5819
0.95	0.5558	0.5556
1	0.5279	0.5279

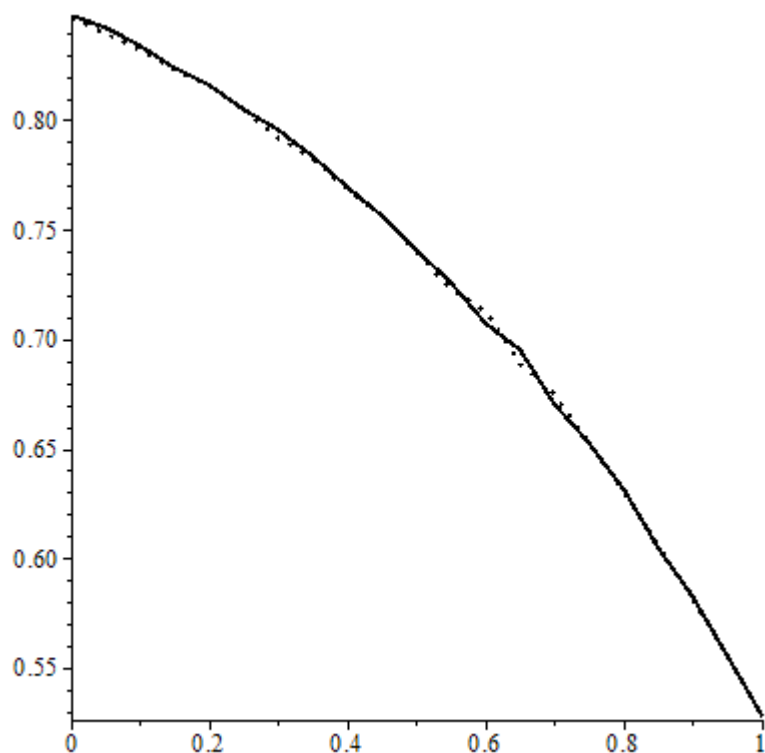


Рисунок 3.5. Зависимость справедливой цены европейского опциона колл от параметра  $\alpha$ .

Для случая  $\alpha = 1$  в [1] получена аналитическая формула для расчёта справедливой цены европейского опциона-колл для модели Блэка-Шоулса с дивидендами:

$$C = S_0 \exp(-\Delta T) \Phi(d_+) - K \exp(-rT) \Phi(d_-),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \Delta \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Из этой формулы значение  $C = 0.5279$ , что совпадает со значениями справедливой цены, приведёнными в таблице 3.3 и на рисунке 3.5 для случая  $\alpha = 1$ .

На рисунке 3.6 представлены эмпирическая и реальная плотности распределения случайной величины  $v$  для случая первой модели, которая порождается двумерной случайной последовательностью  $\{(v_i, \delta_i)\}$ . Эмпирическая плотность – сплошная линия, реальная плотность – точечная линия. Параметры, участвующие в (3.47),  $a = 0.66, b = 0.72$ .

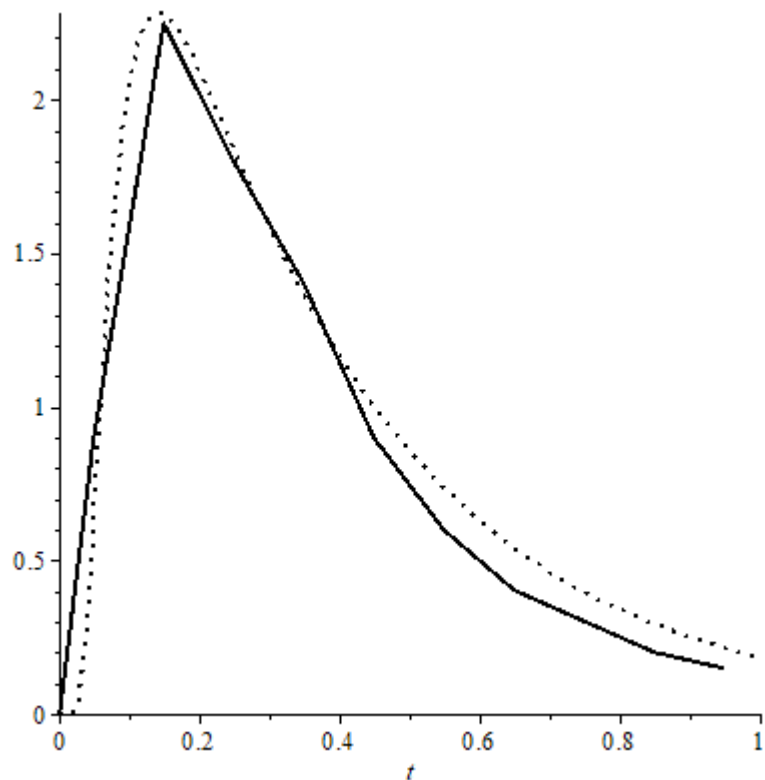


Рисунок 3.6. Эмпирическая и реальная плотности распределения случайной величины  $v$ .

Из рисунка 3.6 можно сделать вывод о хорошем качестве генератора acceptance-rejection sampling algorithm.

На рисунке 3.7 представлены плотности распределения случайных величин  $v_a, v_{-a}$  для случая второй модели, которая порождается двумерной случайной последовательностью  $\{(v_i, \delta_i)\}$ . Плотность распределения случайной величины  $v_a$  – сплошная линия, плотность распределения случайной величины  $v_{-a}$  – пунктирная линия. Параметры  $a = 0.66, b = 0.72$ .

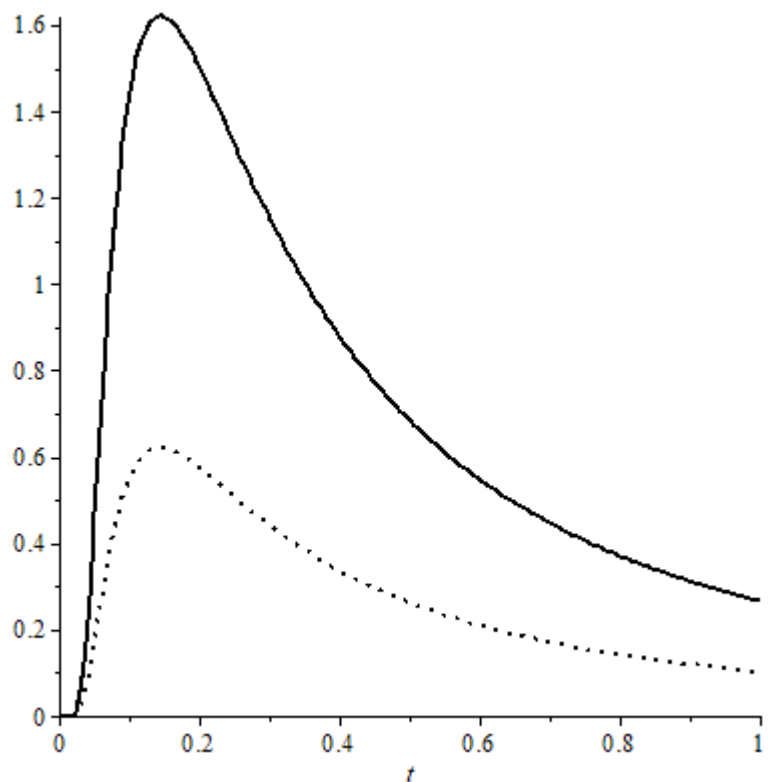


Рисунок 3.7. Плотности распределения случайных величин  $v_a, v_{-a}$ .

Заметим, что, согласно [95],  $P(v_{-a} < \infty) = \exp(-2ab)$ , что следует учесть при генерации случайных величин  $v_{-a}$ .

### Заключение к третьей главе.

В главе получены следующие основные результаты.

В области математического моделирования.

Предложена новая модель эволюции стоимости рискового актива, в которой используется новый случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями и дискретным вмешательством случая (модель Кокса-Росса-Рубинштейна со случайным числом слагаемых).

В области численных методов.

Предложен и теоретически обоснован новый метод вычисления математического ожидания для ограниченной функции, зависящей от траектории супремумного и инфимумного процессов. Предлагаемый метод базируется на преобразовании Гирсанова, случайном разбиении и на стандартных численных методах решения обыкновенного дифференциального уравнения, адаптированных для стохастического случая. Главный результат заключается в том, что найден доверительный интервал для оценки погрешности.

В области комплексов программ.

Методы реализованы в среде Maple. Были проведены многочисленные сравнительные вычислительные эксперименты, которые завершились успешно.

В третьей главе диссертации проведено исследование кусочно-постоянного семимартингала  $W^h$  над порождённым винеровским процессом естественным стохастическим базисом. Случайные моменты скачков семимартингала являются пассажами абсолютной величины винеровского процесса. Данный случайный процесс является альтернативным средством по отношению к процессу случайного блуждания с радамахеровским шагом как средство аппроксимации винеровского процесса. Случайное блуждание, как известно, не обеспечивает траекторной аппроксимации винеровского процесса. Для траекторной аппроксимации случайным блужданием с радамахеровским шагом достаточным условием является липшицевость

траекторий. Траектории винеровского процесса, к сожалению, данным свойствам не обладают. Процесс  $W^h$  позволяет аппроксимировать траектории винеровского процесса на любом компакте с любой точностью в равномерной метрике. Детальное изучение свойств процесса позволило использовать этот процесс вместо винеровского процесса при определении процессов Ито, что позволило использовать траекторный интеграл Лебега-Стилтьеса вместо интеграла Ито. Это позволило, например, упростить ограничения, которые накладываются на волатильность для существования процесса Ито. Еще больший эффект достигнут в стохастических дифференциальных уравнениях. По сути, задача свелась к серии задач Коши со случайными начальными условиями. Далее возник численный метод, названный «бинарная аппроксимация со случайным разбиением» с гарантированной погрешностью, который был успешно применён в двух важных задачах: вычисление вероятности невыхода случайного процесса из полосы и гомеостаз. Метод эффективен для уравнений с постоянной волатильностью, либо сводящихся к ним заменой переменных. Также, как следствие, возникла серия моделей эволюции стоимости рискованных активов, названных моделями с пропущенными слагаемыми, что позволило разнообразить формулу Кокса-Росса-Рубинштейна, добавив в неё важный случайный фактор. Желание обойти требование постоянства волатильности привело к вычислительным методам, использующим винеровский процесс со сносом. В первом методе бинарные случайные величины сочетались с пассажами абсолютной величины винеровского процесса со сносом. Метод по своей природе не отличается от предыдущего метода. Во втором – с двумя односторонними пассажами винеровского процесса со сносом. Выбор пассажа при этом осуществлялся бинарной случайной величиной. В первом методе более сложный генератор случайного разбиения, во втором возникает зависимость разбиения от последовательности бинарных случайных величин. С помощью второго метода решалась важная задача формирования оптимального портфеля с дивидендами.

## Глава 4.

### Описание программного комплекса и анализ эффективности методов и алгоритмов.

#### Введение.

В настоящей главе представлено описание восьми основных модулей программного комплекса, а также приведены результаты их работы. Цель главы – иллюстрация эффективности численных методов, представленных в диссертации.

Модули **BTOD** (Binary Tree Observed Disorder), **BTNOD** (Binary Tree Non Observer Disorder), **UV** (Uncertain Volatility) относятся к первой главе. В них содержится реализация алгоритмов, связанных с моделями с наблюдаемой и ненаблюдаемой разрядкой, а также с моделями с неопределённой волатильностью. Поскольку рассмотренные модели обобщают модели Блэка-Шоулса или Кокса-Росса-Рубинштейна и расширяют по отношению к ним класс порождаемых моделями мер, то предлагаемые новые вычислительные методы оптимального управления позволяют существенно расширить класс решаемых задач оптимального управления и получить более точное решение, в котором предусматривается возможность изменения параметров модели. Платой за это является увеличение числа вычислительных операций в новых методах. Ошибки при использовании формулы Блэка-Шоулса для вычисления справедливых цен проявляются в улыбке волатильности. Далее рассматривается пример, в котором модель с неопределённой волатильностью справляется с этой проблемой.

Улыбка волатильности заключается в следующем. Рассмотрим обратную задачу. Известны рыночные цены  $C^m(K)$  европейского опциона колл с платёжным обязательством  $(S_T - K)^+$ , с фиксированным временем исполнения  $T$  и различными страйками  $K$ . Формула Блэка-Шоулса позволяет вычислить справедливую цену европейского опциона колл  $C^*(K) = S_0 \Phi(d_1) - K \exp(-rT) \Phi(d_2)$ , в которой  $\Phi$  – функция Лапласа,  $S_0$  –

начальная цена рискового актива,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$r$  – процентная ставка безрискового актива.

Считается, что справедливая цена и рыночная цена должны совпадать:  $C^m(K) = C^*(K)$ , все параметры, за исключением волатильности, известны, поэтому, рассматривая последнее равенство в качестве уравнения относительно волатильности, найдём его решение. Пусть  $\sigma(K)$  – решение этого уравнения. График функции, отражающей зависимость волатильности от страйка, как правило, является выпуклой кривой, которая и носит название улыбки волатильности.

