ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Абузяровой Натальи Фаирбаховны «Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Проблема спектрального синтеза представляет собой одну из центральных задач анализа. Точнее, под спектральным синтезом понимается целый ряд тесно связанных между собой или даже эквивалентных задач о восстановлении того или иного объекта по его спектральным данным. Одна из классических постановок состоит в возможности восстановления инвариантных подпространств данного оператора по лежащим в них собственным и корневым векторам. Один из важнейших частных случаев этой задачи связан с описанием подпространств, инвариантных относительно группы операторов сдвига или оператора дифференцирования в различных функциональных пространствах. В этом случае собственными и присоединенными векторами будут экспоненты и экспоненциальные мономы. Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены в работах Ж. Дельсарта, Л. Шварца, Б. Мальгранжа, Л. Эренпрайса, Ж.-П. Кахана, Л. Хермандера. В частности, Л. Шварц показал, что все подпространства в $C(\mathbb{R})$ или $C^\infty(\mathbb{R})$, инвариантные относительно группы сдвигов, а также подпространства в $H(\mathbb{C})$, инвариантные относительно дифференцирования, допускают спектральный синтез. Другая, в определенном смысле двойственная, постановка связана с возможностью описания классов пространств аналитических функций в терминах их нулей. Впоследствии задачи спектрального синтеза изучались в работах А.О. Гельфонда, Дж. Диксона, П. Кусиса, Б. Тэйлора, Р. Майзе. Особенное развитие эти идеи получили в работах А.Ф. Леонтьева и представителей его школы – И.Ф. Красичкова-Терновского, В.В. Напалкова, А.С. Кривошеева, Р.С. Юлмухаметова, получившими фундаментальные результаты о спектральном синтезе в пространствах аналитических функций в выпуклой области в $\mathbb{C}^n$ и в пространствах решений однородных уравнений типа свертки.

В то же время один классический случай задачи спектрального синтеза, а именно синтез D-инвариантных подпространств в пространстве $C^\infty(a,b)$, оставался открытым. Новый этап в развитии этой тематики начался с работы А. Алемана и Б. Коренблюма (2007), показавших, что спектр сужения оператора D на инвариантное подпространство либо равен $\mathbb{C}$, либо дискретен. В случае дискретного спектра ими была поставлена проблема, названная в диссертации задачей слабого синтеза: верно ли, что любое такое подпространство порождается лежащими в нем экспоненциальными мономами и так называемой резидуальной частью (функции, тождественно равные нулю на некотором интервале)? Эта задача была решена в 2014 году независимо и совершенно различными методами Н.Ф. Абузяровой и А. Алеманом–А.Д. Барановым–Ю.С. Беловым. Доказательство Н.Ф. Абузяровой основано на развитии методов двойственности, разработанных И.Ф. Красичковым-Терновским. Используя эту технику, Н.Ф. Абузярова решила задачу Алемана–Коренблюма. а впоследствии распространила эти результаты на существенно более широкий класс пространств ультрадифференцируемых функций $U_\Omega(-a,a)$, введенный А.В. Абаниным.

Приведем краткий обзор основных результатов диссертации. В Главе 1 (Теорема 1.7) получено полное решение проблемы слабого спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств в $C^\infty(a,b)$ и $U_\Omega(-a,a)$. Как следствие (Теорема 1.8), показано, что слабый спектральный синтез всегда имеет место, если длина резидуального интервала строго больше, чем радиус полноты (плотность Берлинга–Мальявена) семейства экспоненциальных мономов. Также построен пример (Теорема 1.12), показывающий, что в случае критической плотности спектральный синтез может не иметь места, и, таким образом, ответ на вопрос Алемана–Коренблюма в общем случае отрицателен. Доказательство основано на сведении задачи к двойственной задаче описания некоторых модулей в пространствах аналитических функций в терминах их нулей и роста (слабая локализация). Дальнейшему исследованию структуры модулей и критериям слабой локализации посвящена Глава 2. Важным результатом этой главы является Теорема 2.7, дающая критерий слабой локализации (а, тем самым, и спектрального синтеза) в терминах весовой полиномиальной аппроксимации в некотором ассоциированном пространстве целых функций.

В Главе 3 изучается структура нулевых множеств делителей алгебры Шварца – так называемых медленно убывающих функций. Здесь получен ряд точных результатов о нулях таких функций в терминах отклонений от целых чисел, обобщающих результаты А.М. Седлецкого и А.А. Юхименко.

Я особенно хотел бы выделить Главу 4, в которой рассматривается несколько более сильная форма спектрального синтеза – возможность представления инвариантного пространства в виде прямой суммы ее спектральной части (замыкания экспонент) и резидуальной части. Здесь получен очень неожиданный результат (Теорема 4.1), дающий практически полное описание подпространств, представимых как прямая сумма. В этой задаче снова возникает класс медленно убывающих функций, а критическая длина резидуального промежутка определяется с помощью некоторого аналога радиуса полноты, но для класса медленно убывающих функций.

В Главе 5 исследуется задача о сохранении нескольких классов целых функций, возникающих в задачах спектрального синтеза, при возмущениях их нулей. Рассматривается класс функций экспоненциального типа с не более чем полиномиальным ростом на $\mathbb{R}$, нули которых лежат в некоторой логарифмической полосе и удовлетворяют логарифмической оценке на конденсацию. Также рассмотрены его подклассы, состоящие из медленно убывающих функций или из функций, отвечающих синтезируемым спектрам. Основной результат (Теоремы 5.1 и 5.2) состоит в том, что эти классы устойчивы относительно возмущений вида $\lambda_k' = \lambda_k + u_k + iv_k$, где $(u_k) \in l^\infty$, $|v_k| = O(\ln|\lambda_k|)$. Также показано, что эти условия на возмущение нулей неулучшаемы. Результаты основаны на глубоких и тонких оценках целых функций (в частности, на результатах С.Ю. Фаворова). Здесь особенно хотелось бы выделить очень интересное утверждение о сохранении синтезируемости при таких возмущениях.

Н.Ф. Абузяровой получен целый ряд выдающихся результатов в области теории функций, многие из которых дают окончательные ответы на вопросы, остававшиеся открытыми в течение многих лет. Диссертационную работу Н.Ф. Абузяровой следует оценить как крупное достижение в области анализа.

Работа написана четко и аккуратно. Все основные результаты снабжены полными доказательствами. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. В автореферате и самой диссертации имеются опечатки и незначительные погрешности редакционного характера, неизбежные в работе значительного объема. Они никоим образом не снижают положительного впечатления о диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертация Абузяровой Натальи Фаирбаховны «Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Южным федеральным университетом к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, всем критериям, в том числе, критериям п. 2.1 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», по диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Абузярова Наталья Фаирбаховна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
Баранов Антон Дмитриевич

25 мая 2023 г.

Контактные данные:
Рабочий тел.: +7(812) 328-97-01, e-mail: anton.d.baranov@gmail.com
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
1.1.1 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Адрес места работы:
199034, Северо-Западный федеральный округ,
г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, дом 7/9
Тел.: +7(812) 328-20-00; e-mail: spbu@spbu.ru

Личную подпись
Баранова А.Д.
удостоверяю

ЗАМЕСТИТЕЛЬ НАЧАЛЬНИКА
УПРАВЛЕНИЯ КАДРОВ
ГУОРП
ОС СУВОРОВА

26.05.2023