ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Бигириндавйи Даниэль

Усреднение многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Левенштам В. Б.

Ростов-на-Дону – 2024

Оглавление

Введение 4

Глава I. Метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с двухточечными краевыми условиями 24

§1. Обоснование метода усреднения в случае равномерно ограниченной правой части 24

1°. Формулировка результатов (теорема 1) 24

2°. Доказательство теоремы 1 26

§2. Обоснование метода усреднения при наличии в правой части больших слагаемых (простейший случай) 43

1°. Формулировка результатов (теорема 2) 43

2°. Доказательство теоремы 2 45

§3. Обоснование метода усреднения для систем ОДУ с большими слагаемыми (основной случай) 60

1°. Формулировка результатов (теорема 3) 60

Заключение к главе 1 63

Глава II. Метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями 64

§1. Обоснование метода усреднения в случае равномерно ограниченной правой части 64

1°. Формулировка результатов(теорема 4) 64

2°. Доказательство теоремы 4 66

§2. Обоснование метода усреднения для систем ОДУ при наличии в правой части слагаемого вида $\omega^\alpha\varphi(x,t,\omega t)$, $\alpha = \frac{1}{2}$. 84

1°. Формулировка результатов (теорема 5) 84

2°. Доказательство теоремы 5 86

§3. Иллюстративные примеры 105

Заключение к главе 2 114

Глава III. Усреднение высокочастотных систем ОДУ при наличии в правой части слагаемого вида $\omega^\alpha\varphi(x,t,\omega t)$ при $\alpha = \frac{3}{4}$. 115

1°. Формулировка результатов (теорема 6) 115

2°. Доказательство теоремы 6 118

Заключение к главе 3 124

Заключение 125

Список литературы 126

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многоточечные краевые задачи имеют глубокую физическую, биологическую, экономическую, инженерную и иную подоплеку. К изучению таких задач приводят исследования многих вопросов автоматического регулирования, теории колебаний, строительной механики, прикладной математики, математической физики и т.д. С этим связана актуальность развития теории метода усреднения, который связывают обычно с именами Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова, для многоточечных краевых задач.

Обзор литературы. Математические модели, используемые в физике и целом ряде других разделов естествознания, как правило, приводят к задачам, для которых точное решение определить невозможно. Найти приближенное решение численно при этом тоже нередко бывает очень сложно; особенно, когда в задаче присутствуют малые или большие параметры. Для изучения последних развиты методы, которые называют асимптотическими и которые объединяются под общим названием—теория возмущений (см., например, [51, 33, 32, 54, 28, 55, 50]). Теория возмущений особенно эффективно применима, когда рассматриваемая задача в определенном смысле близка к хорошо решаемой (хотя бы численно)задаче.

Первые иследования, относящиеся к теории возмущений, проводились в XVIII веке при решении задач небесной механики. Многие асимптотические методы, первоначально разработанные для задач небесной механики[46, 48, 53, 56], в дальнейшем оказались эффективными и получили дальнейшее глубокое развитие в классической механике, в квантовой механике и других разделах естествознания. Одним из важнейших асимптотических методов, зародившихся в трудах создателей небесной механики, является метод усреднения.

Идея рассмотрения усредненных задач, в частности, принадлежит Клеро, С. Лапласу и Ж. Лагранжу. Такие ученые как Якоби[59], Пуанкаре[34], Ван- дер-Поль[10, 58], использовали метод усреднения (также на интуитивном уровне строгости)для приближенного решения нелинейных задач теории колебаний с одной стеренью свободы.

Первые доказательства асимптотической корректности метода усреднения принадлежат П. Фату [49] и Л.И. Мандельштаму, Н.Д.Папалекси [29].

Систематическая теория метода усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений была создана в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [19, 20, 8, 7, 5, 6]. Эта теория получила затем дальнейшее развитие для различных новых классов дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и др. В настоящее время имеется достаточно большое число работ, посвященных методу усреднения. Отметим некоторые из них. В [30, 13, 15, 57, 11, 12, 45, 35, 9, 40, 4, 36, 39, 37, 38, 31] рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, в [31, 41, 24, 52, 22, 16, 21]-уравнения в частных производных, в [43, 2, 17, 44]-интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

Тема настоящей диссертационной работы относится к первому из этих направлений. Она посвящена развитию теории метода усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми в случае многоточечных краевых условий. Отдельно рассмотрены случаи наличия в уравнениях слагаемых, пропорциональных определенным положительным степеням высокой частоты осцилляций.

Метод усреднения Крылова-Боголюбова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений широко известен и разработан с большой полнотой, прежде всего, в случае задачи Коши на отрезке(одноточечные задачи). Результатов в случае многоточечных краевых задач значительно меньше. Укажем известные нам публикаций, включая и наши работы. В работах [26, 63, 62, 61] метод усреднения обоснован для двухточечных краевых задач. В работах [18, 66, 64, 65, 60] обоснование выполнено для многоточечных краевых задач с произвольнным числом точек $m \geq 2$. Публикации [63, 62, 61, 66, 64, 65, 60] легли в основу настоящей диссертации. Работы [26] и [18] предшествовали нашим. Однако в [26] рассматривалась иная, нежели у нас, краевая задача (двухточечная), а в многоточечной задаче [18] постулируется существование решения не только усредненной задачи - это традиционное требование в теории метода усреднения, но и существование решения значительно более сложной возмущенной задачи. Кроме того, при изучении многоточечных задач мы используем иной подход и большие слагаемые в [18] не рассматривались. Исследования [26, 63, 62, 61, 66, 64, 65, 60] опираются на классическую теорему о неявной функции в банаховом пространстве. Этот подход в теории метода усреднения впервые применил, по-видимому, И.Б.Симоненко в работе [42] при обосновании этого метода для абстрактных параболических уравнений в случае задачи

Коши и задачи о периодических по времени решениях.

Отметим еще, что систематическое изучение метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми, пропорциональными определенным положительным степеням частоты осцилляций ω, впервые проводилось в работах В.И. Юдовича [47] и было продолжено в работах других авторов (см.,[1, 23, 25, 27] и др.).

Цель работы. Цель работы состоит в обосновании метода усреднения в случае двухточечных и многоточечных краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми, среди которых могут большие - пропорциональные определенным положительным степеням частоты осцилляции. Под обоснованием понимается доказательство асимптотической близости решений возмущенной и усредненной задач в пространстве Гельдера.

Области исследований. Диссертация соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.1.2.«Дифференциальные уравнения и математическая физика».

1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

6. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

10. Теория дифференциально-операторных уравнений.

12. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

Методы исследования. В данной диссертационной работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и классической теории усреднения.

Научная новизна и основные положения, выносимые на защиту.

В работе получены следующие новые результаты для нелинейных дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми:

1) обоснован метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями (краевые задачи) и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями;

2) обоснован метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций;

3) обоснован метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями;

4) обоснован метод усреднения для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиям и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций;

5) обоснован метод усреднения для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиям и большими слагаемыми, пропорциональными степени $\frac{3}{4}$ частоты.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в данной диссертационной работе носят, прежде всего, теоретический характер. Однако они имеют и практическое значение, поскольку могут быть использованы при решении конкретных задач для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными и многоточечными краевыми условиями и с большими слагаемыми.

Степень достоверности и апробация результатов. В диссертации применялись математически обоснованные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и классической теории усреднения. Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

1) XXXI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум(КРОМШ-2020) по спектральным и эволюционным задачам.

2) Международная Воронежская весенняя математическая школа (ВВМШ-2021) «Современные методы теории краевых задач», посвященная памяти профессора Александра Дмитриевича Баева.

3) Международная научная конференция «Современные проблемы математики и физики», посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б.Сабитова.

4) Объединенный научный семинар по анализу и дифференциальным уравнениям Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ (мехмат).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 научных публикациях [63, 62, 61, 66, 64, 65, 60]. Статьи [62, 66, 65, 60] входят в перечень научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций, защищаемых в диссертационном совете ЮФУ801.01.02. Статьи [66, 65] опубликованы в журналах, индексируемых в базе данных Scopus. Публикации [63, 61, 64] содержатся в других сборниках научных трудов. Работы [63, 62, 66, 64, 65]выполнены совместно с научным руководителем В.Б. Левенштамом. В них ему принадлежат постановки задач и общее руководство работой. Д.Бигириндавйи совместно с В.Б.Левенштамом принадлежит выбор методик исследований. Д.Бигириндавйи принадлежит реализация методик.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, заключения и библиографии, содержащей 66 наименования. Объем диссертационной работы - 132 страниц.

Во **введении** излагается общая характеристика работы и приводятся основные результаты диссертации.

Глава 1 содержит 3 параграфа. В **первом параграфе** доказана теорема, составляющая обоснование принципа усреднения для системы быстро осциллирующих обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, то есть задача отыскания решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $0 \leq t \leq T$, в которой (в отличие от задачи Коши)дополнительные условия на решения задаются в двух точках $t = 0$ и $t = T$. Сформируем соответствующий результат.

Пусть $\Gamma = \{(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]\}$ и $\Pi = \{(x,t,\tau), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На отрезке $t \in [0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,t) + \varphi(x,t,\omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь A и B–квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$–вектор-функции, определенные на множествах Γ и Π соответственно, со значениями в $\mathbb{R}^n$ и для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяющие следующим условиям.

1. Вектор-функции $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вместе с их производными по x непрерывны на множествах $\Omega \times [0,T]$ и $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ имеет нулевое среднее по τ, то есть равномерно относительно $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ выполняется предельное равенство

$$\langle \varphi(x,t,\tau) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \varphi(x,t,\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0.$$

3. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на $\Omega \times [0,T] \times [0,\infty)$.

4. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует такая поятоянная L, что при всех x,$y \in \Omega$, $t \in [0,T]$ и $\tau \in [0,\infty)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right\| \leqslant L|y-x|,$$
$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y,t,\tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau) \right\| \leqslant L|y-x|.$$

В настоящей диссертационной работе символами $|x|$ и $\|A\|$ обозначены нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и квадратной матрицы A порядка n, удовлетворяющие условию согласования: $|Ax| \le \|A\||x|$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Можно, например, далее считать, что $|x| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$, $\|A\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, где x_i и a_{ij} – компоненты вектора x и элементы матрицы A соответственно.

5. Вектор-функции $\varphi(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ на множестве $G = \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ удовлетворяют равномерному условию Гельдера по t. То есть существуют такие положительные константы $L, \mu \in (0,1)$, что для любых $(x,t_1,\tau),(x,t_2,\tau) \in G$

$$|\varphi(x,t_1,\tau) - \varphi(x,t_2,\tau)| \leqslant L|t_1 - t_2|^\mu,$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t_1,\tau) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t_2,\tau)\right\| \leqslant L|t_1 - t_2|^\mu.$$

6. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ Ay(0) + By(T) = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

7. Будем предполагать, что задача (0.2) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$ при $t \in [0,T]$, которое вместе с некоторой $\rho(>0)$– окрестностью лежит в Ω, то есть при каждом $t \in [0,T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ.

8. Введем обозначение : $L(t) = F'_y(\overset{o}{y}(t),t)$ и пусть $\Phi(t)$-матрицант [1] системы

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x. \tag{0.3}$$

Будем предполагать, что имеет место соотношение :

$$\Delta = \det\left[A + B\Phi(T)\right] \neq 0. \tag{0.4}$$

В данной диссертационной работе нам понадобится известное банахово пространство $C_\mu([0,T])$, $\mu \in (0,1)$, то есть пространство непрерывных вектор-функций $w : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(w \in C([0,T]))$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ;

$$||w||_{C_\mu([0,T])} = \max_{0\le t\le T}|w(t)| + \sup_{0\le t_1<t_2\le T}\frac{|w(t_2) - w(t_1)|}{(t_2-t_1)^\mu} < \infty.$$

При выполнении указанных выше условий имеет место следующий результат.

[1]Напомним, что матрицантом системы (0.3) называется её фундаментальная система решений $\Phi(t)$ нормированная в точке $t = 0$, то есть $\Phi(0) = E$

Теорема. *При $\mu \in (0,1)$ существует $\omega_0 > 0$ такое, что в некоторой $C_\mu([0,T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}(t)$ задача (0.1) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

Заметим, что краевые задачи вида (0.1) без связи с методом усреднения исследовались, например, в [3]. Там для таких линейных задач была построена, в частности, матрица Грина. Обоснование метода усреднения для задачи (0.1), как и в работе [26], осуществляется с помощью теоремы о неявных отображениях (см., например [14]).

Во втором параграфе первой главы осуществлено обоснование метода усреднения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций и двухточечными краевыми условиями (в этом параграфе рассмотрен простейший случай). Сформируем соответствующий результат.

Пусть $T > 0$, $\Gamma = \{(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]\}$ и $\Pi = \{(x,t,\tau), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], \tau \in \mathbb{R}_+\}$. На отрезке $t \in [0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,t) + \varphi(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\psi(x,t,\omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{0.5}$$

Здесь A и B–квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $F(x,t)$, $\varphi(x,t,\tau)$ и $\psi(x,t,\tau)$–вектор-функции, определенные на множествах Γ и Π соответственно, со значениями в $\mathbb{R}^n$, и для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$, $\psi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $\Omega \times [0,T]$ и $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.

2. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $\Omega \times [0,T]$ и $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.

3. Существует $l > 0$ такое, что вектор-функция $\psi(x,t,\tau) = 0$ при $\tau \geq l$ и

$$\int_0^l \psi(x,T,\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

4. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ имеют нулевое среднее по τ, то есть равномерно относительно $(x,t)\in\Omega\times[0,T]$ выполняются предельные равенства

$$\langle\varphi(x,t,\tau)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

$$\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

5. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве $\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}_+$.

6. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует постоянная L, что при всех x,$y\in\Omega$, $t\in[0,T]$ и $\tau\in\mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(y,t)-\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right\| \leqslant L|y-x|,$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,t,\tau)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\right\| \leqslant L|y-x|.$$

7. Вектор-функции $\varphi(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ на множестве $\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}_+$ удовлетворяют равномерному условию Гельдера по t.

8. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=F(y,t)\\ Ay(0)+By(T)=0\end{cases}\tag{0.6}$$

9. Будем предполагать, что задача (0.6) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$ при $t\in[0,T]$.

10. Обозначим через $\Phi(t)$–матрицант системы

$$\frac{dx}{dt}=\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\right]x.\tag{0.7}$$

Будем предполагать, что имеет место соотношение

$$\Delta = det\,[A + B\Phi(T)] \neq 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого* $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что задача* (0.5) *при* $\omega > \omega_0$ *в некоторой* $C_\mu([0,T])$*–окрестности вектор-функции* $\overset{o}{y}(t)$ *имеет единственное решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

Замечание 1. .

В предыдущей теореме мы рассмотрели случай финитной функции $\psi(x,t,\tau)$. *Вместо этого можно рассмотреть периодическую функцию* $\psi(x,t,\tau)$ *по* τ. *Именно, условие 3 заменить условием:* $\psi(x,t,\tau)$ – 2π – *периодична по* τ *с нулевым средним, среднее* $\chi(x,t,\tau)$ *по* τ *равно нулю и* $\psi(x,T,\tau) = 0$, *где*

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t,\tau)\int\limits_0^\tau \psi(x,t,s)\mathrm{d}s.$$

В третьем параграфе первой главы сформулирована следующая теорема об усреднении систем ОДУ с большими высокочастотными слагаемыми, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций и двухточечными краевыми условиями(основной случай). Перейдем к его формулировке.

Пусть Ω–ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in D, \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T] \\ Ax(0) + Bx(T) = 0. \end{cases} \tag{0.8}$$

Здесь A и B –квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ –2π–периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть равномерно относительно $(x,t)\in D$ справедливо равенство

$$< \varphi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^\tau \varphi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^\tau \varphi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right],$$

которая в силу условий 1,2 вместе с производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве Q.

4. Для любых точек (x,t_1,τ) и $(x,t_2,\tau)\in Q$ выполняются неравенства

$$\|z(x,t_2,\tau) - z(x,t_1,\tau)\| \le \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$, а $\gamma(r)$, $r \ge 0$, –непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

5. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

6. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует такая постоянная L, что при всех x,$y\in\Omega$, $t\in[0,T]$ и $\tau\in[0,\infty)$ выполняются неравенства

$$\|z(y,t,\tau) - z(x,t,\tau)\| \leqslant L|y-x|,$$

где $z = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$

7. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t)\in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(f(x,t,\tau)+\chi(x,t,\tau)\right)\mathrm{d}\tau = \Psi(x,t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x, мы получим также равномерное относительно $(x,t) \in D$ предельное равенство.

8. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi,t), t \in [0,T] \\ A\xi(0) + B\xi(T) = 0 \end{cases} \tag{0.9}$$

9. Будем предполагать, что задача (0.9) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$ при $t \in [0,T]$, и существует [2] такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0,T]$.

10. Справедливо соотношение:

$$\Delta = det\,[A + B\Phi(T)] \neq 0$$

где $\Phi(t)$–матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right] x.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого* $\mu \in (0,\frac{1}{2})$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что задача* (0.8) *при* $\omega > \omega_0$ *имеет единственное в некоторой* $C_\mu([0,T])$*–окрестности вектор-функции* $\overset{o}{\xi}(t)$ *решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.

Глава 2 содержит 3 параграфа. **В первом параграфе** метод усреднения обоснован для нормальных систем дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми и многоточечными краевыми условиями (для любого числа точек m) на конечном отрезке . Сформируем этот результат.

Пусть Ω–область пространства $\mathbb{R}^n$ [3], $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : x \in \Omega, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На множестве D рассмотрим

[2]Предположение о существовании указанной подобласти Ω_0 не является принципиальным, а принято лишь для упрощения дальнейшего изложения.

[3]В качестве Ω может выступать любая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая строго внутри себя решение $\overset{o}{y}(t)$ усредненной задачи (см.условие 9 ниже)

m-точечную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(\omega)x(t_k) = a(\omega) \end{cases} \tag{0.10}$$

Здесь $\omega \gg 1$, $A_k(\omega)$–постоянные квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами , $0 = t_1 < t_2 ... < t_m = T$, (m $\in$ $\mathbb{N}$), $a(\omega)$– постоянный n–мерный вектор с вещественными компонентами. Пусть $f(x,t,\tau)$ вектор-функция, определенная на множестве Q со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая следующим условиям

1. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ вместе с ее первыми частными производными по x непрерывна на множестве Q. Соответствующую матрицу Якоби будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$.

2. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на Q.

3. Для любых $(x,t_1,\tau),(x,t_2,\tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|f(x,t_2,\tau) - f(x,t_1,\tau)| \le \gamma(|t_2 - t_1|),$$

$$\left\| \frac{\partial f(x,t_2,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,t_1,\tau)}{\partial x} \right\| \le \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $\gamma(r)$, $r \ge 0$–непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

4. Существует вектор-функция $F(x,t)$, определенная на множестве D со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in \Pi$ справедливо предельное равенство:

$$\langle f(x,t,\tau) \rangle \equiv \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(x,t). \tag{0.11}$$

5. Будем считать, что наряду с равенством (0.11) справедливо равенство

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau) \rangle \equiv \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t). \tag{0.12}$$

6. Существует постоянный n-мерный вектор a_0, для которого справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega\to+\infty} |a(\omega) - a_0| = 0.$$

7. Существуют квадратные матрицы B_k, порядка n, для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\omega\to+\infty} \|A_k(\omega) - B_k\| = 0.$$

8. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} B_k y(t_k) = a_0 \end{cases} \tag{0.13}$$

9. Будем предполагать, что задача (0.13) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$ при $t \in [0,T]$, которое вместе с некоторой $\rho(>0)$–окрестностью лежит в Ω, то есть при каждом $t \in [0,T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ.

   Символом $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$, обозначим матрицант системы в вариациях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(\overset{o}{y}(t),t)x. \tag{0.14}$$

10. Пусть справедливо соотношение:
    $\Delta = det\left[\sum\limits_{k=1}^{m} B_k \Phi(t_k)\right] \neq 0.$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого* $\mu \in (0,1)$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что задача* (0.10) *при* $\omega > \omega_0$ *в некоторой* $C_\mu([0,T])$*–окрестности вектор-функции* $\overset{o}{y}(t)$ *имеет единственное решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

Во втором параграфе метод усренения обоснован для нормальных систем дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций, в случае многоточечной краевой задачи. Сформируем этот результат

Пусть Ω–ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in D, \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T] \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)x(t_i) = a(\omega). \end{cases} \tag{0.15}$$

Здесь m и n натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i = 1,\dots,m$, –квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \dots < t_m = T$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q.

   Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$–якобиева матрица, то есть
   $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial\varphi_i(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j}(x,t,\tau)\right)_{k,i,j=1}^{n}$–матрица размера $n \times n^2$, где k–номер строки.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ – 2π – периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть равномерно относительно $(x,t) \in D$ выполняется равенство

$$< \varphi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right],$$

   которая в силу условий 1,2 вместе с производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве Q.

4. Для любых точек (x,t_1,τ) и $(x,t_2,\tau)\in Q$ выполняются неравенства

$$\|z(x,t_2,\tau)-z(x,t_1,\tau)\|\le\gamma(|t_2-t_1|),$$

где $z=f,\frac{\partial f}{\partial x}$, а $\gamma(r)$, $r\ge 0$, – непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0)=0$.

5. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

6. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x.

7. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t)\in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(f(x,t,\tau)+\chi(x,t,\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau=\Psi(x,t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x, мы получим также равномерное относительно $(x,t)\in D$ предельное равенство.

8. Для некоторых квадратных матриц S_i, $0\le i\le m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega)-S_i\|\to 0$, $|a(\omega)-a_0|\to 0$ при $\omega\to\infty$.

Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases}\frac{d\xi}{dt}=\Psi(\xi,t),t\in[0,T],\\ \sum\limits_{i=1}^m S_i\xi(t_i)=a_0\end{cases}\qquad(0.16)$$

9. Будем считать, что задача (0.16) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$ при $t\in[0,T]$, и существует такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t)\in\Omega_0$ при $t\in[0,T]$.

10. Справедливо соотношение:

$$\Delta = det\left[\sum_{i=1}^{m} S_i\Phi(t_i)\right] \neq 0$$

где $\Phi(t)$–матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi}, t)\right] x.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого* $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что задача* (0.15) *при* $\omega > \omega_0$ *имеет единственное в некоторой* $C_\mu([0,T])$–*окрестности вектор-функции* $\overset{o}{\xi}(t)$ *решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{\omega\to\infty}||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.

В третьем параграфе второй главы приведены иллюстративные примеры.

В третьей главе обоснован метод усреднения для высокочастотных систем ОДУ при наличие в правой части уравнений неограниченных слагаемых вида $\omega^\alpha\varphi(x,t,\omega t)$ при $\alpha = \frac{3}{4}$. Сформируем соотвествующий результат.

Пусть Ω–ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in D, \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \omega^{\frac{3}{4}}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T] \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)x(t_i) = a(\omega). \end{cases} \tag{0.17}$$

Здесь m и n натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i = 1,\ldots,m$,– квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \cdots < t_m = T$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q.

   Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ –якобиева матрица, то есть

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial \varphi_i(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}(x,t,\tau)\right)_{k,i,j=1}^{n}$ –матрица размера $n \times n^2$, где k –номер строки.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ – 2π – периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть равномерно относительно $(x,t) \in D$ выполняется равенство

$$< \varphi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x,t,\tau)d\tau = 0. \qquad (0.18)$$

3. Будем считать, что наряду с равенством (0.18) справедливо равенство

$$\langle\frac{\partial\varphi(x,t,\tau)}{\partial x}\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi(x,t,\tau)}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau = 0. \qquad (0.19)$$

4. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$

Вектор-функции $\chi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\chi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции ,

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau), \frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau), \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$$

определены и непрерывны на множестве Q.

5. Будем предполагать, что вектор-функция $\chi(x,t,\tau)$ имеет нулевое среднее, то есть равномерно относительно $(x,t) \in D$ справедливо равенство:

$$< \chi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi(x,t,\tau)d\tau = 0. \qquad (0.20)$$

6. Будем считать, что наряду с равенством (0.20) справедливо равенство

$$\langle\frac{\partial\chi(x,t,\tau)}{\partial x}\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\chi(x,t,\tau)}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau = 0. \qquad (0.21)$$

Далее определим вектор-функцию

$$\Theta(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^{\tau}\chi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^{\tau}\chi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$

7. Для любых двух точек (x,t_1,τ) и $(x,t_2,\tau)\in Q$ выполняются неравенства

$$\|z(x,t_2,\tau)-z(x,t_1,\tau)\|\le\gamma(|t_2-t_1|),$$

где $z=f,\frac{\partial f}{\partial x}$, а $\gamma(r)$, $r\ge 0$, – непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0)=0$.

8. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

9. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial t}(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x.

10. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t)\in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T(f(x,t,\tau)+\Theta(x,t,\tau))\,\mathrm{d}\tau=\Psi(x,t). \tag{0.22}$$

11. Мы будем считать, что наряду с равенством (0.22) справедливо равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(\frac{\partial f(x,t,\tau)}{\partial x}+\frac{\partial\Theta(x,t,\tau)}{\partial x}\right)\mathrm{d}\tau=\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}.$$

12. Для некоторых квадратных матриц S_i, $0\le i\le m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega)-S_i\|\to 0$, $|a(\omega)-a_0|\to 0$ при $\omega\to\infty$.

13. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases}\frac{d\xi}{dt}=\Psi(\xi,t),t\in[0,T],\\ \sum\limits_{i=1}^m S_i\xi(t_i)=a_0\end{cases} \tag{0.23}$$

14. Будем предполагать, что задача (0.23) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0, T]$, и существует такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0, T]$.

15. Справедливо соотношение:

$$\Delta = det \left[\sum_{i=1}^{m} S_i \Phi(t_i) \right] \neq 0$$

где $\Phi(t)$–матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\overset{o}{\xi}, t) \right] x.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (0.17) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0, T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{\xi}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega \to \infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.*

В **заключении** представлены основные результаты, полученные в диссертации. В нем отмечены также некоторые направления, которые желательно изучить в ходе дальнейших исследований.

Глава I.Метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с двухточечными краевыми условиями

Глава 1 посвящена обоснованию метода уреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с краевыми условиями (двухточечная краевая задача). В первом параграфе правые части систем равномерно ограничены, а во втором они содержат большие высокочастотные слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций.

§1.Обоснование метода усреднения в случае равномерно ограниченной правой части

1°. **Формулировка результатов (теорема 1).** Пусть $\Gamma = \{(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]\}$ и $\Pi = \{(x,t,\tau), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На отрезке $t \in [0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,t) + \varphi(x,t,\omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь A и B–квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вектор-функции, определенные на множествах Γ и Π соответственно, со значениями в $\mathbb{R}^n$ и для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяющие следующим условиям.

1. Вектор-функции $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вместе с их производными по x непрерывны на множествах $\Omega \times [0,T]$ и $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.
2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ имеет нулевое среднее по τ, то есть равномерно относительно $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ выполняется предельное равенство
$$\langle \varphi(x,t,\tau) \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x,t,\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0.$$
3. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$.

4. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует такая поятоянная L, что при всех $x,y \in \Omega$, $t \in [0, T]$ и $\tau \in [0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right\| \leqslant L|y-x|,$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y,t,\tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau) \right\| \leqslant L|y-x|.$$

5. Вектор-функции $\varphi(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ на множестве $G = \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ удовлетворяют равномерному условию Гельдера по t. То есть существуют такие положительные константы $L, \mu \in (0,1)$, что для любых $(x,t_1,\tau),(x,t_2,\tau) \in G$

$$|\varphi(x,t_1,\tau) - \varphi(x,t_2,\tau)| \leqslant L|t_1 - t_2|^{\mu},$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t_1,\tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t_2,\tau) \right\| \leqslant L|t_1 - t_2|^{\mu}.$$

6. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ Ay(0) + By(T) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

7. Будем предполагать, что задача (1.2) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$ при $t \in [0,T]$, которое вместе с некоторой $\rho(>0)$– окрестностью лежит в Ω, то есть при каждом $t \in [0,T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ.

8. Введем обозначение : $L(t) = F'_y(\overset{o}{y}(t),t)$ и пусть $\Phi(t)$ - матрицант системы

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x. \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что имеет место соотношение

$$\Delta = det\,[A + B\Phi(T)] \neq 0. \tag{1.4}$$

Прежде чем сформулировать основную теорему данного параграфа, нам нужно ввести определения классического пространства Гельдера.

Пусть дан отрезок $[a, b]$ и $f(t)$-некоторая вектор-функция определенная на этом отрезке со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Вектор-функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\mu \in (0, 1]$ если существует положительная постоянная A такая, что*

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^\mu \tag{1.5}$$

для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$. Последное неравенство эквивалентно ограниченности величины

$$H_\mu = \sup_{t_1,t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|f(t_2) - f(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu}.$$

Наименьшее значение постоянной A, для которого выполняется (1.5), называется коэффициентом Гельдера, а μ - показателем Гельдера.

При выполнении указанных выше условий имеет место следующий результат.

Теорема 1. *При $\mu \in (0, 1)$ существует $\omega_0 > 0$ такое, что в некоторой $C_\mu([0, T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}(t)$[4] задача (1.1) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\omega \to \infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

2°. **Доказательство теоремы 1.**

Начнем с некоторых известных вспомогательных результатов(см.[3]), относящихся к краевой задаче

$$\frac{dy}{dt} = L(t)y + f(t), t \in [0, T], \tag{1.6}$$

[4] Заметим, что решение, вообще говоря, не является непрерывным в конечных точках ω но если оно положено равным $\overset{o}{y}(t)$ в точке $\omega = \infty$, то оно непрерывно в этой точке.

$$Ay(0) + By(T) = 0 \tag{1.7}$$

где $L(t)$–квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, $f(t)$–непрерывная n–мерная вектор-функция, A и B-квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами .

Пусть $\Phi(t)$– матрицант, т.е нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица однородной системы

$$\frac{dy}{dt} = L(t)y, t \in [0, T], \tag{1.8}$$

так что $\Phi(0) = I$, где I–единичная матрица.

Введем обозначение:

$$\Delta = det[A + B\Phi(T)].$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Рассмотрим множество

$$Q = \{(t, s) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq T, t \neq s\}.$$

Определение 2. *Функция $G : Q \to M^{n\times n}$ называется функцией Грина краевой задачи (1.8), (1.7) если она удовлетворяет следующим условиям[3].*

1) Функции $G(t, s)$ и $\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ являются непрерывными по t на $[0, s) \cup (s, T]$;

2) При $t \in [0, s)$ и $t \in (s, T]$, функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt} = L(t)G;$$

3) Функция Грина удовлетворяет краевым условиям

$$Ay(0) + By(T) = 0,$$

то есть

$$AG(0, s) + BG(T, s) = 0$$

при всех $s \in (0, T)$;

4) В точке $t = s$ функция Грина $G(t,s)$ терпит скачек, равный единичной матрице

$$G(s+0,s) - G(s-0,s) = I.$$

Предложение 1. *[3] Если $\Delta \neq 0$, то неоднородная краевая задача (1.6),(1.7) имеет единственное решение, задаваемое формулой*

$$x(t) = \int_0^T G(t,s) f(s) \mathrm{d}s \tag{1.9}$$

где $G(t,s)$ – функция Грина однородной краевой задачи (1.8), (1.7) которая существует и единственна.

В заключение рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + g(t,x), \tag{1.10}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0 \tag{1.11}$$

где $L : [0,T] \to M^{n \times n}$, $g : \Gamma \to \mathbb{R}^p$, $\Gamma = \{(t,x), t \in [0,T], x \in D, D \subset \mathbb{R}^n\}$. Рассмотрим порождаемое формулой (1.9) интегральное уравнение :

$$x(t) = \int_0^T G(t,s) g(s, x(s)) \mathrm{d}s. \tag{1.12}$$

Решение интегрального уравнения (1.12) будем называть всякую непрерывную функцию $x(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, график которой принадлежит Γ и обращающую (1.12) в тождество по $t \in [0,T]$.

Предложение 2. *[3] Для того чтобы при $\Delta \neq 0$ функция $x(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ была решением краевой задачи (1.10), (1.11) необходимо и достаточно, чтобы $x(t)$ была решением интегрального уравнения (1.12).*

Перейдем к рассмотрению нашей задачи (1.1). В ней сделаем замену переменных вида

$$x(t) \longrightarrow x(t) + \overset{o}{y}(t) \tag{1.13}$$

где $\overset{o}{y}(t)$ – решение усреденной задачи (1.2). В результат замены получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = L(t)x + f(x, t, \omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

где

$$f(x, t, \tau) = \varphi(x + \overset{o}{y}, t, \tau) + F(x + \overset{o}{y}, t) - F(\overset{o}{y}, t) - [F'_y(\overset{o}{y}, t)]x \equiv$$
$$\equiv H(x, t, \tau) + \Psi(x, t),$$

$$\Psi(x, t) = F(x + \overset{o}{y}, t) - F(\overset{o}{y}, t) - [F'_y(\overset{o}{y}, t)]x.$$

Прежде всего, наряду с задачей (1.14) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = L(t)y + \Psi(y, t) \\ Ay(0) + By(T) = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

которая очевидно, имеет решение $y(t) = 0$.

От (1.14) и (1.15) перейдем в силу [3] к эквивалентным интегральным уравнениям

$$x(t) = \int\limits_0^T G(t, s) f(x(s), s, \omega s) \mathrm{d}s, \tag{1.16}$$

$$y(t) = \int\limits_0^T G(t, s) \Psi(y(s), s) \mathrm{d}s. \tag{1.17}$$

Здесь $G(t, s)$–матрица Грина, о которой говорилось выше. Напомним, что в (1.16), (1.17)

$$f(x,t,\tau) = \varphi(x+\overset{o}{y},t,\tau) + F(x+\overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [F'_y(\overset{o}{y},t)]x, \tag{1.18}$$

$$\Psi(x,t) = F(x+\overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [F'_y(\overset{o}{y},t)]x. \tag{1.19}$$

Определение 3. *Вектор-функция $x(t)$(соответственно $y(t)$):$[0,T] \to D \subset \mathbb{R}^n$ называется решением задачи (1.14) (соответственно решением задачи (1.15))если*

1. *вектор-функция $x(t)$(соответственно $y(t)$) непрерывно дифференцируема на $[0,T]$;*
2. *интегральная кривая $(t,x(t))$ (соответственно $(t,y(t))$) лежит в Γ при всех $t \in [0,T]$;*
3. *при подстановке вектор-функции $x(t)$(соответственно $y(t)$) в уравнение (1.14) (соответственно в (1.15)) будет получено тождество;*
4. *вектор-функция $x(t)$(соответственно $y(t)$)удовлетворяет краевым условиям.*

Исходя из равенств (1.16) и (1.17), зададим в какой-либо окрестности точки $(0,\infty)$ пространства $C_\mu([0,T]) \times [1,\infty]$ оператор $N : C_\mu([0,T]) \times [1,\infty] \to C_\mu([0,T])$, $0 < \mu \le 1$ формулой:

$$[N(x,\omega)](t) = \begin{cases} x(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s- \\ -\int\limits_t^T \Phi(t)S(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \omega \ne \infty \\ x(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)\Psi(x(s),s)\mathrm{d}s- \\ -\int\limits_t^T \Phi(t)S(s)\Psi(x(s),s)\mathrm{d}s, \omega = \infty. \end{cases} \tag{1.20}$$

Здесь U, S – непрерывные и непрерывно дифференцируемые матрица-функции, фигурирующие в представлении матрицы Грина G [3]. Мы докажем, что оператор N переводит пространство $C_\mu([0,T])$ в себя. Выберем $x \in$

$C_\mu([0,T])$. Матрицант $\Phi(t) \in C_\mu([0,T])$, то есть существует постаянная $L > 0$ такая, что для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ выполняется оценка

$$\|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|^\mu.$$

Будем предполагать что $t_1 > t_2$.

Пусть

$$[N(x,\omega)](t_1) = x(t_1) - \int\limits_0^{t_1} \Phi(t_1)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s - \\ - \int\limits_{t_1}^{T} \Phi(t_1)S(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s,$$

$$[N(x,\omega)](t_2) = x(t_2) - \int\limits_0^{t_2} \Phi(t_2)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s - \\ - \int\limits_{t_2}^{T} \Phi(t_2)S(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s.$$

Тогда мы имеем

$$\frac{|[N(x,\omega)](t_1) - [N(x,\omega)](t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \leq \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} + \\ + \frac{|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \int\limits_0^{t_2} |U(s)f(x(s),s,\omega s)|\mathrm{d}s + \\ + \frac{|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \int\limits_{t_1}^{T} |U(s)f(x(s),s,\omega s)|\mathrm{d}s + \\ + \frac{1}{|t_1 - t_2|^\mu} \int\limits_{t_2}^{t_1} |\Phi(t_2)S(s)f(x(s),s,\omega s)|\mathrm{d}s + \\ + \frac{1}{|t_1 - t_2|^\mu} \int\limits_{t_2}^{t_1} |\Phi(t_1)U(s)f(x(s),s,\omega s)|\mathrm{d}s \\ \leq H_x^\mu + LM_1 t_2 + LM_2(T - t_1) + M_3(t_1 - t_2)^{1-\mu} + M_4(t_1 - t_2)^{1-\mu},$$

где

$$H_x^\mu = \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} < \infty,$$

$$M_{1,2} = \sup_{s \in [0,T]} |U(s) f(x(s), s, \omega s)|,$$

$$M_3 = \sup_{s \in [0,T]} |\Phi(t_2) S(s) f(x(s), s, \omega s)|,$$

$$M_4 = \sup_{s \in [0,T]} |\Phi(t_1) U(s) f(x(s), s, \omega s)|.$$

Введем обозначение:

$K = LM_1 t_2 + LM_2(T - t_1) + M_3(t_1 - t_2)^{1-\mu} + M_4(t_1 - t_2)^{1-\mu}$.

Тогда

$$\|N(x,\omega)(t)\|_{C_\mu([0,T])} = \sup_{t \in [0,T]} |N(x,\omega)(t)| +$$
$$+ \sup_{t_1, t_2 \in [0,T]} \frac{|N(x,\omega)(t_1) - N(x,\omega)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}$$
$$\leq \sup_{t \in [0,T]} |N(x,\omega)(t)| + H_x^\mu + K \leq$$
$$\leq \|x\|_{C([0,T])} + \left\| \int_0^t \Phi(t) U(s) f(x(s), s, \omega s) \mathrm{d}s \right\|_{C([0,T])} +$$
$$+ \left\| \int_t^T \Phi(t) S(s) f(x(s), s, \omega s) \mathrm{d}s \right\|_{C([0,T])} + H_x^\mu + K < \infty.$$

Это доказывает, что оператор N отображает пространство $C_\mu([0,T])$ в себя, то есть оператор

$$N(x,\omega) : C_\mu([0,T]) \to C_\mu([0,T]), 0 < \mu \leq 1.$$

Нетрудно заметить, что такой же вывод справедлив и для оператора $N(x, \infty)$.

Заметим, что задача о решении уравнений (1.16), (1.17) может рассматриваться как задача о решении операторного уравнения $[N(x,\omega)](t) = 0$. Ради кратности, первый интеграл в (1.20) (при $\omega = \infty$ и $\omega \neq \infty$) будем обозначать через $[I_1(x,\omega)](t)$, а второй через $[I_2(x,\omega)](t)$.

Справедлива следующая оснавная лемма.

Лемма 1. *Оператор $N(x,\omega)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем в точке $(0,\infty)$. При этом $N(0,\infty)=0$, а производная Фреше $D_xN(0,\infty)=I$, где I –тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$.*

Оснавная лемма 1 вытекает из следующих двух лемм

Лемма 2. *Оператор $N(x,\omega)$ определен в окрестности точки $(0,\infty)$, непрерывен в этой точке. При этом $N(0,\infty)=0$.*

Лемма 3. *Оператор $N(x,\omega)$, определяемый формулой (1.20), имеет дифференциал Фреше вида*

$$D_xN(x,\omega)h(t)=h(t)-\int\limits_0^t\Phi(t)U(s)f_x(x(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s-$$
$$-\int\limits_t^T\Phi(t)S(s)f_x(x(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s\equiv N_0(x,\omega)h(t),\quad(1.21)$$

для всех $h\in C_\mu([0,T])$. При этом $D_xN(x,\omega)$ непрерывен в точке $(0,\infty)$ и $D_xN(0,\infty)=I$ где I-тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$.

В данной диссертационной работе теорема о неявной функции играет важную роль в доказательстве теорем. Поэтому перед доказательством леммы 2, напомним ее. Но прежде напомним понятие производной Фреше[14].

Пусть в открытом подмножестве U банахова пространства E задано отображение f, принимающее значения в банаховом пространстве F, то есть $f:U\to F$.

Определение 4. *Говорят, что вектор-функция f дифференцируема по Фреше в точке $x_0\in U$, если имеется такой ограниченный линейный оператор $A\in\mathcal{L}(E,F)$, что*

$$f(x_0+h)-f(x_0)-Ah=o(h),\quad(1.22)$$

или, говоря подробнее, что

$$\lim_{\|h\|_E\to0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah\|_F}{\|h\|_E}=0.$$

Этот оператор A называют производной Фреше отображения f в точке x_0 и обозначают через $Df(x_0)$.

Предложение 3. *[14]*

Пусть X, Y, Z *–три банаховы пространства,* $D = U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(y_0)$*– окрестность точки* $(x_0, y_0) \in X \times Y$*, а* $F(x, y)$*-отображение* D *в* Z *обладающее следующими свойствами:*

1. $F(x, y)$ *непрерывно в точке* (x_0, y_0)*;*
2. $F(x_0, y_0) = 0$*;*
3. *частная производная Фреше* $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ *существует в* D *и непрерывна в точке* (x_0, y_0)*.*
4. *существует линейный ограниченный оператор* $\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1}$*.*

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ *разрешимо относительно* y *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0)*. Это означает, что существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *и такое отображение* $y = f(x)$*, определенное при* $|x - x_0| < \delta$ *и непрерывное в точке* x_0*, что каждая пара* (x, y)*, для которой* $|x - x_0| < \delta$ *и* $y = f(x)$*, удовлетворяет уравнению* $F(x, y) = 0$ *и условию* $|y - y_0| < \varepsilon$*.*

Отметим, что здесь нам будет важна лишь разрешимость уравнения $F(x, y) = 0$, без дифференцируемости его решения $y(x)$.

Теперь перейдем к доказательству леммы 2.

Доказательство. Равенство

$$N(0, \infty) = 0$$

легко следует из представлений (1.20) и очевидного равенства: $\Psi(0, t) = 0$.

Докажем непрерывность оператора $N(x, \omega)$ в точке $(0, \infty)$. Для этого зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что существуют $0 < \delta_1 < 1$ и $\omega_1 > 0$[5], такие что при $\omega > \omega_1$ и $||x||_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ выполняется оценка

$$||N(x, \omega) - N(0, \infty)||_{C_\mu([0,T])} < \varepsilon. \tag{1.23}$$

Заметим, что $N(0, \infty) = 0$, поэтому нам остается доказать что для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta_1 < 1$ такие, что при

$$\|x\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1, \omega > \omega_1 \tag{1.24}$$

[5]В данном параграфе символом ω_1 мы обозначаем, вообщее говоря, различные достаточные большие числа.

выполняется неравенство

$$||N(x,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \varepsilon. \tag{1.25}$$

Будем считать, что $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда остается доказать неравенство

$$||I_i(x,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}, i = 1,2 \tag{1.26}$$

когда x и ω удовлетворяют условию (1.24).

Вначале, оценим I_1. Из формулы (1.16)-(1.19) легко следует оценка

$$\sup_{\|x\|_{C_\mu([0,T])}\le 1, t\in[0,T], \omega>0} \left| \frac{\partial [I_1(x,\omega)](t)}{\partial t} \right| \le C_0, \tag{1.27}$$

где $C_0 > 0$-константа. В силу соотношений (1.27) и интерполяционного неравенства[42]

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])} \le \|u\|_{C([0,T])} + \left(2\|u\|_{C([0,T])}\right)^{1-\mu} \|u\|^{\mu}_{C_1([0,T])}, u \in C_1([0,T]), \tag{1.28}$$

неравенства (1.26) достаточно доказать при $\mu = 0$ (то есть с заменой $C_\mu([0,T])$ на $C([0,T])$ при $||x||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}$). Имеем:

$$|I_1| = |\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s +$$
$$+ \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)\Psi(x(s),s)\mathrm{d}s| \equiv |I_{11} + I_{12}|.$$

Поскольку $|\Psi(x(s),s)| = \bar{o}(|x|)$ при $|x| \to 0$ равномерно относительно $s \in [0,T]$, то найдется δ_2, такое что при $||x|| \le \delta_2$ выполняется неравенство $||I_{12}||_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{12}$.

Оценим теперь $|I_{11}|$. При любом $0 < t_0 < t$:

$$|I_{11}| = \left| \int\limits_0^{t_0} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right| +$$
$$+ \left| \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right| = |I'_{11}| + |I''_{11}|.$$

Далее подберем t_0 так,что:

$$|I'_{11}| = \left| \int\limits_0^{t_0} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{t_0} |\Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)|\mathrm{d}s \leq Mt_0 < \frac{\varepsilon}{12},$$

где $M > 0$ - константа.

Перейдем теперь к оценке интеграла

$$I''_{11} = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s,$$

где $t > t_0$. Разабъём интервал (t_0, t) на m равных частей и воспользуемся представлением:

$$|I''_{11}| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left[\Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s) - \Phi(t)U(\tau_i)H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)\right] \mathrm{d}s \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)U(\tau_i)H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)\mathrm{d}s \right| \equiv A + B.$$

Вначале оценим слагаемое A. Мы имеем

$$A \leq \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s) - \Phi(t)U(\tau_i)H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)|\mathrm{d}s$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left[\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} ||\Phi(t)||||U(s) - U(\tau_i)|||H(x(s),s,\omega s)|\mathrm{d}s \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left[\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)U(\tau_i)\|||(H(x(s),s,\omega s) - H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s))|\mathrm{d}s \right].$$

Так как

$$||U(s)-U(\tau_i)|| = \left\| \int\limits_s^{\tau_i} U'(\tau)\mathrm{d}\tau \right\| \le L_1(s-\tau_i) \le L_1\frac{T}{m},$$

где $L_1 = const > 0$, то существует $m = m_1$ столь большое, что

$$||U(s)-U(\tau_i|| < \frac{\varepsilon}{24}.$$

Далее,

$$|H(x(s),s,\omega s) - H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)| \le L_2(|x(s)-x(\tau_i)| + |s-\tau_i|^{\mu}),$$

где $L_2 = const > 0$.
Поскольку $x \in C_\mu([0,T])$, то имеем оценку

$$|x(s)-x(\tau_i)| \le L_3|s-\tau_i|^{\mu},$$

где $L_3 = const > 0$. Из проведенных рассуждений следует, что найдется столь большое m, при котором для всех $\omega > 0$ имеет место оценка: $A < \frac{\varepsilon}{12}$.

Оценим теперь слагаемое B. В каждом интеграле, входящемся в B, сделаем замену $\omega s = r$. Мы получим

$$B = \left|\Phi(t)\sum_{i=1}^{m} U(\tau_i)\left[\tfrac{\tau_{i+1}}{\omega\tau_{i+1}}\int_0^{\omega\tau_{i+1}} H(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r - \tfrac{\tau_i}{\omega\tau_i}\int_0^{\omega\tau_i} H(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r\right]\right|.$$

Согласно условиям теоремы 1 равномерно относительно x $\left(||x||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}\right)$ справедливы предельные равенства:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int\limits_0^N \varphi(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r = 0, i = \overline{1,m}.$$

Отсюда следует существование такого $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$

$$\left|\frac{1}{\omega\tau_i}\int\limits_0^{\omega\tau_i}\varphi(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r\right| < \frac{\varepsilon}{24}, i = \overline{1,m},$$

следовательно при $\omega > \omega_1$, имеет место оценка $B < \frac{\varepsilon}{12}$, а потому

$$\|I_1\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.29}$$

Теперь покажем ограниченность нормы интеграла

$$I_1 = \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s$$

в $C_1([0,T])$. Для этого возьмем производную интеграла I_1 по переменной t.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{d\Phi(t)}{dt}U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s + \Phi(t)U(t)f(x(t),t,\omega t) =$$

$$= \Psi_x(\overset{o}{y},t)\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s + \Phi(t)U(t)f(x(t),t,\omega t) =$$

$$= \Psi_x(\overset{o}{y},t)I_1 + \Phi(t)U(t)f(x(t),t,\omega t).$$

Из условий теоремы 1 и оценки (1.29) получаем следующую оценку

$$\left\| \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right\|_{C_1([0,T])} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + K,$$

где K мажорирует $\|\Phi(t)U(t)f(u(t),t,\omega)\|$. Поскольку в последнем неравенстве значение ε произвольно, то мы получаем желаемый результат.

