Отзыв официального оппонента
о диссертации Грановского Ярослава Игоревича
«К спектральной теории матричных операторов
Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Я.И. Грановского посвящена спектральному анализу операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными матричными коэффициентами на полуоси, оси и квантовых графах. Следует отметить, что спектральная теория дифференциальных операторов активно развивается с начала XX века и представляет значительный интерес в различных разделах математической физики и особенно в квантовой механике. Также в последние 2-3 десятилетия большой интерес представляет спектральная теория квантовых графов. Это свидетельствует об актуальности темы диссертационного исследования.

Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, перечня условных сокращений, списка цитированной литературы и двух приложений.

Во введении автор приводит известные результаты, касающиеся спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля, а также теории расширений симметрических операторов.

Глава 1 содержит необходимые для дальнейшего исследования сведения и результаты. В частности, в ней введены понятия граничных троек и соответствующих функций Вейля.

В Главе 2 исследуется дифференциальное выражение Штурма-Лиувилля с суммируемым матричным потенциалом $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1\big((0,\infty);\mathbb{C}^{m\times m}\big)$. Здесь установлена абсолютная непрерывность положительной части соответствующего оператора, чем обобщен классический результат Титчмарша. Подчеркну, что главной составляющей результатов Главы 2 является чистая абсолютная непрерывность положительной части *каждого* расширения минимального оператора, ассоциированного с выражением Штурма-Лиувилля.

В Главе 3 результаты Главы 2 распространяются на случай квантовых графов. А именно, в первой части Главы 3 рассматриваются некомпактные связные графы с конечным числом вершин в предположении, что по крайней мере одно ребро имеет бесконечную длину. Основным объектом Главы 3 является гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$, ассоциированный с выражением Шредингера с суммируемым матричным потенциалом на графе и граничными условиями дельта-взаимодействия во всех вершинах. Первый результат Главы 3 состоит в отсутствии сингулярного непрерывного спектра оператора Шредингера на графе. Далее, получены дополнительные условия, гарантирующие чистую абсолютную непрерывность положительной части гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$, т.е. отсутствие вложенных положительных собственных значений. В частности, это справедливо для операторов Шредингера с дельта-взаимодействиями на прямой. Также при дополнительном условии получена оценка типа Баргмана для числа отрицательных квадратов оператора Шредингера на произвольном конечном некомпактном квантовом графе.

Во второй части Главы 3 автор рассматривает только *звездные* квантовые графы с конечным числом ребер. Для таких квантовых графов находятся оценки отрицательного спектра и, в частности, уточняется оценка типа Баргмана. Также явно вычисляются матрица рассеяния и детерминант возмущения в граничной тройке специального вида.

Глава 4 посвящена спектральному анализу трехчленного матричного дифференциального выражения Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом. Вводя минимальный симметрический оператор, ассоциированный с этим дифференциальным выражением на полуоси, автор строит граничную тройку и получает удобное для исследования выражение для соответствующей функции Вейля. Используя это представление, автор устанавливает лебеговость спектра положительной части каждого самосопряженного расширения минимального оператора, а также компактность отрицательной части таких расширений. В частности, этим свойством обладают реализации Дирихле и Неймана.

Также, используя специальное представление дельта-функции, автор получает аналогичные результаты для гамильтонианов со счетным числом точек взаимодействия на полуоси и оси. Последние результаты существенно усиливают предыдущие результаты К. Шубиной и Г. Штольца.

Глава 5 посвящена крейновскому расширению простейшего дифференциального оператора четного порядка на конечном промежутке. Показано, что граничная матрица, связывающая условия в правом и левом концах, является теплицевой. Используя технику граничных троек и соответствующих функций Вейля, автор описывает все неотрицательные расширения соответствующего минимального оператора, а также расширения с конечным отрицательным спектром.

Диссертация Я.И. Грановского «К спектральной теории матричных операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами» написана четко и ясно, на высоком математическом уровне, все утверждения и выводы в ней полностью обоснованы. Все теоремы являются новыми, для их получения пришлось преодолеть значительные трудности. Автором продемонстрировано свободное владение методами спектральной теории, в частности, методом граничных троек и соответствующих функций Вейля, а также умение применять эти методы к дифференциальным операторам.

К диссертации нет существенных замечаний, можно лишь указать на некоторые моменты, связанные со стилем изложения, которые никак не снижают качество работы.

1) Во введении автор уделяет, на мой взгляд, слишком много времени и места приведению результатов, связанных с крейновским расширением, в то время как описание крейновского расширения простейшего минимального дифференциального оператора четного порядка не является главным результатом диссертации.

2) В главе 1, которая отводится предварительным сведениям и конструкциям, призванным сделать чтение диссертации более удобным, автор не жалеет места для общеизвестных понятий точечного, непрерывного и остаточного спектра оператора, но не определяет важные для всего изложения более тонкие и реже встречающиеся в учебной литературе понятия абсолютно непрерывного спектра, сингулярного непрерывного спектра и т.д.

3) Стр. 20, 75, 83. Вместо выражения «присоединенные собственные значения» правильнее использовать термин «вложенные собственные значения».

4) Стр. 127, Замечание 4.3.2. Здесь было бы целесообразно еще раз привести формулировку результата К. Шубиной и Г. Штольца (помимо введения).

Считаю, что диссертационная работа Я.И. Грановского удовлетворяет всем требованиям, соответствующим Положению о присуждении ученых степеней в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет», а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук
(01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)
доцент, профессор Математического института им. С.М. Никольского
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.
Телефон: +7 (495) 955-07-10
Сайт: https://www.rudn.ru/
E-mail: information@rudn.ru

«14» ноября 2023 г. Россовский Леонид Ефимович

Подпись Россовского Л.Е. заверяю.
Ученый секретарь
Ученого совета РУДН Курылев Константин Петрович