Модель с барьерами позволяет управлять процессами, которые колеблются на нескольких уровнях. В финансовой математике так происходит, например, если стоимостью рискового актива управляют помимо рынка, стараясь удержать её в определённых пределах (барьерах). В стандартном случае колебания происходят относительно одного уровня, поэтому при использовании в этой ситуации формул Блэка-Шоулса или Кокса-Росса-Рубинштейна возникают ошибки. Модели с ненаблюдаемой разладкой позволяют управлять процессом в окрестностях пиков или впадин. Стандартные модели таких возможностей не предоставляют.

Модули **COD** (Clusterization One Dimension), **CMD** (Clusterization Multi Dimension), **RCM** (Robust Cox-Ross-Rubinstein Model), **EMM** (Ellipsoid Markowitz Model) относятся ко второй главе. В них содержится реализация алгоритмов кластеризации и построения доверительного множества для одномерной и многомерной выборки, а также алгоритмов вычисления интервала справедливых цен для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна и алгоритмов вычисления портфеля с гарантированным

возвратом и с гарантированным риском для эллипсоидной модели Марковица.

Новые вычислительные методы связаны с обработкой данных, результаты которой далее используются в робастных, слабо зависящих от выборки моделях расчётов, поскольку далее рассматриваются робастные постановки классических задач. Вычислительные затраты в новых методах сопоставимы с затратами в классических методах. Новые постановки традиционных задач преследуют цель получения гарантированных возвратов и рисков в связи с появлением новых стандартов измерения рисков, таких как VaR и CVaR. Следует отметить два новых метода, включённых в эту часть нашего исследования. Первый связан с вычислением эллипсоида минимального объёма, содержащего заданное число элементов выборки; метод, вычислительно более трудоёмкий по сравнению с MCD, требующий решения на каждой итерации оптимизационной двойственной задачи для вычисления оптимальных весов. Однако, за счет этого удаётся получить существенно меньший объём вычисляемого эллипсоида, что положительно сказывается при построении портфеля. Второй связан с вычислением кластеров. Новый метод учитывает, по сравнению с классическим методом  $k$ -средних, междукластерный разброс. Этот факт положительно сказался, как показали многочисленные эксперименты, на результатах кластеризации.

Модуль **EP** (Exit Probability) относится в третьей главе. В нём содержится реализация алгоритмов вычисления вероятности невыхода процесса из полосы. Предлагаемый вычислительный метод в сравнении с классическим методом Эйлера-Мурояма отличается и меньшими вычислительными затратами и большей точностью. Для генерации одной траектории в новом методе требуются две независимые случайные величины, равномерно распределённые на интервале  $[0,1]$ . Для генерации одной траектории в методе Эйлера-Мурояма требуются  $N$  независимых стандартных нормальных случайных величин,  $N$  – число узлов траектории.

Преимущество очевидно. Для нового метода найдена оценка погрешности. Для метода Эйлера-Мурояма аналогичные оценки неизвестны.

#### 4.1. Модуль **BTOD (Binary Tree Observed Disorder)**.

Модуль **BTOD** относится к первой главе. В нём содержится реализация алгоритмов, связанных с моделями с наблюдаемой разладкой.

Опишем переменные модуля.

Входные данные:  $\mu$  – массив размера  $L+1$ ,  $\sigma$  – массив размера  $L+1$ ,  $L$  – размерность векторного момента остановки,  $S_0$  – начальная цена акции,  $K$  – контрактная цена европейского опциона колл,  $M_1$  – нижний барьер,  $M_2$  – верхний барьер,  $N$  – глубина бинарного дерева. Каждый атом бинарного дерева имеет координаты  $n, m$ , где  $m = 0, \dots, N; n = 1, \dots, 2^m$ . Корень бинарного дерева имеет координаты  $n = 1, m = 0$ .

В примере предположим, что  $L = 2$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.11 \\ 0.05 \end{pmatrix}$ ,  $S_0 = 6$ ,

$K = S_0$ ,  $M_1 = 5$ ,  $M_2 = 7$ ,  $N = 5$ .

Опишем процедуры модуля.

**BTOD:-binary\_tree**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N$ )

позволяет нарисовать бинарное дерево.

Красным цветом отмечены вершины, в которых цена акции впервые стала больше, чем  $M_2$ . В данном случае это четыре вершины с номерами  $n = 1, m = 3; n = 5, m = 5; n = 9, m = 5; n = 17, m = 5$ . Синим цветом отмечены вершины, в которых цена акции впервые стала меньше, чем  $M_1$ , после того как стала больше, чем  $M_2$ . В данном примере таких вершин нет.

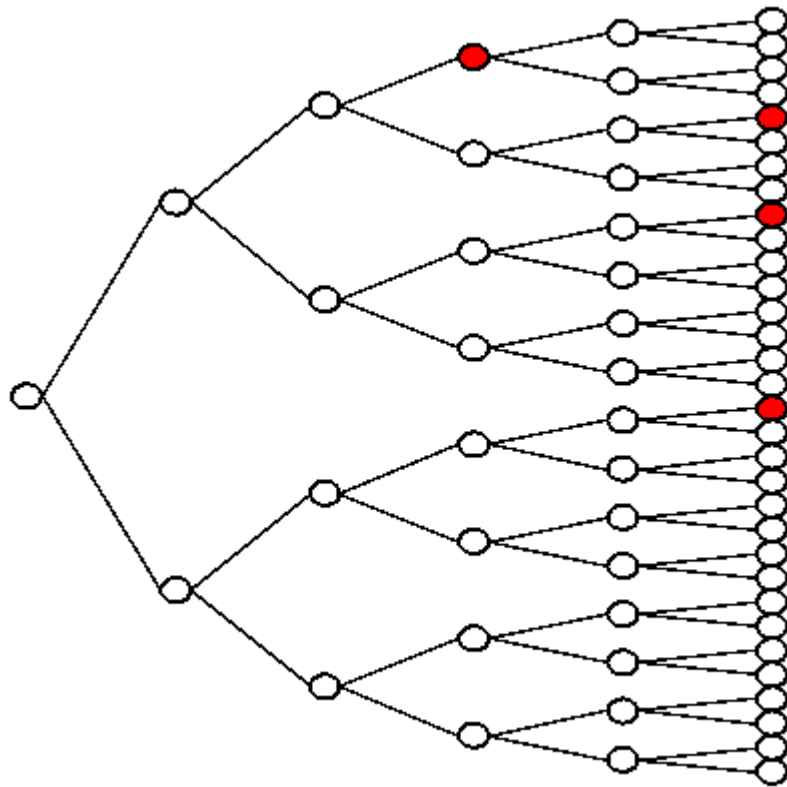


Рисунок 4.1. Бинарное дерево. Модель с наблюдаемой разрядкой.

**BTOD:-price**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, n, m$ )

позволяет вычислить цену акции в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева.

Таблица 4.1. Значения цен акций.

6.0000	6.4024	6.8319
		5.9729
	5.5975	5.9729
		5.2220

**BTOD:-probability**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, n, m$ )

позволяет вычислить рыночную меру в атоме  $n, m$  бинарного дерева.

Таблица 4.2. Значения вероятностей.

1.0000	0.6490	0.4212
		0.2278
	0.3510	0.2278
		0.1232

Сумма вероятностей на каждом слое бинарного дерева равна 1.

**BTOD:-fair\_price**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K$ )

позволяет вычислить справедливую цену европейского опциона колл в модели с двумя барьерами. В рассматриваемом примере значение справедливой цены равно 0.38.

Приводимые далее процедуры связаны с вычислением значений капитала, риска и стратегии в случае задач оптимального управления с симметричным (среднеквадратичное хеджирование) и несимметричным (квантильное хеджирование) критериями. В них необходимо задавать параметр  $a$ , который принимает значения от 0 до справедливой цены совершенного хеджа (в данном примере от 0 до 0.38). Далее расчёты проводились для  $a = 0.25$ .

**BTOD:-capital\_symmetric\_criteria**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K, a, n, m$ )

позволяет вычислить значение капитала в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием.

Таблица 4.3. Значения капитала (симметричный критерий).

0.2500	0.4976	0.8227
		0.1725
	0.0023	0.1725
		-0.1678

**BTOD:-risk\_symmetric\_criteria**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K, a$ )

позволяет вычислить значение риска в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием. В рассматриваемом примере значение риска равно 0.01.

**BTOD:-strategy\_symmetric\_criteria**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K, a, n, m$ )

позволяет вычислить значение стратегии в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием.

Таблица 4.4. Значения стратегии (симметричный критерий).

0.6152	0.7570	0.9075
		0.5847
	0.4531	0.5847
		0.3026

**BTOD:-capital\_non\_symmetric\_criteria**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K, a, n, m$ )

позволяет вычислить значение капитала в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием.

Таблица 4.5. Значения капитала (несимметричный критерий).

0.2500	0.3963	0.6354
		0.1571
	0.1036	0.2073
		0.0000

**BTOD:-risk\_non\_symmetric\_criteria**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K, a$ )

позволяет вычислить значение риска в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием. Значение риска равно 0.03.

**BTOD:-strategy\_non\_symmetric\_criteria**( $\mu, \sigma, L, S_0, M_1, M_2, N, K, a, n, m$ )

позволяет вычислить значение стратегии в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием.

Таблица 4.6. Значения стратегии (несимметричный критерий).

0.3635	0.5567	0.3241
		0.3922
	0.2761	0.5175
		0.0000

## 4.2. Модуль BTNOD (Binary Tree Non Observed Disorder).

Модуль **BTNOD** относится к первой главе. В нём содержится реализация алгоритмов, связанных с моделью Кокса-Росса-Рубинштейна с ненаблюдаемой разладкой.

Опишем переменные модуля. (Описывается пример для геометрического априорного распределения разладки).

Входные данные:  $\lambda$  – параметр геометрического закона распределения для разладки,  $S_0$  – начальная цена акции,  $a, b$  – параметры модели,  $\alpha$  – параметр критерия задачи оптимального управления,  $q_0 = P(Y_n = 1/n > \theta)$ ,  $q_\infty = P(Y_n = 1/n \leq \theta)$ ,  $N$  – глубина бинарного дерева. Каждый атом бинарного дерева имеет координаты  $n, m$ , где  $m = 0, \dots, N; n = 1, \dots, 2^m$ . Корень бинарного дерева имеет координаты  $n = 1, m = 0$ .

В данном параграфе предположим, что  $\lambda = 0.5$ ,  $S_0 = 5$ ,  $b = 0.02$ ,  $a = -b$ ,  $\alpha = 1.01$ ,  $q_0 = 0.2$ ,  $q_\infty = 0.8$ ,  $N = 5$ .

Опишем процедуры модуля. Результаты работы представлены для первых трёх слоев бинарного и редуцированного деревьев.

**BTNOD:-binary\_tree**( $\lambda, q_0, q_\infty, N$ )

позволяет нарисовать бинарное дерево.

Чёрным цветом обозначены вершины, принадлежащие классу  $H_1$ ; белым цветом обозначены вершины, принадлежащие классу  $H_2$  (см. п.1.3.1 диссертации).

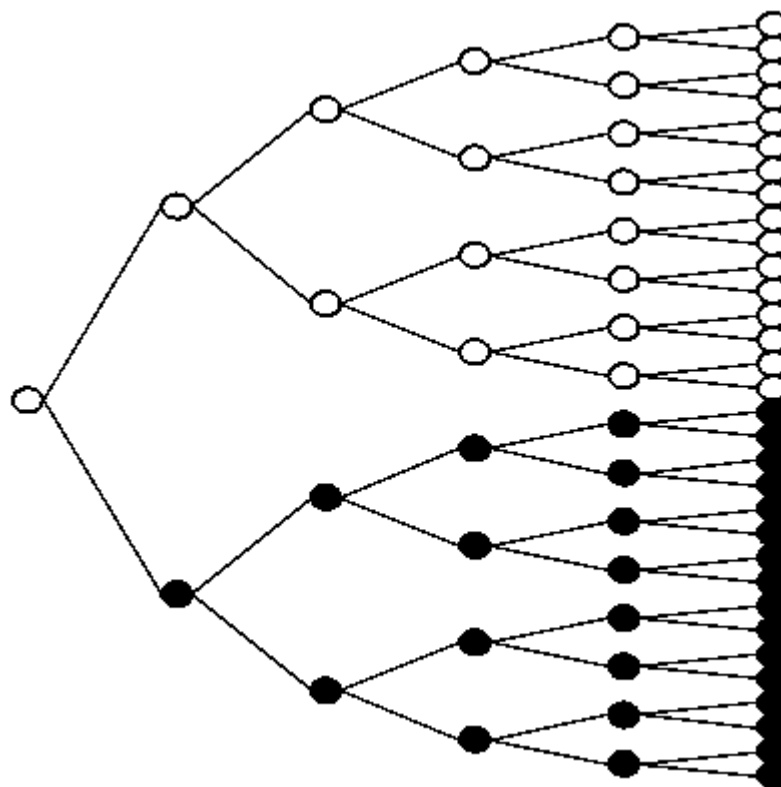


Рисунок 4.2. Бинарное дерево. Модель с ненаблюдаемой разрядкой.