Получили, что норма интеграла

$$I_1 = \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s$$

мала в $C([0,T])$ и равномерно ограничена в $C_1([0,T])$ при $\omega \gg 1$. Следовательно из (1.27) и (1.28) получим, что норма интеграла I_1 мала в $C_\mu([0,T])$. Аналогично доказывается, что найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ выполняется оценка $\|I_2\|_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Таким образом

$$||N(x,\omega)||_{C_\mu([0,T])} \leq ||x||_{C_\mu([0,T])} + ||I_1||_{C_\mu([0,T])} + ||I_2||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad (1.30)$$

Последнее неравенство означает, что оператор $N(x,\omega)$ является непрерывным в точке $(0,\infty)$ в пространстве $C_\mu([0,T])$.

Заметим, что при $\omega=+\infty$, $\|x\|_{C_\mu([0,T])}\le\delta_1$ оценка (1.30) тоже справедлива с некоторыми упрощениями.

Теперь перейдем к доказательству леммы 3

Доказательство. По условию теоремы 1, вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и его производная $f_x(x,t,\tau)$ по x непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменной x. Следовательно, поскольку $x(t)\in C_\mu([0,T])$, то $f(x(t),t,\tau)$ и $f_x(x(t),t,\tau)$ удовлетворяют условию Гельдера по t. Отсюда следует, что оператор $N(x,\omega)$ имеет непрерывную производную Фреше по x в каждой точке $x(t)\in C_\mu([0,T])$. Далее, для любой функции $h\in C_\mu([0,T])$ достаточно малой и $s\in[0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}&N(x+h,\omega)-N(x,\omega)=\\&=h(t)-\int\limits_0^t\Phi(t)U(s)\left[f(x(s)+h(s),s,\omega s)-f(x(s),s,\omega s)\right]\mathrm{d}s-\\&\qquad-\int\limits_t^T\Phi(t)S(s)\left[f(x(s)+h(s),s,\omega s)-f(x(s),s,\omega s)\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Далее по интегральной теореме Лагранжа имеем

$$f(x(s)+h(s),s,\omega s)-f(x(s),s,\omega s)=\int\limits_0^1 f_x(x(s)+\theta h(s),s,\omega s)h(s)d\theta,$$

где $\theta\in[0,1]$.

Поскольку f_x непрерывна на множестве $\Omega\times[0,T]\times[0,\infty)$ а потому

$$f_x(x(s)+\theta h(s),s,\omega s)h(s)=f_x(x(s),s,\omega s)h(s)+\alpha(x(s),\theta h(s),s)h(s),$$

где $\alpha(x(s),\theta h(s),s)\to0$ равномерно при $\|h\|_{C_\mu[0,T]}\to0$. Следовательно

$$\begin{aligned}&f(x(s)+h(s),s,\omega s)-f(x(s),s,\omega s)=\\&\qquad=\int\limits_0^1 f_x(x(s),s,\omega s)h(s)+\alpha(x(s),\theta h(s),s)d\theta.\end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$N(x+h,\omega)-N(x,\omega)=h(t)-\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f_x(x(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s-$$
$$-\int\limits_t^T \Phi(t)S(s)f_x(x(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s+$$
$$+\int\limits_0^t \mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi(t)U(s)\alpha(x(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta+$$
$$+\int\limits_t^T \mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi(t)S(s)\alpha(x(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta=$$
$$=D_xN(x,\omega)h+w_1(x,h)+w_2(x,h),$$

где

$$D_xN(x,\omega)h(t)=h(t)-\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f_x(x(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s-$$
$$-\int\limits_t^T \Phi(t)S(s)f_x(x(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s,$$

$$w_1(x,h)=\int\limits_0^t \mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi(t)U(s)\alpha(x(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta,$$
$$w_2(x,h)=\int\limits_t^T \mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi(t)S(s)\alpha(x(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta.$$

Теперь докажем, что остатки $w_1(x,h)$ и $w_2(x,h)$ обладают свойствами:

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\gamma(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}}=0,$$

где $\gamma=w_1,w_2$. Для этого оценим w_1 в $C_\mu([0,T])$

$$\|w_1(u,h)(t)\|_{C_\mu([0,T])} = \sup_{t,s\in[0,T]} \left| \int_0^t \mathrm{d}s \int_0^1 \Phi(t)U(s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta \right| +$$
$$+ \sup_{0\le t<s_1\le T} \frac{1}{|t-s_1|^\mu} \left| \int_{s_1}^t \mathrm{d}s \int_0^1 (\Phi(t)-\Phi(s_1))U(s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta \right| +$$
$$+ \sup_{0\le t<s_1\le T} \frac{1}{|t-s_1|^\mu} \left| \int_t^{s_1} \mathrm{d}s \int_0^1 \Phi(s_1))U(s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta \right| \le$$
$$\le \sup_{t,s\in[0,T]} |\Phi(t)U(s)||\alpha(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|(T+1)+$$
$$+ \sup_{s\in[0,T]} M_1|U(s)||\alpha(u(s),\theta h(s),s)||h(s)| \le$$
$$\le M_2 \sup_{s\in[0,T],\theta\in[0,1]} |\alpha(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|.$$

Из последней оценки, мы получим

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0} \frac{\|w_1(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0} \frac{\|w_2(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Поэтому по определению 4, оператор $N(x,\omega)$ дифференцируем по Фреше в точке $x(t) \in C_\mu([0,T])$ и равенство (1.21) установлено. Тогда производная Фреше $D_xN(x,\omega)$ в фиксированной точке (x_0,ω_0) есть линейный оператор, действующий из $C_\mu([0,T])$ в $C_\mu([0,T])$.

Далее докажем непрерывность производной Фреше $D_xN(x,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Для этого рассмотрим

$$D_xN(x,\omega)(t) = I - \int_0^t \Phi(t)U(s)f_x(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s - \int_t^T \Phi(t)S(s)f_x(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s,$$

$$D_xN(x,\infty)(t) = I - \int_0^t \Phi(t)U(s)\Psi_x(x(s),s)\mathrm{d}s - \int_t^T \Phi(t)S(s)\Psi_x(x(s),s)\mathrm{d}s. \quad (1.31)$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|x\|_{C_\mu([0,T])} < \delta$ и $\omega > \omega_1$ выполняется

$$\|D_x N(x,\omega) - D_x N(0,\infty)\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} < \varepsilon.$$

Рассмотрим

$$\|D_x N(x,\omega) - D_x N(x,\infty)\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} =$$
$$= \left\| \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)\left[f_x(x(s),s,\omega s) - \Psi_x(x(s),s)\right] \mathrm{d}s \right\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} +$$
$$+ \left\| \int\limits_t^T \Phi(t)S(s)\left[f_x(x(s),s,\omega s) - \Psi_x(x(s),s)\right] \mathrm{d}s \right\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])}.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве указанного неравенства, т.к. при этом используются те же соображения, что и выше. Отметим теперь очевидное равенство

$$D_x N(0,\infty) = I$$

которое легко следует из представлений (1.19), (1.31) и

$$D_x \Psi(0,t) = 0.$$

Лемма 3 доказана.

Таким образом, оператор $N(x,\omega)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы о неявной функции[14]. В силу этой теоремы, найдутся $\omega_1 > 0$ и $\delta > 0$, такие что в окрестности $||x||_{C_\mu([0,T])} \le \delta$ при $\omega > \omega_1$, существует единственное решение x_ω задачи $N(x,\omega) = 0$ и при этом имеет место предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0. \tag{1.32}$$

Из формулы (1.13), связывающей x_ω с $\overset{o}{y}(t)$ и (1.32), при больших ω для решения исходной задачи справедливо соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0. \tag{1.33}$$

Теорема 1 доказана.

§2.Обоснование метода усреднения при наличии в правой части больших слагаемых (простейший случай)

1°. **Формулировка результатов (теорема 2).**

Пусть $T > 0$, $\Gamma = \{(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]\}$ и $\Pi = \{(x,t,\tau), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], \tau \in \mathbb{R}_+\}$. На отрезке $t \in [0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,t) + \varphi(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\psi(x,t,\omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{1.34}$$

Здесь A и B–квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$,$\psi(x,t,\tau)$-вектор-функции, определенные на множествах Γ и Π соответственно, со значениями в $\mathbb{R}^n$ и для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяющие следующим условиям.

1. Вектор-функции $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$, $\psi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $\Omega \times [0,T]$ и $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.

2. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $\Omega \times [0,T]$ и $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.

3. Существует $l > 0$ такое, что вектор-функция $\psi(x,t,\tau) = 0$ при $\tau \geq l$ и

$$\int\limits_0^l \psi(x,T,\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

4. Введем вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t,\tau)\int\limits_0^\tau \psi(x,t,s)\mathrm{d}s.$$

   Вектор-функция $\chi(x,t,\tau)$ в силу условий 1,2) вместе с производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ определена и непрерывна на множестве $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}_+$.

5. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ имеют нулевое среднее по τ, то есть равномерно относительно $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ выполняются предельные равенства

$$\langle\varphi(x,t,\tau)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0, \tag{1.35}$$

$$\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

6. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и Матрица-функция $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве $\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}_+$.
7. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует постоянная L, что при всех x,$y\in\Omega$, $t\in[0,T]$ и $\tau\in\mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(y,t)-\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right\| \leqslant L|y-x|,$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,t,\tau)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\right\| \leqslant L|y-x|.$$

8. Вектор-функции $\varphi(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ на множестве $G=\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}_+$ удовлетворяют равномерному условию Гельдера по t. То есть существуют такие положительные константы $L,\mu\in(0,1)$, что для любых $(x,t_1,\tau),(x,t_2,\tau)\in G$

$$|\varphi(x,t_1,\tau)-\varphi(x,t_2,\tau)| \leqslant L|t_1-t_2|^{\mu},$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t_1,\tau)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t_2,\tau)\right\| \leqslant L|t_1-t_2|^{\mu}.$$

9. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=F(y,t)\\ Ay(0)+By(T)=0\end{cases} \tag{1.36}$$

10. Будем предполагать, что задача (1.36) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$ при $t \in [0, T]$.

11. Обозначим через $\Phi(t)$–матрицант системы

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}, t)\right] x. \tag{1.37}$$

Будем предполагать, что имеет место соотношение

$$\Delta = det\,[A + B\Phi(T)] \neq 0.$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 2. *При $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ существует $\omega_0 > 0$ такое, что в некоторой $C_\mu([0, T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}(t)$ задача (1.34) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.*

2°. Доказательство теоремы 2.

При доказательстве теоремы используется замена переменных типа классической замены Н.М.Крылова-Н.Н. Боголюбова, затем осуществляется переход от полученной в результате замены задачи к интегральному уравнению. После этого к полученному интегральному оператору применяется теорема о неявных отображениях.

В ходе доказательства теоремы 2 будет использована следующая простая лемма

Лемма 4. *Пусть вектор-функция $\psi(y, t, \tau)$ определена на множестве $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}_+$, принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет указанному выше условию 3). Пусть далее $\alpha > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_1 > 0$*[6]*, что при всех $\omega > \omega_1$ и всех $y \in \Omega$, $t \in [0, T]$ выполняются оценки:*

$$\left|\omega^{-\alpha} \int\limits_0^{\omega t} \psi(y, t, \tau) d\tau\right| < \varepsilon, \tag{1.38}$$

$$\left\|\omega^{-\alpha} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial \psi}{\partial y}(y(t), t, \tau) \mathrm{d}\tau\right\| < \varepsilon. \tag{1.39}$$

[6] В данном параграфе символом ω_1 мы обозначаем, вообще говоря, различные достаточные большие числа.

Доказательство леммы 4 очевидно и мы его опускаем.

Вектор-функция $y(t)$ по предположению непрерывна, поэтому множество ее значений $M_0 = \{y(t) : t \in [0, T]\}$ является замкнутым подмножеством области Ω. Обозначим через D_0 внутреннюю выпуклую подобласть области Ω, такую что $y \in M_0 \subset D_0$. Через S_0 обозначим множество непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $y : [0, T] \to D_0$.

В силу леммы 4 найдется такое число $\omega_1 > 0$, что для всех вектор-функций $y : [0, T] \to D_0$ при $\omega > \omega_1$ и $t \in [0, T]$ выполняется оценка

$$\left\| \omega^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial \psi}{\partial y}(y(t), t, \tau) \mathrm{d}\tau \right\| < \frac{1}{2}. \tag{1.40}$$

Заметим, что из неравенства (1.40) следует обратимость матрицы

$$\left(I + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial \psi}{\partial y}(y(t), t, \tau) \mathrm{d}\tau \right), t \in [0, T], \omega > \omega_1.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\alpha(y, t, \tau)$, которая определена на множестве $G = S_0 \times [0, T] \times [0, \infty)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}(y(t), t, \tau) = \psi(y(t), t, \tau). \tag{1.41}$$

Именно, пусть

$$\alpha(y(t), t, \tau) = \int\limits_0^{\tau} \psi(y(t), t, s) \mathrm{d}s.$$

В задаче (1.34) при $\omega > \omega_1$, перейдем от x к новым переменным y по формуле

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \alpha(y(t), t, \omega t) \equiv y + \beta(y, t, \omega). \tag{1.42}$$

В силу замены переменных (1.42) и условия 3), решение исходной системы (1.34) и преобразованной системы будут иметь одинаковые краевые условия, то есть $A\beta(y(0), 0, 0) + B\beta(y(T), T, \omega T) + Ay(0) + By(T) = 0$. Отсюда следует, что вектор-функция $y(t)$ в (1.42) удовлетворяет краевому условию: $Ay(0)+By(T)=0$.

Исходя из леммы 4, найдем величину $\omega_1>0$, такую, что при $\omega>\omega_1$ для всех $y\in S_0$ значения вектор-функции $x(t), t\in[0,T]$, определяемой формулой (1.42), лежат в Ω. Тогда при $\omega>\omega_1$, в результате замены (1.42) получим для $y\in S_0$ задачу вида

$$\begin{cases} [I+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}]\frac{dy}{dt}=[F(y,t)+\varphi(y,t,\omega t)+\chi(y,t,\omega t)]-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(y,s,\omega t)|_{s=t} \\ +\varphi(y+\beta,t,\omega t)-\varphi(y,t,\omega t)+F(y+\beta,t)-F(y,t)+ \\ +\sqrt{\omega}\left(\psi(y+\beta,t,\omega t)-\psi(y,t,\omega t)-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\chi(y,t,\omega t)\right)\equiv \\ \equiv\Gamma(y,t,\omega t)+r(y,t,\omega) \\ Ay(0)+By(T)=0, \end{cases} \tag{1.43}$$

здесь

$$\Gamma(y,t,\tau)=F(y,t)+\varphi(y,t,\tau)+\chi(y,t,\tau).$$

Учитывая неравенство (1.40), от задачи (1.43) перейдем к задаче

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}=[I+\mu_\omega]^{-1}\{\Gamma(y,t,\omega t)+r(y,t,\omega t)\}\equiv\Gamma(y,t,\omega t)+R(y,t,\omega t) \\ Ay(0)+By(T)=0, \omega\gg 1, \end{cases} \tag{1.44}$$

где

$$R(y,t,\omega t)=[I+\mu_\omega]^{-1}\left[\Gamma(y,t,\omega t)+r(y,t,\omega t)\right]-\Gamma(y,t,\omega t),$$

$$\mu_\omega\equiv\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^\tau\frac{\partial\psi}{\partial y}(y(t),t,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Лемма 5. *Пусть вектор-функции $F(y,t)$, $\varphi(y,t,\tau)$ и $\psi(y,t,\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и область S_0 лежит строго внутри области Ω. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\omega_1>0$ такое, что при всех $t\in[0,T]$, $y\in S_0$ и $\omega>\omega_1$, для вектор-функции R, выполняются неравенства*

$$|R(y,t,\omega)|<\varepsilon, \tag{1.45}$$

$$\left\| \frac{\partial R}{\partial y}(y,t,\omega) \right\| < \varepsilon. \tag{1.46}$$

Доказательство.

В силу леммы 4, найдется $\omega_1 > 0$, такое что при $\omega > \omega_1$, $y \in S_0$ и $t \in [0,T]$ вектор-функция $y(t) + \beta$ лежит в области Ω, а матрица $I + \mu_\omega$ обратима. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положем

$$R(y,t,\omega) = R_1(y,t,\omega) + R_2(y,t,\omega),$$

где

$$R_1(y,t,\omega) = [(I + \mu_\omega)^{-1} - I]\Gamma(y,t,\tau),$$

$$R_2(y,t,\omega) = (I + \mu_\omega)^{-1} r(y,t,\omega t).$$

В силу неравенства (1.40), очевидного равенства

$$(I + \mu_\omega)^{-1} - I = -\mu_\omega (I + \mu_\omega)^{-1} \tag{1.47}$$

и условий теоремы 2, найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$, $y \in S_0$, $t \in [0,T]$,

$$\|\mu_\omega(y,t)\| < \frac{1}{2}$$

выполняется неравенство

$$|R_1(y,t,\omega)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.48}$$

Переходим к оценке R_2:
Поскольку в области $G = S_0 \times [0,T] \times [1,\infty)$ вектор-функции $\varphi(y,t,\tau)$ и $F(y,t)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по y и справедлива лемма 4, то найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$, $(y,t,\tau) \in G$ справедливо неравенство

$$|F(y+\beta,t) - F(y,t)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.49}$$

Аналогичное неравенство также выполняется для $\varphi(y,t,\tau)$, то есть найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$, $(y,t,\tau) \in G$ справедливо неравенство

$$|\varphi(y+\beta,t,\tau) - \varphi(y,t,\tau)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.50}$$

Далее с помощью формулы конечных приращений получаем соотношения

$$\left|\sqrt{\omega}\left(\psi(y+\beta,t,\omega t) - \psi(y,t,\omega t) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\beta\right)\right| =$$
$$= \sqrt{\omega}\left\|\int\limits_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial y}(y+\theta\beta,t,\omega t)d\theta \cdot \beta - \frac{\partial \psi}{\partial y}(y,t,\omega t)\beta\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}(y+\theta\beta,t,\omega t) - \frac{\partial \psi}{\partial y}(y,t,\omega t)\right]d\theta\right\| \sqrt{\omega}|\beta|.$$

Из условий теоремы 2 матрица-функция $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ удовлетворяет равномерному условию Липшица по y на G. Отсюда следует существование такого $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\left|\sqrt{\omega}\left(\psi(y+\beta,t,\omega t) - \psi(y,t,\omega t) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\beta\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.51}$$

Далее в силу ограничености $(I+\mu_\omega)^{-1}$ и леммы 4, найдется $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ для $y \in S_0$, $t \in [0,T]$ справедливо соотношение

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\omega}}(I+\mu_\omega)^{-1}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(y,s,\omega t)|_{s=t}\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.52}$$

Из соотношений (1.49) – (1.52), найдется $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$, для $y \in S_0$, $t \in [0,T]$ справедливо соотношение

$$|R_2(y,t,\omega)| < \varepsilon. \tag{1.53}$$

Итак согласно (1.48), (1.53) сушествует число ω_1, такое что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y,t) \in S_0 \times [0,T]$ выполняется неравенство (1.45). Неравенство (1.46) доказывается аналогично неравенству (1.45), поэтому мы приводить его здесь не будем, а укажем лишь два простых соотношения, которые непосредственно не использовались при доказательстве (1.45).

1. Существует такое $\omega_1 > 0$, что при всех $(y,t) \in S_0 \times [0,T]$ и $\omega > \omega_1$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y}(I+\mu_\omega(y,t))^{-1} \right\| = \left\| [I+\mu_\omega(y,t)]^{-1} \frac{\partial \mu_\omega}{\partial y}(y,t)[I+\mu_\omega(y,t)]^{-1} \right\|$$
$$\leqslant \left\| ((I+\mu_\omega)^{-1}) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mu_\omega}{\partial y}(y,t) \right\|.$$

2. Справедливо равенство для слагаемого $r(y,t,\omega t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial r_i}{\partial y_k}(y,t,\omega) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t) - \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right)(y,t) + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_s}\right)(y+\beta,t)\frac{\partial \beta_s}{\partial y_k} - \\ - \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial^2 \alpha_i(y,s,\omega t)}{\partial y_k \partial s}|_{s=t} + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t,\omega t) - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)(y,t,\omega t) + \\ + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s}\right)(y+\beta,t,\omega t)\frac{\partial \beta_s}{\partial y_k} + \\ + \sqrt{\omega}\left[\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t,\omega t) - \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\right)(y,t,\omega t) - Q\right] + \\ + \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(y+\beta,t,\omega t)\frac{\partial \alpha_s}{\partial y_k} - \frac{\partial \psi_i(y,t,\omega t)}{\partial y_s}\frac{\partial \alpha_s}{\partial y_k}\right], i,k = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{1.54}$$

здесь $Q = \sum\limits_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k \partial y_s}\right)(y,t,\omega t)\beta_s(y,t,\omega t)$. Оценка (1.46) устанавливается с учетом этих соотношений. Лемма 5 доказана.

В задаче (1.44) сделаем замену переменных

$$y(t) = u(t) + \overset{o}{y}(t), \tag{1.55}$$

где $\overset{o}{y}(t)$-решение усредненной задачи (1.36), а затем перепишем полученное уравнение в виде

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\right]u + f(u,t,\omega) \\ Au(0) + Bu(T) = 0, \omega \gg 1, \end{cases} \tag{1.56}$$

где

$$f(u,t,\omega) = \Gamma(u+\overset{o}{y},t,\omega t) + R(u+\overset{o}{y},t,\omega t) - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\right]u - F(\overset{o}{y},t).$$

Прежде всего, наряду с задачей (1.56) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}, t)\right] v + K(v, t) \\ Av(0) + Bv(T) = 0, \end{cases} \tag{1.57}$$

где

$$K(v, t) = F(v + \overset{o}{y}, t) - F(\overset{o}{y}, t) - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}, t)\right] v.$$

От (1.56) и (1.57) перейдем в силу [3] к эквивалентным интегральным уравнениям

$$u(t) = \int\limits_0^T G(t, s) f(u(s), s, \omega s) \mathrm{d}s, \tag{1.58}$$

$$v(t) = \int\limits_0^T G(t, s) K(v(s), s) \mathrm{d}s, \tag{1.59}$$

где $G(t, s)$–функция Грина.

Напомним, что в (1.58), (1.59)

$$f(u, t, \omega t) = \Gamma(u + \overset{o}{y}, t, \omega t) + R(u + \overset{o}{y}, t, \omega t) - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}, t)\right] u - F(\overset{o}{y}, t), \tag{1.60}$$

$$K(v, t) = F(v + \overset{o}{y}, t) - F(\overset{o}{y}, t) - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}, t)\right] v. \tag{1.61}$$

Исходя из равенств (1.58) и (1.59), зададим в какой-либо окрестности точки $(0, \infty)$ пространства $C_\mu([0, T]) \times [1, \infty]$ оператор $N : C_\mu([0, T]) \times [1, \infty] \to C_\mu([0, T])$, $0 < \mu \leq 1$ формулой:

$$[N(u, \omega)](t) = \begin{cases} u(t) - \int\limits_0^t \Phi(t) U(s) f(u(s), s, \omega s) \mathrm{d}s - \\ - \int\limits_t^T \Phi(t) S(s) f(u(s), s, \omega s) \mathrm{d}s, \omega \neq \infty \\ u(t) - \int\limits_0^t \Phi(t) U(s) K(u(s), t) \mathrm{d}s - \int\limits_t^T \Phi(t) S(s) K(u(s), t) \mathrm{d}s \\ \omega = \infty. \end{cases}.$$

(1.62)

Ради краткости, первый интеграл в (1.62) (при $\omega = \infty$ и $\omega \neq \infty$) будем обозначать через $[I_1(u,\omega)](t)$, а второй через $[I_2(u,\omega)](t)$.

Справедлива следующая оснавная лемма.

