На правах рукописи

Данилова Наталья Викторовна

Методы решения задач оптимального управления для робастных бинарных моделей финансовой математики

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Ростов-на-Дону

2025

Работа выполнена в Южном федеральном университете

Научный консультант:

Белявский Григорий Исаакович, доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты:

1.**Гликлих Юрий Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

2.**Насыров Фарит Сагитович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований Уфимского университета науки и технологий

3.**Чупрунов Алексей Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дискретной математики и информатики факультета прикладной математики, физики и информационных технологий Чувашского государственного университета им И.Н.Ульянова

Защита состоится 24 апреля 2025 года в 16.30 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.09 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю.А.Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21Ж и на сайте по ссылке: https://hub.sfedu.ru/diss/show/1336495/

Автореферат разослан «_____»__________2025г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Учёный секретарь диссертационного совета,

д.ф.-м.н., профессор Говорухин В.Н.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы исследования.

Одним из следствий развития информационных технологий является доступность больших объёмов данных, анализ которых позволяет применять сложные модели, которые раньше не использовались в математическом моделировании. Диссертационное исследование посвящено изучению следующих актуальных задач. Прежде всего, исследование моделей управления случайными процессами и временными рядами, в которых учитывается возможность влияния случайных факторов на поведение случайных процессов и временных рядов, то есть изучаются модели, функционирующие в случайных средах. Далее изучаются робастные модели случайных процессов и временных рядов, тесно связанные с поведением моделей в случайных средах. Изучение связи дискретных и непрерывных моделей через субординацию времени позволяет заложить теоретическую основу для новых численных методов типа Монте-Карло. Среди актуальных прикладных задач рассмотрены задачи, относящиеся к финансовой математике и стохастический гомеостаз. В области финансовой математики получены новые формулы типа Блэка-Шоулса, Кокса-Росса-Рубинштейна и Марковица. Для расчёта стохастического гомеостаза получен эффективный метод вычисления вероятности невыхода случайного процесса из полосы.

В 1973 году Ф. Блэком, М. Шоулсом и Р. Мертоном была предложена стандартная диффузионная модель (B,S)-рынка. Одним из основных недостатков стандартной модели является то, что коэффициенты сноса и волатильности постоянны. В действительности они случайно меняются со временем. В первой главе диссертации рассматриваются модели, в которых параметры модели Блэка-Шоулса зависят от случайной среды. Данные модели относятся к стохастическим робастным моделям эволюции стоимости рискового актива и разделяются на три класса: модели с наблюдаемой разладкой, модели с ненаблюдаемой разладкой и модели с неопределённой волатильностью. В случае наблюдаемой разладки параметры сноса и волатильности задаются с помощью возрастающей последовательности моментов остановки, с вероятностью единица стремящихся к бесконечности, и двумя детерминированными последовательностями с неравными нулю элементами. Для этой модели решается задача оптимального управления с симметричным (среднеквадратичное хеджирование) и несимметричным (квантильное хеджирование) критериями. В случае ненаблюдаемой разладки используется специальная бинарная последовательность, которая аппроксимирует диффузионный процесс и рассматривается как случайное блуждание по вершинам бинарного дерева. Основной результат заключается в замене разладки на момент остановки случайного блуждания, разделяющий вершины дерева на два класса, а именно, остановкой является минимальный момент времени, в который случайное блуждание оказывается в вершине первого класса. Этот приём позволяет рассматривать задачу управления как задачу управления на раскрашенном дереве и, в частности, получить формулу типа Кокса-Росса-Рубинштейна с разладкой. Актуальность этого результата является очевидной, поскольку получен метод, позволяющий управлять случайным процессом вблизи случайного пика или случайной впадины. В случае неопределённой волатильности параметр сноса является постоянным, а параметр волатильности принадлежит некоторому заданному интервалу. Эти модели относятся к робастным моделям, и при решении задач управления получены «осторожные» решения, что при определённых условиях является актуальным. В частности, получена «осторожная» формула Кокса-Росса-Рубинштейна с гарантированным с заданной вероятностью риском.

Использование доверительных множеств, которому принадлежат параметры моделей, очень часто предпочтительней точечных оценок этих параметров. В связи с этим в диссертации рассматривается задача оптимального покрытия обучающей выборки либо объединением интервалов в одномерном случае, либо объединением эллипсоидов в многомерном варианте, которая является актуальной в связи с качественным обобщением модели Кокса-Росса-Рубинштейна и модели Марковица. Необходимость такого обобщения вызвана появлением новых стандартов измерения рисков, например, VaR. В этих моделях естественным образом соединяется стохастический анализ и робастное программирование – актуальные направления математического моделирования за последние десятилетия.

Еще одной постоянно актуальной проблемой является проблема численного решения стохастического дифференциального уравнения. В третьей главе диссертации предложен метод бинарной аппроксимации со случайным разбиением времени. Следует выделить два основных преимущества представленного метода. Во-первых, найдена оценка погрешности приближения в виде доверительного интервала для важного класса дифференциальных уравнений. Во-вторых, предложенный метод позволяет вычислять математическое ожидание от ограниченных функционалов, зависящих от траекторий супремумного и инфимумного процессов для процесса, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения, что для стандартных методов решения стохастических дифференциальных уравнений является задачей нерешённой. В частности, предложенный метод позволяет вычислять вероятность невыхода случайного процесса из заданной полосы, что также является актуальным в связи со стохастическим гомеостазом.

Таким образом, в результате исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, а именно:

–решение задач управления случайными процессами в случайных средах;

–решение задач минимаксного робастного управления случайными процессами, параметры которых принадлежат доверительным множествам, возникающим в результате применения методов непараметрической статистики;

–открытие нового случайного процесса, потраекторно близкого к броуновскому движению, существенно упрощающего моделирование супремумных и инфимумных процессов, играющих ключевую роль в анализе устойчивого развития широкого класса динамических систем.

Цели и задачи диссертационной работы.

Основной целью данной работы является исследование стохастических и нестохастических робастных моделей процессов, а также приспособленных для этих моделей методов оптимального управления и разработка комплекса программ для реализации этих численных методов.

Основная цель воплотилась в решение конкретных **задач**:

1.Задача оптимального управления для стохастических и нестохастических робастных моделей процессов.

2.Задача вычисления доверительных множеств по выборке для параметров моделей в рамках непараметрической статистики.

3.Задача вычисления математического ожидания ограниченного функционала, зависящего от траектории супремумного и инфимумного процессов для решения стохастического дифференциального уравнения.

Методология исследования.

Для выполнения поставленных выше целей использовались:

1.Численные и аналитические методы.

2.Методы и результаты теории вероятностей и математической статистики.

3.Методы решения оптимизационных задач. Методы робастной оптимизации.

4.Методы и результаты стохастического анализа.

5.Методы и результаты кластерного анализа.

6.Методы и результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Программная реализация методов и алгоритмов была осуществлена с помощью системы компьютерной алгебры Maple.

Научную новизну составляют **положения, выносимые на защиту**.

В каждом положении указывается соответствующий параграф диссертации, в котором это положение изложено.

В области математического моделирования.

Исследованы следующие математические модели:

1.Модель оптимального управления, позволяющая сформулировать широкий класс задач финансовой математики (п.1.1).

2.Модели с наблюдаемой (п.1.2), ненаблюдаемой (п.1.3) разладкой и с неопределённой волатильностью (п.1.4.2); изучены методы управления в данных моделях.

3.Нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива (робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна (п.2.2), эллипсоидная модель Марковица (п.2.3)).

4.Модель эволюции стоимости рискового актива, в которой используется новый случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями и дискретным вмешательством случая (модель Кокса-Росса-Рубинштейна со случайным числом слагаемых (п.3.11)).

В области численных методов.

Перечислим новые численные методы:

1.Метод решения задач оптимального управления, основанный на использовании теории мартингалов (п.1.1).

2.Метод обнаружения разладки диффузионного процесса с использованием бинарной аппроксимации и кластеризации бинарного дерева, который в отличие от иных методов допускает управление процессом с разладкой (п.1.3).

3.Метод решения задач оптимального управления для диффузионной модели с неопределённой волатильностью, позволяющий получать гарантированные решения (п.1.4.2).

4.Проекционный метод кластеризации выборки, превосходящий по эффективности метод k-средних (п.2.1).

5.Метод построения доверительного множества по выборке. Для одномерных данных метод позволяет найти объединение интервалов минимальной совокупной длины, содержащее заданное число элементов выборки. В случае многомерных данных метод позволяет найти объединение эллипсоидов минимального объёма, содержащее заданное число элементов выборки. Метод особенно эффективен для засоренных выборок, поскольку не реагирует на отдельные выбросы и занимает свое место среди устойчивых методов непараметрической статистики (п.2.1).

