ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Товсултанова Абубакара Алхазуровича «Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Одной из фундаментальных характеристик классических дифференциальных операторов является их локальность. Это свойство означает, что при действии на функцию оператор сохраняет, т.е. не увеличивает и не перемещает, ее носитель. Псевдодифференциальные операторы, являющиеся важным расширением класса дифференциальных операторов, также в определенном смысле этому свойству удовлетворяют, сохраняя сингулярный носитель функции (псевдолокальность). С операторами, отвечающими нелокальным задачам, дело обстоит иначе. Обычно отсутствие локальности вызвано тем, что значения искомой функции и ее производных связываются уравнением или в силу краевых условий в разных, удаленных друг от друга, точках области. Если само дифференциальное уравнение содержит преобразования независимых переменных, то говорят о дифференциальном уравнении со сдвигом или функционально-дифференциальном уравнении. Если же ищутся решения эллиптического дифференциального уравнения с граничными условиями, связывающими след функции на границе и ее следы на сдвигах границы в замыкание области, то употребляется термин нелокальная краевая задача. Возникшие вначале в одномерной ситуации при исследовании процессов с последействием и при изучении сингулярных интегральных операторов со сдвигом, эти тесно примыкающие друг к другу постановки сформировали современную теорию нелокальных эллиптических задач, которая активно развивается последние десятилетия и имеет самые разные приложения в теории управления, теории упругости, нелинейной оптике, биофизике, теории плазмы и т.д. Различные варианты нелокальных задач с преобразованиями переменных, отображающими границу в замыкание области, рассматривали А. В. Бицадзе и А. А. Самарский, А. К. Гущин и В. П. Михайлов, В. А. Ильин и Е. И. Моисеев и др. Эллиптическими функционально-дифференциальными уравнениями, ассоциированными с диффеоморфизмами гладкого замкнутого многообразия, занимались А. Б. Антоневич и А. В. Лебедев, В. С. Рабинович, а также Б. Ю. Стернин и А. Ю. Савин. Основы общей теории линейных эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями и краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в ограниченных областях были заложены в работах А. Л. Скубачевского. Подходы и результаты этих работ далее развивались Е. Л. Цветковым, Л. Е. Россовским, П. Л. Гуревичем, Р. В. Шаминым и другими учениками А. Л. Скубачевского. Одним из важнейших свойств данного круга задач, определяющим во многом методы их исследования, является отсутствие априорной гладкости решений и возникновение у них особенностей, как на границе, так и внутри области даже при бесконечно дифференцируемых данных задачи. В настоящее время хорошо известно, что систематическое исследование нелокальных задач невозможно без существенного использования групповых свойств связанных с уравнением преобразований. Важной характеристикой того или иного класса уравнений является структура орбит точек области под действием группы, порожденной этими преобразованиями. С этой позиции рассматриваемые в настоящей диссертации задачи – новые по существу и представляют значительный интерес, поскольку им отвечает бесконечная группа сдвигов, которые, однако, не являются диффеоморфизмами области, где задано уравнение, на себя. Кроме того, характерно наличие некоторой особой, предельной для всех орбит, точки.

Исследования А.А.Товсултанова лежат в русле указанной тематики. В его диссертационной работе рассматривается задача Дирихле для эллиптических и сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, в старшей части которых присутствует комбинация преобразований сжатия, поворота и сдвига. В основном, автор касается вопроса разрешимости краевой задачи, затрагивая в меньшей степени спектральные свойства и гладкость решений.

Прежде всего, стоит указать на отличие первых двух глав диссертации, где рассматриваются уравнения со сжатиями, растяжениями и поворотами, от третьей главы, посвященной уравнению со сжатием и сдвигами.

Тот факт, что сжатия (растяжения) и повороты являются коммутирующими преобразованиями, позволяет на основе теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр получить явные алгебраические условия выполнения для рассматриваемых операторов неравенства типа Гординга. Впервые данное неравенство в теории функционально-дифференциальных уравнений использовалось А. Л. Скубачевским (1986). Его важность связана с тем, что оно обеспечивает фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле в ограниченной области. Найденные в диссертации алгебраические условия являются достаточными для любой области, а необходимыми они будут, если область содержит начало координат (это требование можно ослабить) — здесь вывод основан на сведении к сильно эллиптическим системам N дифференциальных уравнений с последующим переходом к пределу при $N \to \infty$. Для некоторых частных случаев уравнений первой главы вопросы разрешимости и (до определенной степени) регулярности решений удается исследовать и без предположения выполнения неравенства типа Гординга. Показано, что нарушение этого неравенства может приводить к появлению в задаче бесконечномерного ядра либо коядра.

