Отзыв официального оппонента
на диссертацию Абузяровой Натальи Фаирбаховны " Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций" , представленной на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 1.1.1 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

В основе диссертации лежит исследование инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций и в пространствах Ω – ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой, а также изучение двойственных объектов (замкнутых подмодулей в специальных весовых модулях целых функций).

Тематика диссератционной работы имеет веьсма богатую родословную, восходящую к Л. Эйлеру и его методам решений дифференциальных уравнений.

Актуальность темы диссертационной работы обусловлена тем, что полученные результаты дают более широкое понимание вопросов теории спектрального анализа и синтеза. В диссертационной работе показано, что результаты А.Алемана и Б. Коренблюма и поставленные ими задачи о возможных версиях спектрального синтеза допускают перенос на более широкий класс пространств $X \subseteq C^\infty(a;b)$, а именно, на пространства Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой. Следует отметить, что шкала таких пространств построена А.В. Абаниным.

Не вызывает сомнений тот факт, что эти результаты имеют важное теоретическое значение и могут быть применены для дальнейших исследований в области теории функций и функционального анализа. В силу своей новизны и значимости, результаты диссертанта могут быть использованы для получения новых приложений в теории дифференциальных уравнений.

Опишем теперь кратко содержание диссертации.

В первой изучается задача слабого спектрального синтеза для инвариантных подпространств оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действующего в пространстве $\mathcal{E}_a$, где $\mathcal{E}_a$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(-a;a)$ или пространство Ω-ультрадифференцируемых функций $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$.

Говорят, что W допускает *спектральный синтез в слабом смысле* (*слабый спектральный синтез*), если

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}, \tag{1}$$

В Главе 1 подробно исследован вопрос о том, для каких D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет место соотношение (1).

Во второй главе исследованы главные подмодули в модуле Шварца $\mathbf{P}_a = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_a)$, где $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$. А именно, уточннены алгебраическая и топологическая структура главных подмодулей и исследованы условия их слабой локализуемости.

В главе 3 изучена структура нулевых множеств и некоторые другие свойства делителей алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где

$$\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{или} \quad \Omega = \{r_n\omega\}, \;\; 0 < r_n \nearrow 1, \; n \to \infty, \tag{2}$$

ω — канонический вес.

В четвертой главе исследовано пространство Шварца $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$ и изучены условия представимости D-инвариантного подпространства W в этом пространстве в виде прямой (алгебраической и топологической) суммы.

В главе 5 подробно изучен вопрос о сохранении принадлежности целой функции какому-либо специальному классу $Q \subset H(\mathbb{C})$, выделеннному, например, ограничениями на рост, при возмущениях ее нулей.

В диссертации получены следующие основные результаты.

1) (глава 1) Доказаны теоремы о том, что
– D-инвариантное подпространство W пространства Ω-ультрадифференцируемых функций (и пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций) на интервале $(a;b)$, имеющее дискретный спектр, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль содержит подмодуль вида $\mathcal{J}(\varphi)$, то есть слабо локализуемый подмодуль, порожденный одной функцией.
– D-инвариантное подпространство W пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющее дискретный спектр, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль содержит функцию φ, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль, то есть такую, что $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$. И, как следствие этих теорем, установлено утверждение о том, что D-инвариантное подпространство с дискретным спектром W в пространстве Ω-ультрадифференцируемых (или всех бесконечно дифференцируемых) функций на интервале $(a;b)$
– всегда допускает слабый спектральный синтез, если $|I_{W_I}| > 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$ (в частности, если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(a;b)$) ,
– может как допускать слабый спектральный синтез, так и не допускать его, если $|I_{W_I}| = 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$,
– тривиально (совпадает со всем пространством), если $|I_{W_I}| < 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$
(определение радиуса полноты $r(\Lambda)$ комплексной последовательности приведено ниже, на с. 16, после предложения 1.13).

2) (глава 2) Для подпространства W_S, порожденного одним распределением S в пространстве Шварца, установлены удобные для проверки достаточные условия допустимости слабого спектрального синтеза, формулируемые в терминах поведения $|\varphi|$, где φ — преобразование Фурье-Лапласа распределения S; также доказан весовой критерий допустимости слабого спектрального синтеза подпространствами вида W_S.

3) (глава 3) Исследованы нулевые множества делителей весовых пространств целых функций. Получены критерии того, что сдвиг целочисленной последовательности представляет собой нулевое множество делителя алгебры Шварца или весовой

алгебры целых функций, реализующей пространство Ω-ультрараспределений. Доказана теорема об условии на считающую функцию вещественной последовательности, необходимом для того, чтобы эта последовательность была нулевым множеством делителя алгебры Шварца; также показано, что это условие нельзя усилить на классе всех вещественных последовательностей.

4) (глава 4) Доказаны теоремы о представимости D-инвариантного подпространства в пространстве Шварца в виде прямой алгебраической и топологической суммы его резидуальной и экспоненциальной компонент; условия представимости имеют ту же форму, что и условия допустимости слабого спектрального синтеза, но вместо радиуса полноты использована введенная нами более тонкая характеристика комплексной последовательности, тесно связанная с понятием делителя в алгебре Шварца.

5) (глава 5) Получены неулучшаемые условия сохранения различных классов целых функций, в том числе класса делителей алгебры Шварца, класса функций, порождающих слабо локализуемые главные подмодули, при возмущении нулевых множеств; эти условия применены для получения новых утверждений о слабом спектральном синтезе и о (не)полноте систем экспоненциальных функций.

Полученные результаты являются новыми и значимыми, они проливают свет на ряд областей теории дифференциальных операторов и теории целых функций. Вместе с тем, имеются замечания:

1. с. 87, стр. 8 снизу. Там должно быть 2^{k-1} вместо 2^{k+1}.

2. с. 125, стр. 4. Не совсем ясно, что имеется в виду $x \geq 0 (x \leq 0)$? Ведь если чётная функция возрастает при $x \geq 0$, то при $x \leq 0$ она убывает.

3. с. 187, стр. 9 снизу. В знаменателе множитель μ неправильно написан.

4. с. 242, стр. 10. Теорем 5.1 и 5.1 - неправильная ссылка, видимо.

Найденные неточности не влияют на характер оценки работы.

Подводя итог, можно сказать, все результаты диссертации являются новыми. диссертация выполнена на высоком научном уровне, доказательства теорем проведены в строгом соответствии с критериями математического анализа. Автореферат правильно и полно отражает результаты диссертации.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Южным федеральным университетом к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, всем критериям, в том числе, критериям п. 2.1 Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», по диссертациям на соискание ученой степени доктора наук: "...2.1. Диссертация на соискание ученой степени доктора наук должна быть научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, либо решена научная проблема, имеющая важное политическое, социальноэкономическое, культурное или хозяйственное значение, либо изложены новые научно обоснованные технические, технологические или иные решения, внедрение которых вносит значительный вклад в развитие страны ", а ее автор, Абузярова Наталья Фаирбаховна, несомненно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 1.1.1 – “вещественный, комплексный и функциональный анализ”.

25 мая 2023 г.

Официальный оппонент:
доктор физико–математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Казанского федерального университета

Каюмов Ильгиз Рифатович

Контактные данные:
Рабочий тел.: +7 (843) 233-70-37, e-mail: Ilgis.Kayumov@kpfu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Адрес места работы: 420008, Казань,
Кремлевская 35, каб. 505,
телефон 8(843) 292-72-79, e-mail: public.mail@kpfu.ru

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ОГРН 1021602841391 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
ПОДПИСЬ
Каюмова И. Р.
заверяю
Старший диспетчер Шарова И.А.