6.Метод решения задач оптимального управления для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Предлагаемый метод основан на теории двойственности. В отличии от классического позволяет получить результат с гарантированной вероятностью (п.2.2).

7.Метод решения задачи построения многошагового динамического портфеля. В предлагаемом методе используется идея рассмотрения портфеля как рискового актива, доверительное множество возврата которого является объединением интервалов. Поскольку метод позволяет учесть два критерия, то дополнительно ко всему метод можно рассматривать как эффективное решение двухкритериальной проблемы (п.2.3).

8.Метод типа Монте-Карло вычисления математического ожидания для ограниченного функционала, зависящего от траектории супремумного и инфимумного процессов для решения стохастического дифференциального уравнения. Предлагаемый метод базируется на преобразовании Гирсанова, случайном разбиении, и на стандартных численных методах решения обыкновенного стохастического дифференциального уравнения. Метод превосходит методы Монте-Карло, использующие только стандартные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Главный результат заключается в том, что найден доверительный интервал для оценки погрешности. В стандартных методах оценивается порядок математического ожидания абсолютной величины погрешности (п.3.3).

В области программного обеспечения.

Разработан комплекс программ, предназначенный для решения поставленных в диссертационной работе задач. Описание программного комплекса и анализ эффективности методов и алгоритмов приведены в четвёртой главе.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертационная работа носит теоретический характер, относится к фундаментальным исследованиям и позволяет решить сложные и важные задачи управления случайными процессами с параметрами, меняющимися в случайные моменты времени. Она выполнялась в рамках проектов Южного федерального университета (213.01-07.2014/07-ПЧВГ) и Российского научного фонда (17-19-01038). Построенные новые численные методы, алгоритмы, созданные комплексы программ достаточно универсальны и применимы для решения многих теоретических и прикладных задач.

Программный комплекс «Программа дихотомической кластеризации выборки на основе проективного метода k-средних» зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности: свидетельство №2024619352, дата регистрации 23.04.2024 г. (автор: Данилова Н.В.).

Практическая значимость работы определяется тем, что полученные результаты могут применяться не только в финансовой математике, но и в других областях, где присутствуют нестационарные случайные процессы, к примеру, процессы со сменой режимов, доверительные множества и стохастический гомеостаз. Результаты, полученные в диссертации, используются при чтении курсов в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета, таких, как «Методы оптимизации и исследование операций», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Стохастическая финансовая математика», «Анализ временных рядов», «Эконометрика», «Задачи оптимального управления».

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность полученных в диссертационном исследовании результатов основывается на строгих доказательствах представленных утверждений и теорем; подтверждении теоретических выкладок численными расчётами; представлении результатов диссертационного исследования на различных научных конференциях и научных семинарах.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались на международных и всероссийских симпозиумах, конференциях и семинарах: «Advanced Finance and Stochastics», Москва, 2013; «Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова», Москва, 2023; Всероссийский семинар «Избранные вопросы финансовой математики», приуроченный к 120-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова, Москва, 2023; Научный семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», Москва, 2022; «Nonlinear PDEs and Financial Mathematics», Циттау, Германия, 2015; «Международный стохастический семинар Бранденбургского технического университета», Котбус, Германия, 2021; «Современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа», Ростов-на-Дону, 2021, 2022, 2023; «Международная научная конференция по стохастическим методам», Дивноморск, 2022, 2023, 2024; «Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике», Сочи, 2009, 2013, 2019, 2020, 2022; «Транспорт», Ростов-на-Дону, 2011, 2013, 2014, 2015, 2016; «Инфоком», Ростов-на-Дону, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017; «Технологии информационного общества», Москва, 2017; «Статистика – язык цифровой цивилизации», Ростов-на-Дону, 2018.

Публикации.

Результаты диссертационного исследования опубликованы в 59 работах. Из них 5 статей опубликованы в научных журналах, входящих в Перечень ВАК; 18 статей опубликованы в научных изданиях, входящих в Scopus, Web of Science, RSCI; 13 статей опубликованы в журналах, индексированных в РИНЦ. Все публикации соответствуют научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации некоторых результатов проводилась совместно с соавторами. В совместных публикациях с Белявским Г.И. постановки задач сформулированы совместно; разработка численных методов, программных комплексов, получение, обработка и анализ численных результатов принадлежит соискателю. В совместных работах с Угольницким Г.А., Угольницкому Г.А., как руководителю гранта, принадлежит формулировка направления исследования; остальное принадлежит Белявскому Г.И. и Даниловой Н.В. в пропорциях, описанных ранее. В совместной работе с аспиранткой Земляковой И.А. выполнялись стандартные для руководителя функции: постановка задачи, выбор численного метода и контроль за правильным исполнением. В совместных работах со студентами, кроме перечисленных выше функций, проводилось обучение по тематике исследования на примере конкретной задачи.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы (133 наименования). Объём диссертационного исследования составляет 217 страниц, включая 43 рисунка и 36 таблиц.

Содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования; сформулированы цели и задачи; приведена методология исследования; показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов; приведена степень достоверности и апробация результатов; перечислены публикации автора по теме диссертации; указан личный вклад автора; приведена структура и объём диссертации; представлены выносимые на защиту научные положения. Приведён обзор основных работ по тематике исследования, показывающий большое количество актуальных проблем, требующих решения. Проанализированы работы, в которых изучаются процессы с разладкой; бинарная аппроксимация диффузионных процессов; задачи среднеквадратичного и квантильного хеджирования; модели с неопределённой волатильностью; методы робастной статистики и робастной оптимизации и их применение к решению задач об оптимальном портфеле; алгоритмы кластеризации выборки, в том числе засоренной выборки; алгоритмы нахождения доверительного множества по выборке; численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Обосновывается необходимость разработки новых численных методов и алгоритмов для решения рассматриваемых в диссертации задач.

В **первой главе** рассматриваются стохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива, для которых предлагаются численные методы решения разнообразных задач. Но прежде всего в **п.1.1** приводится общая постановка и вычислительная схема решения задачи оптимального управления, которая используется далее в главе при различных расчетах.

Рассмотрим задачу оптимального управления на конечном интервале $[0,T]$ следующего вида:

$$\min_{\sigma_{X/S}, X_0} E\Phi(X_T, \xi) \tag{1}$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_{X/S}(s) dS_s,$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_S(s) ds + \int_0^t \sigma_S(s) dW_s,$$

$$X_0 \le a < E^* \xi.$$

Дискретным, бинарным аналогом задачи (1) является задача следующего вида:

$$\min_{\sigma_{X/S}, X_0} E\Phi(X_N, \xi), \tag{2}$$
$$\Delta X_n = \sigma_{X/S}((n-1)h)\Delta S_n,$$
$$\Delta S_n = \sigma_S((n-1)h)\sqrt{h}Y_n,$$
$$Y_n \in \{-1,1\}, n \in \{1,\dots,N\}, h = T/N,$$
$$P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\mu_S((n-1)h)\sqrt{h}}{2\sigma_S((n-1)h)}, X_0 \le a < E^*\xi.$$

В диссертации сформулированы теоремы, позволяющие найти решения задач (1) и (2). При этом в случае дискретного времени мартингальная мера $P^*(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$. Всюду далее в качестве базового процесса рассматривается процесс S с дифференциалом $dS_t = S_t(\mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW_t)$.

В **п.1.2** рассматриваются модели с наблюдаемой разладкой.

Процессы $\mu_S(t)$ и $\sigma_S(t)$, участвующие в определении базового процесса S, задаются последовательностью моментов остановки $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots,$ с вероятностью единица стремящихся к бесконечности, и двумя детерминированными последовательностями $\overline{\mu}$ и $\overline{\sigma}$ с неравными нулю элементами следующим образом:

$$\mu_S(t) = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \overline{\mu}_i I_{\{\tau_{i-1} < t \le \tau_i\}} + \overline{\mu}_{\kappa_T+1} I_{\{\tau_{\kappa_T} < t \le T\}}, \qquad \sigma_S(t) = \sum_{i=1}^{\kappa_T} \overline{\sigma}_i I_{\{\tau_{i-1} < t \le \tau_i\}} + \overline{\sigma}_{\kappa_T+1} I_{\{\tau_{\kappa_T} < t \le T\}},$$
$$\kappa_T = \sup\{n : \tau_n \le T\}.$$

Рассмотрим модель с двумя барьерами. Пусть задан векторный момент остановки произвольной размерности $\tau = (\tau_i)_{i=1}^{L}$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{L+1} = T$. Для нечётного номера i момент остановки с номером $i+1$ определяется следующим образом: $\tau_{i+1} = \inf(t > \tau_i : S_t = M_2)$, $M_2 < S_0$. Для чётного номера i момент остановки с номером $i+1$ определяется следующим образом: $\tau_{i+1} = \inf(t > \tau_i : S_t = M_1)$, $M_1 > S_0$. Параметры $\mu_S(t) = \overline{\mu}_i, \sigma_S(t) = \overline{\sigma}_i, \tau_{i-1} < t \le \tau_i$.

В диссертации приведены формулы для плотности распределения и обобщённой плотности распределения векторного момента остановки для модели с двумя барьерами в случае непрерывного и дискретного времени.

Для модели с двумя барьерами получены аналитические формулы, не требующие применения вычислительных методов.

В **п.1.3** приведены модели с ненаблюдаемой разладкой. В отличие от наблюдаемой разладки требуется её оценка моментом остановки, поэтому в **п.1.3.1** приведена бинарная постановка и новый вычислительный метод решения задачи обнаружения разладки, сводящийся к раскраске вершин бинарного дерева.

Рассмотрим естественный стохастический базис $\langle \Omega, (F_n)_{n\geq 1}, F, P \rangle$. В базисе пространство элементарных случайных событий Ω – множество бинарных последовательностей $\Omega = (\omega_1, ..., \omega_n, ...)$, элементы фильтрации σ-подалгебры $F_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n, ...)$, σ-алгебра $F = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right)$, P – вероятность. Рассмотрим случайную величину $\theta \in \{1, ..., n, ...\}$, которую будем называть разладкой. Рассмотрим бинарный случайный процесс (бинарную случайную последовательность) Y со значениями $Y_i \in \{0,1\}$ и дискретным временем $i \in \{1, ..., n, ...\}$. Пусть $q_0 = P(Y_n = 1 / n > \theta), q_\infty = P(Y_n = 1 / n \leq \theta)$. В связи с бинарной последовательностью рассмотрим бинарное дерево с набором вершин $\left[\left(A_i^j\right)_{j=0}^{2^i - 1}\right]_{i=0}^{N}$, в котором $A_i^j \to \left\{A_{i+1}^{2j}, A_{i+1}^{2j+1}\right\}$. Рассмотрим произвольный момент остановки τ. Момент остановки разделяет вершины дерева на два класса в соответствии с правилом: вершина A_i^j относится к первому классу (H_1) вершин, если $\tau\left(A_i^j\right) = i$; если A_i^j относится к первому классу, то вершины $A_{i+1}^{2j}, A_{i+1}^{2j+1}$ также относятся к первому классу, естественно, $\tau\left(A_{i+1}^{2j}\right) = \tau\left(A_{i+1}^{2j+1}\right) = i$. Остальные вершины дерева относятся ко второму классу (H_2). Рассмотрим задачу вычисления момента остановки τ, оценивающего разладку θ, который разделяет вершины дерева на два класса – H_1 и H_2.

Введём $\varphi_n = P(\theta \leq n / F_n)$ – последовательность апостериорных вероятностей и $\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{1 - \varphi_n}$ – последовательность отношений правдоподобия.

Последовательность отношений правдоподобия является достаточной статистикой для оценки разладки и может быть использована непосредственно для оценки разладки, например, следующим образом: $\tau = \inf\{n : \psi_n \geq a\}$. С помощью последовательности отношений правдоподобия можно реализовать нечёткую кластеризацию вершин дерева. Будем считать, что принадлежность вершины A_n^i к первому классу является случайным событием, вероятность которого $P(A_n^i \in H_1) = \dfrac{\psi_n(A_n^i)}{1+\psi_n(A_n^i)}$. При нечёткой кластеризации может быть использована схема Монте-Карло. В этом новом вычислительном методе одновременно с вычислением отношений правдоподобия генерируется последовательность независимых равномерно распределённых на интервале $[0,1]$ случайных величин ν_n, и оценка разладки вычисляется следующим образом: $\tau = \inf\left\{n : \nu_n \leq \dfrac{\psi_n}{1+\psi_n}\right\}$. В диссертации получена формула, позволяющая вычислить $\psi_n(Y_1,...,Y_n)$ для дальнейшего использования при раскраске вершин дерева.

В модели Блэка-Шоулса с разладкой процессы $\mu_S(t)$ и $\sigma_S(t)$, участвующие в определении базового процесса S, задаются следующим образом: $\mu_S(t) = \bar{\mu}_1 I(t \leq \theta) + \bar{\mu}_2 I(t > \theta), \sigma_S(t) = \bar{\sigma}_1 I(t \leq \theta) + \bar{\sigma}_2 I(t > \theta)$, при этом дискретная аппроксимация процесса S имеет вид: $\Delta S_n = S_{n-1}\sigma_S((n-1)h)\sqrt{h}Y_n, Y_n \in \{-1,1\}, q_\infty = P(Y_n = 1/ nh \leq \theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\bar{\mu}_1\sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_1}$,

$q_0 = P(Y_n = 1/ nh > \theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\bar{\mu}_2\sqrt{h}}{2\bar{\sigma}_2}$. Данные распределения применяются в вычислительном методе обнаружения разладки в бинарных последовательностях, приведённом ранее в главе, и, следовательно, в сочетании с бинарной аппроксимацией новый метод обнаружения разладки в бинарных последовательностях распространяется на диффузионные модели.

В **п.1.3.2** приводится вычислительный алгоритм редукции NP-полной задачи к P-полной задаче на примере модели Кокса-Росса-Рубинштейна с разладкой. А именно, рассматривается процесс $(S_n)_{n=0}^{N}$: $\Delta S_n = S_{n-1}\rho_n$ где $\rho_n \in \{a,b\}$, $b > a > -1$, $P(\rho_n = b / n \le \theta) = q_\infty$, $P(\rho_n = b / n > \theta) = q_0$. Отметим, что при редукции число необходимых вычислений сокращается с 2^N до N^2, за счёт возможной потери точности.

В **п.1.4** рассматриваются модели со случайной и с неопределённой волатильностью.

В **п.1.4.1** рассматривается модель Хестона, для которой рассматривается краевая задача для вычисления справедливой цены европейского опциона колл и бинарная аппроксимация в качестве альтернативного вычислительного метода.

В **п.1.4.2** рассматриваются модели с неопределённой волатильностью.

Процессы $\mu_S(t)$ и $\sigma_S(t)$, участвующие в определении базового процесса S, задаются следующим образом: $\mu_S(t) = r, \sigma_S(t) = \sigma_t$. При этом для волатильности рассматриваются два случая:

1. $\sigma_t \in \left[\underline{\sigma}, \overline{\sigma}\right]$.

2. $\sigma_t = \sigma_0 \exp\left(\int_0^t \eta_s ds\right), \eta_t \in \left[\underline{\eta}_t, \overline{\eta}_t\right]$.

В процессе решения задач оптимального управления получаются уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, имеющие единственные вязкостные решения. Для решения уравнения применяется новый вычислительный метод, в котором применяется бинарная аппроксимация и рекуррентные формулы на бинарном дереве. Приведена теорема о сходимости решений, полученных с помощью рекуррентных формул, к вязкостным решениям уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана.

В **п.1.5** приводятся примеры.

Вторая глава посвящена нестохастическим робастным моделям эволюции стоимости рискового актива.

В **п.2.1** рассматривается алгоритм построения доверительного множества. Пусть η – доверительная вероятность и V – выборка. Данный алгоритм состоит из двух шагов.

1.Разделить выборку V на кластеры $V_1,\dots,V_k$.

2.Вычислить $L_j = [\eta|V_j|]+1,\ j=1,\dots,k$. В случае одномерных данных в каждом кластере необходимо найти интервал минимальной длины, содержащий L_j элементов. В случае многомерных данных в каждом кластере необходимо найти эллипсоид минимального объёма, содержащий L_j элементов.

При этом для кластеризации многомерных данных был использован модифицированный алгоритм k-средних; для построения эллипсоида минимального объёма был предложен модифицированный алгоритм MCD. Доверительное множество является объединением интервалов в одномерном случае и объединением эллипсоидов в многомерном случае.

Таким образом, данная совокупность алгоритмов образует новый вычислительный метод предварительной обработки данных.

В **п.2.2** рассматривается робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна.

Представленная модель является обобщением модели Кокса-Росса-Рубинштейна, а именно: стоимость рискового актива выражается формулой: $S_n = S_{n-1}(1+\rho_n), \rho_n \in [a_1,a_2]\cup[a_3,a_4]$; стоимость банковского счёта выражается формулой: $B_n = B_{n-1}(1+r), B_0 = 1, n=1,\dots,N$. Получены формулы для расчёта интервала справедливых цен для выпуклых платёжных функций (опцион колл, опцион с последействием). Для вычисления интервалов применяется представленный вычислительный метод.

