ОТЗЫВ

**официального оппонента на диссертацию
Товсултанова Абубакара Алхазуровича
«Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена актуальной теме — исследованию краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в ограниченных областях евклидова пространства.

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных изучению различных аспектов теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Первоначально работы по ФДУ относились к исследованию уравнений (скалярных или матричных) для функций одной переменной. Основополагающие результаты здесь получены в работах А. Д. Мышкиса, Р. Беллмана, Дж. Хейла. Позже, в связи с появлением многочисленных приложений, стали изучаться ФДУ с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Такие ФДУ могут быть реализованы как уравнения с частными производными по пространственным переменным и запаздыванием по времени. Сюда же относятся интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами, к изучению которых приводят многочисленные задачи теории вязкоупругости, теплофизики, теории усреднения и т.д. Данное направление развивалось в работах Ди Блазио, К. Куниша, В. Шаппахера, Е. Синестрари, Р. Миллера, Дж. Ву, В. В. Власова, Н. А. Раутиан, В. Ж. Сакбаева и др.

Диссертационная работа А. А. Товсултанова относится к иному направлению теории ФДУ — эллиптическим ФДУ со сдвигами и другими преобразованиями аргументов старших производных. Данное направление в течение нескольких десятилетий активно развивается научной школой А.Л. Скубачевского, которой принадлежит и научный руководитель соискателя Л. Е. Россовский. В работах последнего был получен ряд важных результатов для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, в которых аргументы старших производных искомой функции подвергаются сжатиям и растяжениям. Краевые задачи такого типа имели принципиальные отличия от других задач теории эллиптических ФДУ и требовали развития новых методов. Следует отметить, что в случае одной переменной некоторые ФДУ с растяжением и сжатием аргумента исследовались ранее: прежде всего, это уравнение пантографа, возникающее в технике, астрофизике, биологии, и различные его обобщения. Уравнению пантографа посвящена известная работа Т. Като и Дж. Б. Маклеода (1971).

Содержание работы

Не ставя своей целью подробно освещать результаты диссертации, отмечу, на мой взгляд, наиболее важные из них. Первая глава диссертации посвящена задаче Дирихле

$$\mu u + \operatorname{div}(T(P, R_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\Omega)$, а $T(P, R_\alpha)$ — функциональный оператор с растяжениями (сжатиями) и поворотами:

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk} P^m R_\alpha^k \quad (a_{mk} \in \mathbb{C}),$$

$$Pu(x) = p^{-1}u(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2), \quad p > 1,$$

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Под решением задачи (1), (2) понимается функция из пространства Соболева $\mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая соответствующему интегральному тождеству — ставшее стандартным понятие обобщенного решения (и так во всей диссертации). Здесь это по существу из-за упомянутых выше объективных проблем с повышением гладкости решений подобных задач. Считается, что $u(x) = 0$, когда $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Основная задача, рассматриваемая в первой главе, — это выяснение того, когда уравнение (1) естественно называть эллиптическим. Автор подходит к решению данного вопроса следующим (достаточно оптимальным) образом. За основу берется оценка

$$\operatorname{Re}\,(T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3}$$

на классе функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$, аналогичная той, которая для дифференциальных операторов исследовалась в классических работах М. И. Вишика, Л. Гординга 1950-х годов. Она тесно связана со спектральными свойствами задачи Дирихле. Посредством этой оценки в математическую литературу был введен класс *сильно эллиптических* операторов. В теории функционально-дифференциальных уравнений эта оценка стала применяться после работ А. Л. Скубачевского. В частности, для уравнений со сжатиями и растяжениями она исследовалась в работах Л. Е. Россовского. Развивая предложенный в этих работах подход, основанный на комбинации преобразований Фурье и Гельфанда и сведении к сильно эллиптическим системам дифференциальных уравнений, А.А.Товсултанов получает конструктивные, выраженные непосредственно через коэффициенты a_{mk} и параметры p и α, необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (3). Интересно то, что полученные условия выглядят по-разному в зависимости от того, соизмерим угол поворота α с числом π или нет. Например, в случае, когда α и π соизмеримы, на выполнение (3) начинают влиять не только модули коэффициентов, но и их аргументы (или знаки, если коэффициенты вещественные).