В случае, когда угол поворота равен π (другими словами, речь идет о центральной симметрии на плоскости), можно перенести технику первой главы на уравнения более общей структуры с точки зрения комбинации дифференциального оператора и функциональных операторов. Это делается во второй главе диссертации.

И хотя в первых двух главах автору пришлось преодолеть определенные трудности, исследование все же в значительной степени базируется на подходе, развитом в работах научного руководителя. А вот материал третьей главы выглядит совершенно по-новому. Дело в том, что сдвиг и сжатие не коммутируют, и аппарат, использующийся в первой части работы, здесь неприменим. Сочетание сжатия и сдвигов делает такие уравнения похожими на уравнения с переменными коэффициентами в ситуации, когда принцип локализации не работает. Упомянутые трудности вполне оправдывают то, что автор ограничивается в третьей главе изучением модельного уравнения — один функциональный оператор со сжатием и сдвигами под знаком лапласиана. При этом сдвиг автор реализует в виде свертки с сосредоточенной на некотором компакте борелевской мерой (конечная линейная комбинация сдвигов тогда — это просто случай атомарной меры). Такой подход украшает главу, придавая ощущение общности, но практически не привносит дополнительных технических трудностей. Более того, как показывают примеры, уже в простейшем случае, связанном с атомарными мерами, возникают новые интересные эффекты. Например, найденные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле зависят от того, является ли параметр сжатия числом трансцендентным или алгебраическим. Условие инвариантности области под действием присутствующих в операторе преобразований координат является принципиальным в третьей главе (в первых двух оно использовалось в гораздо меньшей степени) — без него было бы значительно сложней. Если говорить очень лаконично, решение краевой задачи в третьей главе сводится к вопросу об обращении функционального оператора в пространстве $H^{-1}(\Omega)$.

На мой взгляд, материал третьей главы представляет большой интерес с точки зрения различных обобщений. Несомненно, стоит рассмотреть уравнение с аналогичными преобразованиями, но более общей структуры, содержащее смешанные производные и несколько различных функциональных операторов данного класса, и попробовать описать эллиптичность (фредгольмовость задачи) в алгебраических терминах, т.е. фактически построить соответствующее символьное исчисление.

Диссертационная работа написана четко и ясно. Обладая внутренним единством, она характеризуется сочетанием разнообразной техники и подходов. Автор работы, без сомнения, подтверждает высокую квалификацию. Еще одной положительной стороной работы является наличие примеров, иллюстрирующих представленные в теоремах результаты, а также подчеркивающих существенность накладываемых условий. Особенно это относится к примеру 3.4, связанному с весьма нетривиальными построениями.

Стоит отметить, что текст диссертации весьма тщательно выверен, такое впечатление, что опечатки практически отсутствуют. На стр. 31 в шестой строке доказательства леммы 1.4 должно быть $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ (пропущен символ u). На стр. 59, 7-я строка сверху, в формуле для полуторалинейной формы $\mathfrak{a}[u, v]$ в правой части в скалярном произведении второй сомножитель должен быть v_{x_j}.

В качестве замечания (или, скорее, пожелания) выскажу, что любые исследования по качественной теории дифференциальных уравнений должны быть доведены до случая переменных коэффициентов. Поэтому стоит обязательно попытаться распространить результаты на переменные коэффициенты, хотя в нелокальных задачах это может быть и непросто.

Текст автореферата в достаточной степени отражает содержание диссертации.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Товсултанова Абубакара Алхазуровича «Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями» отвечает всем требованиям, предъявляемым Южным федеральным университетом к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук. Содержание диссертации удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», и паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки). Диссертация оформлена в соответствии с пп. 3.1–3.2 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет». Соискатель Товсултанов Абубакар Алхазурович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук
(01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление)
ведущий научный сотрудник отдела
вычислительной физики и кинетических уравнений
ФГУ «Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН»
125047 Москва, Миусская пл., 4
https://www.keldysh.ru, +7(499) 978 13 14
fumi2003@mail.ru

07.11.2023 Сакбаев Всеволод Жанович

Подпись в.н.с В.Ж. Сакбаева удостоверяю
ученый секретарь
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН