

Отзыв

официального оппонента на диссертацию Бигириндави Даниэля

**«Усреднение многоточечных краевых задач для
дифференциальных уравнений с большими быстро
осциллирующими слагаемыми»,**

представленную на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы исследования

Математические модели, возникающие в физике, обычно приводят к задачам, точные решения которых найти не представляется возможным. Кроме того, наличие, например, быстро осциллирующих слагаемых в соответствующих дифференциальных уравнениях значительно затруднит нахождение и приближенного решения. В ситуациях, когда такие слагаемые подчинены некоторому малому либо, наоборот, большому параметру, могут помочь асимптотические методы или методы теории возмущений. При этом важно, чтобы для предельных значений этого параметра задача допускала достаточно простое решение. Тогда для обоснования используемого метода необходимо показать, что отклонение от этого «простого» решения при стремлении параметра к предельному значению стремится к нулю.

Целью данной диссертационной работы является развитие и обоснование одного из старейших таких методов, а именно метода усреднения, применительно к нелинейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с большими быстро осциллирующими слагаемыми и многоточечными краевыми условиями. Для нелинейных систем ОДУ метод усреднения обычно применяется в случае задачи Коши на отрезке, а также для задач о периодических, почти периодических и общих ограниченных на всей временной оси решениях, тогда как даже двухточечные краевые задачи и тем более многоточечные изучались крайне редко.

В то же время многоточечные краевые задачи часто возникают в математической физике, в различных областях естественных наук и технике. В связи с этим важное значение имеет развитие и обоснование метода усреднения и для многоточечных краевых задач. Поэтому тема данной диссертационной работы представляется актуальной.

Содержание и характеристика работы

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 66 источников. Общий объем диссертации составляет 132 страницы.

Во **введении** содержится общая характеристика диссертационной работы, приведено обоснование актуальности и новизны исследования, а также формулируются результаты, выносимые на защиту. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, 4 из которых содержатся в научных журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ЮФУ для защиты по данной специальности, причем 2 из них индексируются в международной базе Scopus.

Первая глава посвящена обоснованию метода усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями. Здесь и далее под обоснованием понимается доказательство асимптотической близости решений возмущенной и усредненной задач в пространстве Гельдера. Глава состоит из трех параграфов.

В *первом параграфе* дается обоснование метода усреднения при отсутствии больших слагаемых в соответствующей нелинейной системе ОДУ. Показано, что при выполнении ряда условий на правую часть, а также условия существования решения усредненной задачи, последнее приближается решением возмущенной задачи при стремлении частотного параметра к бесконечности (теорема 1). Данная теорема является прототипом последующих результатов диссертации для более сложных ситуаций. При этом во всех основных результатах работы отсутствует требование существования решения возмущенной задачи, что является важным достижением.

Во *втором параграфе* метод усреднения обоснован для нелинейной системы ОДУ с большими быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций. При этом рассмотрен так называемый простейший случай, когда большое слагаемое финитно по частотной переменной. Соответствующий основной случай рассмотрен в *третьем параграфе*, где требование финитности большого слагаемого заменяется на периодичность. Однако результирующая теорема является частным случаем теоремы, доказанной в предыдущем параграфе.

Во **второй главе** метод усреднения обосновывается для систем нелинейных ОДУ с быстро осциллирующими слагаемыми и многоточечными краевыми условиями для любого конечного числа точек, не меньшего двух. При этом краевые условия могут быть, вообще говоря, неоднородными. Данная глава также состоит из трех параграфов.

В *первом параграфе* рассматриваются системы, правые части которых равномерно ограничены при неограниченно возрастающей частоте осцилляций. *Второй параграф* посвящен системам, содержащим также большие быстро осциллирующие слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций. В *третьем параграфе* приведены иллюстративные примеры для двухточечной и многоточечной краевых задач.

В **третьей главе** дается обоснование метода усреднения для нелинейных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями при наличии в правой части больших быстро осциллирующих слагаемых, пропорциональных частоте осцилляций в степени $3/4$. В этом случае для избавления от больших слагаемых потребовалось двукратное применение специальной замены переменных перед использованием теоремы о неявной функции, являющейся, в свою очередь, базовым инструментом всей работы.

В **заключении** резюмируются основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации и их научная новизна

Основные результаты диссертационной работы заключаются в развитии и обосновании метода усреднения применительно к различным двухточечным и многоточечным краевым задачам для нелинейных систем ОДУ с быстро осциллирующими слагаемыми. Среди наиболее значимых ситуаций, для которых в работе получено обоснование метода усреднений, являются следующие:

- 1) правая часть рассматриваемой нелинейной системы ОДУ равномерно ограничена с ростом частоты осцилляций;
- 2) правая часть содержит большие осциллирующие слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций;
- 3) большие осциллирующие слагаемые в правой части пропорциональны частоте осцилляций в степени $3/4$.

В диссертации упоминаются и другие работы, посвященные применению метода усреднения для краевых задач, а именно работы [18] и [26] (см. список литературы к диссертации), причем в первой из них рассматриваются многоточечные задачи. Однако в [18] требуется существование решения возмущенной задачи, тогда как в диссертации оно доказывается. При изучении многоточечных задач в диссертации используется иной подход, нежели в [18], где, помимо этого, не рассматривались и большие слагаемые. Наконец, что касается работы [26], в ней рассматривалась иная двухточечная краевая задача. Таким образом, результаты данной диссертационной работы являются новыми.

Обоснованность и апробация результатов

Все сформулированные в диссертации утверждения строго доказаны. Результаты диссертационного исследования прошли апробацию на трех международных конференциях, проведенных на территории России, а также на объединенном научном семинаре по анализу и дифференциальным уравнениям Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича в Южном федеральном университете.

Личный вклад автора

Результаты диссертации опубликованы в 7 статьях, две из которых выполнены диссертантом без соавторов, включая работу, посвященную обоснованию метода усреднения для дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями в журнале, входящем в перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ЮФУ для защиты по данной специальности. Остальные статьи, в том числе другие 3 работы из указанного перечня, выполнены совместно с научным руководителем, который предложил постановки задач, тогда как получение самих результатов принадлежит непосредственно диссертанту.

Замечания

По данной диссертационной работе имеется несколько замечаний:

1) В диссертации замечены некоторые опечатки, не мешающие восприятию материала. В частности, в некоторых местах отсутствуют либо, наоборот, добавлены лишние пробелы.

2) Ограниченное высокочастотное слагаемое дифференциального уравнения в различных системах, исследуемых в диссертации, иногда представлено одной вектор-функцией, а иногда – суммой двух, одна из которых имеет нулевое среднее. Отсутствие такого единства вкупе с большим числом различных условий на правую часть, фигурирующих в формулировках всех основных результатов, несколько затрудняют чтение работы.

3) Выбор степеней частотного параметра $1/2$ и $3/4$ выглядит несколько искусственным. Следовало бы пояснить этот выбор и указать, какие другие положительные степени допускают применение метода усреднений.

4) Перечисление ссылок часто происходит в хаотичном порядке. Например, во введении: «Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 научных публикациях [63, 62, 61, 66, 64, 65, 60].»

Однако никакие из приведенных замечаний не влияют на качество и ценность данного диссертационного исследования.

Заключение

Вышеизложенное позволяет заключить, что диссертация Бигириндавайи Даниэля «Усреднение многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми» выполнена на достаточно высоком научном уровне и удовлетворяет критериям пп. 2.1–2.4 и 2.10 «Положения о присуждении учёных степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет», оформлена в соответствии с пп. 3.1–3.2 указанного Положения и отвечает паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Таким образом, соискатель Бигириндавайи Даниэль заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доцент кафедры математической физики и вычислительной математики
ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»

кандидат физико-математических наук по специальности

01.01.01. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Бутерин Сергей Александрович

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»

www.sgu.ru

тел. +7 (8452) 515538

e-mail: buterinsa@sgu.ru

Бутерин Сергей Александрович



" 24 " апрель 2024 г.

Подпись С.А. Бутерина удостоверяю.

Ученый секретарь ФГБОУ ВО

«СГУ имени Н.Г. Чернышевского»

" 27 " апрель 2024 г.