Лемма 6. *Оператор $N(u,\omega)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем в точке $(0,\infty)$. При этом $N(0,\infty) = 0$, а производная Фреше $D_uN(0,\infty) = I$ где I –тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$.*

Основное внимание мы уделим доказательству непрерывности и непрерывной дифференцируемости оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$, поскольку равенства $N(0,\infty) = 0$ и $D_uN(0,\infty) = I$ очевидны в силу равенства $K(0,t) = 0$ и $D_uK(0,t) = 0$.

Докажем непрерывность оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Для этого зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и докажем , что существуют $0 < \delta_1 < 1$ и $\omega_1 > 0$, такие что при $\omega > \omega_1$ и $||u||_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ выполняется оценка

$$||N(u,\omega) - N(0,\infty)||_{C_\mu([0,T])} < \varepsilon. \tag{1.63}$$

Заметим, что $N(0,\infty) = 0$, поэтому нам остается доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta_1 < 1$ и $\omega_1 > 0$ такие, что при

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1, \omega > \omega_1 \tag{1.64}$$

выполняется неравенство

$$||N(u,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \varepsilon. \tag{1.65}$$

Будем считать, что $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда остается доказать неравенства

$$||I_i(u,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}, i = 1,2, \tag{1.66}$$

когда u и ω удовлетворяют условию (1.64). Вначале, оценим I_1. Отметим, что из формулы (1.58), (1.59),(1.60) и (1.61) легко следует оценка

$$\sup_{\|u\|_{C_\mu([0,T])\leq 1, t\in[0,T]}} \left|\frac{\partial[I_1(u,\omega)](t)}{\partial t}\right| \leq C_0, \tag{1.67}$$

где $C_0 > 0$-константа. Из оценки (1.67) и известного интерполяционного неравенства (1.28) следует, что достаточно доказать неравенство (1.65), рассматривая $N(u,\omega)$ как оператор действующий из пространства $C_\mu([0,T])$ в $C([0,T])$. Имеем:

$$|I_1| = \left| \int_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^t \Phi(t)U(s) \left[\Gamma(u+\overset{o}{y},t,\omega s) - F(u+\overset{o}{y},s) \right] \mathrm{d}s \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t \Phi(t)U(s)R(u+\overset{o}{y},t,\omega s)\mathrm{d}s \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t \Phi(t)U(s) \left[F(u+\overset{o}{y},s) - F(\overset{o}{y},s) - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},s) \right] u \right] \mathrm{d}s \right| \equiv$$

$$\equiv M_1(t) + M_2(t) + M_3(t).$$

Из леммы 5 и формулы конечных приращений следует существование такого малого числа δ_2, что при $||u||_{C([0,T])} \leq \delta_2$ и $\omega_1 > 0$ выполняются оценки

$$\|M_2(t)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{15}, \tag{1.68}$$

$$\|M_3(t)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{15}. \tag{1.69}$$

Оценим теперь $M_1(t)$.

В силу равномерной ограниченности вектор- функций $\Gamma(u(t) + \overset{o}{y}(t), t, \tau)$ и $F(u(t)+\overset{o}{y}(t),t)$(это вытекает из предположений теоремы 2) найдется такое значение $t_0 \in [0,T]$ такое, что выполняется неравенство

$$\|M_1(t)\|_{C([0,t])} < \frac{\varepsilon}{5}, t \in [0,t_0]. \tag{1.70}$$

Учитывая (1.70), рассмотрим лишь $t \in [t_0,T]$. Обозначим $u(t)+\overset{o}{y}(t) = z(t) \in \Omega$ и учтем, что вектор-функция $\Gamma\left[z(t),t,\omega t\right]$ в силу условий теоремы 2 удовлетворяет равномерному условию Липшица по z, то есть существует такая постоянная $L > 0$, что при всех $z_1, z_2 \in \Omega, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)$ выполняется неравенства

$$|\Gamma\left[z_1,t,\omega t\right] - \Gamma\left[z_2,t,\omega t\right]| \leq L|z_1 - z_2|. \tag{1.71}$$

В силу условий теоремы 2 вектор-функция $F\left[z,t\right]$ также удовлетворяет равномерному условию Липшица по z, то есть существует такая постоянная $L_1>0$, что при всех $z_1,z_2\in\Omega, t\in[0,T], \tau\in[0,\infty)$ выполняется неравенства

$$|F\left[z_1,t\right]-F\left[z_2,t\right]|\leq L_1|z_1-z_2|. \tag{1.72}$$

В силу условий теоремы 2, вектор-функция $\Gamma\left[z,t,\omega t\right]$ равномерно ограничена, то есть существует постоянная $M>0$ такая, что при всех $t\in[0,T]$ выполняется оценка

$$|\Gamma\left[z,t,\omega t\right]|\leq M. \tag{1.73}$$

Также вектор- функция $F\left[z,t\right]$ равномерно ограничена, то есть существует постоянная M такая, что при всех $t\in[0,T]$ выполняется оценка

$$|F\left[z,t\right]|\leq M. \tag{1.74}$$

Разабъём теперь интервал интегрирования $[t_0,t)$ на m равных частей: $[t_0,t)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}[\tau_i,\tau_{i+1})$ и воспользуемся представлением:

$$\begin{gathered}
M_1(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t)U(s)\left\{\Gamma\left[z(s),s,\omega s\right]-F\left[z(s),s\right]\right\}\mathrm{d}s=\\
=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\left\{\Phi(t)U(s)\Gamma\left[z(s),s,\omega s\right]-\Phi(t)U(\tau_i)\Gamma\left[z(\tau_i),\tau_i,\omega s)\right]\right\}\mathrm{d}s-\\
-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\left\{\Phi(t)U(s)F\left[z(s),s\right]-\Phi(t)U(\tau_i)F\left[z(\tau_i),\tau_i\right]\right\}\mathrm{d}s+\\
+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\Phi(t)U(\tau_i)\left\{\Gamma\left[z(\tau_i),\tau_i,\omega s\right]-F\left[z(\tau_i),\tau_i)\right]\right\}\mathrm{d}s\equiv A+B+C.
\end{gathered}$$

Из соотношений (1.71) и (1.73) и формулы конечных приращений вытекает следующее сотношение для A:

$$
\begin{aligned}
|A| \leq \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\| \|U(s) - U(\tau_i)\| |\Gamma\left[z(s), s, \omega s\right]| \mathrm{d}s + \\
+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |\Gamma\left[z(s), s, \omega s\right] - \Gamma\left[z(\tau_i), s, \omega s\right]| \mathrm{d}s + \\
+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |\Gamma\left[z(\tau_i), s, \omega s\right] - \Gamma\left[z(\tau_i), \tau_i, \omega s\right]| \mathrm{d}s \leq \\
\leq m \times \frac{T}{m} \times M \times \|\Phi(t)\| \|U(s) - U(\tau_i)\| + \\
+ L_1 m \times \frac{T}{m} \times \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |z(s) - z(\tau_i)| + \\
+ m \times \frac{T}{m} \times \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |s - \tau_i|, t \in [t_0, T].
\end{aligned}
$$

Поскольку $z \in C_{\mu}([0, T])$, то имеем оценку

$$
|z(s) - z(\tau_i)| \leq L_2 |s - \tau_i|^{\mu} \leq L_2 |\frac{T}{m}|^{\mu},
$$

где $L_2 = const > 0$. Еще воспользуемся следующей оценкой

$$
\|U(s) - U(\tau_i)\| = \left\| \int\limits_{s}^{\tau_i} U'(\tau) \mathrm{d}\tau \right\| \leq L_1(\tau_i - s) \leq L_3 \frac{T}{m},
$$

где $L_3 = const > 0$.

Из проведенных рассуждений следует, что найдется такое число m_1, что при $m \geq m_1$ имеет место оценка:

$$
|A| < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [t_0, T]. \tag{1.75}
$$

Теперь оценим слагоемое B. Из соотношений (1.72) и (1.74) и формулы конечных приращений вытекает следующая оценка

$$|B| \leq \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\| \|U(s) - U(\tau_i)\| |F[z(s), s]| \mathrm{d}s +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |F[z(s), s] - F[z(\tau_i), s]| \mathrm{d}s +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |F[z(\tau_i), s] - F[z(\tau_i), \tau_i]| \mathrm{d}s \leq$$
$$\leq m \times \frac{T}{m} \times M \times \|\Phi(t)\| \|U(s) - U(\tau_i)\| +$$
$$+ Lm \times \frac{T}{m} \times \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |z(s) - z(\tau_i)| +$$
$$+ m \times \frac{T}{m} \times \|\Phi(t)U(\tau_i)\| |s - \tau_i|, t \in [t_0, T].$$

Поступая как при доказательстве слагоемого A, найдем $m_2 \geq m_1$, такое, что при $m \geq m_2$ выполняется неравенство

$$|B| < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [t_0, T]. \tag{1.76}$$

При оценке выражения C воспользуемся следующем представлением

$$\Theta_s = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)U(\tau_i) \left\{ \Gamma[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] - F[z(\tau_i), \tau_i)] \right\} \mathrm{d}s =$$
$$= \Phi(t)U(\tau_i) \left\{ \frac{1}{\omega} \int\limits_{\omega\tau_i}^{\omega\tau_{i+1}} \Gamma[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] \,\mathrm{d}s - (\tau_{i+1} - \tau_i) F[z(\tau_i), \tau_i)] \right\} =$$
$$= \Phi(t)U(\tau_i)\tau_{i+1} \left\{ \frac{1}{\omega\tau_{i+1}} \int\limits_{0}^{\omega\tau_{i+1}} \Gamma[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] \,\mathrm{d}s - F[z(\tau_i), \tau_i)] \right\} +$$
$$+ \Phi(t)U(\tau_i)\tau_i \left\{ F[z(\tau_i), \tau_i)] - \frac{1}{\omega\tau_i} \int\limits_{0}^{\omega\tau_i} \Gamma[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] \,\mathrm{d}s \right\}.$$

Согласно условиям теоремы 2 равномерно относительно $(y, t) \in \Omega \times [0, T]$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int\limits_0^N \Gamma(y,t,\tau)\mathrm{d}\tau = F(y,t)$$

поэтому найдется число $\omega_1>0$ так, чтобы при $\omega>\omega_1$ для всех $y\in D_0$, $t\in[0,T]$ выполняется оценка

$$\left|\frac{1}{N}\int\limits_0^N \Gamma(y,t,\tau)\mathrm{d}\tau - F(y,t)\right| < \frac{\varepsilon}{30T}.$$

Тогда при $m=m_3$ выполняется неравенство $\omega t_0 > N_0$. Тогда при всех $t\in[t_0,T]$ выполняется оценка

$$|C| \le \sum_{i=1}^{m_3}|\Theta_s| < \frac{\varepsilon}{15}. \tag{1.77}$$

Из соотношений (1.68) – (1.69), (1.75) – (1.76) и (1.77) следует оценка $|I_1|<\frac{\varepsilon}{3}$. Таким образом, мы доказали, что

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.78}$$

Теперь покажем ограниченность нормы

$$I_1 = \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s$$

в $C_1([0,T])$. Для этого возьмем производную по переменной t :

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{d\Phi(t)}{dt}U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s + \Phi(t)U(t)f(u(t),t,\omega) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s + \Phi(t)U(t)f(u(t),t,\omega) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)I_1 + \Phi(t)U(t)f(u(t),t,\omega).$$

Из условий теоремы 2 и оценка (1.78) получаем следующую оценку

$$\left\|\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s\right)\right\|_{C_1([0,T])} \leq \frac{2\varepsilon}{3}+K,$$

где K мажорирует $\|\Phi(t)U(t)f(u(t),t,\omega)\|$.

Мы получили, что норма интеграла

$$I_1=\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s$$

мала в $C([0,T])$ и равномерно ограничена в $C_1([0,T])$ при $\omega \gg 1$. Следовательно норма интеграла I_1 мала в $C_\mu([0,T])$. Аналогично доказывается, что при достаточно большом ω найдется $\overset{o}{\omega}$ что при всех $\omega > \overset{o}{\omega}$ выполняется оценка

$$\|I_2\|_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом

$$||N(u,\omega)||_{C_\mu([0,T])} \leq ||u||_{C_\mu([0,T])} + ||I_1||_{C_\mu([0,T])} + ||I_2||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что оператор $N(u,\omega)$ является непрерывным в точке $(0,\infty)$ в пространстве $C_\mu([0,T])$.

Теперь докажем непрерывность дифференциала Фреше оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$ и что он имеет ограниченный обратный оператор в этой точке.

Тот факт, что оператор $N(u,\omega)$ имеет производную Фреше по u доказывется аналогично лемме 3 предыдущего параграфа. Мы не будем останавливаться на этом доказательстве. Отметим, что оперетор $N(u,\omega)$ имеет производную Фреше по переменной u вида:

$$D_uN(u,\omega)(t)=I-\int\limits_0^t \Phi(t)U(s)f_u(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s-$$
$$-\int\limits_t^T \Phi(t)S(s)f_u(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \quad (1.79)$$

а непрерывность производной Фреше $D_uN(u,\omega)(t)$ в точке $(0,\infty)$ доказывается аналогично непрерывности оператора $N(u,\omega)$ в этой же точке. Таким образом из (1.79) следует равенство $D_uN(0,\infty)(t) = I$(см., также (1.60) , (1.61) и (1.62)), а значит оператор $D_uN(0,\infty)$ обратим как тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$. Следовательно оператор $[D_uN(0,\infty)]^{-1}$ ограниченный . Итак, лемма 6 полностью доказана.

По неравенству треугольника, имеем

$$||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} \leq ||x_\omega(t) - y_\omega(t)||_{C_\mu([0,T])} + ||y_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])}. \quad (1.80)$$

Из равномерной ограниченности вектор-функции $\alpha(y,t,\tau)$ на множестве $G = S_0 \times [0,T] \times [0,\infty)$ и формулы (1.42), связывающей x_ω с y_ω, следует существование такого числа $\omega_1 > 0$, что при $\omega > \omega_1$ и при $\mu \in (0,1)$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - y_\omega(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0, t \in [0,T]. \quad (1.81)$$

Далее, из леммы 6 и замены переменных (1.55), при $\omega > \omega_1$ и $\mu \in (0,1)$ справедливо на том же временном отрезке следующее предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} ||y_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0. \quad (1.82)$$

В силу предельных равенств (1.81), (1.82), формулы замены переменных (1.42) и интерполяционного неравенства (1.28) при любом $\mu \in (0,\frac{1}{2})$ справедиво равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0, t \in [0,T].$$

Теорема 2 доказана.

§3.Обоснование метода усреднения для систем ОДУ с большими слагаемыми (основной случай)

1°. Формулировка результатов (теорема 3).

Пусть Ω–ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in D, \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T] \\ Ax(0) + Bx(T) = 0. \end{cases} \tag{1.83}$$

Здесь A и B –квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ –2π–периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть равномерно относительно $(x,t) \in D$ справедливо равенство
$$< \varphi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию
$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^\tau \varphi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^\tau \varphi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$
Вектор-функция $\chi(x,t,\tau)$ в силу условий 1,2) вместе с производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве Q.

4. Для любых точек (x,t_1,τ) и $(x,t_2,\tau) \in Q$ выполняются неравенства
$$\|z(x,t_2,\tau) - z(x,t_1,\tau)\| \le \gamma(|t_2 - t_1|),$$
где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$ а $\gamma(r)$, $r \ge 0$, –непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

5. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

6. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует такая постоянная L, что при всех x,$y \in \Omega$, $t \in [0,T]$ и $\tau \in [0,\infty)$ выполняются неравенства

$$\|z(y,t,\tau) - z(x,t,\tau)\| \leqslant L|y-x|,$$

где $z = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

7. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T (f(x,t,\tau) + \chi(x,t,\tau))\, \mathrm{d}\tau = \Psi(x,t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x, мы получим также равномерное относительно $(x,t) \in D$ предельное равенство.

8. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi,t), t \in [0,T] \\ A\xi(0) + B\xi(T) = 0. \end{cases} \tag{1.84}$$

9. Будем считать, что задача (1.84) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0,T]$, и существует [7] такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0,T]$.

10. Справедливо соотношение:

$$\Delta = det\,[A + B\Phi(T)] \neq 0,$$

где $\Phi(t)$–матрицант системы уравнений

[7] Предположение о существовании указанной подобласти Ω_0 не является принципиальным, а принято лишь для упрощения дальнейшего изложения.

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\overset{o}{\xi}, t) \right] x.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любого* $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$*, что задача* (1.83) *при* $\omega > \omega_0$ *имеет единственное в некоторой* $C_\mu([0,T])$*–окрестности вектор-функции* $\overset{o}{\xi}(t)$ *решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{\omega \to \infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$

В этом параграфе доказательство теоремы 3 опущено, поскольку обобщение этой теоремы будет предметом подробного изучения в следующей главе для многоточечных краевых задач.

Заключение к главе 1

Метод усреднения обоснован для нормальных систем квазилинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями (двухточечные краевые задачи). Рассмотрены два типа систем:

1. Системы, правые части которых равномерно ограничены при неограниченно растущей частоте осцилляций;

2. Системы, содержащие большие слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций.

Глава II.Метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями

§1.Обоснование метода усреднения в случае равномерно ограниченной правой части

1°. **Формулировка результатов(теорема 4).**

Пусть $n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, Ω–область пространства $\mathbb{R}^n$ [8], $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : x \in \Omega, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На множестве D рассмотрим m-точечную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)x(t_k) = a(\omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

здесь $\omega \gg 1$, $A_k(\omega)$–квадратные матрицы порядка n, $0 = t_1 < t_2 ... < t_m = T$, $a(\omega)$–n–мерный вектор. Все матрицы, векторы и вектор-функции в работе считаются вещественными. Пусть $f(x,t,\tau)$ вектор-функция, определенная на множестве Q со значениями в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая следующим условиям

1. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ вместе с ее первыми частными производными по x непрерывны на множестве Q. Соответствующую матрицу Якоби будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$.

2. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на Q.

3. Для любых точек $(x,t_1,\tau),(x,t_2,\tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|f(x,t_2,\tau) - f(x,t_1,\tau)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

$$\left\| \frac{\partial f(x,t_2,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,t_1,\tau)}{\partial x} \right\| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $\gamma(r)$, $r \geq 0$–непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

[8] В качестве Ω можно взять любую ограниченную область $\mathbb{R}^n$, содержащую строго внутри себя значения решения $\overset{o}{y}(t)$ усредненной задачи (см.условие 9 ниже)

4. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $F(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(x,t). \tag{2.2}$$

5. Будем считать, что наряду с равенством (2.2) справедливо равенство

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)\rangle \equiv \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t). \tag{2.3}$$

6. Существует постоянный n-мерный вектор a_0, для которого справедливо предельное равенство
$$\lim_{\omega\to+\infty} |a(\omega) - a_0| = 0.$$

7. Существуют квадратные матрицы B_k, порядка n, для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\omega\to+\infty} \|A_k(\omega) - B_k\| = 0.$$

8. Рассмотрим усредненную задачу
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} B_k y(t_k) = a_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

9. Будем предполагать, что задача (2.4) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$, $t \in [0,T]$, которое вместе с некоторой $\rho(>0)$–окрестностью лежит в Ω, то есть при каждом $t \in [0,T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ.

   Символом $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$, обозначим матрицант системы в вариациях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)x. \tag{2.5}$$

10. Пусть справедливо соотношение:

$$\Delta = \det\left[\sum_{k=1}^{m} B_k \Phi(t_k)\right] \neq 0. \tag{2.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любого $\mu \in (0,1)$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (2.1) при $\omega > \omega_0$ в некоторой $C_\mu([0,T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}(t)$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

2°. **Доказательство теоремы 4.**

В задаче (2.1) сделаем замену переменных

$$x = u + \overset{o}{y}, \tag{2.7}$$

где $\overset{o}{y}$ решение (2.4). В результате придем к задаче

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t), t)u + K(u, t, \omega t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega) u(t_k) = C(\omega), \omega \gg 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

здесь

$K(u,t,\tau) = f(u+\overset{o}{y}, t, \tau) - F(\overset{o}{y}, t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t), t)]u \equiv H(u,t,\tau) + \Psi(u,t),$

$H(u,t,\tau) = f(u+\overset{o}{y}, t, \tau) - F(u+\overset{o}{y}, t),$

$\Psi(u,t) = F(u+\overset{o}{y}, t) - F(\overset{o}{y}, t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t), t)]u,$

$C(\omega) = a(\omega) - \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(\omega)\overset{o}{y}(t_k).$

Наряду с задачей (2.8) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t), t)v + \Psi(v, t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} B_k v(t_k) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

которая, очевидно, имеет решение $v(t) = 0$.

Из условия (2.6) вытекает соотношение

$$\det\left[\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right] \neq 0, \tag{2.10}$$

в силу которого задача (2.8) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{gathered} u(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s+ \\ +\Phi(t)H\left[C(\omega) - \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s\right] \equiv \\ \equiv A(u,t,\omega) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где $H = \left[\sum\limits_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}$.
Докажем этот факт, следуя [18]. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t), t)u + K(u, t, \omega t) \\ u(0) = u_0, \omega \gg 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Она, как известно, эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s, \tag{2.13}$$

так что

$$u(t_k) = \Phi(t_k)u_0 + \int_0^{t_k} \Phi(t_k)\Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s. \tag{2.14}$$

Умножая равенство (2.14) на матрицу $A_k(\omega)$ и сумируя, получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)u(t_k) = \left[\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right] u_0 +$$
$$\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s. \quad (2.15)$$

Отсюда, с учетом второго уравнения (2.8), следует равенство

$$\left[\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right] u_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s = C(\omega), \quad (2.16)$$

так что

$$u_0 = \left[\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}\left[C(\omega) - \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K(u(s), s, \omega s)\mathrm{d}s\right]. \quad (2.17)$$

Подставляя найденный вектор u_0 в формулу (2.13), получаем равенство (2.11). Таким образом, из (2.8) следует (2.11). Обратное утверждение устанавливается с помощью дифференцирования (2.11) по t. Итак установлена эквивалентность задачи (2.8) и равенства (2.11). Эквивалентность задачи (2.9) и интегрального уравнения

$$v(t) = \Phi(t)\int_0^{t} \Phi^{-1}(s)\Psi(v(s), s)\mathrm{d}s -$$
$$- \Phi(t)\left[\sum_{k=1}^{m} B_k\Phi(t_k)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{m} B_k\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)\Psi(v(s), s)\mathrm{d}s \equiv$$
$$\equiv B(v, t) + \Phi(t)\int_0^{t} \Phi^{-1}(s)\Psi(v(s), s)\mathrm{d}s \quad (2.18)$$

после этого очевидна.

Пусть вектор-функции $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$–линейно независимые решения системы (2.5), определенные на $[0, T]$ и составляющие матрицант $\Phi(t) =$

$[x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)]$. Тогда определитель Вронского

$$W[x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)] = \det[x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)] = \det \Phi(t) \neq 0$$

для всех $t \in [0, T]$. Определим число $M > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\max_{t\in[0,T]} \|\Phi(t)\| \leq M. \tag{2.19}$$

Далее, определим матрицу

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{\det \Phi(s)} \Phi^*(s),$$

где $\Phi^*(s)$– транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицанта $\Phi(t)$. Ясно, что матрица $\Phi^*(s)$ ограничена, а потому найдется число $M_1 > 0$, при котором

$$\max_{t,s\in[0,T]} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq M_1. \tag{2.20}$$

Исходя из равенств (2.11) и (2.18), определим в какой-либо окрестности точки $(0, \infty)$ пространства $C_\mu([0, T]) \times [1, \infty]$ оператор $N : C_\mu([0, T]) \times [1, \infty] \to C_\mu([0, T])$, $0 < \mu < 1$, формулой:

$$[N(u, \omega)](t) = \begin{cases} u(t) - \Phi(t) \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s) K(u(s), s, \omega s) \mathrm{d}s - \Phi(t) H \\ \left[C(\omega) - \sum\limits_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k) \int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s) K(u(s), s, \omega s) \mathrm{d}s \right], \omega \neq \infty; \\ u(t) - \Phi(t) \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s) \Psi(u(s), s) \mathrm{d}s + \\ +\Phi(t) H_1 \sum\limits_{k=1}^m B_k \Phi(t_k) \int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s) \Psi(u(s), s) \mathrm{d}s, \omega = \infty, \end{cases} \tag{2.21}$$

где

$$H = \left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k) \right]^{-1},$$

$$H_1 = \left[\sum_{k=1}^m B_k \Phi(t_k) \right]^{-1}.$$

Напонмим, что в (2.21)

$$K(u,t,\tau) = \Big[f(u+\overset{o}{y},t,\tau) - F(u+\overset{o}{y},t)\Big] + F(u+\overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u, \tag{2.22}$$

$$\Psi(u,t) = F(u+\overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u. \tag{2.23}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 7. *(Основная) Оператор $N(u,\omega)$ определен в некоторой окрестности точки $(0,\infty)$, непрерывен и непрерывно дифференцируем в этой точке. При этом $N(0,\infty) = 0$, а производная Фреше $D_uN(0,\infty) = I$ где I– тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$.*

Из этой леммы следуют утверждения теоремы. Действительно, в силу леммы согласно теореме о неявных отображениях найдутся числа $\omega_1 > 0$[9] и $\delta > 0$, такие что в окрестности $||u||_{C_\mu([0,T])} \le \delta$ при $\omega > \omega_1$, существует единственное решение u_ω задачи $N(u,\omega) = 0$, и при этом $u_\omega \underset{\omega\to\infty}{\to} 0$ в $C_\mu([0,T])$.