Во второй главе диссертации та же техника применяется для исследования уравнения

$$\mu u + \sum\nolimits_{i,j=1}^{2} (T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{4}$$

более общей структуры. В нем присутствуют смешанные производные (по сути, смешанные производные присутствовали, но неявно, и в уравнении (1) за счет дифференцирования композиции), и на каждую производную действует свой оператор T_{ij} преобразований координат. Причина, по которой это возможно сделать, состоит в том, что только в случае $\alpha = \pi$ оператор поворота (симметрии) коммутирует с умножением на однородные функции нулевой степени. Во второй главе приходится преодолевать бóльшие трудности, и здесь вклад соискателя наиболее значителен — особенно стоит отметить теорему 2.1.

Третья глава диссертации заметно отличается от первых двух. В ней изучается задача Дирихле для уравнения

$$-\Delta(u(x) + aTu(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{5}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $p > 1$, $a \in \mathbb{C}$, а оператор T теперь определен формулой

$$Tu(x) = \int_K u(p^{-1}x - h)\, d\nu(h), \tag{6}$$

где ν — это борелевская мера с носителем на некотором компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R}^n$. При этом Ω и K таковы, что $p^{-1}\Omega - K \subset \Omega$ — это условие гарантирует, что аргумент функции u в интеграле (6) не покидает

Ω. Решение краевой задачи для уравнения (5) строится на основе изучения свойств функционального оператора $I + aT : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$, прежде всего, при $s = -1$. Получены достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи. Они связывают величину коэффициента a со спектральным радиусом оператора T в $L_2(\mathbb{R}^n)$, который выражается формулой

$$\rho(T) = p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\dots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}, \quad \tilde{\nu}(\xi) = \int_K e^{-ih\xi}\, d\nu(h). \quad (7)$$

Вычислить характеристическую функцию $\tilde{\nu}(\xi)$ меры ν в конкретных случаях несложно, но нахождение предела в (7) — задача совсем нетривиальная даже в простейшем случае. На мой взгляд, свою ценность третья глава приобретает именно благодаря примерам 3.1 и 3.4, хорошо иллюстрирующим применение теоремы 3.1.

Замечания

По содержанию работы есть некоторые замечания, не снижающие общую положительную оценку диссертации.

1) В изложении первых двух глав диссертации присутствуют определенные различия, не связанные, на мой взгляд, с существом дела. В первой главе необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности (теорема 1.3) доказываются одновременно в предположении о том, что область Ω, где ставится краевая задача, содержит начало координат. Доказательство опирается на результаты выше и преобразование Фурье. Во второй главе, идейно очень близкой к первой, вначала доказывается достаточность (теорема 2.2) для вообще произвольной ограниченной области (здесь также хватает преобразования Фурье), а затем при менее ограничительном условии нежели $0 \in \Omega$ выводится необходимость — тут уже приходится применять технику сильно эллиптических систем. Но нетрудно видеть, что сказанное в первой главе имеет отношение и ко второй, а ситуация, описанная во второй главе, с небольшими модификациями переносится на первую. Правильно было бы в этом отношении сделать изложение более однородным.

2) Ряд утверждений в диссертации стоило бы снабдить пояснениями, например, про спектр операторов P и PR_α. Это не сказалось бы сильно на объеме работы, но сделало ее чтение более удобным.

3) Впечатление от третьей главы значительно бы усилилось, если автор хотя бы что-то сказал о случае $1/\sqrt{3} \leqslant |\alpha| \leqslant 1$ в важном для всей главы примере 3.4. А так присутствует некоторое ощущение незавершенности.

В работе есть некоторое количество мелких опечаток.

Заключение

В целом, диссертация А. А. Товсултанова является законченной исследовательской работой, демонстрирующей высокий научный уровень соискателя, его уверенное владение современными методами теории дифференциальных уравнений с частными производными и функционального анализа. В диссертации рассмотрен новый класс задач, она содержит новые научные результаты, важные для дальнейшего развития теории эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованием пространственных переменных. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Работа А. А. Товсултанова «Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями» отвечает всем требованиям, предъявляемым Южным федеральным университетом к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук. Содержание диссертации удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», и паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки). Диссертация оформлена в соответствии с пп. 3.1–3.2 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет». Считаю, что Товсултанов Абубакар Алхазурович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук
(01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление),
декан математического факультета
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова»
150003 Ярославская область, г. Ярославль, ул. Советская, 14
https://www.uniyar.ac.ru, +7(4852) 79-77-02
mathematix@mail.ru

Нестеров Павел Николаевич
09-11-2023

Подпись заверяю:
Заместитель начальника управления-
директор центра кадровой политики
_____________ Л.Н. Куфирина
09.11.2023