**BTNOD:-price**( $a, b, S_0, N, n, m$ )

позволяет вычислить цену акции в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева.

Таблица 4.7. Значения цен акций.

5.0000	5.1000	5.2020
		4.9980
	4.9000	4.9980
		4.8020

**BTNOD:-probability**( $\lambda, q_0, q_\infty, N, n, m$ )

позволяет вычислить рыночную меру в атоме  $n, m$  бинарного дерева.

Таблица 4.8. Значения вероятностей.

1.0000	0.8000	0.6400
		0.1600
	0.2000	0.1600
		0.0400

Сумма вероятностей на каждом слое бинарного дерева равна 1.

**BTNOD:-martingale\_probability( $a, b, N, n, m$ )**

позволяет вычислить мартингальную меру в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева. Сумма мартингальных вероятностей на каждом слое бинарного дерева также равна 1.

Таблица 4.9. Значения мартингальных вероятностей.

1.0000	0.5000	0.2500
		0.2500
	0.5000	0.2500
		0.2500

**BTNOD:-capital\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )**

позволяет вычислить значение капитала в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием.

Таблица 4.10. Значения капитала (симметричный критерий).

1	1.0262	1.0492
		1.0031
	0.9737	0.9839
		0.9636

**BTNOD:-risk\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N$ )**

позволяет вычислить значение риска в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием. В рассматриваемом примере значение риска равно 0.000011.

**BTNOD:-strategy\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )** позволяет вычислить значение стратегии в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием.

Таблица 4.11. Значения стратегии (симметричный критерий).

0.2620	0.2255	0.2112
		0.2404
	0.1040	0.0483
		0.1620

**BTNOD:-capital\_non\_symmetric\_criteria**( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )

позволяет вычислить значение капитала в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием.

Таблица 4.12. Значения капитала (несимметричный критерий).

0.9999	1.0302	1.0508
		1.0095
	0.9697	0.9695
		0.9700

**BTNOD:-risk\_non\_symmetric\_criteria**( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N$ )

позволяет вычислить значение риска в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием. Значение риска равно 0.12.

**BTNOD:-strategy\_non\_symmetric\_criteria**( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ ) позволяет вычислить значение стратегии в атоме с координатами  $n, m$  бинарного дерева в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием.

Таблица 4.13. Значения стратегии (несимметричный критерий).

0.3020	0.2019	0.2019
		0.2020
	-0.0020	-0.1981
		0.2020

**BTNOD:-reduced\_tree**( $N$ )

позволяет нарисовать редуцированное дерево.

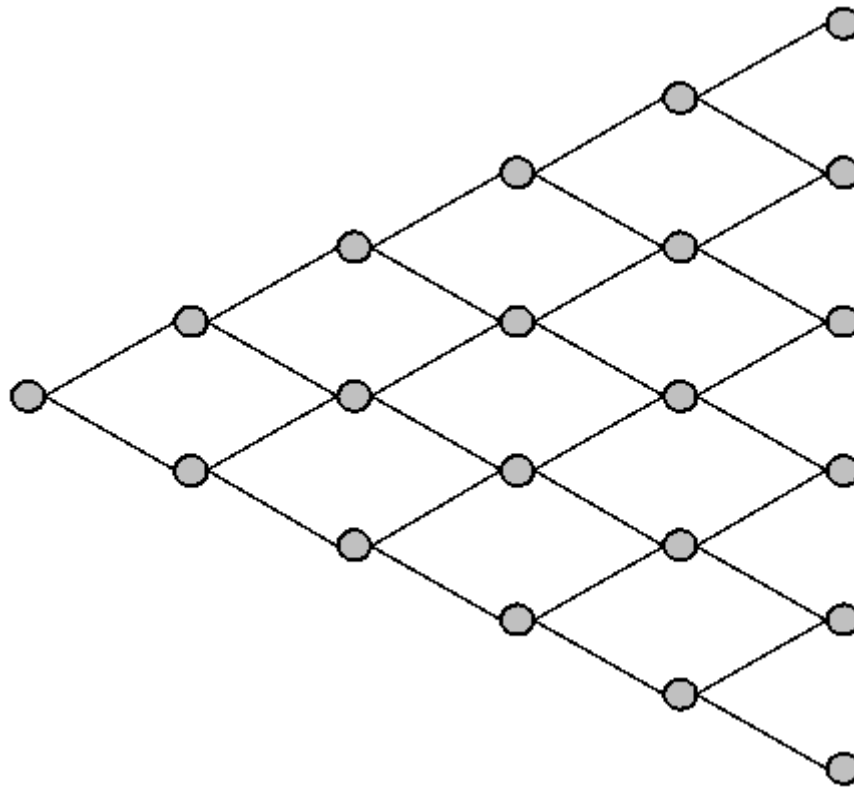


Рисунок 4.3. Редуцированное дерево. Модель с ненаблюдаемой разрядкой.

**BTNOD:-reduced\_price**( $a, b, S_0, N, n, m$ )

позволяет вычислить цену акции в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева.

Таблица 4.14. Значения цен акций.

5.0000	5.1000	5.2020
	4.9000	4.8020

**BTNOD:-reduced\_probability**( $\lambda, q_0, q_\infty, N, n, m$ )

позволяет вычислить рыночную меру в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева. Сумма вероятностей на каждом слое редуцированного дерева равна 1.

Таблица 4.15. Значения вероятностей.

1.0000	0.8000	0.5000
	0.2000	0.1000

**BTNOD:-reduced\_martingale\_probability( $a, b, N, n, m$ )**

позволяет вычислить мартингальную меру в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева. Сумма мартингальных вероятностей на каждом слое редуцированного дерева также равна 1.

Таблица 4.16. Значения мартингальных вероятностей.

1.0000	0.5000	0.2500
		0.5000
	0.5000	0.2500

**BTNOD:-reduced\_capital\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )**

позволяет вычислить значение капитала в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием.

Таблица 4.17. Значения капитала (симметричный критерий).

1.0000	1.0169	1.0326
		1.0013
	0.9830	0.9646

**BTNOD:-reduced\_risk\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N$ )**

позволяет вычислить значение риска в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием. Значение риска равно 0.000011.

**BTNOD:-reduced\_strategy\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )**

позволяет вычислить значение стратегии в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева в случае задачи оптимального управления с симметричным критерием.

Таблица 4.18. Значения стратегии (симметричный критерий).

0.1699	0.1533	0.1301
		0.1774
	0.1871	0.1972

**BTNOD:-reduced\_capital\_non\_symmetric\_criteria( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )**

позволяет вычислить значение капитала в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием.

Таблица 4.19. Значения капитала (несимметричный критерий).

0.9999	1.0101	1.0108
		1.0095
	0.9898	0.9700

**BTNOD:-reduced\_risk\_non\_symmetric\_criteria**( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N$ )

позволяет вычислить значение риска в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием. Значение риска равно 0.12.

**BTNOD:-reduced\_strategy\_non\_symmetric\_criteria**( $a, b, S_0, q_0, q_\infty, \alpha, N, n, m$ )

позволяет вычислить значение стратегии в атоме с координатами  $n, m$  редуцированного дерева в случае задачи оптимального управления с несимметричным критерием.

Таблица 4.20. Значения стратегии (несимметричный критерий).

0.1019	0.0059	-0.1824
		0.2020
	0.2020	0.2020

### 4.3. Модуль UV (Uncertain Volatility).

Модуль UV относится к первой главе. В нём содержится реализация алгоритмов, связанных с моделями с неопределённой волатильностью. Параметры:  $r$  – процентная ставка,  $S_0$  – начальная цена акции,  $K$  – контрактная цена акции,  $\sigma_{\min}$  – минимальное значение для волатильности,  $\sigma_{\max}$  – максимальное значение для волатильности,  $T$  – время исполнения.

Опишем процедуры модуля.

**UV:-higher\_price\_BVP** ( $r, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, S_0, K, T$ )

позволяет вычислить верхнюю цену с помощью решения краевой задачи.

**UV:-lower\_price\_BVP** ( $r, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, S_0, K, T$ )

позволяет вычислить нижнюю цену с помощью решения краевой задачи.

**UV:-higher\_price\_BT** ( $r, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, S_0, K, T$ )

позволяет вычислить верхнюю цену с помощью рекуррентных формул на бинарном дереве.

**UV:-lower\_price\_BT** ( $r, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, S_0, K, T$ )

позволяет вычислить нижнюю цену с помощью рекуррентных формул на бинарном дереве.

Приведём результаты работы модулей для различных значений параметра  $K$  ( $S_0 = 5, r = 0.1, \sigma_{\min} = 0.1, \sigma_{\max} = 0.9, T = 1$ ).

Таблица 4.21. Значения интервалов справедливых цен.

$K$	Нижняя цена		Верхняя цена	
	Краевая задача	Бинарное дерево	Краевая задача	Бинарное дерево
1	4.0885	4.0926	4.1289	4.1132
2	3.1834	3.1878	3.3551	3.3483
3	2.2681	2.2830	2.7576	2.7760
4	1.3629	1.3781	2.2870	2.2897
5	0.5305	0.5143	1.9220	1.9487

Среднеквадратическое расхождение для нижней цены – 0.012.

Среднеквадратическое расхождение для верхней цены – 0.014.

Ниже приведена таблица, которая сравнивает формулу Блэка-Шоулса с моделью неопределённой волатильности на реальных данных. Используется индекс S&P100 в период с 02.01.1991 по 11.06.1997. Согласно данным, приведённым в [103], волатильность индекса  $\sigma = 0.00723$ , безрисковая процентная ставка  $r = 0.0485$ . Рассматриваются европейские опционы колл со сроками исполнения 24, 87 и 115 дней. В таблице для различных значений контрактных цен  $K$  и начальных цен  $S_0$  приведены рыночные справедливые цены  $C_{\text{рын}}$ , а также справедливые цены  $C_{\text{БШ}}$ , вычисленные по формуле Блэка-Шоулса, верхние цены  $\bar{C}$  и нижние цены  $\underline{C}$

для первой модели с неопределённой волатильностью при  $\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ . Оценки параметров по выборке значений индекса  $\underline{\sigma}, \bar{\sigma} : \underline{\sigma} = 0.005, \bar{\sigma} = 0.01$ .

Таблица 4.22. Зависимость справедливых цен от контрактных цен.

$N$	$S_0$	$K$	$C_{\text{рын.}}$	$C_{\text{БШ}}$	$\underline{C}$	$\bar{C}$
24	425.73	395	30.75	32.55	30.45	31.49
24	425.73	400	25.88	27.57	25.55	26.15
24	425.73	405	21.00	21.50	20.56	21.61
24	425.67	410	16.50	17.56	16.05	17.02
24	425.68	415	11.88	12.53	11.62	12.10
24	425.65	420	7.69	7.26	7.15	8.03
24	425.65	425	4.44	2.37	3.51	4.56
24	425.68	430	2.10	0.00	1.73	2.46
24	425.65	435	0.78	0.00	0.74	0.93
24	425.16	440	0.25	0.00	0.18	0.56
24	424.78	445	0.1	0.00	0.09	0.12
24	425.19	450	0.1	0.00	0.09	0.13
87	425.73	380	46.75	52.04	46.70	47.19
87	425.73	385	42.00	47.12	41.38	43.88
87	425.73	390	37.50	42.21	36.98	43.07
87	425.73	395	33.00	37.29	32.08	36.66
87	425.73	400	28.50	32.37	27.99	29.12
87	425.73	405	24.13	27.43	22.99	26.19
87	425.26	410	20.38	21.99	19.49	20.15
87	425.86	415	16.13	17.58	14.13	18.31
87	425.68	420	12.82	12.41	11.56	13.62
87	425.42	425	9.32	7.54	8.67	11.67
87	425.62	430	6.51	3.93	6.01	8.11
87	425.82	435	4.51	1.48	4.01	6.07
87	425.68	440	2.75	0.14	2.05	3.88

87	425.75	445	1.60	0.00	1.23	2.06
87	425.78	450	0.85	0.00	0.74	1.03
87	425.39	455	0.44	0.00	0.31	0.71
115	425.73	380	47.25	54.05	46.93	49.23
115	425.73	390	38.13	44.27	37.94	39.14
115	425.73	400	29.38	34.48	28.94	38.05
115	425.73	410	21.19	24.63	20.94	22.30
115	425.41	420	13.88	14.50	13.39	15.31
115	425.63	430	8.13	6.18	8.01	10.15
115	425.28	440	3.88	1.15	2.64	4.18
115	425.13	450	1.50	0.00	1.21	1.73

Среднеквадратическое отклонение рыночных цен от цен, вычисленных по формуле Блэка-Шоулса, равно 2.934, среднеквадратическое отклонение рыночных цен от средних цен в модели с неопределённой волатильностью равно 0.916. Преимущество очевидно.