Доказательство.

Указанные в лемме равенства $N(0,\infty) = 0$ и $D_uN(0,\infty) = I$ очевидны. Это следует из представления (2.21) при $\omega = \infty$ и вытекающих из (2.23) равенств: $\Psi(0,t) = 0$, $D_u\Psi(0,t) = 0$. Очевидно значит и равенство $[D_uN(0,\infty)]^{-1} = I$. Таким образом, нам остается доказать непрерывность оператора $N(u,\omega)$, а также существование и непрерывность его дифференциала Фреше $D_uN(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$.

Сначала докажем непрерывность оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$.
Из простой оценки

$$\sup_{\|u\|_{C_\mu([0,T])}\le 1, t\in[0,T], \omega\in[1,\infty]} \left|\frac{\partial[N(u,\omega)](t)}{\partial t}\right| \le C_0 = const \tag{2.24}$$

и известного интерполяционного неравенства (1.28) следует, что достаточно доказать непрерывности оператора $N(u,\omega)$, как оператора действующего из пространства $C_\mu([0,T])$ в пространство $C([0,T])$.

Для доказательства последнего зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что существуют числа $0 < \delta_1 < 1$ и $\omega_1 > 0$, такие что при

[9]В данном параграфе через ω_1 мы обозначаем различные достаточные большие числа.

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1, \omega > \omega_1 \tag{2.25}$$

выполняется оценка (мы учитываем, что $N(0,\infty) = 0$):

$$||N(u,\omega)||_{C([0,T])} < \varepsilon. \tag{2.26}$$

Будем считать, что $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда остается доказать неравенство

$$||A(u,t,\omega) + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s||_{C([0,T])} < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{2.27}$$

когда u и ω удовлетворяют условию (2.25).

Сначала оценим $A(u,t,\omega)$. Нам нужно доказать, что найдутся числа δ_1 и ω_1, удовлетворяющие неравенству (2.25), при которых имеет место оценка

$$\|A(u,t,\omega)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.28}$$

Напомним, что $A(u,t,\omega)$(см. (2.11)) имеет вид

$$A(u,t,\omega) = \\ = \Phi(t)H\left[C(\omega) - \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\int\limits_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right]. \tag{2.29}$$

Напомним еще, что в (2.29)

$$C(\omega) = a(\omega) - \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\overset{o}{y}(t_k) = a(\omega) - a_0 + a_0 - \\ - \sum_{k=1}^{m} B_k\overset{o}{y}(t_k) + \sum_{k=1}^{m}(B_k - A_k(\omega))\,\overset{o}{y}(t_k), \tag{2.30}$$

$$K(u(t),t,\tau) = \left[f(u(t)+\overset{o}{y},t,\tau) - F(u(t)+\overset{o}{y},t)\right] + F(u(t)+\overset{o}{y},t) - \\ - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u(t). \tag{2.31}$$

Далее, вектор-функция $\Psi(u,t)$, определяемая формулой (2.23), очевидно, является непрерывной, и в силу непрерывности матрица-функция $[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]$ справедливо соотношение

$$\|F(u(t)+\overset{o}{y},t)-F(\overset{o}{y},t)-[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u(t)\| = o(\|u(t)\|_{C_\mu([0,T])}), \|u(t)\|_{C_\mu([0,T])} \to 0, \tag{2.32}$$

которое выполняется равномерно относительно t.

Теперь обозначим $g(z,s,\tau) = f(z,s,\tau) - F(z,s)$, где $z = u + \overset{o}{y} \in \Omega$. Из (2.2) в силу равномерной непрерывности вектор-функции $f(z,s,\tau)$ на множестве $\Omega \times [0,T] \times [0,\infty)$ следует равномерная непрерывность вектор-функция $g(z,s,\tau)$, то есть для любых точек $(z_1,s_1,\tau),(z_2,s_2,\tau) \in Q$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &|\,[g(z_2,s_2,\tau)-g(z_1,s_2,\tau)]+[g(z_2,s_2,\tau)-g(z_2,s_1,\tau)]\,| \le \\ &\qquad\qquad \le \gamma(|z_2-z_1|+|s_2-s_1|), \end{aligned} \tag{2.33}$$

здесь $\gamma(r)$, $r \ge 0$ – непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.
Следовательно из (2.30) – (2.33) найдутся достаточно большое ω_1 и достаточно малое δ_1 такие, что при всех вектор-функциях u и числа ω, удовлетворяющих (2.25), выполняется оценка:

$$\|A(u,t,\omega)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.34}$$

Теперь оценим вектор-функцию

$$I(u,t,\omega) = \int\limits_0^t \Phi(t,s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s,$$

где $\Phi(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s), 0 \le s \le t \le T$. Из (2.31) имеем:

$$|I(u,t,\omega)| = \left| \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right| =$$
$$= \left| \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left[f(u+\overset{o}{y},s,\omega s) - F(u+\overset{o}{y},s)\right]\mathrm{d}s \right| +$$
$$+ \left| \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left\{F(u+\overset{o}{y},s) - F(\overset{o}{y},s) - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(s),s)\right]u\right\}\mathrm{d}s \right| \equiv$$
$$\equiv M_1(t) + M_2(t). \quad (2.35)$$

Из (2.20) и (2.32) следует существование такого малого числа δ_2, что при $\|u\|_{C([0,T])} \leq \delta_2$ выполняется оценка

$$\|M_2(t)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{15}. \quad (2.36)$$

Далее оценим вектор-функцию $M_1(t)$. Для краткости обозначим $u + \overset{o}{y} = z \in \Omega$. Учтем, что вектор-функции $F\left[z,t\right]$ и $f\left[z,t,\tau\right]$ в силу условий теоремы 4 равномерно ограничены, то есть существует такая постоянная $M_2 > 0$, что при всех $z \in \Omega, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)$ выполняются неравенства

$$|f\left[z,t,\tau\right]| \leq M_2, \quad (2.37)$$

$$|F\left[z,t\right]| \leq M_2, \quad (2.38)$$

а также, что $f(z,t,\tau)$ равномерно непрерывна по t на множестве Q, то есть для любых $(z,t_1,\tau),(z,t_2,\tau) \in Q$ выполняется неравенства

$$|f(z,t_2,\tau) - f(z,t_1,\tau)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|), \quad (2.39)$$

где $\gamma(r)$, $r \geq 0$ - непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$. Заметим, что в силу предельного равенства (2.2), вектор-функция $F\left[z,t\right]$ также равномерно непрерывна по t на множестве $\Omega \times [0,T]$, то есть для любых $(z,t_1),(z,t_2) \in \Omega \times [0,T]$ выполняются неравенства

$$|F(z,t_2) - F(z,t_1)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|). \quad (2.40)$$

где $\gamma(r)$, $r \geq 0$ – непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

Далее, по условию теоремы 4, матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial z}(z, t, \tau)$ равномерно ограничена, а потому вектор-функция $f(z, t, \tau)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица по z, следовательно существует такая постоянная $M_3 > 0$, которая не зависит от t, τ, z_1, z_2, что при всех $z_1, z_2 \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|f(z_2, t, \tau) - f(z_1, t, \tau)| \leq M_3 |z_2 - z_1|, \tag{2.41}$$

а из условий (2.2) и (2.41) следует выполнении условии Липшица и для вектор-функции $F(z, t)$

$$|F(z_2, t) - F(z_1, t)| \leq M_3 |z_2 - z_1|. \tag{2.42}$$

В силу условий (2.37) и (2.38)(это вытекает из предположений теоремы 4) найдется такое значение $t_0 \in [0, T]$ при котором выполняется неравенство

$$|M_1(t)|_{C([0,t_0])} < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [0, t_0]. \tag{2.43}$$

Учитывая (2.43), рассмотрим лишь $t \in [t_0, T]$. Разобъём интервал интегрирования $[t_0, t)$ на m равных частей:$[t_0, t) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} [\tau_i, \tau_{i+1})$ и воспользуемся представлением:

$$M_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \left\{ f\left[z(s), s, \omega s\right] - F\left[z(s), s\right] \right\} \mathrm{d}s =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \Phi(t)\Phi^{-1}(s) f\left[z(s), s, \omega s\right] - \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) f\left[z(\tau_i), \tau_i, \omega s)\right] \right\} \mathrm{d}s -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \Phi(t)\Phi^{-1}(s) F\left[z(s), s\right] - \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) F\left[z(\tau_i), \tau_i\right] \right\} \mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) \left\{ f\left[z(\tau_i), \tau_i, \omega s\right] - F\left[z(\tau_i), \tau_i)\right] \right\} \mathrm{d}s \equiv A + B + C.$$

Из соотношений (2.19), (2.20), (2.37), (2.39), (2.41) получим следующую оценку для A:

$$|A| \le \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\| |f\left[z(s), s, \omega s\right]| \mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\| |f\left[z(s), s, \omega s\right] - f\left[z(\tau_i), s, \omega s\right]| \mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\| |f\left[z(\tau_i), s, \omega s\right] - f\left[z(\tau_i), \tau_i, \omega s\right]| \mathrm{d}s \le$$

$$\le m \times \frac{T}{m} \times M \times M_2 \|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\| +$$

$$+ m \times \frac{T}{m} \times M_1 \times M_3 |z(s) - z(\tau_i)| +$$

$$+ m \times \frac{T}{m} \times M_1 \gamma(|s - \tau_i|), t \in [t_0, T].$$

Здесь мы используем представление:

$$||\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)|| = \left\| \int\limits_{s}^{\tau_i} (\Phi^{-1}(\theta))' \mathrm{d}\theta \right\| = \left\| \int\limits_{s}^{\tau_i} -\frac{\partial F}{\partial x}(\overset{o}{y}(\theta), \theta)\Phi^{-1}(\theta) \mathrm{d}\theta \right\|$$

и равномерную непрерывность вектор-функции $f(z(t), t, \tau)$ при $t \in [0, T]$. Так как $z(t) \in C_\mu([0, T])$ то, имеет место оценка $|z(s) - z(\tau_i)| \le M|s - \tau_i|^\mu \le M(\frac{T}{m})^\mu$, $M = const$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, можно найти число m_0 столь большое, что при $m \ge m_0$ выполняется неравенство

$$|z(s) - z(\tau_i)| < \varepsilon.$$

Из проведенных рассуждений следует существование такого числа m_1, что при $m \ge m_1$ имеет место оценка:

$$|A| < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [t_0, T]. \tag{2.44}$$

Далее, оценим слагаемое B.
Из соотношений (2.19), (2.20), (2.38), (2.40), (2.42) следует оценка:

$$|B| \le \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\| |F[z(s), s]| \mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\| |F[z(s), s] - F[z(\tau_i), s]| \mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\| |F[z(\tau_i), s] - F[z(\tau_i), \tau_i]| \mathrm{d}s \le$$

$$\le m \times \frac{T}{m} \times M \times M_2 \|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\| +$$

$$+ m \times \frac{T}{m} \times M_1 \times M_3 |z(s) - z(\tau_i)| +$$

$$+ m \times \frac{T}{m} \times M_1 \gamma(|s - \tau_i|), t \in [t_0, T].$$

Отсюда следует существование числа $m_2 \ge m_1$, такого, что при $m \ge m_2$ выполняется неравенство

$$|B| < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [t_0, T]. \tag{2.45}$$

При оценке выражения C воспользуемся следующем представлением

$$\Theta_s = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) \left\{ f[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] - F[z(\tau_i), \tau_i)] \right\} \mathrm{d}s =$$

$$= \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) \left\{ \frac{1}{\omega} \int\limits_{\omega\tau_i}^{\omega\tau_{i+1}} f[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] \,\mathrm{d}s - (\tau_{i+1} - \tau_i) F[z(\tau_i), \tau_i)] \right\} =$$

$$= \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\tau_{i+1} \left\{ \frac{1}{\omega\tau_{i+1}} \int\limits_{0}^{\omega\tau_{i+1}} f[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] \,\mathrm{d}s - F[z(\tau_i), \tau_i)] \right\} +$$

$$+ \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\tau_i \left\{ F[z(\tau_i), \tau_i)] - \frac{1}{\omega\tau_i} \int\limits_{0}^{\omega\tau_i} f[z(\tau_i), \tau_i, \omega s] \,\mathrm{d}s \right\}.$$

Согласно условиям теоремы равномерно относительно $(z, t) \in \Omega \times [0, T]$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int\limits_{0}^{N} f(z, t, \tau) \mathrm{d}\tau = F(z, t).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N_0(\varepsilon)$, такое что при $N > N_0(\varepsilon)$ оценка

$$\left| \frac{1}{N} \int\limits_0^N f(z,t,\tau)\mathrm{d}\tau - F(z,t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{30T}$$

выполняется для всех $z \in \Omega$, $t \in [0,T]$.
После этого выберем $m_3 \geq m_2$ так , что для всех $m \geq m_3$ выполняется неравенство $\omega t_0 > N_0(\varepsilon)$. Тогда при $m = m_3$ для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется оценка

$$|C| \leq \sum_{i=1}^{m_3} |\Theta_s| < \frac{\varepsilon}{15}. \tag{2.46}$$

Из соотношений (2.36) – (2.43), (2.44) – (2.46) следует оценка

$$||I(u,t,\omega)||_{C([0,T])} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.47}$$

Теперь покажем ограниченность нормы вектор-функций

$$N(u,t,\omega) = A(u,t,\omega) + \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \, \|u\|_{C_\mu([0,T])} \leq \delta_1$$

в $C_1([0,T])$. Для этого возьмем производную $N(u,t,\omega)$ по переменной t.
Напомним, что

$$A(u,t,\omega) =$$
$$= \Phi(t)H \left[C(\omega) - \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k) \int\limits_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \right],$$

где $K(u,t,\tau)$ имеет вид (2.31). Очевидно, что

$$\frac{\partial A(u,t,\omega)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)A(u,t,\omega)$$

и в силу оценки (2.28) для $A(u,t,\omega)$ и ограничености матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)$(это вытекает из условии теоремы 4) найдется такая постоянная $C_1 > 0$, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leq \delta_1$ и $\omega > 0$

$$\left|\frac{\partial A(u,t,\omega)}{\partial t}\right| \leq C_1. \tag{2.48}$$

Далее, положим

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s.$$

По теореме о дифференцировании по параметру интеграла с переменным пределом интегрирования, мы получим

$$\varphi'(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t)K(u(t),t,\omega t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s + K(u(t),t,\omega t),$$

так как $\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I$ –тождественный оператор.

Таким образом, в силу условий теоремы 4, неравенств (2.37), (2.47) и (2.48) найдутся такое число $C_2 > 0$ что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leq \delta_1$ и $\omega > 0$

$$\left|\frac{\partial A(u,t,\omega)}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right)\right| \leq C_2. \tag{2.49}$$

Из оценок (2.48), (2.49) следует неравенство (2.24). Очевидно, оценка типа (2.24) имеет место и для $\frac{\partial N(u,\infty)}{\partial t}$.

Следовательно, мы установили, что нормы

$$N(u,t,\omega) = A(u,t,\omega) + \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \|u\|_{C_\mu([0,T])} \leq \delta_1, \omega \gg 1$$

равномерно малы в $C([0,T])$ и равномерно ограничены в $C_1([0,T])$. Следовательно в силу оценки (1.28), нормы $N(u,t,\omega)$ малы в $C_\mu([0,T])$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие δ_0 и ω_0, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leq \delta_0$ и $\omega > \omega_0$

$$||N(u,\omega)||_{C_\mu([0,T])} \leq ||u||_{C_\mu([0,T])} + ||A(u,t,\omega)||_{C_\mu([0,T])} +$$
$$+ ||I(u,t,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что оператор $N(u,\omega)$ является непрерывным в точке $(0,\infty)$ в пространстве $C_\mu([0,T])$.

Теперь докажем непрерывность дифференциала Фреше оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$.
Для начала докажем существование дифференциала Фреше оператора $N(u,\omega)$ по u.

С учетом определения оператора $N(u,\omega)$ в окрестности точки $(0,\infty)$, покажем, что оператор $N(u,\omega)$ имеет производную Фреше, определяемую формулой

$$D_uN(u,\omega)h(t) = h(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s+$$
$$+\Phi(t)\left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int\limits_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s. \tag{2.50}$$

По условию теоремы 4, вектор-функция $K(u,t,\tau)$ и ее производная $K_u(u,t,\tau)$ непрерывны и $K_u(u,t,\tau)$ равномерно ограничена в $\Omega\times[0,T]\times[0,\infty)$. Формула (2.50) теперь следует, по существу, из классической теоремы о дифференцировании под знаком интеграла. Однако мы приведем независимое подробное ее доказательство. Для любой функции $h\in C_\mu[0,T]$ имеем

$$N(u+h,\omega)-N(u,\omega)=$$
$$= h(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left[K(u(s)+h(s),s,\omega s)-K(u(s),s,\omega s)\right]\mathrm{d}s+$$
$$+H\Phi(t)\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int\limits_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)\left[K(u(s)+h(s),s,\omega s)-K(u(s),s,\omega s)\right]\mathrm{d}s,$$

где $H=\left[\sum\limits_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}$.
Далее, по теореме о конечных приращения имеем

$$K(u(s)+h(s),s,\tau)-K(u(s),s,\tau)=\int\limits_0^1 K_u(u(s)+\theta h(s),s,\tau)h(s)d\theta,$$

где $\theta \in [0,1]$. По условию теоремы матрица-функция K_u непрерывна на множестве $\Omega \times [0,T] \times [0,\infty)$ а потому

$$K_u(u(s)+\theta h(s),s,\tau)h(s)=K_u(u(s),s,\tau)h(s)+o(x(s),\theta h(s),s)h(s).$$

Здесь $o(x(s),\theta h(s),s) \to 0$ равномерно при $\|h\|_{C_\mu([0,T])} \to 0$. Следовательно

$$K(u(s)+h(s),s,\tau)-K(u(s),s,\tau)=\int\limits_0^1 [K_u(u(s),s,\tau)h(s)+o(u(s),\theta h(s),s)]h(s)d\theta.$$

Поэтому получаем

$$N(u+h,\omega)-N(u,\omega)=h(t)-\int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s+$$
$$+H\Phi(t)\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int\limits_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s+$$
$$+\delta_1(u,h)+\delta_2(u,h)=D_uN(u,\omega)h+\delta_1(u,h)+\delta_2(u,h),$$

где

$$[\delta_1(u,h)](t)=-\int\limits_0^t \mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi(t)\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta,$$

$$[\delta_2(u,h)](t)=H\Phi(t)\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int\limits_0^{t_k}\mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta.$$

Теперь докажем, что остатки $\delta_1(u,h)$ и $\delta_2(u,h)$ обладают свойствам:

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\gamma(u,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}}=0,$$

где $\gamma = \delta_1, \delta_2$. Для этого оценим δ_1 в $C_\mu([0,T])$

$$\|\delta_1(u,h)(t)\|_{C_\mu([0,T])} = \sup_{t\in[0,T]}\left|\int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_0^1 \Phi(t)\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta\right| +$$

$$+ \sup_{0\le t<t_1\le T}\frac{1}{|t-t_1|^\mu}\left|\int\limits_{t_1}^t \mathrm{d}s\int\limits_0^1 (\Phi(t)-\Phi(t_1))\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta\right| +$$

$$+ \sup_{0\le t<t_1\le T}\frac{1}{|t-t_1|^\mu}\left|\int\limits_{t}^{t_1} \mathrm{d}s\int\limits_0^1 \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta\right| \le$$

$$\le \sup_{t,s\in[0,T]} |\Phi(t)\Phi^{-1}(s)||o(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|(T+1)+$$

$$+ \sup_{s\in[0,T]} L_1|\Phi^{-1}(s)||o(u(s),\theta h(s),s)||h(s)| \le$$

$$\le L_2 \sup_{s\in[0,T]} |o(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|,$$

где $L_1, L_2 = const > 0$. Из последней оценки, мы получим

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\delta_1(u,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\delta_2(u,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Поэтому по определению производной Фреше, оператор $N(u,\omega)$ дифференцируем в точке $u(t) \in C_\mu([0,T])$ и равенство (2.50) установлено. Тогда производная Фреше $D_uN(u,\omega)$ в фиксированной точке (u_0,ω_0) есть линейный оператор, действующих определенный из $C_\mu([0,T])$ в $C_\mu([0,T])$.

Теперь докажем непрерывность производной Фреше $D_uN(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Для этого рассмотрим

$$D_uN(u,\omega)(t) = I - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s+$$

$$+\Phi(t)H\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int\limits_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s,$$

$$D_uN(u,\infty)(t) = I - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\Psi_u(u(s),s)\mathrm{d}s +$$

$$+ \Phi(t)H_1 \sum_{k=1}^m B_k\Phi(t_k) \int\limits_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)\Psi_u(u(s),s)\mathrm{d}s.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $\omega_1 > 0$ такие, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ и $\omega > \omega_1$ выполняется

$$\|D_uN(u,\omega) - D_uN(0,\infty)\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} < \varepsilon.$$

Рассмотрим

$$\|D_uN(u,\omega) - D_uN(u,\infty)\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)\left[K_u(u(s),s,\omega s) - \Psi_u(u(s),s)\right]\mathrm{d}s \right\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} +$$

$$+ \left\| K(t) \sum_{k=1}^m \left(A_k(\omega) - B_k\right)\Phi(t_k) \int\limits_0^{t_k} T(u,s,\omega)\mathrm{d}s \right\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])},$$

где $K(t) = \Phi(t)(H - H_1), T(u,s,\omega) = \Phi^{-1}(s)\left(K_u(u(s),s,\omega s) - \Psi_u(u,s)\right).$
Мы не будем останавливаться на заключительной части доказательства последнего неравенства , поскольку аналоги используемых при этом рассуждений проводились выше.

Отметим теперь следующие очевидные равенства.

$$D_uN(0,\infty) = I, D_u\Psi(0,t) = 0.$$

Лемма 7 доказана.

Заметим, что при больших ω вектор-функция $x_\omega(t)$, которая выражается через $u_\omega(t)$ по формуле (2.7) является единственным решением задачи (2.1) в некоторой $C_\mu([0,T])$-окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}$. Более того, из леммы 7 следует существование единственного решения $u_\omega \underset{\omega\to\infty}{\to} 0$ уравнения (2.8) на временном участке $t \in [0, T]$. Следовательно, согласно формуле (2.7), равномерно относительно $t \in [0, T]$, имеет место следующее предельное равенство $\lim_{\omega \to \infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$. Теорема доказана.

§2.Обоснование метода усреднения для систем ОДУ при наличии в правой части слагаемого вида $\omega^\alpha\varphi(x,t,\omega t)$, $\alpha=\frac{1}{2}$

1°. Формулировка результатов (теорема 5).

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T>0$, $D=\{(x,t): x\in\Omega, t\in[0,T]\}$ и $Q=\{(x,t,\tau):(x,t)\in D, \tau\in[0,\infty)\}$. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(x,t,\omega t)+\sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t), t\in[0,T] \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)x(t_i)=a(\omega). \end{cases} \tag{2.51}$$

Здесь m,n натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i=1,\dots,m$ – квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0=t_1<t_2\dots<t_m=T$, $a(\omega)\in\mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор - функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ – 2π – периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть равномерно относительно $(x,t)\in D$ выполняется равенство

$$<\varphi(x,t,\tau)>_\tau=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x,t,\tau)d\tau=0.$$

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau)\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\mathrm{d}s-\langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$

Вектор-функция $\chi(x,t,\tau)$ в силу условий 1,2) вместе с производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве Q.

