ОТЗЫВ

официального оппонента
о диссертацонной работе Абузяровой Натальи Фаирбаховны
«Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. -
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»

В диссертации изучаются инвариантные относительно оператора дифференцирования подпространства в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций и в пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой, - а также двойственные объекты - замкнутые подмодули целых функций. Автором рассматриваются задачи спектрального анализа и синтеза. Первая из них состоит в том, чтобы выяснить, каков запас экспоненциальных одночленов (корневых элементов оператора дифференцирования) в заданном инвариантном подпространстве. А вторая - найти возможные способы восстановления инвариантного подпространства по запасу содержащихся в нем экспоненциальных одночленов.

Задачи спектрального анализа и синтеза для инвариантных подпространств, начиная с результата Л. Эйлера об описании множества решений однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами (1747 г.), были и остаются предметом изучения многих математиков. В 1947-49 гг. Л. Шварц доказал допустимость спектрального синтеза для инвариантных относительно группы операторов сдвига аргумента подпространств непрерывных функций и бесконечно дифференцируемых функций на всей прямой, а также для инвариантных относительно дифференцирования подпространств целых функций в $H(\mathbf{C})$. Ж.-П. Кахану, П. Кусису, А.Ф. Леонтьеву, Д.Г. Диксону, Л. Хермандеру, Б. Мальгранжу, Л. Эренпрайсу, И.Ф. Красичкову-Терновскому, Р.С. Юлмухаметову, В.В. Напалкову, А.С.Кривошееву и другим авторам принадлежат многочисленные работы, касающиеся спектрального синтеза в ядре оператора свертки, действующего в пространствах непрерывных функций на интервале, на полупрямой, бесконечно дифференцируемых функций в выпуклой области n-мерного вещественного пространства, голоморфных функций в выпуклой области n-мерного комплексного пространства. Указанное ядро представляет собой частный случай подпространства, инвариантного относительно некоторого семейства операторов сдвига аргумента, а в случае бесконечно дифференцируемых или голоморфных функций – инвариантного и относительно оператора дифференцирования. Р. Мейз, Б.А. Тэйлор и Д. Вогт доказали существование в ядре локального оператора локального же базиса Шаудера из экспоненциальных решений, рассматривая пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга-Бьорка максимального типа. Д.А. Абанина (Полякова) рассмотрела ядро оператора свертки, порожденного мультипликатором, в пространстве ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале вещественной прямой. Были найдены условия, при которых в подпространстве решений однородного уравнения свертки имеется экспоненциально-полиномиальный базис.

Во всех перечисленных выше случаях авторами рассматривались подпространства, инвариантные относительно сдвигов и, как следствие, -относительно оператора дифференцирования. Для подпространств голоморфных функций эти инвариантности эквивалентны, а для неквазианалитических пространств дифференцируемых функций – нет. Впервые это отметили А.Алеман и Б. Коренблюм в 2008 г. Они начали изучение задач спектрального анализа и синтеза для общих инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций на интервале вещественной прямой $C^{\infty}(a;b)$ и обнаружили существование нетривиальных подпространств, не содержащих экспонент. Это привело к появлению версий спектрального синтеза, отличных от классической. Алеман и Коренблюм сформулировали и доказали эти версии для инвариантных подпространств в $C^{\infty}(a;b)$, содержащих конечные наборы экспоненциальных одночленов (в этом случае обе предложенные версии совпадают). Открытым остался вопрос о представлении общих инвариантных относительно дифференцирования подпространств в $C^{\infty}(a;b)$, а также его естественное распространение на дифференциально-инвариантные подпространства неквазианалитических пространств Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой, шкала которых в общем виде вместе с основополагающими фактами теории Ω-ультрараспределений была построена А.В. Абаниным в 2005-2008 гг.

Основной целью предпринятого автором диссертации исследования является изучение последних двух вопросов. При этом все задачи, приводящие к результатам о спектральном синтезе в ядре оператора свертки, в том числе действующего локально, (или в пересечении таких ядер), рассмотренные в литературе для бесконечно дифференцируемых или ультрадифференцируемых функций, вкладываются как частный случай в задачу исследования новых версий спектрального синтеза для общих дифференциально-инвариантных подпространств соответствующего пространства. Это замечание, а также все сказанное выше, служат обоснованием актуальности проведенных диссертантом исследований.

Диссертация состоит из введения и пяти глав.

