

Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Грановского Ярослава Игоревича «К спектральной теории матричных операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки).

Диссертация Я. И. Грановского посвящена спектральной теории операторов Шрёдингера и матричных операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами. Коэффициенты операторов могут иметь особые точки и не быть суммируемыми функциями. Точные условия на коэффициенты сформулированы в виде принадлежности коэффициентов к определённым классам обобщенных функций. Развитая в работе теория позволяет, в частности, провести полный спектральный анализ одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом который является суммой суммируемого потенциала и суммы дельта-функций, сосредоточенных на счётном множестве точек. Дифференциальные операторы с точечными взаимодействиями возникают в различных физических приложениях, например, в физике твердого тела.

В связи с этим тема диссертационного исследования является актуальной. В некоторых случаях уравнение Шрёдингера с потенциалом в виде суммы дельта-функций является точно решаемым. Точно решаемым моделям посвящена, например, известная монография С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крона, Х. Хольдена и многочисленные физические и математические работы. Точное решение уравнения Шрёдингера возможно лишь в исключительных случаях (даже для операторов с точечным взаимодействием), поэтому на первый план выходит задача построения качественной спектральной теории. Математическая теория развивалась в работах упомянутых выше авторов, а так же в работах А. С. Костенко, М. М. Маламуда, А. М. Савчука, А. А. Шкаликова и многих других известных математиков. Работа Я. И. Грановского продолжает и развивает эти исследования; в ней получены новые интересные и важные результаты. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объём диссертации составляет 157 страниц, библиография---112 источников.

Перечислим основные результаты работы. В первой части работы Я. И. Грановского (гл.1 и 2) проведен спектральный анализ симметрического матричного оператора Штурма-Лиувилля с суммируемой по полуоси потенциальной матрицей. Доказана абсолютная непрерывность спектра положительной части такого оператора. Доказано, что отрицательная часть любого самосопряженного расширения соответствующего минимального оператора либо конечномерна, либо компактна. Заметим, что доказательство отсутствия сингулярной компоненты спектра является трудной математической задачей, которая различными методами исследовалась в работах многих авторов. Общий подход, использующий аппарат граничных троек и абстрактной функции Вейля, ранее разрабатывался в работах М. М. Маламуда и соавторов. Однако, применение этих общих результатов к операторам рассматриваемого класса сталкивается с техническими трудностями и возникающие при этом задачи представляют из себя самостоятельные математические проблемы.

Вторая часть работы (гл.3 и 4) посвящена более сложному случаю- спектральному анализу операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами. При этом сингулярности коэффициентов описываются в терминах принадлежности этих коэффициентов некоторым классам функций (типа пространства Соболева с отрицательным показателем). Для минимального оператора, порожденного соответствующим дифференциальным выражением, построены граничные тройки, найдены удобные представления для функции Вейля. На этой основе доказаны результаты об абсолютной непрерывности спектра положительной части и компактности отрицательной части любого самосопряженного расширения соответствующего минимального оператора. Доказаны оценки типа Баргмана для числа отрицательных собственных значений операторов, причем эти оценки установлены для общего случая, когда исследуемый оператор действует в пространстве функций, определённых на произвольном конечном некомпактном графе.

Кроме того, во второй части работы получены интересные формулы для матрицы рассеяния и детерминанта возмущения (в качестве возмущения берётся потенциал точечного взаимодействия). В последней, пятой, главе показано, что развитые в работе методы, т.е. аппарат граничных троек и функций Вейля также хорошо приспособлен и к решению задачи об описании (в терминах краевых условий) всех неотрицательных самосопряженных расширений симметрического дифференциального оператора чётного порядка на отрезке, а также расширений с конечным числом отрицательных квадратов.

Замечания.

Работа написана аккуратно, ясно и на очень высоком математическом уровне. В качестве замечания хотелось бы отметить лишь следующее. В работе подчеркивается, что абстрактная функция Вейля в общей спектральной теории операторов аналогична роли классической m -функции Вейля-Титчмарша в спектральной теории одномерного оператора Штурма-Лиувилля. Было бы желательно, чтобы это было продемонстрировано на конкретных примерах дифференциальных операторов. Было бы желательно, также, дать представление читателю об эволюции, приведшей к понятию абстрактной функции Вейля и некоторым другим, использованным в работе общим абстрактным операторным понятиям.

Значимость результатов диссертации для науки и практики.

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы для анализа некоторых задач, возникающих, например, в квантовой механике.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, из которых 5 входят в наукометрическую базу Scopus. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Апробация.

Положения и выводы диссертации прошли научную апробацию на международных конференциях и научных семинарах, проводимых в Российском университете дружбы народов, в Южном федеральном университете, в Донецком национальном университете. Все основные результаты исследования являются новыми и строго доказаны.

Закключение.

Считаю, что диссертационная работа «К спектральной теории матричных операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук соответствует всем требованиям и критериям действующего положения о присуждении ученых степеней в ФГАО ВО «Южный федеральный университет», а ее автор, Грановский Ярослав Игоревич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук

(1.1.1 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ)

доцент Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И.

Воровича, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,

344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42.

Телефон: +7(863)265-31-58,

Сайт: <https://sfedu.ru/>

E-mail: info@sfedu.ru

07.11.2023 г.



Каплицкий Виталий Маркович

Каплицкий В.!!

Член Совета
Южного университета
Мирошниченко О С