4. Для любых точек (x, t_1, τ) и $(x, t_2, \tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$\|z(x, t_2, \tau) - z(x, t_1, \tau)\| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$ а $\gamma(r)$, $r \geq 0$, –непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

5. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

6. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x.

7. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x, t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x, t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x, t, \tau) + \chi(x, t, \tau))\, \mathrm{d}\tau = \Psi(x, t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x, мы получим также равномерное относительно $(x, t) \in D$ предельное равенство.

8. Для некоторых квадратных матриц S_i, $0 \leq i \leq m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega) - S_i\| \to 0$, $|a(\omega) - a_0| \to 0$ при $\omega \to \infty$.

9. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi, t), t \in [0, T], \\ \sum\limits_{i=1}^{m} S_i \xi(t_i) = a_0 \end{cases} \tag{2.52}$$

10. Будем считать, что задача (2.52) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0, T]$, и существует [10] такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0, T]$.

[10]Предположение о существовании указанной подобласти Ω_0 не является принципиальным, а принято лишь для упрощения дальнейшего изложения.

11. Справедливо соотношение:

$$\Delta = det\left[\sum_{i=1}^{m} S_i \Phi(t_i)\right] \neq 0,$$

где $\Phi(t)$–матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\overset{o}{\xi}, t)\right] x.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любого $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (2.51) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0,T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{\xi}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.*

2°. Доказательство теоремы 5.

Схема доказательства теоремы следующая. Вначале с помощью замены переменных, типа классической замены Н.М.Крылова-Н.Н.Боголюбова[5, 30, 31], в уравнении (2.51) избавимся от слагаемого, пропорционального $\sqrt{\omega}$; затем осуществим переход от полученной в результате указанной замены переменных задачи к интегральному уравнению и, наконец, к последнему применим теорему о неявной функции в банаховом пространстве, из которой и будут следовать утверждения теоремы. В ходе доказательства теоремы 5 будет использовано следующее простое утверждение

Лемма 8. *Пусть $\varphi(x,t,\tau)$–ограниченная на множестве $(x,t,\tau) \in \Omega_0 \times [0,T] \times [0,\infty)$ вектор-функция ($M = \sup\limits_{(x,t,\tau)\in\Omega_0\times[0,T]\times[0,\infty)} |\varphi(x,t,\tau)|$), которая относительно τ непрерывна и l–периодична с нулевым средным. Тогда при всех $\omega > 0$ и всех $(x,t) \in \Omega_0 \times [0,T]$ выполняется оценка:*

$$\left|\int_0^{\omega t} \varphi(x,t,\tau)d\tau\right| \leqslant Ml.$$

Доказательство. Для любого $u \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int_u^{u+l} \varphi(x,t,\tau)d\tau = \int_0^l \varphi(x,t,\tau)d\tau + \int_l^{u+l} \varphi(x,t,\tau)d\tau - \int_0^u \varphi(x,t,\tau)d\tau.$$

Во втором интеграле справа сделаем замену переменных $\tau = \tau' + l$ и, учитывая l – периодичность вектор-функции $\varphi(x,t,\tau)$ по τ и равенство $\langle\varphi(x,t,\tau)\rangle_\tau = 0$, приведем рассматриваемое равенство к виду

$$\int\limits_u^{u+l} \varphi(x,t,\tau)d\tau = l\langle\varphi(x,t,\tau)\rangle = 0. \tag{2.53}$$

Пусть k–целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant \omega t - kl < l$. Из соотношения

$$\int\limits_0^{\omega t} \varphi(x,t,\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{il}^{(i+1)l} \varphi(x,t,\tau)d\tau + \int\limits_{kl}^{\omega t} \varphi(x,t,\tau)d\tau$$

(в случае $k = 0$ в правой части равенства присутствует лишь последнее слагаемое) и равенства (2.53) вытекает оценка

$$\left|\int\limits_0^{\omega t} \varphi(x,t,\tau)d\tau\right| \leqslant lM.$$

Лемма 8 доказана.

Следствие 1. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и всех $(x,t) \in \Omega_0 \times [0,T]$ выполняются оценки*

$$\omega^{-\alpha}\left|\int\limits_0^{\omega t} \varphi(x,t,\tau)d\tau\right| < \varepsilon, \qquad \omega^{-\alpha}\left\|\int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)d\tau\right\| < \varepsilon.$$

В силу непрерывности матрица-функции $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ и 2π–периодичности ее по τ с нулевым средним и следствии 1 найдется такое $\omega_1 > 0$, что для всех $(x,t) \in \Omega_0 \times [0,T] \equiv D_0$ при $\omega > \omega_1$ выполняется оценка

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau\right\| < \frac{1}{2}. \tag{2.54}$$

Заметим, что из неравенства (2.54) следует обратимость матрицы

$$\left(I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y(t),t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

при $\omega > \omega_1$.

Далее нам потребуется следующее известное простое утверждение

Лемма 9. *Пусть вектор-функция* $g(\tau)$, *определена при* $\tau \geq 0$ *и принимающая значения в* $\mathbb{R}^n$, *непрерывна и* 2π*-периодичена с нулевым средним:*

$$\langle g(\tau)\rangle_\tau = 0. \tag{2.55}$$

Тогда уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = g(\tau) \tag{2.56}$$

имеет единственное 2π*–периодическое с нулевым средним решение, причем последнее имеет вид:*

$$x(\tau) = \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s - \langle \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s\rangle_\tau. \tag{2.57}$$

Доказательство. (Приводим его для полноты изложения). Рассмотрим следующую вектор-функцию

$$x(\tau) = \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s, \tau \geq 0$$

и покажем, что она является 2π–периодической. Тогда имеем

$$x(\tau+2\pi)-x(\tau) = \int\limits_0^{\tau+2\pi} g(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} g(s)\mathrm{d}s + \int\limits_{2\pi}^{\tau+2\pi} g(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s.$$

Во втором интеграле справа, сделаем замену переменных $s = t+2\pi$ и учитывая 2π–периодичность вектор-функция $g(\tau)$, получим

$$x(\tau+2\pi) - x(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t, \tau \geq 0.$$

Из последнего равенства и соотношение (2.55) следует 2π-периодичность $x(\tau)$.

Теперь положим

$$y(\tau) = x(\tau) - \langle x(\tau)\rangle = \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s - \langle \int\limits_0^\tau g(s)\mathrm{d}s\rangle.$$

Очевидно $y(\tau)$ является 2π-периодическим с нулевым средним решение уравнения (2.56). Далее, докажем ее единственность. Если $z(\tau)$-другое такое решение, то

$$\frac{dz}{d\tau} = g(\tau),$$

тогда вычитая из посленого равенства равенство (2.56), придем к соотношениям

$$\frac{d(z-y)}{d\tau} = 0, \langle z(\tau) - y(\tau) \rangle = 0,$$

из этого следует, что $z(\tau) = y(\tau)$. Лемма 9 доказана.

Рассмотрим теперь вектор-функцию $\alpha(y,t,\tau)$, которая определена на множестве $Q_0 = D_0 \times [0,\infty)$, 2π–периодична по τ с нулевым средним и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}(y,t,\tau) = \varphi(y,t,\tau). \tag{2.58}$$

Уравнение (2.58) согласно леммы 9 имеет единственное 2π – периодическое по τ с нулевым средним решением

$$\alpha(y,t,\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(y,t,s)\mathrm{d}s - \langle \int\limits_0^\tau \varphi(y,t,s)\mathrm{d}s \rangle_\tau. \tag{2.59}$$

Поскольку вектор-функция $\varphi(y,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t,\tau)$ непрерывны на множестве Q_0 и 2π–периодичны по τ с нулевым средним, то в силу леммы 8 на этом множестве вектор-функции $\alpha(y,t,\tau)$ и матрица - функции $\frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,t,\tau)$ ограничены.

Обозначим через S_0 множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций $y : [0,T] \to \Omega_0$. В задаче (2.51) при достаточно больших ω сделаем замену переменных

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \alpha(y(t),t,\omega t) \equiv y(t) + \beta(y,t,\omega), y \in S_0. \tag{2.60}$$

Из теоремы о неявной функции в банаховом пространстве следует существование таких содержащихся в S_0 шаров S_1 и S_2 с центром $\xi_0(t)$ в $C[0,T]$-пространстве и таких положительных чисел ω_1 и ω_2, что при $\omega > \omega_1$ соотношение (2.60) каждому $x \in S_0$ ставит в соответсвие единственный вектор $y \in S_2$, а при $\omega > \omega_2$ каждому $y \in S_2$ ставит в соответствие единственый вектор $x \in S_1$. При этом из соотношения $x \in C_1([0,T])$ следует $y \in C_1([0,T])$, и наоборот. Производная y', например, может быть определена из уравнения

$$\left[I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] y' = x' - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1}(y(t), s_1, \omega t)|_{s_1=t} - \sqrt{\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial s_2}(y(t), t, s_2)|_{s_2=\omega t},$$

$\omega > \omega_1$, где I -единичная матрица.

Задача (2.51) в результате замены переменных (2.60) примет вид :

$$\begin{cases} [I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}]\frac{dy}{dt} = [f(y,t,\omega t) + \chi(y,t,\omega t)] + f(y+\beta,t,\omega t) - f(y,t,\omega t) \\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(y,s,\omega t)|_{s=t} + \sqrt{\omega}\left(\varphi(y+\beta,t,\omega t) - \varphi(y,t,\omega t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\chi(y,t,\omega t)\right) \\ \equiv \Gamma(y,t,\omega t) + r(y,t,\omega) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)\left[y(t_i) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\int_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s - \langle\int_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right)\right] \\ = a(\omega), \omega \gg 1, \end{cases} \tag{2.61}$$

где

$$\Gamma(y,t,\tau) = f(y,t,\tau) + \chi(y,t,\tau).$$

Учитывая неравенство (2.54), от задачи (2.61) перейдем к задаче

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \left(I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^{-1}[\Gamma(y,t,\omega t) + r(y,t,\omega)] \\ \equiv \Gamma(y,t,\omega t) + R(y,t,\omega) \equiv F(y,t,\omega) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)\left[y(t_i) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\int_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s - \langle\int_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right)\right] \\ = a(\omega), \end{cases} \tag{2.62}$$

здесь

$$R(y,t,\omega) = (I + \mu_\omega)^{-1}[\Gamma(y,t,\omega t) + r(y,t,\omega)] - \Gamma(y,t,\omega),$$

где

$$\mu_\omega(y,t,\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,s)\mathrm{d}s,$$

$(y, t) \in D_0$.

Лемма 10. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_1 > 0$, такое что при всех $(y, t) \in D_0$ и $\omega > \omega_1$ для вектор-функции R выполняются неравенства:*

$$|R(y, t, \omega)| < \varepsilon, \tag{2.63}$$

$$\left\| \frac{\partial R}{\partial y}(y, t, \omega) \right\| < \varepsilon. \tag{2.64}$$

Доказательство.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$R(y, t, \omega) = R_1(y, t, \omega) + R_2(y, t, \omega),$$

где

$$R_1(y, t, \omega) = [(I + \mu_\omega)^{-1} - I]\Gamma(y, t, \omega t),$$
$$R_2(y, t, \omega) = (I + \mu_\omega)^{-1} r(y, t, \omega t).$$

В силу (2.54), очевидного равенства

$$(I + \mu_\omega)^{-1} - I = -\mu_\omega (I + \mu_\omega)^{-1} \tag{2.65}$$

и условий теоремы 5 найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y, t) \in D_0$, выполняется неравенство

$$|R_1(y, t, \omega)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.66}$$

Перейдем к оценке слагаемого R_2. Поскольку вектор-функция $f(y, t, \tau)$ в области Q_0 удовлетворяет равномерному условию Липшица по y, а вектор-функция $\alpha(y, t, \tau)$ равномерно ограничена, то найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y, t) \in D_0$ справедливо неравенство

$$\| (I + \mu_\omega)^{-1} [f(y + \beta, t, \omega t) - f(y, t, \omega t)] \| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, с помощью формулы конечных приращений получим соотношения:

$$|\sqrt{\omega}\left(\varphi(y+\beta,t,\omega t)-\varphi(y,t,\omega t)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta\right)|$$
$$=\sqrt{\omega}\left\|\int\limits_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y+\theta\beta,t,\omega t)d\theta\beta-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\omega t)\beta\right\|$$
$$\leqslant\left\|\int\limits_0^1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y+\theta\beta,t,\omega t)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\omega t)\right]d\theta\right\|\sqrt{\omega}|\beta|.$$

Поскольку матрица-функция $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\tau)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица по y на Q_0, то существует такое $\omega_1>0$, что при всех $\omega>\omega_1$ и $(y,t)\in D_0$ выполняется неравенство

$$|\sqrt{\omega}\,(I+\mu_\omega)^{-1}\left[\varphi(y+\beta,t,\omega t)-\varphi(y,t,\omega t)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta\right]|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Очевидно, что в силу неравенства (2.54) и ограничености $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(y,s,\tau)|_{s=t}$ на Q_0 существует такое $\omega_1>0$, что при всех $\omega>\omega_1$ и $(y,t)\in D_0$ выполняется неравенство

$$|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,(I+\mu_\omega)^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(y,s,\tau)|_{s=t}|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, найдется такое $\omega_1>0$, что при всех $(y,t)\in D_0$ и $\omega>\omega_1$ справедливо неравенство

$$|R_2(y,t,\omega)|<\frac{3\varepsilon}{4}. \tag{2.67}$$

Итак согласно (2.66), (2.67) существует (достаточно большое) число ω_1, такое что при всех $\omega>\omega_1$ и $(y,t)\in D_0$ выполняется неравенство (2.63). Неравенство (2.64) доказывается аналогично, поэтому мы приводить его здесь не будем, а укажем лишь два простых соотношения, которые непосредственно не использовались при доказательстве (2.63).

1. Существует такое $\omega_1>0$, что при всех $(y,t)\in D_0$ и $\omega>\omega_1$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}(I+\mu_\omega(y,t))^{-1}\right\|=\left\|[I+\mu_\omega(y,t)]^{-1}\frac{\partial\mu_\omega}{\partial y}(y,t)[I+\mu_\omega(y,t)]^{-1}\right\|$$
$$\leqslant\|((I+\mu_\omega)^{-1})\|^2\left\|\frac{\partial\mu_\omega}{\partial y}(y,t)\right\|=O(\omega^{-\frac{1}{2}}),\omega\to\infty.$$

2. Справедливо равенство:

$$\frac{\partial r_i}{\partial y_k}(y,t,\omega)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t,\omega t)-\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)(y,t,\omega t)$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_s}\right)(y+\beta,t,\omega t)\frac{\partial \beta_s}{\partial y_k}-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial^2\alpha_i(y,s,\omega t)}{\partial y_k\partial s}|_{s=t}+$$
$$+\sqrt{\omega}\left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t,\omega t)-\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)(y,t,\omega t)-Q\right]+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s}(y+\beta,t,\omega t)\frac{\partial \alpha_s}{\partial y_k}-\frac{\partial \varphi_i(y,t,\omega t)}{\partial y_s}\frac{\partial \alpha_s}{\partial y_k}\right],i,k=\overline{1,n}. \quad (2.68)$$

Здесь $Q=\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y_k\partial y_s}\right)(y,t,\omega t)\beta_s(y,t,\omega t)$.
Лемма 10 доказана.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 5. В начале в возмущенной задаче (2.62) и в усредненной задаче (2.52) сделаем замену переменных :

$$y=u+\overset{o}{\xi},\xi=v+\overset{o}{\xi}. \quad (2.69)$$

Полученные задачи запишем в виде:

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}-\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right]u=F(u+\overset{o}{\xi},t,\omega)-\Psi(\overset{o}{\xi},t)-\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right]u\equiv F_1(u,t,\omega)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}P_i(\omega)\left\{u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i)+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\int_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s-\langle\int_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right)\right\}\\ =a_\omega\end{cases} \quad (2.70)$$

и

$$\begin{cases}\frac{dv}{dt}-\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right]v=\Psi(v+\overset{o}{\xi},t)-\Psi(\overset{o}{\xi},t)-\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right]v\equiv\Psi_1(u,t)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}S_iv(t_i)=0.\end{cases} \quad (2.71)$$

От задач (2.70), (2.71) известном способом перейдем к эквивалентным интегральным уравнениям. Так, решение задачи (2.70) удовлетворяет уравнению

$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int\limits_0^t \Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s,$$

где

$$\Phi(t,s) \equiv \Phi(t)\Phi^{-1}(s), 0 \le s \le t \le T,$$

$$u_0 = \left[\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\Phi(t_i)\right]^{-1} \{a(\omega) - \sum_{i=1}^m P_i(\omega)\overset{o}{\xi}(t_i)$$
$$- \sum_{i=1}^m P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i} \Phi(t_i,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\left[\int\limits_0^{\omega t_i} \varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^{\tau} \varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right]\}.$$

Таким образом задача (2.70) эквивалентна уравнению

$$u(t) = \Phi(t)\left[\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\Phi(t_i)\right]^{-1} \{a(\omega) - \sum_{i=1}^m P_i(\omega)\overset{o}{\xi}(t_i)$$
$$- \sum_{i=1}^m P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i} \Phi(t_i,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\left[\int\limits_0^{\omega t_i} \varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^{\tau} \varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right]\} \tag{2.72}$$
$$+ \int\limits_0^t \Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s$$
$$\equiv A(u,t,\omega) + \int\limits_0^t \Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s \equiv H_0(u,t,\omega), u \in C_1([0,t]),$$

а задача (2.71) эквивалентна аналогичному уравнению

$$v(t) = -\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{m} S_i \Phi(t_i)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{m} S_i \int_0^{t_i} \Phi(t_i, s)\Psi_1(v(s), s)\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t \Phi(t, s)\Psi_1(v(s), s)\mathrm{d}s \tag{2.73}$$

$$\equiv B(v, t) + \int_0^t \Phi(t, s)\Psi_1(v(s), s)\mathrm{d}s \equiv H_0(v, t, \infty), v \in C_1([0, t]).$$

Напомним, что в (2.72), (2.73)

$$F_1(u, t, \omega) = f(u+\overset{o}{\xi}, t, \omega)+\chi(u+\overset{o}{\xi}, t, \omega)+R(u+\overset{o}{\xi}, t, \omega)-\Psi(\overset{o}{\xi}, t)-\left[\frac{\partial\Psi(\overset{o}{\xi}, t)}{\partial\xi}\right] u, \tag{2.74}$$

$$\Psi_1(v, t) = \Psi(v + \overset{o}{\xi}, t) - \Psi(\overset{o}{\xi}, t) - \left[\frac{\partial\Psi(\overset{o}{\xi}, t)}{\partial\xi}\right] v. \tag{2.75}$$

Введем в рассмотрение оператор

$$H : C_\mu([0, T]) \times [1, \infty] \to C_\mu([0, T]), \mu \in (0, \frac{1}{2}),$$

определенный в некоторой окрестности точки $(0, \infty)$ и действующий по правилу

$$H(u, \omega)(t) = \begin{cases} u(t) - H_0(u, t, \omega), \omega \neq \infty \\ u(t) - H_0(u, t, \infty), \omega = \infty. \end{cases} \tag{2.76}$$

Лемма 11 (основная). *Оператор $H(u, \omega)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по u в точке $(0, \infty)$. При этом $H(0, \infty) = 0$, а производная Фреше $D_u H(0, \infty) = I$ где I–тождественный оператор.*

Доказательство.

Равенства

$$H(0, \infty) = 0, D_u H(0, \infty) = I$$

легко следуют из представлений (2.73), (2.75) и очевидных равенств: $\Psi_1(0,t) = 0,\ D_u\Psi_1(0,t) = 0$.

Перейдем к доказательству непрерывности оператора $H(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Вначале отметим простую оценку (см.(2.72), (2.73),(2.74), (2.75)):

$$\sup_{\|u\|_{C_\mu([0,T])\le 1}, t\in[0,T], \omega\in[1,\infty]} \left| \frac{\partial [H_0(u,\omega)](t)}{\partial t} \right| \le C_0,$$

где C_0-константа. Из этой оценки и известного интерполяционного неравенства (1.28), следует, что непрерывность оператора $H(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$ достаточно установить, рассматривая H как оператор, действующий из пространства $C_\mu[0,T]\times[1,\infty]$ в пространство $C([0,T])$. Таким образом нам нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1 \in (0,1)$ и $\omega_1 > 0$, такие что при

$$||u||_{C_\mu([0,T])} < \delta_1, \omega > \omega_1 \tag{2.77}$$

выполняется неравенство

$$\left\| u(t) - A(u,t,\omega) - \int\limits_0^t \Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s \right\|_{C([0,T])} < \varepsilon. \tag{2.78}$$

Докажем вначале, что при некоторых δ_1, ω_1 и u, ω, удовлетворяющих (2.77) справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_0^t \Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s \right\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.79}$$

Для этого вектор-функцию $F_1(u(s),s,\omega)$ представим в виде

$$\begin{aligned} &F_1(u(s),s,\omega) = \\ &= \left[\Gamma(u+\overset{o}{\xi},s,\omega s) - \Psi(u+\overset{o}{\xi},s) - \Gamma(\overset{o}{\xi},s,\omega s) + \Psi(\overset{o}{\xi},s) + R(u+\overset{o}{\xi},s,\omega s)\right] \\ &+ \left[\Gamma(\overset{o}{\xi},s,\omega s) - \Psi(\overset{o}{\xi},s)\right] + \left\{\Psi(u+\overset{o}{\xi},s) - \Psi(\overset{o}{\xi},s) - \left[\frac{\partial\Psi(\overset{o}{\xi},s)}{\partial\xi}u\right]\right\} \\ &\equiv M_1(u,\omega) + M_2(\overset{o}{\xi},\omega) + M_3(u). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Из формулы конечных приращений и леммы 10 следует существования столь малого $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и столь большого ω_1, что при $||u||_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ и $\omega > \omega_1$ справедлива оценка

$$\left\|\int_0^t \Phi(t,s)M_1[u(s),s]\mathrm{d}s\right\|_{C([0,T])} + \left\|\int_0^t \Phi(t,s)M_3[u(s)]\mathrm{d}s\right\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (2.81)$$

С помощью стандартной для теории метода усреднения техники (см., например[26, 63]), установливается существование столь большого $\omega_1 = \omega_1(\varepsilon)$, что при $\omega > \omega_1$

$$\left\|\int_0^t \Phi(t,s)M_2[\overset{o}{\xi}(s),\omega]\mathrm{d}s\right\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (2.82)$$

Из соотношений (2.80) – (2.82) следует оценка (2.79).

На следующем этапе доказывается, что если найденные на предыдущем этапе числа δ_1 и ω_1 достаточно мало и достаточно велико соответственно, то при выполнении неравенств (2.77) имеет место оценка

$$\|A(u,t,\omega)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.83)$$

При доказательстве (2.83) мы используем представление (см. (2.72)):

$$\begin{aligned} A(u,t,\omega) &= K(t)\left[a(\omega) - \sum_{i=1}^m P_i(\omega)\overset{o}{\xi}(t_i)\right] \\ &- K(t)\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\int_0^{t_i} \Phi(t_i)\Phi^{-1}(s)F_1(u(s),s,\omega)\mathrm{d}s \\ &- \frac{1}{\sqrt{\omega}}K(t)\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\left[\int_0^{\omega t_i} \varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s - \langle\int_0^{\tau} \varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right] \\ &\equiv A_1 + A_2 + A_3, \end{aligned}$$

где $K(t) = \Phi(t)\left[\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\Phi(t_i)\right]^{-1}$, и технику из работ [26, 63], а также учитываем равенство

$$\sum_{i=1}^{m} S_i \overset{o}{\xi}(t_i) = a_0.$$

Отсюда следует, что для достаточно большого $\omega_1 = \omega_1(\varepsilon)$ при $||u||_{C_\mu([0,T])} < 1$ и $\omega > \omega_1$

$$\|A_1\|_{C([0,T])} + \|A_3\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.84}$$

Оценка слагаемого A_2 совершенно аналогична оценке (2.82). На этом пути, установливается, что при $||u||_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ и $\omega > \omega_1$, где δ_1 и ω_1–достачочно мало и достаточно велико соответсвенно, имеет место оценка

$$\|A_2\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.85}$$

Из (2.84), (2.85) следует (2.83).

Итак, пусть δ_1, ω_1 такая пара чисел, что при выполнении соотношений (2.77) справедливы оценки (2.79), (2.83). Пусть еще $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, очевидно, имеет место оценка (2.78). Непрерывность оператора $H(u, \omega)$ в точке $(0, \infty)$ доказана.