#### 4.4. Модуль COD (Clusterization One Dimension).

Модуль **COD** относится ко второй главе. В нём содержится реализация алгоритмов кластеризации и построения доверительного множества для одномерной выборки с заданной доверительной вероятностью

Опишем переменные модуля.

Входные данные:  $W$  – выборка, представленная в виде массива,  $N$  – объём выборки,  $K$  – число кластеров,  $\alpha$  – доверительная вероятность.

**COD:-Clusters( $W, N, K$ )**

позволяет разбить выборку на  $K$  кластеров. На выходе каждому элементу исходного массива присваивается номер кластера, к которому он относится.

**COD:-CentersClusters( $W, N, K$ )**

позволяет найти центры кластеров и записать их в виде массива.

**COD:-ConfidenceSet( $W, N, \alpha$ )**

позволяет построить доверительное множество с заданной доверительной вероятностью  $\alpha$ . На выходе получается массив элементов исходной выборки, попавших в доверительное множество.

#### 4.5. Модуль **CMD** (Clusterization Multi Dimension).

Модуль **CMD** относится ко второй главе. В нём содержится реализация алгоритмов кластеризации и построения доверительного множества для многомерной выборки.

Опишем переменные модуля.

Входные данные:  $W$  – выборка, представленная в виде массива,  $M$  – размерность векторов выборки,  $N$  – объём выборки.

В данном параграфе  $N = 2500$ ; в качестве тестового примера будем использовать выборку, представляющую собой объединение из 5 подвыборок. Элементы каждой подвыборки являются двумерными нормальными векторами с заданными векторами средних значений и одинаковыми ковариационными матрицами.

Опишем процедуры модуля.

**CMD:-Sample( $W, N, \text{"black"}$ )**

позволяет графически изобразить элементы двумерной выборки. Цвет элементов выборки можно задавать.

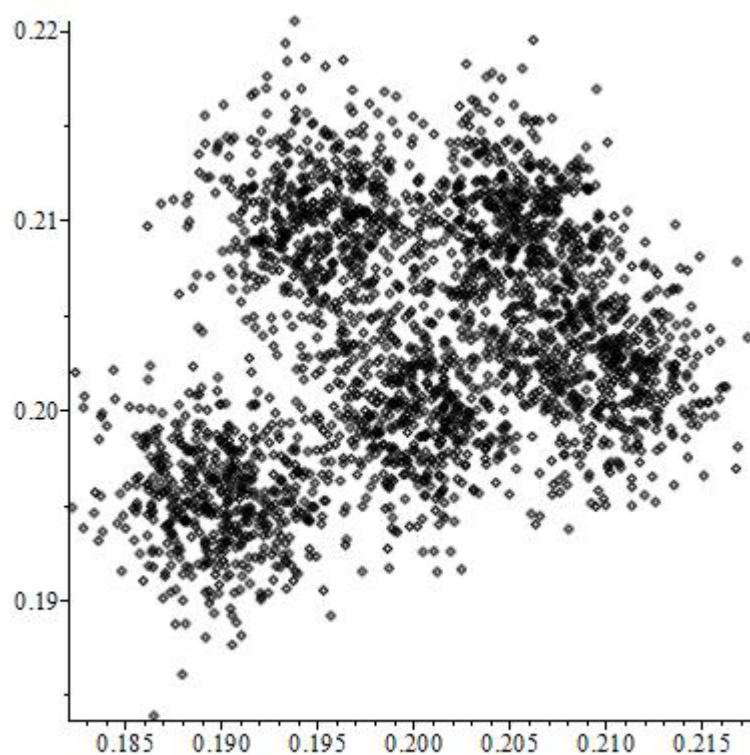


Рисунок 4.4. Элементы выборки.

**CMD:-Clusters( $W, N, M, K, s$ )**

позволяет разбить выборку на  $K$  кластеров. На выходе каждому элементу исходного массива присваивается номер кластера, к которому он относится.

Переменная  $s$  может принимать одно из двух значений:

$s = \text{"new method"}$  – применяется проективный алгоритм;

$s = \text{"k – means method"}$  – применяется алгоритм  $k$ -средних.

**CMD:-PictureClusters( $W, N, K, s$ )**

позволяет графически изобразить элементы двумерной выборки, разделённой на  $K$  кластеров. Элементы каждого кластера имеют свой цвет, который задается случайным образом.

**CMD:-CentersClusters( $W, N, M, K, s$ )**

позволяет найти центры кластеров и записать их в виде массива.

**CMD:-PictureCentersClusters( $W, N, K, s$ )**

позволяет графически изобразить элементы двумерной выборки с выделенными центрами кластеров. Если  $s = \text{"new method"}$ , то центры

отмечены красным цветом. Если  $s = "k - \text{means method}"$ , то центры отмечены синим цветом.

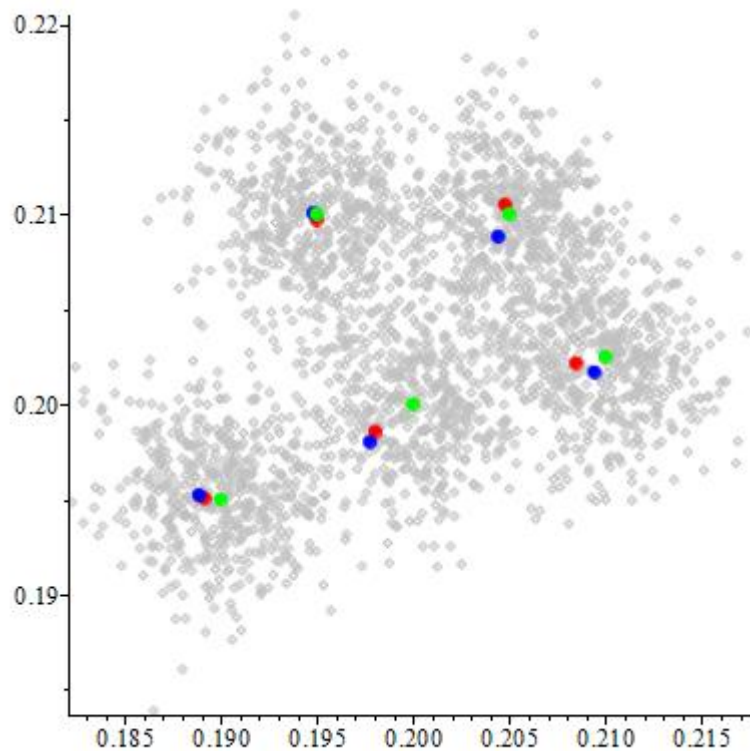


Рисунок 4.5. Элементы выборки, разделенной на 5 кластеров.

На рисунке 4.5 зелёным цветом отмечены исходные центры кластеров.

Матрица исходных центров кластеров имеет вид:  $A = \begin{pmatrix} 0.19 & 0.195 \\ 0.195 & 0.210 \\ 0.2 & 0.2 \\ 0.205 & 0.210 \\ 0.210 & 0.2025 \end{pmatrix}$ .

Матрица центров кластеров (проективный метод) имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0.1891 & 0.1950 \\ 0.1949 & 0.2096 \\ 0.1980 & 0.1985 \\ 0.2047 & 0.2105 \\ 0.2084 & 0.2021 \end{pmatrix}.$$

Матрица центров кластеров (метод  $k$ -средних) имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0.1888 & 0.1952 \\ 0.1948 & 0.2100 \\ 0.1977 & 0.1980 \\ 0.2044 & 0.2088 \\ 0.2094 & 0.2016 \end{pmatrix}.$$

Норма Фробениуса матрицы  $A-B$  равна 0.0000094630. Норма Фробениуса матрицы  $A-C$  равна 0.0000130010. Норма Фробениуса матрицы  $A-B$  меньше нормы Фробениуса матрицы  $A-C$ . Было проведено 100 аналогичных экспериментов. В 98 проективный метод практически точно решил задачу. Метод  $k$ -средних в 87. Один из таких примеров приведён далее.

Добавим к элементам выборки еще одну подвыборку, состоящую из 500 элементов.

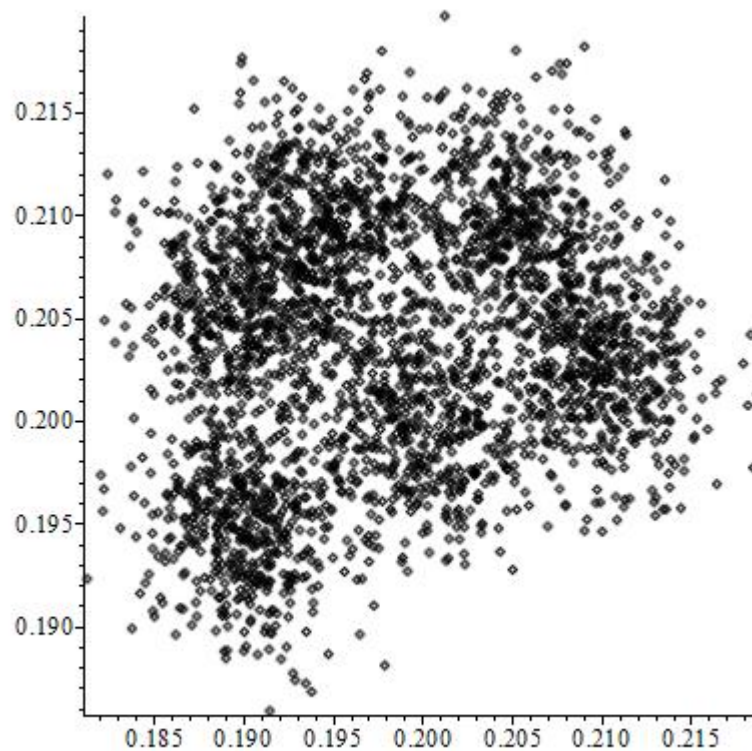


Рисунок 4.6. Элементы выборки.

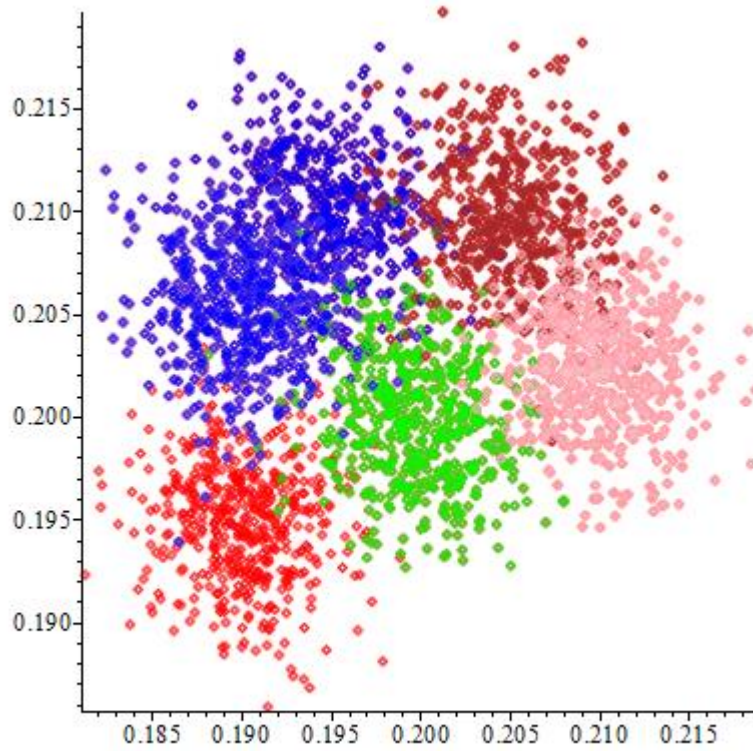


Рисунок 4.7. Элементы выборки, разделённой на кластеры с помощью метода  $k$ -средних.

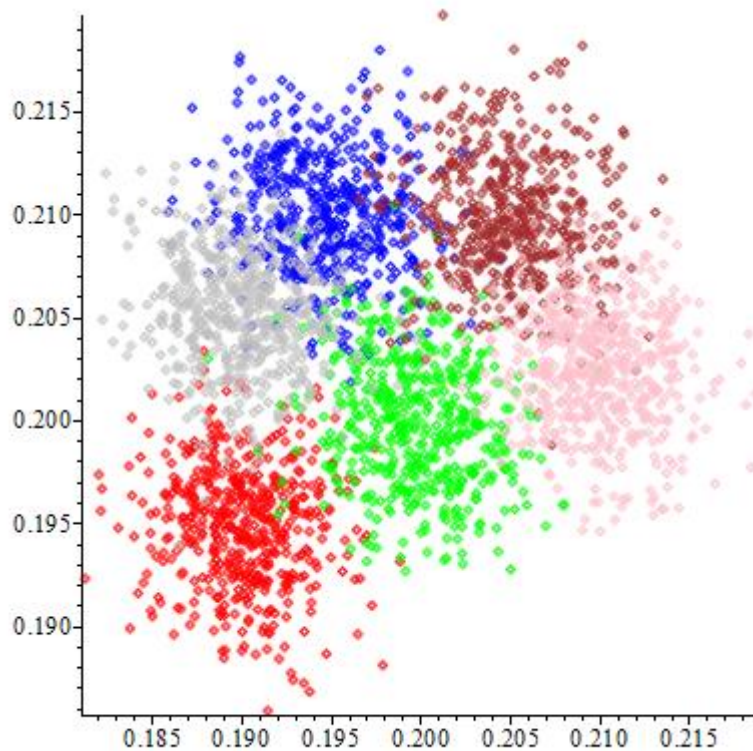


Рисунок 4.8. Элементы выборки, разделённой на кластеры с помощью проективного метода.