В **п.2.3** рассматривается эллипсоидная модель Марковица.

Рассматривается портфель – вектор x, с удовлетворяющими равенству $(I,x)=1$ компонентами. Вектор x определяет пропорции входящих в портфель активов. Размерность вектора определяется числом активов. Входящие в портфель активы определяют случайный вектор возвратов ρ.

Возврат портфеля выражается через вектор возвратов входящих в портфель активов как скалярное произведение (x, ρ).

В модели Марковица оптимальный портфель находится путём максимизации среднего возврата портфеля $E(x, \rho)$ и минимизации риска $D(x, \rho)$. Для вычисления необходимо знать вектор средних значений и ковариационную матрицу возвратов активов, входящих в портфель. Проблема заключается в том, что вероятностная мера неизвестна. Вместо неё можно использовать обучающую выборку, на основе которой найти выборочный вектор средних значений и выборочную ковариационную матрицу возвратов активов. Подстановка выборочных значений вместо неизвестных параметров делает неустойчивым решение задачи об оптимальном портфеле. Естественным выглядит стремление сделать решение задачи об оптимальном портфеле устойчивым.

В параграфе предполагается, что известно множество (доверительное множество), которому принадлежит вектор возвратов ρ с заданной доверительной вероятностью, большей либо равной η. В эллипсоидной модели Марковица доверительное множество является объединением эллипсоидов, которые получаются в результате предварительной обработки выборки с помощью описанного вычислительного метода. Оптимальные одношаговые портфели находятся путём решения задач робастного математического программирования: задача о гарантированном возврате, задача о гарантированном риске. Предложен алгоритм вычисления оптимального динамического многошагового портфеля, позволяющий объединить достоинства обоих портфелей.

В **п.2.4** рассматриваются примеры.

Третья глава посвящена случайному разбиению времени и методу Монте-Карло в качестве вычислительного метода решения стохастического дифференциального уравнения.

В **п.3.1** рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ с постоянным начальным условием X_0 и коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица и условию линейного роста. Далее рассматривается траектория винеровского процесса – ω, для которой определяется двумерная случайная последовательность $\overline{\omega} = \{(\tau_1, \delta_1), (\tau_2, \delta_2), \ldots (\tau_n, \delta_n), \ldots\}$. В этой последовательности $\tau_i(\omega) = \min\{\tau_{i-1}(\omega) \le t : |W_t(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega)| = h\}, \tau_0(\omega) = 0,$

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 1, W_{\tau_i}(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) = h \\ -1, W_{\tau_i}(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) = -h \end{cases}.$$

Доказано, что случайные величины $\nu_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ – независимые и одинаково распределённые случайные величины, и приведена плотность их общего закона распределения. Также доказано, что бинарная последовательность δ состоит из независимых и одинаково распределённых элементов с вероятностями $P(\delta_i = 1) = P(\delta_i = -1) = 0.5$.

В **п.3.2** приводится описание генератора случайных величин ν_i, который является более эффективным в отличие от универсального метода генерации, связанного с обращением функции распределения.

В **п.3.3** приводится преобразование Гирсанова для исходного дифференциального уравнения с постоянной волатильностью $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma dW_t$, которое вместо исходного уравнения позволяет рассматривать систему уравнений: $\begin{cases} X_t = X_0 + \sigma W_t \\ Y_t = \int\limits_0^t \varphi(W_s)ds + \int\limits_0^t \psi(W_s)dW_s \end{cases}$, где

$$Y_t = \ln Z_t, Z_0 = 1, \varphi(W_t) = -\frac{\mu^2(X_0 + \sigma W_t)}{2\sigma^2}, \psi(W_t) = \frac{\mu(X_0 + \sigma W_t)}{\sigma}.$$

Приведена формула для приближённого решения в финальной точке случайного разбиения $\overline{Y}_{\tau_N} = \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}\left(W_{\tau_{j-1}^N}\right)}{i!} \int\limits_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \left(W_s - W_{\tau_{j-1}^N}\right)^i ds + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\psi^{(i)}\left(W_{\tau_{j-1}^N}\right)}{i!} \int\limits_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} \left(W_s - W_{\tau_{j-1}^N}\right)^i dW_s$ и найдена оценка погрешности приближения: $\left|\Delta_N\right| \le A_k(\beta)\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{k+1}{2}} + B_m(\beta)\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m+1}{2}}$

с вероятностью, превосходящей $2\beta - 1$, где β – доверительная вероятность.

В **п.3.4** приведены вычислительные схемы для приближения нулевого порядка и приближения первого порядка, а также приведены ошибки для оценки приближения. Приближение первого порядка имеет вид:
$\tilde{Y}_{\tau_n} = \tilde{Y}_{\tau_{n-1}} + \frac{1}{2}h^2\psi'\left(W_{\tau_{n-1}}\right) + \left(\varphi\left(W_{\tau_{n-1}}\right) - \frac{1}{2}\psi'\left(W_{\tau_{n-1}}\right)\right)\nu_n + h\left(\nu_n\varphi'\left(W_{\tau_{n-1}}\right) + \psi\left(W_{\tau_{n-1}}\right)\right)\delta_n$.

Значения винеровского процесса в точках случайного разбиения удовлетворяют рекуррентному уравнению: $W_{\tau_i} = W_{\tau_{i-1}} + h\delta_i$, в котором реализуется базовая вычислительная схема бинарной аппроксимации.

В **п.3.5** рассматривается метод перехода от уравнения с непостоянной волатильностью к уравнению с постоянной волатильностью, и приводятся необходимые для этого условия.

В **п.3.6** рассматриваются две вычислительные задачи.

Первая задача посвящена вычислению $Ef\left(X_T\right)I_{\{\overline{X}_T \le b\}\wedge\{\underline{X}_T \ge a\}}$, где f – ограниченная функция, $\overline{X}_T = \sup\limits_{t\le T} X_t, \underline{X}_T = \inf\limits_{\tau\le T} X_t$ – супремумный и инфимумный процессы соответственно. Вторая задача посвящена вычислению $E\Psi\left(\overline{X}_T, \underline{X}_T\right)$ для класса функций следующего вида: $\Psi(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k I_{\{(x\le b_k)\wedge(y\ge a_k)\}}$. Набор чисел a_i и b_i упорядочен следующим образом: $a_n < a_{n-1} < \ldots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < b_n$, коэффициенты $\varphi_k \ge 0$.

В обеих задачах применяется преобразование Гирсанова, поэтому:
$Ef\left(X_T\right)I_{\{\overline{X}_T \le b\}\wedge\{\underline{X}_T \ge a\}} = E^*Z_T f\left(\sigma W_T + X_0\right)I_{\left\{\overline{W}_T \le \frac{1}{\sigma}(b-X_0)\right\}\wedge\left\{\underline{W}_T \ge \frac{1}{\sigma}(a-X_0)\right\}}$,

$E\Psi\left(\overline{X}_T, \underline{X}_T\right) = E^*Z_T\Psi\left(\sigma\overline{W}_T + X_0, \underline{W}_T + X_0\right)$, где $\overline{W}_T = \sup\limits_{t\le T} W_t, \underline{W}_T = \inf\limits_{\tau\le T} W_t$.

Если $\Psi(x,y)=I_{\{(x\le b)\wedge(y\ge a)\}}$, то математическое ожидание $E\Psi(\overline{X}_T,\underline{X}_T)$ – вероятность невыхода случайного процесса из полосы $\Pi=\{(x,t): a\le x\le b, t\le T\}$.

П.3.7 посвящён разбиению Карра для времени и факторизации Винера-Хопфа. Случайное разбиение Карра имеет следующий вид: $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n<\ldots$, где случайные величины $\nu_n=\tau_n-\tau_{n-1}$ – независимые и одинаково распределённые случайные величины с показательным законом распределения, плотность которого $p_\nu(x)=\lambda\exp(-\lambda x), x\ge 0$, где $\lambda=\dfrac{N}{T}$, N – число точек разбиения временного интервала $[0,T]$. Также в силу строго марковского свойства винеровского процесса и стохастического преобразования Винера-Хопфа справедливы следующие формулы: $\overline{W}_{\tau_n}\overset{d}{=}\max\{\overline{W}_{\tau_{n-1}}, W_{\tau_{n-1}}+\xi_n^1\}$, $\underline{W}_{\tau_n}\overset{d}{=}\min\{\underline{W}_{\tau_{n-1}}, \underline{W}_{\tau_{n-1}}-\xi_n^2\}$, $W_{\tau_n}=W_{\tau_{n-1}}+(\xi_n^1-\xi_n^2)$. Независимые последовательности ξ^1 и ξ^2 состоят из независимых и одинаково распределённых элементов с общим показательным законом с интенсивностью $\sqrt{2\lambda}$. Приведена оценка погрешности вычисления.