Непрерывность оператора $(D_u H)(u, \omega)$ в точке $(0, \infty)$ доказывется аналогично. При этом дополнительно используются равенства (1.47) и (2.68). Здесь мы выведем только формулу данного дифференциала Фреше.

Для любой вектор-функции $h \in C_\mu([0, T])$ достаточно малой и $s \in [0, T]$ имеем

$$H(u+h, \omega) - H(u, \omega) = h(t) -$$

$$-H(t) \sum_{i=1}^{m} P_i(\omega) \int_0^{t_i} \Phi(t_i, s) \left[F_1(u(s) + h(s), s, \omega) - F_1(u(s), s, \omega)\right] \mathrm{d}s -$$

$$-H(t) \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sum_{i=1}^{m} P_i(\omega) \int_0^{\omega t_i} \left[\varphi(u(t_i) + h(t_i) + \overset{o}{\xi}(t_i), t_i, s) - \varphi(u(t_i) + \overset{o}{\xi}(t_i), t_i, s)\right] \mathrm{d}s -$$

$$+ \int_0^{t} \Phi(t, s) \left[F_1(u(s) + h(s), s, \omega) - F_1(u(s), s, \omega)\right] \mathrm{d}s,$$

где

$$H(t) = \Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{m} P_i(\omega)\Phi(t_i)\right]^{-1}.$$

Далее по интегральной теореме Лагранжа о конечных приращений имеем

$$F_1(u(s)+h(s),s,\omega) - F_1(u(s),s,\omega) = \int\limits_0^1 F_{1u}(u(s)+\theta h(s),s,\omega)h(s)d\theta$$

$$\varphi(u(t_i)+h(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),t_i,s) - \varphi(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),t_i,s) =$$
$$= \int\limits_0^1 \varphi_u(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i)+\theta h(t_i),t_i,s)h(t_i)d\theta.$$

Поскольку F_{1u} и φ_u непрерывны на множестве $\Omega \times [0,T] \times [0,\infty)$ а потому

$$F_{1u}(u(s)+\theta h(s),s,\omega)h(s) = F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s) + \alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s),$$

$$\varphi_u(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i)+\theta h(t_i),t_i,s)h(t_i) =$$
$$= \varphi_u(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),t_i,s)h(t_i) + \alpha_1(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),\theta h(t_i),t_i)h(t_i,s),$$

где $\alpha(u(s),\theta h(s),s) \to 0$ и $\alpha_1(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),\theta h(t_1),t_i,s) \to 0$ равномерно при $\|h\|_{C_\mu[0,T]} \to 0$. Следовательно

$$F(u(s)+h(s),s,\omega s) - F(u(s),s,\omega s) =$$
$$= \int\limits_0^1 F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s) + \alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)d\theta,$$

$$\varphi(u(t_i)+h(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),t_i,s) - \varphi(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),t_i,s) =$$
$$= \int\limits_0^1 \varphi_u(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),t_i,s)h(t_i) + \alpha_1(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),\theta h(t_1),t_i,s)h(t_i)d\theta.$$

После этого получаем

$$H(u+h,\omega)-H(u,\omega)=h(t)-$$

$$-H(t)\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s-$$

$$-H(t)\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\mathrm{d}s\int\limits_0^{1}\Phi(t_i,s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)d\theta-$$

$$-H(t)\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi_u(u(t_i),t_i,s)h(t_i)\mathrm{d}s-$$

$$-H(t)\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{\omega t_i}\mathrm{d}s\int\limits_0^{1}\alpha_1(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),\theta h(t_1),t_i,s)h(t_i)d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{t}\Phi(t,s)F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s+\int\limits_0^{t}\mathrm{d}s\int\limits_0^{1}\Phi(t,s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)d\theta=$$

$$=D_uH(u,\omega)h+w_1(u,h)+w_2(u,h)+w_3(u,h),$$

где

$$D_uH(u,\omega)h(t)=h(t)+\int\limits_0^{t}\Phi(t,s)F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s-$$

$$-H(t)\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s-$$

$$-H(t)\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi_u(u(t_i),t_i,s)h(t_i)\mathrm{d}s,$$

$$w_1(u,h)=H(t)\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\mathrm{d}s\int\limits_0^{1}\Phi(t_i,s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)d\theta,$$

$$w_2(u,h)=H(t)\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{\omega t_i}\mathrm{d}s\int\limits_0^{1}\alpha_1(u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i),\theta h(t_1),t_i,s)h(t_i)d\theta,$$

$$w_3(u,h)=\int\limits_0^{t}\mathrm{d}s\int\limits_0^{1}\Phi(t,s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)d\theta.$$

Теперь докажем, что остатки $w_1(u,h)$, $w_2(u,h)$ и $w_3(u,h)$ обладают свойствами:

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0} \frac{\|\gamma(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0,$$

где $\gamma = w_1, w_2, w_3$. Для этого оценим w_3 в $C_\mu([0,T])$

$$\begin{aligned}
\|w_1(u,h)(t)\|_{C_\mu([0,T])} &= \sup_{t,s\in[0,T]} \left| \int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_0^1 \Phi(t,s)\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta \right| + \\
&+ \sup_{0\le t<s_1\le T} \frac{1}{|t-s_1|^\mu} \left| \int\limits_{s_1}^t \mathrm{d}s \int\limits_0^1 (\Phi(t,s)-\Phi(s_1,s))\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta \right| + \\
&+ \sup_{0\le t<s_1\le T} \frac{1}{|t-s_1|^\mu} \left| \int\limits_t^{s_1} \mathrm{d}s \int\limits_0^1 \Phi(s_1,s))\alpha(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}\theta \right| \le \\
&\le \sup_{t,s\in[0,T]} |\Phi(t,s)||\alpha(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|(T+1) + \\
&+ \sup_{s\in[0,T]} M_1|\alpha(u(s),\theta h(s),s)||h(s)| \le \\
&\le M_2 \sup_{s\in[0,T],\theta\in[0,1]} |\alpha(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|.
\end{aligned}$$

Из последней оценки, мы получим

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0} \frac{\|w_3(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0} \frac{\|w_1(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0,$$

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0} \frac{\|w_2(x,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Поэтому по определению 4, оператор $H(u,\omega)$ дифференцируем по Фреше в каждой точке $u(t)\in C_\mu([0,T])$ и

$$D_uH(u,\omega)h(t)=h(t)+\int\limits_0^t\Phi(t,s)F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s-$$

$$-H(t)\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)F_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s-$$

$$-H(t)\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^m P_i(\omega)\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi_u(u(t_i),t_i,s)h(t_i)\mathrm{d}s.$$

Напомним что здесь

$$F_1(u,t,\omega)=f(u+\overset{o}{\xi},t,\omega)+\chi(u+\overset{o}{\xi},t,\omega)+R(u+\overset{o}{\xi},t,\omega)-\Psi(\overset{o}{\xi},t)-\left[\frac{\partial\Psi(\overset{o}{\xi},t)}{\partial\xi}\right]u,$$

$$R(u+\overset{o}{\xi},t,\omega)=[(I+\mu_\omega)^{-1}-I]\Gamma(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t)+(I+\mu_\omega)^{-1}r(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t),$$

$$\Gamma(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t)=f(u+\overset{o}{\xi},t,\omega)+\chi(u+\overset{o}{\xi},t,\omega),$$

$$r(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t)=f(u+\overset{o}{\xi}+\beta,t,\omega t)-f(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t)-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(u+\overset{o}{\xi},s,\omega t)|_{s=t}+$$

$$+\sqrt{\omega}\left(\varphi(u+\overset{o}{\xi}+\beta,t,\omega t)-\varphi(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t)-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\chi(u+\overset{o}{\xi},t,\omega t)\right),$$

$$\mu_\omega(u+\overset{o}{\xi},t)=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u+\overset{o}{\xi},t,s)\mathrm{d}s.$$

Используя равенства (1.47), (2.68) и

$$\frac{\partial}{\partial u}(I+\mu_\omega(u,t))^{-1}=-[I+\mu_\omega(u,t)]^{-1}\frac{\partial\mu_\omega}{\partial u}(u,t)[I+\mu_\omega(u,t)]^{-1}\quad,$$

получаем формулу для $\frac{\partial F_1}{\partial u}$.

Заметим, что в точке (u,∞)

$$D_uH(u,\infty)h(t)=h(t)+\int\limits_0^t\Phi(t,s)\Psi_{1u}(u(s),s,\omega)h(s)\mathrm{d}s-$$

$$-H_1(t)\sum_{i=1}^m S_i\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)\Psi_{1u}(u(s),s)h(s)\mathrm{d}s,$$

где

$$H_1(t) = \Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{m} S_i\Phi(t_i)\right]^{-1},$$

$$\Psi_1(u,t) = \Psi(u+\overset{o}{\xi},t) - \Psi(\overset{o}{\xi},t) - \left[\frac{\partial\Psi(\overset{o}{\xi},t)}{\partial\xi}\right]u.$$

С помошью формулы (2.68), получаем представление для $\frac{\partial\Psi_1}{\partial u}$. Отметим теперь следующие очевидные равенства.

$$D_u H(0,\infty)h(t) = h(t), D_u\Psi_1(0,t) = 0.$$

Из леммы 11 в силу теоремы о неявной функции в банаховом пранстранстве следует существование таких положительных чисел δ^* и ω^*, что задача (2.70) при $\omega > \omega^*$ в шаре $||u||_{C_\mu([0,T])} \leq \delta^*$ имеет единственное решение u_ω, причем

$$\lim_{\omega\to\infty} ||u_\omega(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0. \tag{2.86}$$

Отсюда, в силу (2.69), следует предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} ||y_\omega - \overset{o}{\xi}||_{C_\mu([0,T])} = 0. \tag{2.87}$$

Из неравенства треугольника

$$||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} \leq ||x_\omega(t) - y_\omega(t)||_{C_\mu([0,T])} + ||y_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])},$$

равенства (2.87) и соотношения (2.60), связывающего x_ω с y_ω, следует при $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ указанное в теореме соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} ||x_\omega - \overset{o}{\xi}||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

Декларируемая в теореме относительная единственность решения x_ω при больших ω почти очевидна. Действительно, пусть δ^* и ω^*– те же числа, что фигурируют предложении, содержащем равенство (2.86). Из равенства (2.60) следует существования таких δ_0 и $\omega_0(\geq \omega^*)$, что при $\omega > \omega_0$ для каждого решения x_ω задачи (2.51), удовлетворяющего оценке $\|x_\omega\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_0$, найдется решение y_ω задачи (2.62), удовлетворяющее неравенству $\|y_\omega\|_{C_\mu([0,T])} < \delta^*$, причем двум различным решениям $x_{\omega 1}$ и $x_{\omega 2}$ отвечают различные решения $y_{\omega 1}$ и $y_{\omega 2}$.

Теорема 5 доказана.

§3.Иллюстративные примеры

Пример к первому параграфу

На отрезке $[0, 2]$ рассмотрим двухточечную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y^2\exp(t) - 2y\exp(2t) + \exp(3t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = y + (x + \sin(t))\left(\cos(\omega t)\sin^2(\omega t)\right) \\ x(0) + \dfrac{2}{exp(2)}y(2) = 1 \\ y(0) + \dfrac{1}{exp(2)}x(2) = 0, \omega \gg 1. \end{cases} \tag{2.88}$$

Здесь $\varphi = f - F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + y^2\exp(t) - 2y\exp(2t) + \exp(3t) \\ y \end{pmatrix}$.

Преобразуя краевые условия в системе (2.88), получим следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y^2\exp(t) - 2y\exp(2t) + \exp(3t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = y + (x + \sin(t))\left(\cos(\omega t)\sin^2(\omega t)\right) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{exp(2)} \\ \frac{1}{exp(2)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega \gg 1. \end{cases} \tag{2.89}$$

В системе (2.89)

1. вектор-функция

$$f = \begin{pmatrix} x + y^2\exp(t) - 2y\exp(2t) + \exp(3t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ y + (x + \sin(t))\left(\cos(\omega t)\sin^2(\omega t)\right) \end{pmatrix}$$

очевидно непрерывна на множестве $\Pi = \{(w, t, \tau), w \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 2], \tau \in [0, \infty)\}$ где $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Матрица-функция

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \begin{pmatrix} 1 & 2y\exp(t) - 2\exp(2t) \\ \cos(\omega t)\sin^2(\omega t) & 1 \end{pmatrix}$$

очевидно непрерывна на множестве $\Pi = \{(w,t,\tau), w \in \mathbb{R}^2, t \in [0,2], \tau \in [0,\infty)\}$.

3. Равномерно относительно $(w,t) \in \Omega \times [0,2]$ где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ некоторое ограниченное множество, вектор-функция f имеет среднее значение по τ, то есть $\langle f \rangle_\tau = (x + y^2 \exp(t) - 2y\exp(2t) + \exp(3t), y)$

4. Вектор-функции f равномерно ограничена на множестве $\Pi = \{(w,t,\tau), w \in \mathbb{R}^2, t \in [0,2], \tau \in [0,\infty)\}$.

5. Матрицы-функция $\frac{\partial f}{\partial w}$ равномерно ограничены на множестве $\Pi = \{(w,t,\tau), w \in \mathbb{R}^2, t \in [0,2], \tau \in [0,\infty)\}$. Следовательно вектор-функция f удовлетворяют условию липшица по w.

6. усредненная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u + v^2\exp(t) - 2v\exp(2t) + \exp(3t) \\ \dfrac{dv}{dt} = v \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{exp(2)} \\ \frac{1}{exp(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(2) \\ v(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega \gg 1. \end{cases} \tag{2.90}$$

7. Система (2.90) имеет решение $z^0 = \begin{pmatrix} -\exp(t) \\ \exp(t) \end{pmatrix}$.

8. В системе (2.90) обозначим через

$$H(z) = \begin{pmatrix} u + v^2\exp(t) - 2v\exp(2t) + \exp(3t) \\ v \end{pmatrix},$$

а через

$$A(t) = \frac{\partial H}{\partial z}(z^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

9. Рассмотрим систему

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z. \tag{2.91}$$

10. Матрицант системы (2.91) является

$$\Phi(t) = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(t) \end{pmatrix}.$$

11. Теперь проверим следующее условие :

$\Delta = det\,[A + B\Phi(2)] \neq 0$:

$$A + B\Phi(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\exp(2)} \\ \frac{1}{exp(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(2) & 0 \\ 0 & \exp(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены 4. Следавотельно, для любого $\mu \in (0,1)$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (2.88) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0,2])$–окрестности вектор-функции $z^0 = \begin{pmatrix} -\exp(t) \\ \exp(t) \end{pmatrix}$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - z^0(t)||_{C_\mu([0,2])} = 0$.

Пример ко второму параграфу

На отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ рассмотрим многоточечную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + yz\sin(\omega t) + \sqrt{\omega}\cos(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - xcos(y)\sin(\omega t) + \sqrt{\omega}(x + z + \sin(t))\left(\cos(\omega t)\right) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{2}(y + \cos(t)) + \cos(2\omega t) + \sqrt{\omega}(y + \cos(t))\left(\cos(3\omega t)\right) \\ x(0) + y(\dfrac{\pi}{6}) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}z(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{\omega} \\ \sqrt{3}x(\dfrac{\pi}{6}) + y(0) - y(\dfrac{\pi}{6}) - 2z(\dfrac{\pi}{6}) = 0 \\ -\sqrt{3}x(\dfrac{\pi}{6}) + y(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{\omega}, \omega \gg 1. \end{cases} \tag{2.92}$$

Преобразуя краевые условия в системе (2.92), получим следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + yz\sin(\omega t) + \sqrt{\omega}\cos(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - xcos(t)\sin(\omega t) + \sqrt{\omega}(x + z + \sin(t))\left(\cos(\omega t)\right) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{2}(y + \cos(t)) + \cos(2\omega t) + \sqrt{\omega}(y + \cos(t))\left(\cos(3\omega t)\right) \\ A\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} x(\frac{\pi}{6}) \\ y(\frac{\pi}{6}) \\ z(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} x(\frac{\pi}{2}) \\ y(\frac{\pi}{2}) \\ z(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \\ \\ 0 \\ \\ \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}, \omega \gg 1, \end{cases} \tag{2.93}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В системе (2.93)

1. вектор-функции $f = \begin{pmatrix} y + yz\sin(\omega t) \\ -x - xcos(t)\sin(\omega t) \\ \frac{1}{2}(y + \cos(t)) + \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ (x+z+\sin(t))\,(\cos(\omega t)) \\ (y+\cos(t))\,(\cos(3\omega t)) \end{pmatrix}$$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ непрерывны

на множестве $\Pi = \{(w,t,\tau), w \in \mathbb{R}^3, t \in [0,\frac{\pi}{2}], \tau \in [0,\infty)\}$ где $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Нетрудно заметить, что вектор-функции f и φ удовлетворяют условиям теоремы 5.

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(w,t,\tau) \equiv \tfrac{\partial \varphi}{\partial w}(w,t,\tau) \left[\int_0^\tau \begin{pmatrix} \cos(s) \\ (x+z+\sin(t))\,(\cos(s)) \\ (y+\cos(t))\,(\cos(3s)) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \right] -$$

$$- \qquad \tfrac{\partial \varphi}{\partial w}(w,t,\tau) \left[\langle \int_0^\tau \begin{pmatrix} \cos(s) \\ (x+z+\sin(t))\,(\cos(s)) \\ (y+\cos(t))\,(\cos(3s)) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \rangle_\tau \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\tau & 0 & \cos\tau \\ 0 & \cos(3\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\tau \\ (x+z+\sin(t))\sin\tau \\ \frac{1}{3}(y+cos(t))\sin(3\tau) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ sin\tau\cos\tau + \frac{1}{3}(y+\cos(t))\sin 3\tau\cos\tau \\ (x+z+\sin(t))\sin(\tau)\cos(3\tau) \end{pmatrix}.$$

4. усредненная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{2}(y+\cos(t)) \\ A_1 \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} x(\frac{\pi}{6}) \\ y(\frac{\pi}{6}) \\ z(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} x(\frac{\pi}{2}) \\ y(\frac{\pi}{2}) \\ z(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.94}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Система (2.94) имеет решение $z^0 = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

6. В системе (2.94) обозначим через $P(w) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ \frac{1}{2}(y + \cos(t)) \end{pmatrix}$, а через $A(t) = \frac{\partial P}{\partial w}(z^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, где $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

7. Рассмотрим систему

$$\frac{dw}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} w \tag{2.95}$$

8. Найдем матрицант системы (2.95). При $t \geq 0$, матрицант системы (2.95) имеет вид $\Phi(t) = \exp(\int_0^t A d\tau) = \exp(At), \Phi(0) = I$, где I– единичная матрица.

9. Вычислим матрицу $\exp(At)$ при $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   Сначала найдем собственные значения матрицы A, то есть решим систему уравнений

   $\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Итак, мы нашли собственные значения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$.

10. Теперь определим собственные векторы V_1, V_2, V_3 : для $\lambda_{1,2,3}$ нам нужно найти три линейно независимых собственных векторов.

11. Итак, для собственного значения $\lambda_1 = 0$ определим собственный вектор $V_1 = (V_{11}, V_{21}, V_{31})^T$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0.\ \text{Мы нашли } V_1 = (0, 0, 1)^T.$$

12. Для собственного значения $\lambda_2 = -i$ определим собственный вектор $V_2 = (V_{12}, V_{22}, V_{32})^T$:

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = 0.\ \text{Мы нашли } V_2 = (1, -i, \tfrac{1}{2})^T.$$

13. Для собственного значения $\lambda_2 = i$ определим собственный вектор $V_3 = (V_{13}, V_{23}, V_{33})^T$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} = 0.\ \text{Мы нашли } V_3 = (1, i, \tfrac{1}{2})^T.$$

14. Теперь составим матрицу H из найденных собственных векторов V_1, V_2, V_3 :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет 3 различных собственных значения, поэтому A диагонализируема.

15. Теперь найдем форму Жордана J по формуле

$$J = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

16. Далее формируем матрицу $\exp(Jt)$:

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-it) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(it) \end{pmatrix}.$$

17. Вычислим обратную матрицу H^{-1}. Сначало вычислим определитель $\det(H) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix} = 2i.$

Далее найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы H :

$H_{11} = \begin{vmatrix} -i & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -i$, $H_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = i$, $H_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = i$, $H_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$, $H_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$, $H_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$, $H_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix} = 2i$, $H_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i \end{vmatrix} = 0$, $H_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = 0$.

Выпишем матрицу, сопряженную к H : $H^* = \begin{pmatrix} -i & i & i \\ 0 & -1 & 1 \\ 2i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Траспонировав матрицу H^* и разделив каждый ее элемент на $|H|$, получаем :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Наконец, матричная экспонента $\exp(At)$:

$$\exp(At) = H\exp(Jt)H^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-it) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\exp(-it) + \frac{1}{2}\exp(it) & -\frac{1}{2i}\exp(-it) + \frac{1}{2i}\exp(it) & 0 \\ -\frac{i}{2}\exp(-it) + \frac{i}{2}\exp(it) & \frac{1}{2}\exp(-it) + \frac{1}{2}\exp(it) & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\exp(-it) + \frac{1}{4}\exp(it) & -\frac{1}{4i}\exp(-it) + \frac{1}{4i}\exp(it) & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу Эйлера получим

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t & \frac{1}{2}\sin t & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Теперь проверим следующее условие :

$\Delta = det\left[A_1 + B_1\Phi(\frac{\pi}{6}) + C_1\Phi(\frac{\pi}{2})\right] \neq 0$. Вычислим сумму:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+2}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{6-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}+2}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{6-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены 5. Следавотельно, для любого $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (2.92) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])$–окрестности вектор-функции $z^0 = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega \to \infty} ||x_\omega(t) - z^0(t)||_{C_\mu(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])} = 0$.

Заключение к главе 2

Во второй главе, метод усреднения обоснован для нормальных систем нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми и многоточечными краевыми условиями (число точек не менее двух) на конечном отрезке. Рассмотрены два типа систем:

1. Системы, правые части которых равномерно ограничены при неограниченно растущей частоте осцилляций;

2. Системы, содержащие большие слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций.

Приведены два иллюстративных примера.

Глава III.Усреднение высокочастотных систем ОДУ при наличии в правой части слагаемого вида $\omega^\alpha\varphi(x,t,\omega t)$ при $\alpha = \frac{3}{4}$

1°. **Формулировка результатов (теорема 6).**

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in D, \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \omega^{\frac{3}{4}}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T] \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)x(t_i) = a(\omega). \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь m, n натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i = 1,\dots,m$ – квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \dots < t_m = T$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$,$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q.

   Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ – якобиева матрица, то есть $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial\varphi_i(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j}(x,t,\tau)\right)_{k,i,j=1}^{n}$ – матрица размера $n \times n^2$, где k – номер строки.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ – 2π – периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть равномерно относительно $(x,t) \in D$ выполняется равенство

$$< \varphi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x,t,\tau)d\tau = 0. \tag{3.2}$$

3. Будем считать, что наряду с равенством (3.2) справедливо равенство

$$\langle\frac{\partial\varphi(x,t,\tau)}{\partial x}\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi(x,t,\tau)}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^\tau \varphi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$

Вектор-функции $\chi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \chi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(x,t,\tau), \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x}(x,t,\tau), \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$$

определены и непрерывны на множестве Q.

4. Будем предполагать, что вектор-функция $\chi(x,t,\tau)$ имеет нулевое среднее, то есть равномерно относительно $(x,t) \in D$ справедливо равенство:

$$< \chi(x,t,\tau) >_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi(x,t,\tau)d\tau = 0. \tag{3.4}$$

5. Будем считать, что наряду с равенством (3.4) справедливо равенство

$$\langle \frac{\partial \chi(x,t,\tau)}{\partial x}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \chi(x,t,\tau)}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.5}$$

6. Далее определим вектор-функцию

$$\Theta(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \chi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^\tau \chi(x,t,s)\mathrm{d}s - \langle \int\limits_0^\tau \chi(x,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$

7. Для любых точек (x,t_1,τ) и $(x,t_2,\tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$\|z(x,t_2,\tau) - z(x,t_1,\tau)\| \le \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$ а $\gamma(r)$, $r \ge 0$ – непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

8. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

9. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t}(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x.

10. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t)\in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T (f(x,t,\tau)+\Theta(x,t,\tau))\,\mathrm{d}\tau=\Psi(x,t). \tag{3.6}$$

11. Мы будем считать, что наряду с равенством (3.6) справедливо равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(\frac{\partial f(x,t,\tau)}{\partial x}+\frac{\partial\Theta(x,t,\tau)}{\partial x}\right)\mathrm{d}\tau=\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}.$$

12. Для некоторых квадратных матриц S_i, $0\le i\le m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega)-S_i\|\to 0$, $|a(\omega)-a_0|\to 0$ при $\omega\to\infty$.

13. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases}\frac{d\xi}{dt}=\Psi(\xi,t), t\in[0,T]\\ \sum\limits_{i=1}^m S_i\xi(t_i)=a_0.\end{cases} \tag{3.7}$$

14. Мы будем предполагать, что задача (3.7) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t\in[0,T]$, и существует [11] такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t)\in\Omega_0$ при $t\in[0,T]$.

15. Справедливо соотношение:

$$\Delta=det\left[\sum_{i=1}^m S_i\Phi(t_i)\right]\ne 0,$$

где $\Phi(t)$ – матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right]x.$$

[11] Предположение о существовании указанной подобласти Ω_0 не является принципиальным, а принято лишь для упрощения дальнейшего изложения.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любого $\mu \in (0, 1/2)$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (3.1) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0, T])$–окрестности вектор-функции $\overset{o}{\xi}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.*

2°. Доказательство теоремы 6.

Схема доказательства теоремы следующая. Вначале, после двухкратного применения замены переменных типа классической замены Н.М.Крылова-Н.Н.Боголюбова (см., например [5, 30]), в уравнении (3.1) избавимся от больших слагаемых; затем осуществим переход к интегральному уравнению и, наконец, к последнему применим теорему о неявной функции в банаховом пространстве, из которой и будут следовать утверждения теоремы.

Предварительно отметим два простых вспомогательных результата.

В силу непрерывности матрица-функции $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y, t, \tau)$ и 2π – периодичности ее по τ с нулевым средним найдется такое $\omega_1 > 0$[12], что для всех $(y, t) \in \Omega_0 \times [0, T] \equiv D_0$ при $\omega > \omega_1$ выполняется оценка

$$\left\| \frac{1}{\omega^{\frac{1}{4}}} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y, t, \tau) \mathrm{d}\tau \right\| < \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим теперь вектор-функцию $\alpha(y, t, \tau)$, которая определена на множестве $Q_0 = D_0 \times [0, \infty)$, 2π – периодична по τ с нулевым средним и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(y, t, \tau) = \varphi(y, t, \tau). \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) согласно лемме 9 имеет единственное 2π – периодическое по τ с нулевым средним решение

$$\alpha(y, t, \tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(y, t, s)\mathrm{d}s - \langle \int\limits_0^\tau \varphi(y, t, s)\mathrm{d}s \rangle_\tau. \tag{3.10}$$

[12] В данной главе символом ω_1 мы обозначаем, вообще говоря, различные достаточные большие числа.

Поскольку вектор-функции $\varphi(y,t,\tau)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\tau)$ непрерывны на множестве Q_0 и 2π - периодичны по τ с нулевым средним, то в силу (3.10) на этом множестве вектор-функции $\alpha(y,t,\tau)$ и $\frac{\partial\alpha}{\partial y}(y,t,\tau)$ ограничены .

Обозначим через S_0 множество непрерывно - дифференцируемых вектор-функций $y : [0,T] \to \Omega_0$. В задаче (3.1) при достаточно больших ω сделаем замену переменных

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{4}}}\alpha(y(t),t,\omega t) \equiv y(t) + \beta(y,t,\omega), y \in S_0. \tag{3.11}$$

Из теоремы о неявной функции в банаховом пространстве следует существование таких содержащихся в S_0 шаров S_1 и S_2 с центром $\xi_0(t)$ в $C[0,T]$ - пространстве и таких положительных чисел ω_1 и ω_2, что при $\omega > \omega_1$ соотношение (3.11) каждому $x \in S_0$ ставит в соответсвие единственный вектор $y \in S_2$, а при $\omega > \omega_2$ каждому $y \in S_2$ ставит в соответствие единственый вектор $x \in S_1$. При этом из соотношения $x \in C^1([0,T])$ следует $y \in C^1([0,T])$, и наоборот. Производная y', например, может быть определена из уравнения

$$\left[I + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{4}}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] y' = x' - \frac{1}{\omega^{\frac{1}{4}}}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1}(y(t),s_1,\omega t)|_{s_1=t} - \omega^{\frac{3}{4}}\frac{\partial\alpha}{\partial s_2}(y(t),t,s_2)|_{s_2=\omega t},$$

$\omega > \omega_1$, где I – единичная матрица.

Задача (3.1) в результате замены переменных (3.11) примет вид :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [f(y,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\chi(y,t,\omega t)] + \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)\left[y(t_i) + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{4}}}\left(\int_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s - \langle\int_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right)\right] \\ = a(\omega), \omega \gg 1, \end{cases} \tag{3.12}$$

где многоточием обозначена сумма малых слагаемых при $\omega \gg 1$, $\chi(y,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\tau)\left[\int_0^{\tau}\varphi(y,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int_0^{\tau}\varphi(y,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right]$.

В силу непрерывности вектор-функция $\frac{\partial\chi}{\partial y}(y,t,\tau)$ и 2π – периодичности ее по τ с нулевым средним найдется такое $\omega_1 > 0$, что для всех $(z,t) \in \Omega_0 \times [0,T] \equiv D_0$ при $\omega > \omega_1$ выполняется оценка

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial \chi}{\partial y}(y,t,\tau)\mathrm{d}\tau\right\| < \frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим теперь вектор-функцию $\zeta(z,t,\tau)$, которая определена на множестве $Q_0 = D_0\times[0,\infty)$, 2π – периодична по τ с нулевым средним и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}(z,t,\tau) = \chi(z,t,\tau). \tag{3.14}$$

Уравнение (3.14) согласно лемме 9 имеет единственное 2π–периодическое по τ с нулевым средним решение

$$\zeta(z,t,\tau) = \int\limits_0^{\tau}\chi(z,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int\limits_0^{\tau}\chi(z,t,s)\mathrm{d}s\rangle_{\tau}. \tag{3.15}$$

Поскольку вектор-функция $\chi(z,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial\chi}{\partial z}(z,t,\tau)$ непрерывны на множестве Q_0 и 2π -периодичны по τ с нулевым средним, то в силу (3.15) на этом множестве вектор-функция $\zeta(z,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial\zeta}{\partial z}(z,t,\tau)$ ограничены .

Обозначим через S_0 множество непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $z:[0,T]\to\Omega_0$. В задаче (3.12) при достаточно больших ω сделаем замену переменных

$$y(t) = z(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\zeta(z(t),t,\omega t) \equiv z(t) + \beta_1(z,t,\omega), z\in S_0. \tag{3.16}$$

Задача (3.12) в результате замены переменных (3.16) примет вид

$$\begin{cases}[I+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\zeta}{\partial z}]\frac{dz}{dt} = [f(z,t,\omega t)+\Theta(z,t,\omega t)] + f(z+\beta_1,t,\omega t) - f(z,t,\omega t)\\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\zeta}{\partial s}(z,s,\omega t)|_{s=t} + \sqrt{\omega}\left(\chi(z+\beta_1,t,\omega t) - \chi(z,t,\omega t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Theta(z,t,\omega t)\right)\\ \equiv \Gamma(z,t,\omega t) + r(z,t,\omega)\\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)\left[z(t_i)+\beta_1(z(t_i),t_i,\omega)+\beta(y(t_i),t_i,\omega)\right]\\ = a(\omega), \omega\gg 1,\end{cases}$$

$$(3.17)$$

где $\Gamma(z,t,\tau) = f(z,t,\tau) + \Theta(z,t,\tau)$ и

$$\Theta(z,t,\tau) \equiv \frac{\partial \chi}{\partial z}(z,t,\tau)\left[\int_0^\tau \chi(z,t,s)\mathrm{d}s - \langle\int_0^\tau \chi(z,t,s)\mathrm{d}s\rangle_\tau\right].$$

Учитывая неравенство (3.13), от задачи (3.17) перейдем к задаче

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \left(I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^{-1}\left[\Gamma(z,t,\omega t) + r(z,t,\omega)\right] \\ \equiv \Gamma(z,t,\omega t) + R(z,t,\omega) \equiv F(z,t,\omega) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega)\left[z(t_i) + \beta_1(z(t_i),t_i,\omega) + \beta(y(t_i),t_i,\omega)\right] \\ = a(\omega). \end{cases} \tag{3.18}$$

Здесь

$R(z,t,\omega) = (I+\mu_\omega)^{-1}\left[\Gamma(z,t,\omega t) + r(z,t,\omega)\right] - \Gamma(z,t,\omega t),$

где

$$\mu_\omega(z,t,\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\omega t}\frac{\partial \chi}{\partial z}(z,t,s)\mathrm{d}s,$$

$(z,t) \in D_0$.

Лемма 12. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_1 > 0$, такое что при всех $(z,t) \in D_0$ и $\omega > \omega_1$ для вектор- функции R выполняются неравенства:*

$$|R(z,t,\omega)| < \varepsilon, \tag{3.19}$$

$$\left\|\frac{\partial R}{\partial z}(z,t,\omega)\right\| < \varepsilon. \tag{3.20}$$

Доказательство.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$R(z,t,\omega) = R_1(z,t,\omega) + R_2(z,t,\omega),$$

где

$$R_1(z,t,\omega) = [(I+\mu_\omega)^{-1} - I]\Gamma(z,t,\omega t),$$
$$R_2(z,t,\omega) = (I+\mu_\omega)^{-1} r(z,t,\omega t).$$

В силу неравенства (3.13), очевидного равенства

$$(I+\mu_\omega)^{-1} - I = -\mu_\omega (I+\mu_\omega)^{-1} \tag{3.21}$$

и условий теоремы 6 найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(z,t) \in D_0$, выполняется неравенство

$$|R_1(z,t,\omega)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.22}$$

Перейдем к оценке слагаемого R_2. Поскольку вектор-функция $f(z,t,\tau)$ в области Q_0 удовлетворяет равномерному условию Липшица по z, а вектор-функция $\zeta(z,t,\tau)$ равномерно ограничена, то найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(z,t) \in D_0$ справедливо неравенство

$$\left|(I+\mu_\omega)^{-1}\left[f(z+\beta_1,t,\omega t) - f(z,t,\omega t)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее получим соотношения:

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{\omega}\left(\chi(z+\beta_1,t,\omega t) - \chi(z,t,\omega t) - \frac{\partial\chi}{\partial z}\beta_1\right)\right| \\
&= \sqrt{\omega}\left\|\int_0^1 \frac{\partial\chi}{\partial z}(z+\theta\beta_1,t,\omega t)d\theta\beta_1 - \frac{\partial\chi}{\partial z}(z,t,\omega t)\beta_1\right\| \\
&\leqslant \left\|\int_0^1 \left[\frac{\partial\chi}{\partial z}(z+\theta\beta_1,t,\omega t) - \frac{\partial\chi}{\partial z}(z,t,\omega t)\right]d\theta\right\|\sqrt{\omega}|\beta_1|.
\end{aligned}$$

Поскольку матрица - функция $\frac{\partial\chi}{\partial z}(z,t,\tau)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица по z на Q_0, то существует такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(z,t) \in D_0$ выполняется неравенство

$$\left|\sqrt{\omega}\,(I+\mu_\omega)^{-1}\left[\chi(z+\beta_1,t,\omega t) - \chi(z,t,\omega t) - \frac{\partial\chi}{\partial z}\beta_1\right]\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Очевидно, что в силу неравенства (3.13) и ограничености $\frac{\partial\zeta}{\partial s}(z,s,\tau)|_{s=t}$ на Q_0 существует такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(z,t) \in D_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(I+\mu_\omega\right)^{-1}\frac{\partial\zeta}{\partial s}(z,s,\tau)|_{s=t}\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $(z,t) \in D_0$ и $\omega > \omega_1$ справедливо неравенство

$$|R_2(z,t,\omega)| < \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{3.23}$$

Итак, согласно (3.22), (3.23) существует (достаточно большое) число ω_1, такое что при всех $\omega > \omega_1$ и $(z,t) \in D_0$ выполняется неравенство (3.19). Неравенство (3.20) доказывается аналогично, поэтому мы приводить его не будем.

Лемма 12 доказана.

Теперь заметим, что после замены переменных (3.11), благодаря которой мы перешли к уравнению (3.12), в силу условий (3.4), заключительная часть доказательства теоремы 6 проводится аналогично доказательству теоремы 5 предыдущей главы.

Теорема 6 доказана.

Заключение к главе 3

В третьей главе метод усреднения обоснован для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями при наличии в правой части системы большого слагаемого вида $\omega^{\alpha}\varphi(x,t,\omega t)$ при $\alpha = \frac{3}{4}$. Для таких систем при обосновании метода усреднения потребовалось двукратное применение замены переменных типа классической замены Н.М.Крылова -Н.Н.Боголюбова, что позволило избавиться в системе от больших слагаемых, а затем уже применить к полученной задаче теорему о неявных функциях.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями (краевые задачи) и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями.

2. Метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций.

3. Метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с многоточечными (число точек не менее двух) условиями и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями.

4. Метод усреднения обоснован для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями при наличии больших слагаемых, пропорциональных степени $\frac{1}{2}$ частоты.

5. Метод усреднения обоснован для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиям и большими слагаемыми, пропорциональными степени $\frac{3}{4}$ частоты.

В заключение работы я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя доктора физико-математических наук В.Б.Левенштама за доверие, которое он оказал мне, согласившись руководить этой диссертационной работой, за его многочисленные советы и за все время, которое он посвятил руководству этим исследованием.

Список литературы

1. Абоод, Х.Д. Асимптотическое интегрирование задачи о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми: Дис. канд. физ.-мат. наук/Х.Д.Абоод — Ростов-на-Дону. — 2005. — 103 с.

2. Байнов, Д. Д. Об одном варианте метода усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного типа/Д. Д. Байнов, С. Д. Милушева // Archivum Mathematicum. — 1975. — Vol.11. —No.3. — С. 169–173.

3. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений/ Ю. Н. Бибиков. — Москва: Высшая школа, Учеб.пособие для университетов, 1991. — 303 с.

4. Бигун, Я. И. Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием/ Я. И. Бигун, А. М. Самойленко //Дифференц. уравнения.— 1999. — 35:1. — С. 8—14.

5. Боголюбов, Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике/ Н. Н. Боголюбов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945. — 139 с.

6. Боголюбов, Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике/Н. Н. Боголюбов// Сб. ин-та строит. мех, АН УССР. — 1950. — Т. 14. — С. 9–34.

7. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — Москва: Наука, 1974. — 503 с.

8. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в нелинейной механике/Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова // История отечественной математики. Киев. Наукова думка. — 1970. — Т. 4, Кн. 2. — С. 264—290.

9. Бурд, В. Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний/В. Ш. Бурд. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — 420 с.

10. Ван-Дер-Поль, Б. Нелинейная теория электрических колебаний/Б. Ван-Дер-Поль. — М.: Связьтехизат. Пер. с англ. с предисл. С. Э. Хайкина. — 1935. — 140 с.

11. Волосов, В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений /В. М. Волосов //Успехи математических наук. — 1962. — № 6 (108). — Т. 17. — С. 3–126.

12. Волосов, В. М. О методе усреднения /В. М. Волосов// Докл. АН СССР. — 1961. — 137:1. — С. 21—24.

13. Волосов, В. М. Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. — М.: изд-во. МГУ, 1971. — 507 с.

14. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. — Москва:. Мир, 1964. — 430 с.

15. Журавлев, В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д.М. Климов. — М.: Наука, 1988. — 328 с.

16. Капикян, А. К. Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми / А. К. Капикян, В. Б. Левенштам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — № 48:11. — С. 2024—2041.

17. Князев, А. В. Метод усреднения в интегральных уравнениях и обобщенный метод Боголюбова / А. В.Князев, Е. И. Скворцов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1970. — Том 10, номер 6. — С. 1367—1374.

18. Константинов, М. М. О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам / М. М. Константинов, Д. Д. Байнов // BULL.MATH.de la Soc.Sci.Math. de la R.S.de la Roumanie. — 1974. — Том 18(66), номер 3/4. — С. 307—310.

19. Крылов, Н. М. Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — Киев.: Изд-во. АН УССР, 1937. — 353 с.

20. Крылов, Н. М. Новые методы нелинейной механики / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — Издательство.ГТТИ. Переплет коленкоровый, 1934. — 243 с.

21. Левенштам, В. Б. Асимптотические задачи о восстановлении высокочастотного источника волнового уравнения / В. Б. Левенштам // Матем. заметки. — 2022. — № 111:4. — С. 624—630.

22. Левенштам, В. Б. Асимптотическое интегрирование линейной параболической задачи с высокочастотными коэффициентами в критическом случаев критическом случае / В. Б. Левенштам // Матем. заметки. — 2014. — № 96:4 . — С. 522—538.

23. Левенштам, В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми / В. Б. Левенштам. — Ростов н/Д:. Изд-во. ЮФУ, 2008. — 368 с.

24. Левенштам, В. Б. Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи / В. Б. Левенштам // Матем. заметки. — 2020. — № 107:3. — С. 412—425.

25. Левенштам, В.Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами / В. Б. Левенштам // Дифференц. уравн. — 2005. — Т. 41, №6. — С. 761–770.

26. Левенштам, В. Б. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями / В. Б. Левенштам, П. Е. Шубин // Матем. заметки. — 2016. — Том 100, выпуск 1. — С. 94—108.

27. Левенштам, В. Б. Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами . Задача о периодических решениях / В. Б. Левенштам, Г. Л. Хатламаджиян // Изв. вузов. Математика. — 2006. — №6. — С. 35–47.

28. Ломов, С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

29. Мандельштам, Л. И. Обоснование одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений / Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1934. — Т.4, — №2. — С.117–122.

30. Митропольский, Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний / Ю. А. Митропольский. — М.: Наука, 1964. — 431 с.

31. Митропольский, Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. — К.: Наукова думка, 1971. — 440 с.

32. Найфэ, А. Х. Введение в методы возмущений / А. Х. Найфэ. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 535 с.

33. Найфэ, А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. — М.: Мир, 1976. — 456 с.

34. Пуанкаре, А. (Poincaré H.) Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste / А. Пуанкаре. — Paris:. Gauthier-Villars et Fils. — Tome 1, 1892. — 408 p.

35. Розо, М. Нелинейные колебания и теория устойчивости / М. Розо. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

36. Самойленко, А. М. Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика / А. М. Самойленко // УМН. — 1994. — №49:5(299), 1994. — С. 103 -–146.

37. Самойленко, А. М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем / А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 1987. — №23:2. — С. 267—278.

38. Самойленко, А. М. Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк // Дифференц. уравнения. —1974. —№ 10:11. — С. 2001—2009.

39. Самойленко, А. М. Метод усреднения в некоторых краевых задачах / А. М. Самойленко, Р. И. Петришин // Дифференц. уравнения. — 1989. — № 25:6. — С. 956—964.

40. Самойленко, А. М. Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале / А. М. Самойленко, А. Н. Старжицкий // Дифференц. уравнения. — 2006. — № 42:4. — С. 476—482.

41. Симоненко, И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости / И. Б. Симоненко. — Ростов-н.Д.: Изд-во. РГУ, 1989. — 112 с.

42. Симоненко, И. Б. Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений / И. Б. Симоненко // Матем. сб. — 1970. — Том 81(123). — Номер 1. — С. 53–61.

43. Филатов, А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях /А. Н. Филатов. — Ташкент: Фан. АН УзССР. Ин-т кибернетики с ВЦ, 1971. — 279 с.

44. Филатов, А. Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А. Н. Филатов, Л. В. Шарова. — Москва:.Издательство. Наука, 1976. — 152 с.

45. Хапаев, М. М. Усреднение в теории устойчивости. Исследование резонансных многочастотных систем / М. М. Хапаев . — М.: Издательство. Наука, 1986. — 192 с.

46. Эйлер, Л. Новая теория движения Луны / Л. Эйлер. Перевод с латинского языка. — Л.: Изд. АН СССР, 1934. — 204 с.

47. Юдович, В. И. Вибродинамика систем со связями / В. И. Юдович // Докл. РАН. — 1997. — Т. 354, № 5. — С. 622–624.

48. Clairaut, A. C. Mémoire sur l'orbite apparente du soleil autour de la terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la lune et des planètes principales / A. C. Clairaut // Mémoires de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale des Sciences. — 1754. — №9. — P. 521–564.

49. Fatou, P. Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période / P. Fatou. Bull. Soc. Math. — 1928. — 56 p.

50. Ferdinand, Verhulst. Methods and Applications of Singular Perturbations, boundary layers and multiple timescale dynamics / Verhulst. Ferdinand. — Berlin, Heidelberg, New-York.: Springer–Verlag. — volume 50 of Texts in Applied Mathematics, 2005. — 324 p.

51. Holmes, Mark. H. Introduction to perturbation methods / Mark. H. Holmes. — Vol. 20. /Springer Science and Business Media, 2012. — 438 p.

52. Ivleva, N. Asymptotic analysis of the generalized convection problem / N. Ivleva, V. Levenshtam // Eurasian Math. J. — 2015. — № 6:1. — P. 41—55.

53. Joseph-Louis, Lagrange. Mécanique Analytique / Lagrange. Joseph-Louis. — Paris.: Edition Albert Blanchard. — 1788.

54. King, A. C. Differential Equations. Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial / A. C. King, J. Billingham , S. R. Otto. — Cambridge University Press. — 2003. — 541 p.

55. Murdock, James. A. Perturbations: theory and methods / James. A. Murdock. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1999. — 505 p.

56. Pierre-Simon, de Laplace. Traité de mécanique céleste / de Laplace. Pierre-Simon. — Paris.: Duprat. Courcier-Bachelier. — Volume 1-5. — 1779.

57. Sanders, J. A. Averaging methods in nonlinear dynamical systems / J. A. Sanders, F. Verhulst. — V. 59. / Springer-Verlag, Apllied Mathematical Sciences, 1985. — 247 p.

58. Van der Pol, B. Nonlinear theory of electric oscillations / B. Van der Pol //Proc. IRE. — 1934. — Vol. 22. — P. 1051–1086.

59. Yacobi. Mémoire sur l'élimination des noeuds dans le probléme des trois corps / Yacobi // Journal de mathématiques pures et appliquées première série. — 1844. — Tome 9. — P. 313–333.

60. Бигириндавйи, Д. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями / Д. Бигириндавйи // Вестник ВГУ. — 2022. — Серия.Физика.Математика. — № 3. — С. 41–56.

61. Бигириндавйи, Д. Обоснование принципа усреднения для системы быстро осциллирующих оду с краевыми условиями / Д. Бигириндавйи // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020. XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, г. Симферополь, 20 – 26 сентября 2020. — С. 93–94.

62. Бигириндавйи, Д. Метод усреднения для нормальной системы ОДУ с краевыми условиями / Д. Бигириндавйи, В. Б. Левенштам //Электронный научный журнал «Вестник молодёжной науки России». — Выпуск №4. — 2019.

63. Бигириндавйи, Д. Принцип усреднения для системы быстро осциллирующих ОДУ с краевыми условиями / Д. Бигириндавйи, В. Б. Левенштам // Вестник ВГУ. — 2020. — Серия. Физика. Математика. — № 1. — С. 31–37.

64. Бигириндавйи, Д. Усреднение дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями / Д. Бигириндавйи, В. Б. Левенштам //Современные проблемы математики и физики: материалы международной научной конференции, г. Стерлитамак, 12–15 сентября 2012 г. — Том I. — С. 126 –129.

65. Бигириндавйи, Д. Усреднение высокочастотной нормальной системы ОДУ с многоточечными краевыми условиями /Д. Бигириндавйи, В. Б. Левенштам // Владикавк. мат. журн. — 2022. — Т. 24, вып. 2. — С. 62–74. DOI: 10.46698/i7381-0821-3887-y.

(Перевод: Bigirindavyi, D. Averaging for high-frequency normal systemof ordinary differeential equations with multipoint boundaryvalue problems / D. Bigirindavyi, V. B. Levenshtam // Sibirian Mathematical Journal. — 2023. — Vol. 64, №3. — P. 737 – 746.)

66. Bigirindavyi, D. Justification of the averaging method for differential equations with multipoint boundary value problems / D. Bigirindavyi, V. B. Levenshtam // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2021. — Vol. 357. — P. 137 – 142.