На рисунке 4.7 изображены элементы выборки, разделённой на кластеры с помощью метода  $k$ -средних. Видно, что в данном случае число кластеров равно 5. На рисунке 4.8 изображены элементы выборки, разделённой на кластеры с помощью проективного метода. Видно, что в данном случае число кластеров равно 6. Это говорит об эффективности проективного метода по сравнению с методом  $k$ -средних.

По числу итераций проективный метод превзошёл метод  $k$ -средних в 63 случаях.

**CMD:-ConfidenceSet( $W, N, M, \alpha, s$ )**

позволяет построить доверительное множество с заданной доверительной вероятностью  $\alpha$ . На выходе получается массив элементов исходной выборки, попавших в доверительное множество. Переменная  $s$  может принимать одно из двух значений:

$s = \text{"MCD"}$  – применяется алгоритм MCD;

$s = \text{"ME"}$  – применяется алгоритм ME.

**CMD:-PictureConfidenceSet( $W, N, \alpha, s$ )**

позволяет графически изобразить элементы двумерной выборки, попавшие в доверительное множество.

Ниже представлены результаты работы этих блоков.

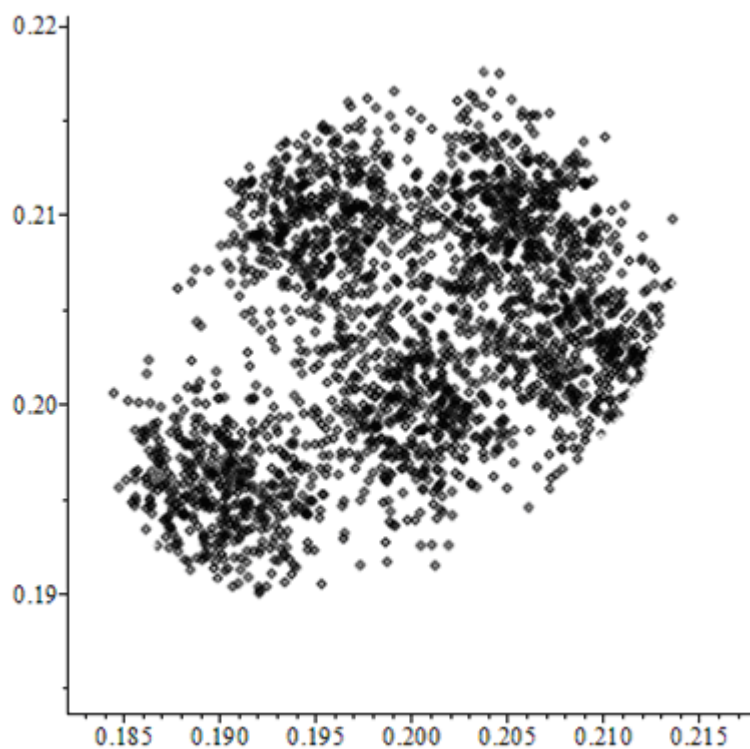


Рисунок 4.9. Доверительное множество, построенное для всей выборки с помощью алгоритма ME,  $\alpha = 0.9$ .

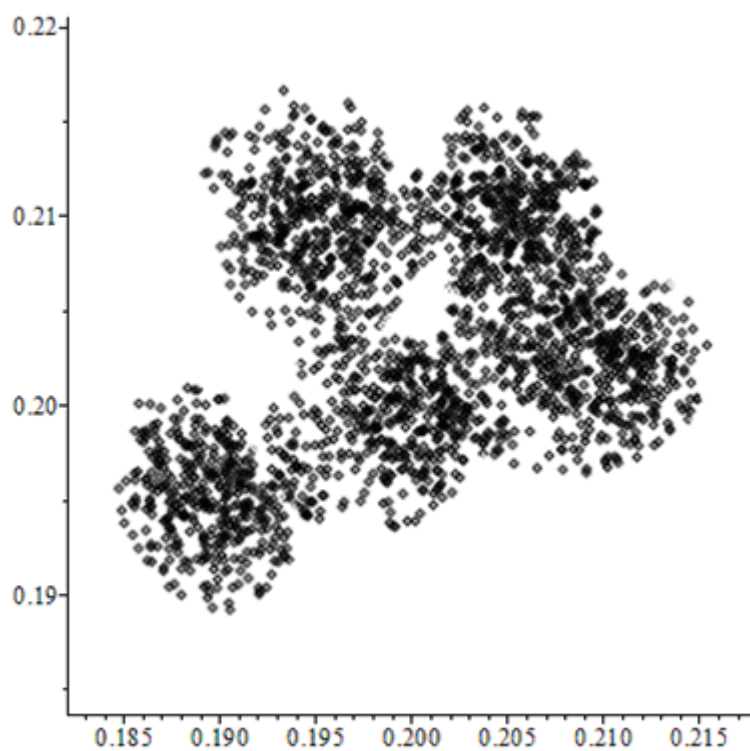


Рисунок 4.10. Доверительное множество, построенное для каждого кластера выборки с помощью алгоритма ME,  $\alpha = 0.9$ .

На рисунке 4.11 представлены эллипсоиды минимального объёма, построенные для всей выборки, если  $\alpha = 0.9$ . Сплошной линией изображён эллипсоид, построенный с помощью алгоритма MCD; его объём равен 0.0021. Точечной линией изображён эллипсоид, построенный с помощью алгоритма ME; его объём равен 0.0016. Объём эллипсоида, построенного с помощью алгоритма ME, меньше объёма эллипсоида, построенного с помощью алгоритма MCD, что является подтверждением эффективности алгоритма ME.

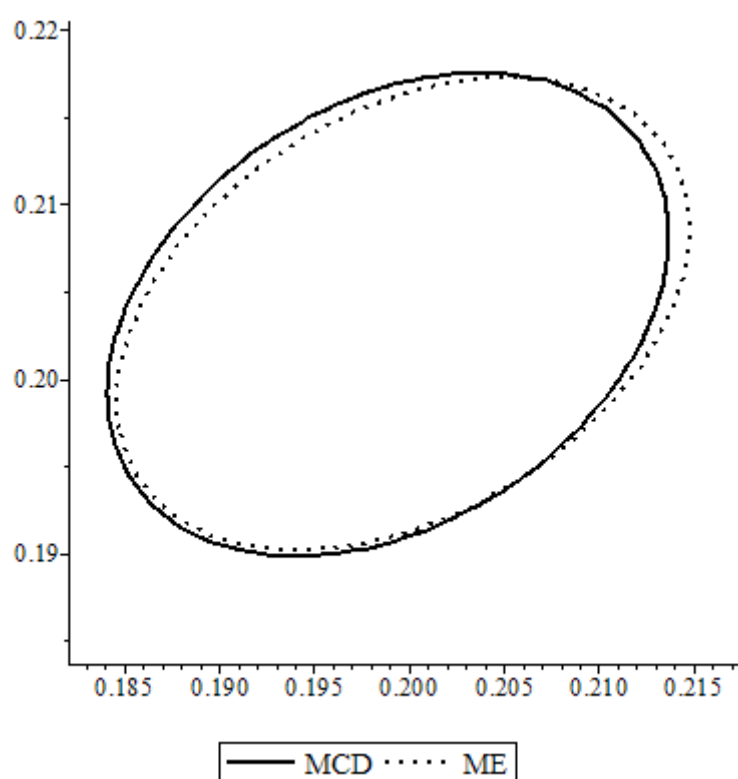


Рисунок 4.11. Эллипсоиды минимального объёма,  $\alpha = 0.9$ .

#### 4.6. Модуль RCM (Robust Cox-Ross-Rubinstein Model).

Модуль **RCM** относится ко второй главе. В нём содержится реализация алгоритмов вычисления интервала справедливых цен для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

Опишем переменные модуля.

Входные данные:  $N$  – глубина бинарного дерева,  $a, b$  – параметры классической модели Кокса-Росса-Рубинштейна,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – параметры

робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна,  $r$  – процентная ставка,  $S_0$  – начальная цена акции,  $K$  – контрактная цена акции.

В данном параграфе исходные данные  $N=10$ ,  $S_0=4500$ ,  $K=S_0$ ,  $a_1=-0.1842$ ,  $a_2=0.0015$ ,  $a_3=0.1151$ ,  $a_4=0.3118$ ,  $a=-0.0914$ ,  $b=0.2134$ .

Опишем процедуры модуля.

Пусть  $S_n$  – цена акции в момент времени  $n$ .

**CRM:-Capital( $a,b,r,K,N,n,S_n$ )**

позволяет вычислить капитал оптимального портфеля в момент времени  $n$  в случае опциона колл.

**CRM:-Strategy( $a,b,r,K,N,n,S_n$ )**

позволяет вычислить число единиц рисковогo актива в момент времени  $n$  в случае опциона колл.

**CRM:-CapitalAfterEffect( $a,b,r,N,n,S_n$ )**

позволяет вычислить капитал оптимального портфеля в момент времени  $n$  в случае опциона с последствием.

**CRM:-StrategyAfterEffect( $a,b,r,N,n,S_n$ )**

позволяет вычислить число единиц рисковогo актива в момент времени  $n$  в случае опциона с последствием.

Для иллюстрации эффективности робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна по сравнению с классической моделью Кокса-Росса-Рубинштейна было проведено 2000 экспериментов. Опишем один эксперимент (случай опциона колл, классическая модель Кокса-Росса-Рубинштейна).

0 шаг) Вычисляются начальный капитал  $X_0$  и начальное количество единиц рисковогo актива  $\gamma_1$  с помощью процедур

**CRM:-Capital( $a,b,r,K,N,0,S_0$ )** и **CRM:-Strategy( $a,b,r,K,N,0,S_0$ )**

соответственно.

$n$  шаг) Генерируется значение  $\rho_n$ , вычисляются значения  $S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n)$ ,  $B_n = B_{n-1}(1 + r)$ . Вычисляется значение  $X_n = B_n \left( \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} + \gamma_n \left( \frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) \right)$ . Вычисляется значение  $\gamma_n$  с помощью процедуры **CRM:-Strategy**( $a, b, r, K, N, n, S_n$ ). Далее  $n := n + 1$ . Если  $n = N$ , то СТОП.

Заметим, что для вычисления нижнего капитала в робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна вместо параметров  $a, b$  следует использовать параметры  $a_2, a_3$ ; для вычисления верхнего капитала в робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна вместо параметров  $a, b$  следует использовать параметры  $a_1, a_4$ .

Результаты вычислений представлены в таблицах 4.23 и 4.24. В обеих таблицах заметно преимущество робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна над классической моделью Кокса-Росса-Рубинштейна.

Таблица 4.23. Расчёты для опциона колл.

Модель	Число экспериментов, в которых капитал продавца больше значения финансового обязательства	Число экспериментов, в которых капитал покупателя меньше значения финансового обязательства	Всего экспериментов
Робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна	1991	1611	2000
Классическая модель Кокса-Росса-Рубинштейна	1343	657	2000

Таблица 4.24. Расчёты для опциона с последствием.

Модель	Число экспериментов, в которых капитал продавца больше значения финансового обязательства	Число экспериментов, в которых капитал покупателя меньше значения финансового обязательства	Всего экспериментов
Робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна	1444	702	2000
Классическая модель Кокса-Росса-Рубинштейна	1338	662	2000

#### 4.7. Модуль EMM (Ellipsoid Markowitz Model).

Модуль **EMM** относится ко второй главе. В нём содержится реализация алгоритмов вычисления портфеля с гарантированным возвратом и с гарантированным риском для эллипсоидной модели Марковица.

Опишем переменные модуля.

Входные данные:  $N$  – количество эллипсоидов,  $M$  – количество типов активов,  $m$  – массив, каждый  $i$ -й элемент которого представляет собой центр  $i$ -го эллипсоида,  $C$  – массив, каждый  $i$ -й элемент которого представляет собой матрицу  $i$ -го эллипсоида.

В данном параграфе предположим, что  $N = 5$ ,  $M = 2$ , значения  $m$  и  $C$  возьмём из примера 2.3. Пусть  $\bar{m}$  – вектор средних значений элементов всей выборки,  $\bar{C}$  – ковариационная матрица элементов всей выборки.

Опишем процедуры модуля.

**EMM:-GuaranteedRisk( $N, M, C$ )**

позволяет найти портфель с гарантированным риском в случае эллипсоидной модели Марковица. На выходе получается массив, первый элемент которого – значение риска, остальные элементы – компоненты оптимального портфеля  $(x_i)_{i=1}^M$ .