Еще один способ решения задачи вычисления математического ожидания $Ef(X_T)I_{\{\overline{X}_T\le b\}\wedge\{\underline{X}_T\ge a\}}$ связан с решением краевой задачи для параболического уравнения: $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\mu(x)\dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\sigma^2(x)}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0,$ с краевыми условиями $V(t,b)=V(t,a)=0, 0\le t\le T$, $V(T,x)=1, a\le x\le b.$

Если $V^*(t,x)$ – решение уравнения, то искомое математическое ожидание $Ef(X_T)I_{\{\overline{X}_T\le b\}\wedge\{\underline{X}_T\ge a\}}=V^*(0,0)$ (формула Фейнмана-Каца).

В **п.3.8** определяется случайный процесс: $W_{\tau_i}=W_{\tau_{i-1}}+h\delta_i$, $W_t^h=W_{\tau_{i-1}}, \tau_{i-1}\le t<\tau_i, i=1,2,\ldots\tau_0=0$. Траектории этого процесса полунепрерывны справа и имеют предел слева (CADLAG), поэтому следует дополнить Ω и фильтрацию такими траекториями. Доказан ряд утверждений, касающихся свойств процесса W_t^h. В частности, показано, что процесс W_t^h является стохастически непрерывным, имеет ограниченную вариацию и является мартингалом, ограниченным на любом компакте. Утверждения данного параграфа позволяют рассматривать процесс W_t^h как хорошее приближение винеровского процесса. Этот процесс можно также рассматривать как самостоятельное средство моделирования.

В **п.3.9** рассматривается интеграл, процесс и формула Ито. Из утверждений п.3.8 следует, что процесс W_t^h является семимартингалом. То есть $W^h = M^h + A^h$, причем либо $M^h = W^h, A^h = 0$, либо $M^h = 0, A^h = W^h$, здесь M^h – локальный мартингал, A^h – процесс ограниченной вариации. Определяется стохастический интеграл от неупреждающей измеримой функции $f(t,\omega)$ по семимартингалу W_t^h в виде конечной суммы. Далее рассматривается процесс Ито $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t^h$, для которого приводится формула Ито. В параграфе показано, что в пределе получается классическая формула Ито.

В **п.3.10** рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение для процесса W_t^h, а также приводится модель Блэка-Шоулса для процесса W_t^h: $dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t^h\right), dB_t = B_t r dt$. Решение первого уравнения: $S_t = S_{\tau_{i-1}} \exp\left(\mu\left(t - \tau_{i-1}\right)\right), \tau_{i-1} \le t < \tau_i, S_{\tau_i} = S_{\tau_{i-1}} \exp\left(\mu \nu_i\right)\left(1 + h\sigma\delta_i\right)$. Решение второго уравнения: $B_t = B_0 \exp(rt)$. Показано, что, как и в модели Блэка-Шоулса, для мартингальной меры уравнение для рискового актива будет иметь вид: $dS_t = S_t\left(rdt + \sigma dW_t^h\right)$. В параграфе приведена формула для справедливой цены финансового марковского обязательства $f(S_T)$, где функция $f(x) \ge 0$ и $Ef(S_T) < \infty$:

$$C \approx \frac{\exp(-rT)}{M} \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_T^h(i)} \sum_{k=0}^{N_T^h(i)} C_{N_T^h(i)}^k f\left(S_0 \exp\left(r\tau_N(i)\right)\left(1+\sigma h\right)^k \left(1-\sigma h\right)^{N_T^h(i)-k}\right)$$

для вычислений методом Монте-Карло.

Здесь $N_T^h(i) = \max\{n : \tau_n(i) \le T\}$ для i-го случайного разбиения; M – количество экспериментов метода Монте-Карло. В параграфе показано, что при большом N для расчёта справедливой цены можно применять две более простые асимптотические формулы.

В **п.3.11** рассматривается модель случайного блуждания с пропущенными слагаемыми. Рассмотрим дискретный аналог стохастического дифференциального уравнения: $\Delta X_n = \mu(X_{n-1})m + \sigma(X_{n-1})\Delta W_n$ и предложим ещё один способ бинарной аппроксимации, а именно, модель случайного блуждания с пропущенными слагаемыми. Здесь m – шаг равномерного разбиения оси времени. Приращения ΔW_n – независимые и одинаково распределённые случайные величины с общей дисперсией m. В первой главе рассматривалась бинарная аппроксимация следующего вида: $\Delta Y_n = \sigma\sqrt{m}\delta_n, \delta_n = \mathrm{Sign}\left(X_n - Y_{n-1}\right)$. В связи с рассматриваемой в этой главе моделью рассмотрим следующую формулу: $\Delta Y_n = \sigma\sqrt{m}\beta_n\delta_n, \beta_n = I_{\{|X_n - Y_{n-1}| \geq h_m\}}$. Показано, что оптимальным значением для параметра h_m является значение: $h_m = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{m}$. Далее рассмотрим модель эволюции стоимости рискового актива: $S_n = S_0 e^{rnm}(1+a)^{\eta_n(\delta)}(1-a)^{\xi_n(\beta)-\eta_n(\delta)}$,

где $\xi_n(\beta) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i, \eta_n(\delta) = \sum_{i=1}^{\xi_n(\beta)}\max\{\delta_i, 0\}$,

$a = \sigma\sqrt{m}, n = 1,2,\ldots,N$.

В данной модели случайная величина $\xi_n(\beta)$ определяет число скачков на заданном временном интервале. Таким образом, цена финансового обязательства вычисляется как усреднение формулы Кокса-Росса-Рубинштейна по числу скачков:

$$C = \exp(-rN)E_{\xi_N(\beta)}\left[\frac{1}{2^{\xi_N(\beta)}}\sum_{i=0}^{\xi_N(\beta)} C^i_{\xi_N(\beta)} f\left(S_0\exp(rNm)(1+a)^i(1-a)^{\xi_N(\beta)-i}\right)\right].$$

В параграфе рассмотрены примеры вычисления справедливой цены для случаев, когда последовательность β имеет биномиальное распределение, а также является однородной марковской цепью с двумя состояниями.

В **п.3.12** рассматривается случайное разбиение пассажами винеровского процесса со сносом. А именно, рассматриваются две модели, которые порождаются двумерной случайной последовательностью – $\{(\nu_i, \delta_i)\}$.

Первая модель. Определим последовательность моментов остановки: $\tau_0 = 0, \ldots, \tau_i = \inf\{\tau_{i-1} \le t : |b(t - \tau_{i-1}) + (W_t - W_{\tau_{i-1}})| \le a\}$. Строго марковское свойство винеровского процесса позволяет записать следующее равенство для данных моментов остановки: $\tau_i = \tau_{i-1} + \nu_i$, ν_i равны по распределению $\nu = \inf\{t : |bt + W_t| \le a\}$ и являются независимыми случайными величинами с известной плотностью распределения.

Обратимся к случайной величине δ и рассмотрим два момента остановки: $\nu_a = \inf(t : bt + W_t \ge a)$ $\nu_{-a} = \inf(t : bt + W_t \le -a)$. Случайная величина $\delta = \begin{cases} 1, \nu_a < \nu_{-a} \\ -1, \nu_a > \nu_{-a} \end{cases}$. Определим вероятность $P(\delta = 1) = P(\nu_a < \nu_{-a})$.

В диссертации доказано, что вероятность $P(\delta = 1) = \dfrac{\exp(ba) - 1}{\exp(ba) - \exp(-ba)}$.

Отметим, что случайная величина δ не зависит от случайной величины ν.

Вторая модель. Рассмотрим в качестве момента остановки случайную величину $\nu = \min\{\nu_a, \nu_{-a}\} = \begin{cases} \nu_a, \delta = 1 \\ \nu_{-a}, \delta = -1 \end{cases}$, которая зависит от случайной величины δ. Плотность $p_\nu(t) = p_{\nu_a}(t)P(\delta = 1) + p_{\nu_{-a}}(t)P(\delta = -1)$. Случайные величины ν_a, ν_{-a} имеют обратно-гауссовский закон распределения.

В качестве примера применения представленных моделей в диссертации рассматривается пример вычисления справедливой цены европейского опциона колл для модели Блэка-Шоулса с дивидендами.

В **п.3.13** рассматриваются примеры.

Четвёртая глава посвящена описанию программного комплекса и анализу эффективности.

В **п.4.1** приводится описание модуля BTOD (Binary Tree Observed Disorder). В нём содержится реализация алгоритмов, связанных с моделями с наблюдаемой разладкой. В **п.4.2** приводится описание модуля BTNOD (Binary Tree Non Observed Disorder). В нём содержится реализация алгоритмов, связанных с моделями с ненаблюдаемой разладкой. В **п.4.3** приводится описание модуля UV (Uncertain Volatility). В нём содержится реализация алгоритмов, связанных с моделями с неопределённой волатильностью.

Ниже приведена таблица, которая сравнивает формулу Блэка-Шоулса с моделью неопределённой волатильности на реальных данных. Используется индекс S&P100 в период с 02.01.1991 по 11.06.1997. Волатильность индекса $\sigma = 0.00723$, безрисковая процентная ставка $r = 0.0485$. Рассматриваются европейские опционы колл со сроками исполнения 24, 87 и 115 дней. В таблице для различных значений контрактных цен K и начальных цен S_0 приведены рыночные справедливые цены $C_{\text{рын.}}$, а также справедливые цены $C_{\text{БШ}}$, вычисленные по формуле Блэка-Шоулса, верхние цены $\overline{C}$ и нижние цены $\underline{C}$ для первой модели с неопределённой волатильностью при $\sigma \in \left[\underline{\sigma}, \overline{\sigma}\right]$. Оценки параметров по выборке значений индекса $\underline{\sigma}, \overline{\sigma} : \underline{\sigma} = 0.005, \overline{\sigma} = 0.01$.

Таблица 1. Зависимость справедливых цен от контрактных цен.

N	S_0	K	$C_{\text{рын.}}$	$C_{\text{БШ}}$	$\underline{C}$	$\overline{C}$
24	425.73	395	30.75	32.55	30.45	31.49
24	425.73	400	25.88	27.57	25.55	26.15
24	425.73	405	21.00	21.50	20.56	21.61
24	425.67	410	16.50	17.56	16.05	17.02
24	425.68	415	11.88	12.53	11.62	12.10
24	425.65	420	7.69	7.26	7.15	8.03
24	425.65	425	4.44	2.37	3.51	4.56
24	425.68	430	2.10	0.00	1.73	2.46
24	425.65	435	0.78	0.00	0.74	0.93

24	425.16	440	0.25	0.00	0.18	0.56
24	424.78	445	0.1	0.00	0.09	0.12
24	425.19	450	0.1	0.00	0.09	0.13
87	425.73	380	46.75	52.04	46.70	47.19
87	425.73	385	42.00	47.12	41.38	43.88
87	425.73	390	37.50	42.21	36.98	43.07
87	425.73	395	33.00	37.29	32.08	36.66
87	425.73	400	28.50	32.37	27.99	29.12
87	425.73	405	24.13	27.43	22.99	26.19
87	425.26	410	20.38	21.99	19.49	20.15
87	425.86	415	16.13	17.58	14.13	18.31
87	425.68	420	12.82	12.41	11.56	13.62
87	425.42	425	9.32	7.54	8.67	11.67
87	425.62	430	6.51	3.93	6.01	8.11
87	425.82	435	4.51	1.48	4.01	6.07
87	425.68	440	2.75	0.14	2.05	3.88
87	425.75	445	1.60	0.00	1.23	2.06
87	425.78	450	0.85	0.00	0.74	1.03
87	425.39	455	0.44	0.00	0.31	0.71
115	425.73	380	47.25	54.05	46.93	49.23
115	425.73	390	38.13	44.27	37.94	39.14
115	425.73	400	29.38	34.48	28.94	38.05
115	425.73	410	21.19	24.63	20.94	22.30
115	425.41	420	13.88	14.50	13.39	15.31
115	425.63	430	8.13	6.18	8.01	10.15
115	425.28	440	3.88	1.15	2.64	4.18
115	425.13	450	1.50	0.00	1.21	1.73

Среднеквадратическое отклонение рыночных цен от цен, вычисленных по формуле Блэка-Шоулса, равно 2.934, среднеквадратическое отклонение рыночных цен от средних цен в модели с неопределённой волатильностью равно 0.916. Преимущество очевидно.

В **п.4.4** приводится описание модуля COD (Clusterization One Dimension). В нём содержится реализация алгоритмов кластеризации и построения доверительного множества для одномерной выборки. В **п.4.5** приводится описание модуля CMD (Clusterization Multi Dimension). В нём содержится реализация алгоритмов кластеризации и построения доверительного множества для многомерной выборки. В **п.4.6** приводится описание модуля RCM (Robust Cox-Ross-Rubinstein Model). В нём содержится реализация алгоритмов вычисления интервала справедливых цен для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. В **п.4.7** приводится описание модуля EMM (Ellipsoid Markowitz Model). В нём содержится реализация алгоритмов вычисления портфеля с гарантированным возвратом и с гарантированным риском для эллипсоидной модели Марковица.

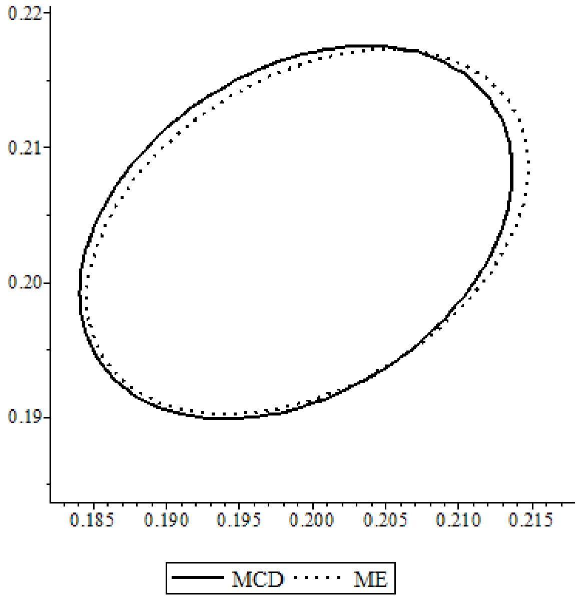

Рисунок 1. Эллипсоиды минимального объёма, $\alpha = 0.9$.

На рисунке 1 представлены эллипсоиды минимального объёма, построенные для выборки объёма $N = 2500$, если $\alpha = 0.9$. Сплошной линией изображён эллипсоид, построенный с помощью алгоритма MCD; его объём равен 0.0021. Точечной линией изображён эллипсоид, построенный с помощью алгоритма ME; его объём равен 0.0016. Объём эллипсоида, построенного с помощью алгоритма ME, значимо меньше объёма эллипсоида, построенного с помощью алгоритма MCD, что является подтверждением эффективности алгоритма ME.

В **п.4.8** приводится описание модуля EP (Exit Probability). В нём содержится реализация алгоритмов вычисления вероятности невыхода процесса Орнштейна-Уленбека и процесса квадратного корня из полосы.

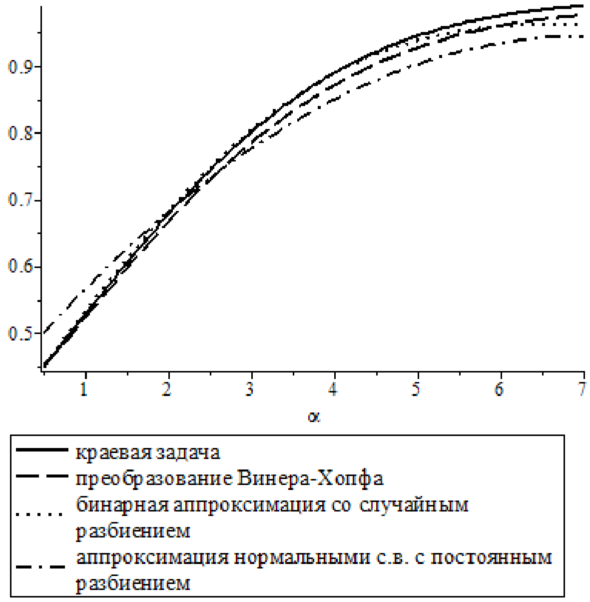

Рисунок 2. Вероятность невыхода процесса Орнштейна Уленбека ($X_0 = 0,\ \beta = 0,\ \sigma = 0.1$) из полосы $[-0.1, 0.1]$.

На рисунке 2 изображён график зависимости вероятности невыхода процесса Орнштейна-Уленбека из заданной полосы от параметра α. Из рисунка можно сделать вывод об эффективности метода бинарной аппроксимации со случайным разбиением по сравнению с методом аппроксимации нормальными случайными величинами с постоянным разбиением.

В **заключении** обсуждаются **основные результаты и выводы.**

В области математического моделирования.

Исследованы следующие математические модели:

1.Модель оптимального управления, позволяющая сформулировать широкий класс задач финансовой математики.