**EMM:-GuaranteedReturn( $N, M, m, C$ )**

позволяет найти портфель с гарантированным возвратом в случае эллипсоидной модели Марковица. На выходе получается массив, первый элемент которого – значение возврата, остальные элементы – компоненты оптимального портфеля  $(x_i)_{i=1}^M$ .

**EMM:-GuaranteedRiskClassic( $M, C$ )**

позволяет найти портфель с гарантированным риском в случае классической модели Марковица. На выходе получается массив, первый элемент которого – значение риска, остальные элементы – компоненты оптимального портфеля  $(x_i)_{i=1}^M$ .

**EMM:-GuaranteedReturnClassic( $M, m, C$ )**

позволяет найти портфель с гарантированным возвратом в случае классической модели Марковица. На выходе получается массив, первый элемент которого – значение возврата, остальные элементы – компоненты оптимального портфеля  $(x_i)_{i=1}^M$ .

Опишем алгоритм, иллюстрирующий эффективность эллипсоидной модели Марковица по сравнению с классической моделью Марковица. Рассмотрим тестовую выборку  $V = (\rho_i)$ , имеющую такой же объём  $T$  и состоящую из тех же типов активов, что и исходная выборка.

0 шаг) Вычисляются гарантированный возврат  $\alpha_{EMM}^*$  и оптимальный портфель  $x_{EMM}^*$  для эллипсоидной модели Марковица с помощью процедуры

**EMM:-GuaranteedReturn( $N, M, m, C$ ).**

Вычисляются гарантированный возврат  $\alpha_{MM}^*$  и оптимальный портфель  $x_{MM}^*$  для классической модели Марковица с помощью процедуры **EMM:-GuaranteedReturnClassic**( $M, \bar{m}, \bar{C}$ ).

$n$  шаг) Вычисляются возвраты  $\alpha_{EMM} = (x_{EMM}^*, \rho_n)$ ,  $\alpha_{MM} = (x_{MM}^*, \rho_n)$ . Далее  $n := n + 1$ . Если  $n = T + 1$ , то СТОП.

Результаты вычислений представлены в таблице 4.25. Видно, что эллипсоидная модель Марковица имеет преимущество по сравнению с классической моделью Марковица с точки зрения гарантированности возврата.

Таблица 4.25. Анализ эффективности эллипсоидной модели Марковица.

Модель	Число экспериментов, в которых возврат больше гарантированного возврата	Объем тестовой выборки
Эллипсоидная модель Марковица	4941	5000
Классическая модель Марковица	4034	5000

#### 4.8. Модуль EP (ExitProbability).

Модуль **EP** относится к третьей главе. В нём содержится реализация алгоритмов вычисления вероятности выхода процессов из полосы. В качестве примеров используются процессы Орнштейна-Уленбека и квадратного корня.

Опишем переменные модуля.

Входные данные: параметры уравнений процессов Орнштейна-Уленбека и квадратного корня ( $X_0$  – начальное значение,  $\alpha$  – множитель возврата,  $\beta$  – точка возврата,  $\sigma$  – волатильность).

Опишем процедуры модуля.

**EP:-OrnsteinUhlenbeck**(  $X_0, \alpha, \beta, \sigma, a, b, s$  )

позволяет вычислить вероятность невыхода процесса Орнштейна-Уленбека из полосы  $[a, b]$ . Переменная  $s$  может принимать одно из четырёх значений:

$s = \text{"boundary value problem"}$  – применяется метод решения краевой задачи;

$s = \text{"Wiener - Hopf factorization"}$  – применяется метод преобразования Винера-Хопфа;

$s = \text{"random partirion"}$  – применяется метод бинарной аппроксимации с пропущенными слагаемыми;

$s = \text{"permanent partition"}$  – применяется метод аппроксимации нормальными случайными величинами с постоянным разбиением.

**EP:-SquareRoot**(  $X_0, \alpha, \beta, \sigma, a, b, s$  )

позволяет вычислить вероятность невыхода процесса квадратного корня из полосы  $[a, b]$ . Переменная  $s$  может принимать одно из четырёх значений, приведенных в описании предыдущей процедуры.

Таблицы 4.26, 4.27 демонстрируют эффективность метода бинарной аппроксимации с пропущенными слагаемыми в сравнении с методом аппроксимации нормальными случайными величинами с постоянным разбиением (метод Эйлера-Мурояма) при вычисления вероятности невыхода процессов Орнштейна-Уленбека и квадратного корня из полосы. Исходные данные для процесса Орнштейна-Уленбека  $X_0 = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $a = -0.1, b = 0.1$ . Для процесса квадратного корня  $X_0 = 0.49$ ,  $\beta = 0.49$ ,  $\sigma = 0.1, a = 0.13, b = 0.85$ .

Таблица 4.26. Вероятность невыхода процесса Орнштейна Уленбека из  
полосы.

$\alpha$	Краевая задача	Бинарная аппроксимация с пропущенными слагаемыми	Аппроксимация нормальными с.в. с постоянным разбиением
0.5	0.4494	0.4539	0.5000
1	0.5275	0.5311	0.5658
1.5	0.6043	0.6036	0.6263
2	0.6769	0.6723	0.6816
2.5	0.7431	0.7380	0.7316
3	0.8009	0.7930	0.7763
3.5	0.8498	0.8385	0.8158
4	0.8896	0.8786	0.8500
4.5	0.9210	0.9090	0.8789
5	0.9450	0.9372	0.9026
5.5	0.9627	0.9520	0.9210
6	0.9755	0.9697	0.9342
6.5	0.9843	0.9763	0.9421
7	0.9903	0.9828	0.9447

Для бинарной аппроксимации с пропущенными слагаемыми среднеквадратическая разница с первым столбцом равна 0.0079, для Эйлера-Мурояма – 0.0367.

Таблица 4.27. Вероятность невыхода процесса квадратного корня из полосы.

$\alpha$	Краевая задача	Бинарная аппроксимация с пропущенными слагаемыми	Аппроксимация нормальными с.в. с постоянным разбиением
1	0.2727	0.2735	0.2432
2	0.3846	0.3851	0.3461
3	0.4909	0.4904	0.4414
4	0.5796	0.5827	0.5290
5	0.6487	0.6515	0.6090
6	0.7031	0.7106	0.6814
7	0.7483	0.7534	0.7462
8	0.7880	0.7880	0.8033
9	0.8239	0.8193	0.8528
10	0.8562	0.8489	0.8947
11	0.8847	0.8735	0.9290
12	0.9092	0.8997	0.9557
13	0.9297	0.9227	0.9748
14	0.9465	0.9508	0.9861

Для бинарной аппроксимации с пропущенными слагаемыми среднеквадратическая разница с первым столбцом равна 0.0057, для Эйлера-Мурояма – 0.0375.

### **Заключение к четвёртой главе.**

Четвёртая глава посвящена описанию основных модулей программного комплекса и анализу эффективности приведенных в диссертации численных методов. Параграфы 4.1-4.3 относятся к первой главе. Представленные модули позволяют реализовать алгоритмы вычисления оптимального портфеля в случае симметричного и несимметричного критериев для моделей с наблюдаемой и ненаблюдаемой разладкой, а также алгоритмы вычисления интервала справедливых цен для моделей с неопределённой волатильностью. Параграфы 4.4-4.7 относятся ко второй главе. Представленные модули позволяют реализовать алгоритмы кластеризации выборки, построения доверительного множества, расчёта интервала справедливых цен в случае робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна и вычисления оптимального портфеля в случае эллипсоидной модели Марковица. Параграф 4.8 относится к третьей главе. Представленные модули позволяют реализовать алгоритмы вычисления вероятности невыхода процесса из заданной полосы.

## Заключение.

Диссертация посвящена методам решения задач оптимального управления для робастных моделей финансовой математики.

В первой главе диссертации исследуются стохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива. К ним относятся модели с наблюдаемой и ненаблюдаемой разладкой, а также модели с неопределённой волатильностью. Представленные в первой главе модели являются обобщением известной в литературе модели Блэка-Шоулса, когда параметры сноса и волатильности не являются постоянными. В случае с наблюдаемой разладкой исследована модель с векторной разладкой, и как пример изучена модель с двумя барьерами. Получена формула для плотности распределения векторного момента останова. В случае с ненаблюдаемой разладкой использована классификация вершин бинарного дерева с помощью момента останова, наиболее близкого к ненаблюдаемой разладке. С вычислительной точки зрения важным элементом является редукция NP-полной задачи к P-полной задаче; для этого использована нечёткая классификация вершин бинарного дерева. Редукция позволяет существенно сократить расчёты, а в случае, если она не применяется по тем или иным причинам, следует использовать параллельные вычисления, которые широко используются для бинарных деревьев. Рассмотрены модели с неопределённой волатильностью, и приведены способы решения задач оптимального управления с использованием теории вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Приведена общая схема решения задач оптимального управления в случае, когда ограничения задаются на левом конце временного интервала, а цель управления определяется на правом конце. В вычислительных методах, которые находят решение задач оптимального управления, использована бинарная аппроксимация случайных процессов с разладкой. Этот приём является альтернативой сеточным методам и позволяет свести задачу вычисления оптимального управления к прямым вычислениям на

бинарном дереве. Рассмотрены приложения полученных результатов в финансовой математике, а именно, для модели с наблюдаемой разладкой решены задачи среднеквадратичного и квантильного хеджирования, а для модели с ненаблюдаемой разладкой решены динамические задачи управления портфелем инвестиций с симметричным и несимметричным критериями.

Во второй главе диссертации исследуются нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива. К ним относятся робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна и эллипсоидная модель Марковица. Представленные во второй главе модели являются обобщением известных в литературе моделей Кокса-Росса-Рубинштейна и Марковица, когда возврат рискового актива принадлежит доверительному множеству с заданным уровнем доверия. В случае робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна доверительное множество является объединением интервалов; в случае эллипсоидной модели Марковица доверительное множество является объединением эллипсоидов. Для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна вычислен интервал справедливых цен в случае выпуклых платёжных функций; для эллипсоидной модели Марковица предложена многошаговая динамическая стратегия, позволяющая совместить достоинства портфелей с гарантированным возвратом и с гарантированным риском.

Предложен и теоретически обоснован доказанными теоремами метод вычисления доверительных множеств с заданной доверительной вероятностью. Использован модифицированный метод  $k$ -средних кластерного анализа, метод вычисления интервала минимальной длины, содержащего заданное число элементов выборки в одномерном случае и эллипсоида минимального объёма, содержащего заданное число элементов выборки в многомерном случае.

В третьей главе диссертации проведено исследование кусочно-постоянного семимартингала  $W_t^h$  над порождённым винеровским процессом

естественным стохастическим базисом. Кроме этого, в третьей главе приводится численный метод, названный «бинарная аппроксимация со случайным разбиением», с гарантированной погрешностью, который был успешно применён в двух важных задачах: вычисление вероятности невыхода случайного процесса из полосы и гомеостаз. Метод эффективен для уравнений с постоянной волатильностью, либо сводящихся к ним заменой переменных. Также, как следствие, возникла серия моделей эволюции стоимости рискованных активов, названных моделями с пропущенными слагаемыми, что позволило разнообразить формулу Кокса-Росса-Рубинштейна, добавив в неё важный случайный фактор. Желание обойти требование постоянства волатильности привело к вычислительным методам, использующим винеровский процесс со сносом. В первом методе бинарные случайные величины сочетались с пассажами абсолютной величины винеровского процесса со сносом. Во втором – с двумя односторонними пассажами винеровского процесса со сносом. Выбор пассажа при этом осуществлялся бинарной случайной величиной. В первом методе более сложный генератор случайного разбиения, во втором возникает зависимость разбиения от последовательности бинарных случайных величин. С помощью второго метода решалась важная задача формирования оптимального портфеля с дивидендами.

Таким образом, в диссертации получены следующие основные результаты.

В области математического моделирования.

Исследованы следующие математические модели:

1. Модель оптимального управления, позволяющая сформулировать широкий класс задач финансовой математики.

2. Модели с наблюдаемой, ненаблюдаемой разладкой и с неопределённой волатильностью; изучены методы управления в данных моделях.

3.Нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива (робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна, эллипсоидная модель Марковица).

4.Модель эволюции стоимости рискового актива, в которой используется новый случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями и дискретным вмешательством случая (модель Кокса-Росса-Рубинштейна со случайным числом слагаемых).

В области численных методов.

Перечислим новые численные методы:

1.Метод решения задач оптимального управления, основанный на использовании теории мартингалов.

2.Метод обнаружения разладки диффузионного процесса с использованием бинарной аппроксимации и кластеризации бинарного дерева, который в отличие от иных методов допускает управление процессом с разладкой.

3.Метод решения задач оптимального управления для диффузионной модели с неопределённой волатильностью, позволяющий получать гарантированные решения.

4.Проекционный метод кластеризации выборки, превосходящий по эффективности метод  $k$ -средних.