2.Модели с наблюдаемой, ненаблюдаемой разладкой и с неопределённой волатильностью; изучены методы управления в данных моделях.

3.Нестохастические робастные модели эволюции стоимости рискового актива (робастная модель Кокса-Росса-Рубинштейна, эллипсоидная модель Марковица).

4.Модель эволюции стоимости рискового актива, в которой используется новый случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями и дискретным вмешательством случая (модель Кокса-Росса-Рубинштейна со случайным числом слагаемых).

В области численных методов.

Перечислим новые численные методы:

1.Метод решения задач оптимального управления, основанный на использовании теории мартингалов.

2.Метод обнаружения разладки диффузионного процесса с использованием бинарной аппроксимации и кластеризации бинарного дерева, который в отличие от иных методов допускает управление процессом с разладкой.

3.Метод решения задач оптимального управления для диффузионной модели с неопределённой волатильностью, позволяющий получать гарантированные решения.

4.Проекционный метод кластеризации выборки, превосходящий по эффективности метод k-средних.

5.Метод построения доверительного множества по выборке. Для одномерных данных метод позволяет найти объединение интервалов минимальной совокупной длины, содержащее заданное число элементов выборки. В случае многомерных данных метод позволяет найти объединение эллипсоидов минимального объёма, содержащее заданное число элементов выборки. Метод особенно эффективен для засоренных выборок, поскольку не реагирует на отдельные выбросы и занимает свое место среди устойчивых методов непараметрической статистики.

6.Метод решения задач оптимального управления для робастной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Предлагаемый метод основан на теории двойственности. В отличии от классического позволяет получить результат с гарантированной вероятностью.

7.Метод решения задачи построения многошагового динамического портфеля. В предлагаемом методе используется идея рассмотрения портфеля как рискового актива, доверительное множество возврата которого является объединением интервалов. Поскольку метод позволяет учесть два критерия, то дополнительно ко всему метод можно рассматривать как эффективное решение двухкритериальной проблемы.

8.Метод типа Монте-Карло вычисления математического ожидания для ограниченного функционала, зависящего от траектории супремумного и инфимумного процессов для решения стохастического дифференциального уравнения. Предлагаемый метод базируется на преобразовании Гирсанова, случайном разбиении, и на стандартных численных методах решения обыкновенного стохастического дифференциального уравнения. Метод превосходит методы Монте-Карло, использующие только стандартные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Главный результат заключается в том, что найден доверительный интервал для оценки погрешности. В стандартных методах оценивается порядок математического ожидания абсолютной величины погрешности.

В области программного обеспечения.

Разработан комплекс программ, предназначенный для решения поставленных в диссертационной работе задач. Описание программного комплекса и анализ эффективности методов и алгоритмов приведены в четвёртой главе.

Список научных публикаций, в которых изложены основные научные результаты диссертации

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК

1. Белявский, Г. И. Расчёт справедливой цены Европейского опциона в модели (B,S)-рынка с барьером, основанной на случайном блуждании / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2015. – № 4(188). – С. 25-28.

2. Белявский, Г. И. Расчёт справедливой цены барьерного опциона в модели (B,S)-рынка с переключением параметров / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2016. – № 1(189). – С. 11-16.

3. Данилова, Н. В. Расчёт интервала справедливых цен для бинарной модели (B,S)-рынка с волатильностью, являющейся марковской цепью / Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2016. – № 4(192). – С. 17-20.

4. Беляева, М. С. Расчёт справедливой цены для диффузионной модели со стохастической процентной ставкой / М. С. Беляева, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2017. – № 3-1(195-1). – С. 4-7.

5. Данилова, Н. В. Прогнозирование ожидаемых значений финансовых индексов / Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2018. – № 1(197). – С. 15-19.

Статьи в научных изданиях, входящих в Scopus, Web of Science, RSCI

6. Белявский, Г. И. Случайные блуждания с пропущенными слагаемыми / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Н. Д. Никоненко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т.16, № 4(56). – С. 21-28.

7. Белявский, Г. И. Вычисление капитала оптимального портфеля с помощью комбинированного метода Монте-Карло в нелинейных моделях финансовых индексов / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – № 11. – С. 1021-1034.

8. Белявский, Г. И. Эволюционное моделирование в задачах управления устойчивым развитием активных систем / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Г. А. Угольницкий // Математическая теория игр и её приложения. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 14-29.

9. Belyavsky, G. A Markovian mechanism of proportional resource allocation in the incentive model as a dynamic stochastic inverse Stackelberg game / G. Belyavsky, N. Danilova, G. Ougolnitsky // Mathematics. – 2018. – Vol. 6, No. 8. – P. 131-140. – DOI 10.3390/math6080131.

10. Beliavsky, G. I. Evolutionary methods for solving dynamic resource allocation problems / G. I. Beliavsky, N. V. Danilova, G. A. Ougolnitsky // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80, No. 7. – P. 1335-1346. – DOI 10.1134/S0005117919070105.

11. Belyavskii, G. I. Optimal control problems with disorder / G. I. Belyavskii, N. V. Danilova, I. A. Zemlyakova // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80, No. 8. – P. 1419-1427. – DOI 10.1134/S0005117919080046.

12. Данилова, Н. В. Квантильное хеджирование на неполном рынке / Н. В. Данилова, И. А. Землякова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2019. – № 2(202). – С. 4-9. – DOI 10.23683/0321-3005-2019-2-4-9.

13. Beliavsky, G. Calculation of probability of the exit of a stochastic process from a band by Monte-Carlo method: a Wiener-Hopf factorization / G. Beliavsky, N. Danilova, G. Ougolnitsky // Mathematics. – 2019. – Vol. 7, No. 7. – P. 581-588. – DOI 10.3390/math7070581.

14. Belyavsky, G. I. Random search methods for the solution of a Stackelberg game of recourse allocation / G. I. Belyavsky, N. V. Danilova // Contributions to game theory and management. – 2019. – Vol. 12. – P. 37-48.

15. Белявский, Г. И. Обучение без учителя и робастная оптимизация в задаче о портфеле / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, А. Д. Логунов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2020. – № 4(208). – С. 4-9. – DOI 10.18522/1026-2237-2020-4-4-9.

16. Danilova, N. Optimal control in binary models with the disorder / N. Danilova, G. Beliavsky, I. Zemlyakova // Engineering Letters. – 2021. – Vol. 29, No. 4. – P. 1359-1364.

17. Beliavsky, G. Optimal portfolio and confidence set / Beliavsky G., Danilova N. // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 266, No. 2. – P. 251-257.

18. Данилова, Н. В. Метод дихотомической кластеризации и оптимальный портфель / Н. В. Данилова, Д. И. Житников // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2022. – № 2(214). – С. 15-20. – DOI 10.18522/1026-2237-2022-2-15-20.

19. Белявский, Г. И. Управление в бинарных моделях с разладкой / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 67-82. – DOI 10.14529/mmp220305.

20. Белявский, Г. И. Аппроксимация супремумных и инфимумных процессов как стохастический подход к выполнению требований гомеостаза / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Г. А. Угольницкий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2022. – Т. 18, № 1. – С. 5-17. – DOI 10.21638/11701/spbu10.2022.101.

21. Kudryavtsev, O. Applications of artificial neural networks to simulating Levy processes / O. Kudryavtsev, N. Danilova // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 271, No. 4. – P. 421-433. – DOI 10.1007/s10958-023-06580-1.

22. Белявский, Г. И. Модели с неопределённой волатильностью / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, № 3. – С. 5-19. – DOI 10.14529/mmp230301.

23. Belyavsky, G. I. A model to coordinate interests in investment management / G. I. Belyavsky, N. V. Danilova, G. A. Ougolnitsky // International Game Theory Review. – 2023. – Vol. 25, No. 1. – Art No 2350002 (p. 1-12). – DOI 10.1142/s0219198923500020.

Статьи в журналах, индексированных в РИНЦ

24. Белявский, Г. И. Среднеквадратичное хеджирование для одной модели неполного рынка с двумя источниками случайности / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2009. – № 3(35). – С. 129-134.

25. Белявский, Г. И. Вычисление справедливой цены финансового обязательства для дискретного и непрерывного случаев, когда параметры модели (B,S)-рынка изменяются в случайный момент времени / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, С. С. Сушко // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2010. – № 6(160). – С. 5-8.

26. Данилова, Н. В. Параллельный алгоритм расчёта справедливой цены Европейского опциона / Н. В. Данилова, Б. Я. Штейнберг, Л. Н. Фоменко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного

политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2011. – № 3(126). – С. 115-118.

27. Данилова, Н. В. Об одном новом адаптивном алгоритме генерации нормально распределённых случайных величин / Н. В. Данилова // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2011. – № 1. – С. 126-127.

28. Данилова, Н. В. Способы записи решений стохастических разностных уравнений с помощью обычной и стохастической экспонент / Н. В. Данилова, Л. В. Данилова // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2012. – № 1. – С. 77-78.

29. Данилова, Н. В. Биномиальный подход к оцениванию опционов / Н. В. Данилова, Л. В. Данилова // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2013. – № 1. – С. 395-397.

30. Данилова, Н. В. Определение справедливой цены для одной модели (B,S)-рынка с дивидендами / Н. В. Данилова, Т. А. Гробер // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2013. – № 2(169). – С. 86-90.

31. Белявский, Г. И. Процессы Леви. Краткий курс / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 193-289.

32. Белявский, Г. И. Расчёт справедливой цены Европейского опциона продажи с последействием для диффузионной модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2014. – № 6(184). – С. 12-15.

33. Данилова, Н. В. Расчёт справедливой цены на полном рынке с динамически изменяющимися параметрами, использующий несамофинансируемые стратегии / Н. В. Данилова, Е. Н. Галицына // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2014. – № 2. – С. 164-166.

34. Данилова, Н. В. Расчет справедливой цены опциона в модели (B,S)-рынка Кокса-Росса-Рубинштейна / Н. В. Данилова, А. Р. Максименкова, А. А. Хвостов // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2015. – № 2. – С. 74-76.

35. Данилова, Н. В. Нахождение оптимального портфеля для одношаговой модели (B,S)- рынка с помощью метода Лагранжа / Н. В. Данилова, М. Ю. Плаутина // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2016. – № 1. – С. 453-457.

36. Данилова, Н. В. Оценка параметров в модели стохастической волатильности / Н. В. Данилова // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – 2017. – № 2. – С. 256-258.

Публикации в сборниках трудов конференций

37. Данилова, Н. В. Об одном способе построения среднеквадратического хеджа для модели с двумя источниками случайности, использующем метод дискретной аппроксимации / Н. В. Данилова // Труды Всероссийской научно-практической конференции "Транспорт-2011": [сборник: в 3 ч.]. Ч. 1: Естественные и технические науки. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2011. – С. 85-87.

38. Белявский, Г. И. Квантильное хеджирование на мультиномиальном рынке / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 135-136.

39. Данилова, Н. В. Об одном способе построения оптимального портфеля с учетом предпочтения инвестора / Н. В. Данилова // Труды Международной научно-практической конференции "Транспорт-2013": в 4 ч. Ч. 1: Технические и экономические науки. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2013. – С. 67.

40. Belyavsky, G. I. About (B,S)-market model with stochastic switching of parameters / Belyavsky G. I., Danilova N. V. // Advanced Finance and Stochastics : International Conference, Moscow, 24–28 June 2013: Book of Abstracts / Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia; Ed. M. Zhitlukhin and A. Muravlev. – Moscow, 2013. – P. 91-92. – Режим доступа: https://afs.mi-ras.ru/afs-book.pdf (дата обращения 29.10.2024).

41. Данилова, Н. В. Расчёт форвардной и фьючерсной цен для модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров / Н. В. Данилова // Труды Международной научно-практической конференции "Транспорт-2014" : в 4 ч. Ч. 3: Технические и естественные науки. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2014. – С. 170.

42. Данилова, Н. В. Финансовые расчёты на (B,S)-рынке с динамически изменяющимися параметрами в случае несамофинансируемых стратегий / Н. В. Данилова, Е. Н. Галицына // Труды Международной научно-практический

конференции "Транспорт – 2015": в 4 ч. Ч. 3. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2015. – С. 159-160.

43. Белявский, Г. И. Нелинейные модели авторегрессионного типа. Нейросетевая реализация / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, № 4. – С. 441.

44. Galicina, E. N. The fair price calculation for the (B,S)-market model in the case of non self-financing strategies / E. N. Galicina, N. V. Danilova // Modeling of Artificial Intelligence. – 2015. – Vol. 3, No. 7. – P. 204-211. – DOI 10.13187/mai.2015.7.204.

45. Данилова, Н. В. Расчёт справедливой цены опциона коллар для модели Кокса-Росса-Рубинштейна / Н. В. Данилова, Д. А. Соколова // Сборник научных трудов "Транспорт: наука, образование, производство": в 4 т. Т. 4: Технические и естественные науки. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2016. – С. 242-246.

46. Данилова, Н. В. Расчёт справедливой цены Бостонского опциона для модели Кокса-Росса-Рубинштейна / Н. В. Данилова, М. С. Беляева // Сборник научных трудов "Транспорт: наука, образование, производство": в 4 т. Т. 4: Технические и естественные науки. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2016. – С. 237-241.

47. Данилова, Н. В. Об одной модели (B,S)-рынка с волатильностью, являющейся марковской цепью / Н. В. Данилова // Технологии информационного общества: XI Международная отраслевая научно-техническая конференция: сборник трудов. – Москва: Медиа паблишер, 2017. – С. 469-470.

48. Данилова, Н. В. Методы прогнозирования ожидаемых значений финансовых индексов для линейных и нелинейных моделей / Н. В. Данилова // Статистика - язык цифровой цивилизации: сборник докладов II Открытого российского статистического конгресса (Ростов-на-Дону, 4-6 декабря 2018 года): [в 2 т.]. Т. 2. – Ростов-на-Дону : АзовПринт, 2018. – С. 95-98.

49. Данилова, Н. В. Некоторые задачи оптимального управления с разладкой / Н. В. Данилова, И. А. Землякова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2019. – Т. 26, № 3. – С. 260-261.

50. Белявский, Г. И. Вычисление вероятности невыхода случайного процесса из полосы / Г. И. Белявский, М. А. Гирченко, Н. В. Данилова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2019. – Т. 26, № 3. – С. 256.

51. Белявский, Г. И. Бинарные модели с разладкой / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, И. А. Землякова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2020. – Т. 27, № 3. – С. 251-257. – DOI 10.52513/08698325_2020_27_3_251.

52. Белявский, Г. И. Обучение без учителя в задаче об оптимальном портфеле / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2020. – Т. 27, № 2. – С. 137-138. – DOI 10.52513/08698325_2020_27_2_137.

53. Тезисы докладов, представленных на Седьмой международной конференции по стохастическим методам, 1: [Игровая модель управления портфелем инвестиций / Белявский Г. И., Данилова Н. В., Угольницкий Г. А.] // Теория вероятностей и её применения. – 2022. – Т. 67, № 4. – С. 824-825. – DOI 10.4213/tvp5585.

54. Белявский, Г. И. Дискретная бинарная аппроксимация решения СДУ для случайного разбиения времени пассажами винеровского процесса: [тезисы доклада] / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова // Избранные вопросы финансовой математики: Всероссийский семинар, приуроченный к 120-летию А. Н. Колмогорова, 22-23 мая 2023 года: [vega-institute.org/ru/]. – Москва: Фонд «Институт "Вега"», 2023. – Режим доступа: https://drive.google.com/file/d/1d7x91_RJr15pnwWuDcJsljGJoLW7P4_W/view?pli=1 (дата обращения 29.10.2024).

55. Тезисы докладов, представленных на Восьмой Международной конференции по стохастическим методам: [Доверительные множества и управление портфелем / Данилова Н. В., Белявский Г. И.] // Теория вероятностей и её применения. – 2023. – Т. 68, № 4. – С. 837. – DOI 10.4213/tvp5677.

Монографии

56. Белявский, Г. И. Анализ данных. Распознавание образов: монография / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Южный федеральный университет". – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2018. - 68, [1] с. – ISBN 978-5-9275-2964-3.

57. Модели управления устойчивым развитием активных систем и их приложения: монография / [Г. А. Угольницкий, Д. Б. Рохлин, А. Б. Усов и др.]; под редакцией Г. А. Угольницкого; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Южный

федеральный университет". – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. – 327 с. – ISBN 978-5-9275-3198-1.

Патенты/свидетельства

58. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024619352 Российская Федерация. Программа дихотомической кластеризации выборки на основе проективного метода k-средних: № 2024618048: заявл. 16.04.2024: опубл. 23.04.2024, Бюл. № 5 / Н. В. Данилова; правообладатель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет».

Иные публикации

59. Beliavsky, G. I. Robust estimation of European and Asian options / Beliavsky G. I., Danilova N. V., Logunov A. D. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2021. – Vol. 357. – P. 101-117.

60. Kudryavtsev, O. Methods for solving contemporary computational finance problems: applying Levy models and machine learning / Kudryavtsev O., Danilova N., Grechko A. // Stochastic Modeling and Computational Sciences. – 2023. – Vol. 3, No. 2. – P. 215-249. – DOI 10.61485/smcs.27523829/v3n2p5.