5.Метод построения доверительного множества по выборке. Для одномерных данных метод позволяет найти объединение интервалов минимальной совокупной длины, содержащее заданное число элементов выборки. В случае многомерных данных метод позволяет найти объединение эллипсоидов минимального объёма, содержащее заданное число элементов выборки. Метод особенно эффективен для засоренных выборок, поскольку не реагирует на отдельные выбросы и занимает свое место среди устойчивых методов непараметрической статистики.

6.Метод решения задач оптимального управления для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Предлагаемый метод основан на теории

двойственности. В отличие от классического позволяет получить результат с гарантированной вероятностью.

7.Метод решения задачи построения многошагового динамического портфеля. В предлагаемом методе используется идея рассмотрения портфеля как рискованного актива, доверительное множество возврата которого является объединением интервалов. Поскольку метод позволяет учесть два критерия, то дополнительно ко всему метод можно рассматривать как эффективное решение двухкритериальной проблемы.

8.Метод типа Монте-Карло вычисления математического ожидания для ограниченного функционала, зависящего от траектории супремумного и инфимумного процессов для решения стохастического дифференциального уравнения (3.6). Предлагаемый метод базируется на преобразовании Гирсанова, случайном разбиении, и на стандартных численных методах решения обыкновенного стохастического дифференциального уравнения. Метод превосходит методы Монте-Карло, использующие только стандартные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Главный результат заключается в том, что найден доверительный интервал для оценки погрешности. В стандартных методах оценивается порядок математического ожидания абсолютной величины погрешности.

В области программного обеспечения.

Разработан комплекс программ, предназначенный для решения поставленных в диссертационной работе задач. Описание программного комплекса и анализ эффективности методов и алгоритмов приведены в четвертой главе.

## Список литературы.

1. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики: монография / Ширяев А. Н. – Москва: ФАЗИС, 1998. – 512 с. – ISBN 5-7036-0043-X.
2. Black, F. The pricing of options and corporate liabilities / Black F., Scholes M. // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, No. 3. – P. 637-654.
3. Merton, R. Theory of rational option pricing / R. Merton // Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – Vol. 4, No. 1. – P. 141-183.
4. Nelson, D. Simple binomial processes as diffusion approximation in financial models / Nelson D., Ramaswamy K. // Review of Financial Studies. – 1990. – Vol. 3, No. 3 – P. 393-430.
5. Cox, J. Option pricing: a simplified approach / Cox J., Ross S., Rubinstein M. // Journal of Financial Economics. – 1979. – Vol. 7, No. 3. – P. 229-263.
6. Jarrow, R. Option pricing. / Jarrow R., Rudd A. – Irwin:Homewood, 1983. – 235 p.
7. Hsia, C. On binomial option pricing / Hsia C. // Journal of Financial Research – 1983. – Vol. 6, No. 1. – P. 41-46.
8. Tian, Y. A modified lattice approach to option pricing / Tian Y. // Journal of Futures Markets. – 1993. – Vol. 13, No. 5. – P.563-577.
9. Leisen, D. Binomial models for option valuation – examining and improving convergence / Leisen D., Reimer M. // Applied Mathematical Finance. – 1995. – Vol. 3, No. 4. – P. 319-346.
10. Heston, S. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims / Heston S., Zhou G. // Mathematical Finance. – 2000. – Vol. 10, No. 1. – P. 53-75.
11. Joshi, M. Achieving higher order convergence for the prices of European options in binomial trees / Joshi M. // Mathematical Finance. – 2010. – Vol. 20, No. 1. – P. 89-103.
12. Xiaoyong, X. Improving speed of convergence for the prices of European options in binomial trees with even numbers of steps / Xiaoyong X. // Applied Mathematics and Computation. – 2010. – Vol. 216, No. 9. – P. 2659-2670.

- 13.Ширяев, А.Н. Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени / Ширяев А.Н. // Успехи математических наук. – 1996. – Т. 51, № 4. – С. 173-174.
- 14.Shiryaev, A. Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data / Shiryaev A. // Mathematical Finance. – 2000. – P. 487-521.
- 15.Peskir, G. Optimal stopping and free-boundary problems / Peskir G., Shiryaev A. – Basel, 2006. – 500 p.
- 16.Gapeev P. The Wiener disorder problem with finite horizon / Gapeev P., Peskir G. // Stochastic Processes and their Applications. – 2006. – Vol. 116, No. 12. – P. 1770-1791.
- 17.Hadjiliadis, O. Quickest Detection / Hadjiliadis O., Poor H. – Cambridge University Press, 2008. – 229 p.
- 18.Shiryaev, A. On the linear and nonlinear generalized Bayesian disorder problem (discrete time case) / Shiryaev A., Zryumov P. // Optimality and Risk-Modern Trends in Mathematical Finance. – 2009. – P. 227-236.
- 19.Житлухин, М.В. Задачи об оптимальной остановке для броуновского движения с разладкой на отрезке / Житлухин М.В., Ширяев А.Н. // Теория вероятностей и её применения. – 2013. – Т. 58, № 1. – С. 193-200.
- 20.Oudrec, L. A review of change point detection methods / Truonga C., Oudrec L., Vayatsia N. – 2018. – arXiv: 1801.00718v1 [cs.CE].
- 21.Мельников, А.В. Математика финансовых обязательств / Мельников А.В., Волков С.В., Нечаев М.Л. – ВШЭ, 2001. – 260 с.
- 22.Фёльмер, Г. Стохастические финансы. Введение в дискретное время / Фёльмер Г., Шид А. – М.:МЦНМО, 2008. – 496 с. – ISBN 978-5-94057-346-3.
- 23.Markowitz, H. Portfolio selection / Markowitz H. // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, No. 1. – P. 77-91.
- 24.Rockafellar, R. Optimization of conditional value-at-risk / Rockafellar R., Uryasev S. // Journal of Risk. – 2000. – Vol. 2, No. 3. – P. 21-42.
- 25.Ben-David, S. Understanding machine learning: From theory to algorithms / Ben-David S., Shalev-Shvartz S. – Cambridge University Press, 2014. – 449 p.
- 26.Bilokon, P. Machine learning in finance / Bilokon P., Dixon M., Halperin I. // Financial Markets and Portfolio Management. – 2021. – Vol. 35. – P. 555-557.

27. Johnson H. Option pricing when the variance is changing / Johnson H., Shanno D. // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. – 1987. – Vol. 22, No. 2. – P. 143-151.
28. Hull, J. The pricing of options on assets with stochastic volatilities / Hull J., White A. // *Journal of Finance*. – 1987. – Vol. 42, No. 2. – P. 281-300.
29. Scott, L. Option pricing when the variance changes randomly. Theory, estimation and an application / Scott L. // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. – 1987. – Vol. 22, No. 4. – P. 419-438.
30. Stein, E. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach / Stein E., Stein J. // *Review of Financial Studies*. – 1991. – Vol. 4, No. 4. – P. 727-752.
31. Avellaneda, M. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities / Avellaneda M., Levy A., Paras A. // *Applied Mathematical Finance*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 73-88.
32. Meyer, G. The Black-Scholes Barenblatt equation for options with uncertain volatility and its application to static hedging / Meyer G. // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. – 2006. – Vol. 9, No. 5. – P. 673-703.
33. Peng, S. G-Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty / Peng S. – 2007. – arXiv: 0711.2834v1.
34. Rokhlin, D. Central limit theorem under uncertain linear transformations / Rokhlin D. // *Statistics and Probability Letters*. – 2015. – Vol. 107. – P. 191-198.
35. Heston, S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options / Heston S. // *Review of Financial Studies*. – 1993. – Vol. 6, No. 2. – P. 327-343.
36. Shreve, S. *Stochastic calculus for finance* / Shreve S. – Springer, 2004.
37. Rudloff, B. A generalized Neyman-Pearson lemma for hedge problems in incomplete markets / Rudloff B. // *Stochastic Analysis*. – 2004. – P. 241-249.
38. Boyd, S. *Convex optimization* / Boyd S., Vanderberghe L. – Cambridge University Press, 2004. – 716 p.
39. Lin, Q. The Tychonoff uniqueness theorem for the G-heat equation / Lin Q. – 2011. – arXiv: 1006.5300v2[math.PR].

40. Bayraktar, E. Stochastic Perrons method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations / Bayraktar E., Sirbu M. // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2013. – Vol. 51, No. 6. – P. 4274-4294.
41. Смирнов, С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: соотношение «детерминистской» и «вероятностной постановок» при отсутствии торговых соотношений / Смирнов С. Н. // *Теория вероятностей и её применения*. – 2022. – Т. 67, № 4. – С. 688-716.
42. Aubin, J. The interval market model in mathematical finance: game theoretic methods / Aubin J., Bernhard P., Engwerda J., Kolokoltsov V., Roorda B., Saint-Pierre P., Schumacher J. – Basel: Birkhauser, 2013. – 346 p.
43. Robert, G. Robust estimation and testing / Robert G., Sheather J., Staudte S. – Wiley, 2011. – 376 p.
44. Wilcox, R. Introduction to robust estimation and hypothesis testing. – / Wilcox R. – Academic Press, 2013. – 690 p.
45. Wozabal, D. A framework for optimization under ambiguity / Wozabal D. // *Annals of Operations Research*. – 2012. – Vol. 193. – P. 21-47.
46. Ben-Tal, A. Robust optimization / Ben-Tal A., Ghaoui L., Nemirovski A. – Princeton University Press, 2009. – 576 p.
47. Ben-Tal, A. Robust convex optimization / Ben-Tal A., Nemirovski A. // *Mathematics of Operations Research*. – 1998. – Vol. 23, No. 4. – P. 769-805.
48. Kuhn, D. Distributionally robust convex optimization / Kuhn D., Sim M., Wiesemann W. // *Operations Research*. – 2014. – Vol. 62, No. 6. – P. 1358-1376.
49. Yang, I. A convex optimization approach to distributionally robust Markov decision processes with Wasserstein distance / Yang I. // *IEEE Control Systems Letters*. – 2017. – Vol. 1, No. 1. – P. 164-169.
50. Aghassi, M. Robust game theory / Aghassi M., Bertsimas D. // *Mathematical Programming*. – 2006. – Vol. 107. – P. 231-273.
51. Frazzoli, E. Distributed robust adaptive equilibrium computation for generalized convex games / Frazzoli E., Zhu M. // *Automatica*. – 2016. – Vol. 63. – P. 82-91.
52. Cesa-Bianchi, N. Prediction, learning and games / Cesa-Bianchi N., Lugosi G. – Cambridge University Press, 2006. – 394 p.

- 53.Hembold D. Online portfolio selection using multiplicative updates / Hembold D., Schapire R., Singer Y., Warmuth M. // *Mathematical Finance*. – 1998. – Vol. 8, No. 4. – P. 325-347.
- 54.Gaivoronski, A. Stochastic non-stationary optimization for finding universal portfolios / Gaivoronski A., Stella F. // *Annals of Operations Research*. – 2000. – Vol. 100. – P. 165-188.
- 55.Pflug, G. Ambiguity in portfolio selection / Pflug G., Wozabal D. // *Quantitative Finance*. – 2007. – Vol. 7, No. 4. – P. 435-442.
- 56.Adams, N. Robust and adaptive algorithms for online portfolio selection / Adams N., Jasra A., Tsagaris T. // *Quantitative Finance*. – 2010. – Vol. 12, No. 11. – P. 1651-1662.
- 57.Bandi, C. Robust option pricing / Bandi C., Bertsimas D. // *European Journal of Operational Research*. – 2014. – Vol. 239, No. 3. – P. 842-853.
- 58.Hou, D. A robust Markowitz mean-variance portfolio selection model with an intractable claim / Hou D., Xu Q. // *SIAM Journal on Financial Mathematics*. – 2016. – Vol. 7, No. 1. – P. 124-151.
- 59.Dochow, R. Online algorithms for the portfolio selection problem / Dochow R. – Springer, 2016. – 211 p.
- 60.Kim, H. Recent advancements in robust optimization for investment management / Kim H., Kim C., Fabozzi F. // *Annals of Operations Research*. – 2018. – Vol. 266, No.1. – P. 183-198.
- 61.Pflug, G. A review on ambiguity in stochastic portfolio optimization / Pflug G., Pohl M. // *Set-Valued and Variational Analysis*. – 2017. – Vol. 26. – P. 733-757.
- 62.Steinbach, M. Markowitz revisited: mean-variance models in financial portfolio analysis / Steinbach M. // *SIAM Review*. – 2001. – Vol. 43, No. 1. – P. 31-85.
- 63.Brandt, M. Portfolio choice problems / Brandt M. // *Handbook of Financial Econometrics:Tools and Techniques*. – 2010. – Vol. 1. – P. 269-336.
- 64.Fabozzi, F. Robust portfolios: contributions from operations research and finance / Fabozzi F., Huang D., Zhou G. // *Annals of Operations Research*. – 2010. – Vol. 176, No. 1. – P. 191-220.
- 65.Konno, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market / Konno H., Yamazaki H. // *Management Science*. – 1991. – Vol. 37, No. 5. – P. 519-531.

66. Rockafellar, R. Optimization of conditional value-at-risk / Rockafellar R., Uryasev S. // *Journal of Risk*. – 2000. – Vol. 2, No. 3. – P. 21-42.
67. Basak, S. Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices / Basak S., Shapiro A. // *Review of Financial Studies*. – 2001. – Vol. 14, No. 2. – P. 371-405.
68. Duda R., Hart P., Stork D. Pattern classification / Duda R., Hart P., Stork D. – Wiley, 2001. – 688 p.
69. Главач, В. Десять лекций по структурному и статистическому распознаванию образов / Главач В., Шлезингер М. – Наукова думка, 2004. – 535 с.
70. Oded, M. The data mining and knowledge discovery handbook / Oded M., Rokach L. – Springer US, 2005. – 1383 p.
71. Bishop, C. Pattern recognition and machine learning / Bishop C. – Springer, 2006. – 738 p.
72. Ben-David, S. A theory of learning from different domains / Ben-David S., Blitzer J., Crammer K., Kulesza A., Pereira F., Vaughan J. // *Machine Learning*. – 2010. – Vol. 79. – P. 151-175.
73. Orabona, F. A modern introduction to online learning / Orabona F. – 2020. – arxiv: 1912.13213v2[cs.LG].
74. Gallegos, M. Outliers in statistical pattern recognition and an application to automatic chromosome classification / Gallegos M., Gunter R. // *Pattern Recognition Letters*. – 1997. – Vol. 18. – P. 525-539.
75. Garcia-Escudero, L. Robustness properties of k-means and trimmed k-means / Garcia-Escudero L., Gordaliza A. // *Journal of the American Statistical Association*. – 1999. – Vol. 94, No. 447. – P. 956-969.
76. Gallegos, M. A robust method for cluster analysis / Gallegos M., Ritter G. // *Annals of Statistics*. – 2005. – Vol. 33, No. 1. – P. 347-380.
77. Godichon-Baggioni, A. A robust model-based clustering based on the geometric median and the median covariation matrix / Godichon-Baggioni A, Robin S. – 2022. – arXiv:2211.08131[stat.ME].

78. Khachiyan, L. Rounding of polytopes in the real number model of computation / Khachiyan L. // *Mathematics of Operations Research*. – 1996. – Vol. 21, No. 2. – P. 307-320.
79. Rousseeuw, P. A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator / Rousseeuw P., Van Driessen K. // *Technometrics*. – 1999. – Vol. 41. – P. 212-223.
80. Freud, R. Computation of minimum-volume covering ellipsoids / Freud R., Sun P. // *Operations Research*. – 2004. – Vol. 52, No. 5. – P. 690-706.
81. Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Оксендаль Б. – М.: Мир, 2003. – 408 с.
82. Ватанабе, К. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ватанабе К. – М.: Наука, 1986. – 445 с.
83. Белявский, Г. И. Процессы Леви. Краткий курс / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 193-289.
84. Applebaum, D. Levy processes and stochastic calculus / Applebaum D. – Cambridge university press, 2009. – 460 p.
85. Kyprianov, A. Introductory lectures on fluctuations of Levy processes with applications / Kyprianov A. – Springer, 2006. – 378 p.
86. Carr, P. Randomization and the American put / Carr P. // *Review of Financial Studies*. – 1998. – Vol. 11, No. 3. – P. 597-626.
87. Kuznetsov, A. A Wiener-Hopf Monte-Carlo simulation technique for Levy processes / Kuznetsov A., Kyprianou A., Pardo J., van Schaik K. // *Annals of Applied Probability*. – 2011. – Vol. 21, No. 6. – P. 2171-2190.
88. Chen, N. Monte-Carlo simulation in financial engineering / Chen N., Jeff Hong L. // *Proceedings of the 2007 winter simulation conference*, eds. IEEE. – 2007. – P. 919-931.
89. Kloeden, P. Numerical solution of stochastic differential equations / Kloeden P., Platen E. – Springer, 1992. – 636 p.
90. Kudryavtsev, O. Approximate Wiener-Hopf factorization and Monte-Carlo method for Levy processes / Kudryavtsev O. // *Theory of probability and its applications*. – 2019. – Vol. 64, No. 2. – P. 186-208.

91. Ширяев, А.Н. Броуновское движение и винеровская мера / Ширяев А.Н. – М.: МЦМНО, 2023. – 528 с.
92. Kuznetsov, D. On numerical modeling of the multidimensional dynamic systems under random perturbations with the 2.5 order of strong convergence / Kuznetsov D. // Automation and remote control. – 2018. – Vol. 79, No. 7. – P. 1240-1254.
93. Гирсанов, И. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры / Гирсанов И. // Теория вероятностей и её применения. – 1960. – Т. 5, № 3. – С. 314-330.
94. Жакод, Ж. Предельные теоремы для случайных процессов / Жакод Ж., Ширяев А. – М.: Физматлит, 1994. – 912 с.
95. Ширяев, А.Н. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением / Ширяев А.Н. // Современные проблемы математики. – 2007. – В. 8. – С. 3-78.
96. Milstein, G. Approximate integration of stochastic differential equations / Milstein G. // Theory of probability and its applications. – 1974. – Vol. 19, No. 3. – P. 583-588.
97. Casella, G. Generalized accept-reject sampling schemes / Casella G., Christian R., Wells M. // Institute of Mathematical Statistics. – Vol. 45. – 2004. – P. 342-347.
98. Ширяев, А.Н. Вероятность-2 / Ширяев А.Н. – М.: МЦМНО, 2021. – 416 с.
99. Ferreiro-Castilla, A. Multilevel Monte-Carlo simulation for Levy processes based on the Wiener-Hopf factorization / Ferreiro-Castilla A., Kyprianou A., Scheichl R., Suryanarayana G. // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – Vol. 124, No. 2. – P. 985-1010.
100. Burrage, K. High strong order explicit Runge-Kutta method for stochastic ordinary differential equations / Burrage K., Burrage P. // Applied Numerical Mathematics. – 1996. – Vol. 22. – P. 81-101.
101. Lukacs, E. Characteristic functions / Lukacs E. – Hafner Publishing Company, 1960. – 216 p.
102. Pascucci, A. PDE and martingal methods in option pricing / Pascucci A. – Springer, 2011. – 721 p.

103. Dunn, R. Estimating option prices with Heston's stochastic volatility model / Dunn R., Hauser P., Seibold T., Gong H. – 2014.

104. Белявский, Г. И. Среднеквадратичное хеджирование для одной модели неполного рынка с двумя источниками случайности / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2009. – № 3(35). – С. 129-134.

105. Белявский, Г. И. Вычисление справедливой цены финансового обязательства для дискретного и непрерывного случаев, когда параметры модели (B,S)-рынка изменяются в случайный момент времени / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, С. С. Сушко // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2010. – № 6(160). – С. 5-8.

106. Данилова, Н. В. Параллельный алгоритм расчёта справедливой цены Европейского опциона / Н. В. Данилова, Б. Я. Штейнберг, Л. Н. Фоменко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2011. – № 3(126). – С. 115-118.

107. Данилова, Н. В. Определение справедливой цены для одной модели (B,S)-рынка с дивидендами / Н. В. Данилова, Т. А. Гробер // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2013. – № 2(169). – С. 86-90.

108. Белявский, Г. И. Случайные блуждания с пропущенными слагаемыми / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Н. Д. Никоненко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т.16, № 4(56). – С. 21-28.

109. Белявский, Г. И. Расчёт справедливой цены Европейского опциона продажи с последствием для диффузионной модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2014. – № 6(184). – С. 12-15.

110. Белявский, Г. И. Вычисление капитала оптимального портфеля с помощью комбинированного метода Монте-Карло в нелинейных моделях финансовых индексов / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – № 11. – С. 1021-1034.

111. Белявский, Г. И. Расчёт справедливой цены Европейского опциона в модели (B,S)-рынка с барьером, основанной на случайном блуждании / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-

Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2015. – № 4(188). – С. 25-28.

112.Белявский, Г. И. Расчёт справедливой цены барьерного опциона в модели (B,S)-рынка с переключением параметров / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2016. – № 1(189). – С. 11-16.

113.Данилова, Н. В. Расчёт интервала справедливых цен для бинарной модели (B,S)-рынка с волатильностью, являющейся марковской цепью / Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2016. – № 4(192). – С. 17-20.

114.Белявский, Г. И. Эволюционное моделирование в задачах управления устойчивым развитием активных систем / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Г. А. Угольницкий // Математическая теория игр и её приложения. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 14-29.

115.Беляева, М. С. Расчёт справедливой цены для диффузионной модели со стохастической процентной ставкой / М. С. Беляева, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2017. – № 3-1(195-1). – С. 4-7.

116.Данилова, Н. В. Прогнозирование ожидаемых значений финансовых индексов / Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2018. – № 1(197). – С. 15-19.

117.Belyavsky, G. A Markovian mechanism of proportional resource allocation in the incentive model as a dynamic stochastic inverse Stackelberg game / G. Belyavsky, N. Danilova, G. Ougolnitsky // Mathematics. – 2018. – Vol. 6, No. 8. – P. 131-140. – DOI 10.3390/math6080131.

118.Beliavsky, G. I. Evolutionary methods for solving dynamic resource allocation problems / G. I. Beliavsky, N. V. Danilova, G. A. Ougolnitsky // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80, No. 7. – P. 1335-1346. – DOI 10.1134/S0005117919070105.

119.Belyavskii, G. I. Optimal control problems with disorder / G. I. Belyavskii, N. V. Danilova, I. A. Zemlyakova // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80, No. 8. – P. 1419-1427. – DOI 10.1134/S0005117919080046.

120.Данилова, Н. В. Квантильное хеджирование на неполном рынке / Н. В. Данилова, И. А. Землякова // Известия высших учебных заведений. Северо-

Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2019. – № 2(202). – С. 4-9.  
– DOI 10.23683/0321-3005-2019-2-4-9.

121. Beliaevsky, G. Calculation of probability of the exit of a stochastic process from a band by Monte-Carlo method: a Wiener-Hopf factorization / G. Beliaevsky, N. Danilova, G. Ougolnitsky // *Mathematics*. – 2019. – Vol. 7, No. 7. – P. 581-588.  
– DOI 10.3390/math7070581.

122. Belyavsky, G. I. Random search methods for the solution of a Stackelberg game of recourse allocation / G. I. Belyavsky, N. V. Danilova // *Contributions to game theory and management*. – 2019. – Vol. 12. – P. 37-48.

123. Белявский, Г. И. Обучение без учителя и робастная оптимизация в задаче о портфеле / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, А. Д. Логунов // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. – 2020. – № 4(208). – С. 4-9. – DOI 10.18522/1026-2237-2020-4-4-9.

124. Danilova, N. Optimal control in binary models with the disorder / N. Danilova, G. Beliaevsky, I. Zemlyakova // *Engineering Letters*. – 2021. – Vol. 29, No. 4. – P. 1359-1364.

125. Beliaevsky, G. I. Robust estimation of European and Asian options / Beliaevsky G. I., Danilova N. V., Logunov A. D. // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2021. – Vol. 357. – P. 101-117.

126. Белявский, Г. И. Управление в бинарных моделях с разладкой / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 67-82. – DOI 10.14529/mmp220305.

127. Beliaevsky, G. Optimal portfolio and confidence set / Beliaevsky G., Danilova N. // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2022. – Vol. 266, No. 2. – P. 251-257.

128. Данилова, Н. В. Метод дихотомической кластеризации и оптимальный портфель / Н. В. Данилова, Д. И. Житников // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. – 2022. – № 2(214). – С. 15-20. – DOI 10.18522/1026-2237-2022-2-15-20.

129. Белявский, Г. И. Аппроксимация супремумных и инфимумных процессов как стохастический подход к выполнению требований гомеостаза / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Г. А. Угольницкий // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. – 2022. – Т. 18, № 1. – С. 5-17. – DOI 10.21638/11701/spbu10.2022.101.

130.Белявский, Г. И. Модели с неопределённой волатильностью / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, № 3. – С. 5-19. – DOI 10.14529/mmp230301.

131.Belyavsky, G. I. A model to coordinate interests in investment management / G. I. Belyavsky, N. V. Danilova, G. A. Ougolnitsky // International Game Theory Review. – 2023. – Vol. 25, No. 1. – Art No 2350002 (p. 1-12). – DOI 10.1142/s0219198923500020.

132.Kudryavtsev, O. Applications of artificial neural networks to simulating Levy processes / O. Kudryavtsev, N. Danilova // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 271, No. 4. – P. 421-433. – DOI 10.1007/s10958-023-06580-1.

133.Kudryavtsev, O. Methods for solving contemporary computational finance problems: applying Levy models and machine learning / Kudryavtsev O., Danilova N., Grechko A. // Stochastic Modeling and Computational Sciences. – 2023. – Vol. 3, No. 2. – P. 215-249. – DOI 10.61485/smcs.27523829/v3n2p5.