В главе 1 решается задача слабого спектрального синтеза для инвариантных подпространств оператора дифференцирования в пространствах $C^{\infty}(a;b)$ и $U_{\Omega}(a;b)$ (Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале). Автор пользуется двойственным методом, сводя исходную задачу к эквивалентной задаче о подмодулях целых функций. Основной результат для обоих пространств, $C^{\infty}(a;b)$ и $U_{\Omega}(a;b)$, одинаков и состоит в том, что если радиус полноты последовательности показателей экспоненциальных одночленов, содержащихся в инвариантном подпространстве W, меньше половины длины резидуального интервала этого подпространства, то спектральный синтез в слабом смысле имеет место; если имеет место обратное строгое неравенство, то W совпадает со всем пространством. Показано также, что в критическом случае равенства двух указанных характеристик существуют как инвариантные подпространства, допускающие слабый спектральный синтез, так и подпространства, не допускающие слабого синтеза. Благодаря тому, что практически все рассмотрения проводятся в двойственных терминах, автору удается эффективно задействовать аппарат теории целых функций. В качестве следствий основного результата в диссертационной работе доказан ряд новых теорем о спектральном синтезе в ядре и в пересечении ядер операторов свертки, действующих в пространствах ультрадифференцируемых функций.

Обнаружение критического случая в задаче спектрального синтеза и критерий синтезируемости в терминах подмодулей предопределили содержание главы 2. В ней исследуются главные подмодули в весовых модулях целых функций, двойственных исходным пространствам, (слабая) локализуемость которых обеспечивает положительный ответ на вопрос о синтезе в критическом случае. Доказан весовой критерий слабой локализуемости главного подмодуля и получены удобные для проверки достаточные условия.

В третьей главе диссертации автор изучает нулевые множества делителей весовых пространств целых функций P, реализующих сильные сопряженные к пространствам $C^\infty(a;b)$ и U_Ω $(a;b)$. Получены неулучшаемые результаты о сдвигах целочисленной последовательности, остающихся нулями делителя в P (целочисленная последовательность – нулевое множество функции $\sin \pi z$, а последняя является делителем во всех рассмотренных в работе пространствах целых функций). Также доказаны теоремы о необходимых и достаточных (как по отдельности, так и вместе) условиях того, что заданная вещественная последовательность представляет собой нулевое множество делителя пространства P. Разработанные методы и техники имеют перспективы дальнейших применений для исследования нулевых множеств целых функций.

В четвертой главе изучается возможность представления инвариантного относительно дифференцирования подпространства в $C^\infty(a;b)$ в виде прямой суммы его экспоненциальной и резидуальной компонент. Сама постановка вопроса о спектральном синтезе в такой форме является новой. Автору удалось установить, что важную роль для допустимости такого представления играет принадлежность спектра подпространства (домноженного на i) множеству нулей какого-либо делителя пространства P. Доказаны теоремы о представимости инвариантного подпространства в пространстве $C^\infty(a;b)$ в виде прямой алгебраической и топологической суммы его резидуальной и экспоненциальной компонент; условия представимости имеют ту же форму, что и условия допустимости слабого спектрального синтеза. При этом вместо радиуса полноты автор вводит более тонкую характеристику комплексной последовательности, тесно связанная с понятием делителя в алгебре Шварца (образе при преобразовании Фурье-Лапласа пространства всех распределений с компактным носителем на прямой).

В пятой главе рассмотрены вопросы о сохранении принадлежности функции какому-либо специальному классу целых функций Q, выделенному ограничениями на рост и (или) какими-либо другими условиями, при возмущениях ее нулей. Результатами этой главы являются неулучшаемые условия сохранения различных классов целых функций при возмущении нулевых множеств, в том числе для класса делителей алгебры Шварца, класса функций, порождающих слабо локализуемые главные подмодули. Также приведены применения полученных условий, дающие новые утверждения о слабом спектральном синтезе и о (не)полноте систем экспоненциальных функций.

Приведу список замечаний.

1. На стр.35, перед формулировкой теоремы 2.4, использован неверный шрифт для обозначения пространства: вместо $\mathcal{P}_{a,0}$, надо $\boldsymbol{P}_{a,0}$.
2. На стр. 192, в замечании 3.11, по-видимому, имеется ввиду функция $l(t)=\ln^2(1+t^2)$, а не $l(t)=\ln(1+t^2)$.
3. Утверждения о нулевых множествах целых функций из специальных классов (главы 3, 4) можно было бы проиллюстрировать большим количеством примеров, чем это сделано автором.
4. Обзоры глав во введении можно было бы сократить, сконцентрировав в них лишь формулировки главных, основных результатов, а пояснения и следствия представить в соответствующих главах, избегая этим повторений.

Указанные недостатки не влияют на положительное впечатление от содержания диссертационной работы и не умаляют ценности проведенного автором исследования и полученных результатов.

Результаты диссертации могут быть полезны специалистам, проводящим исследования в области теории целых и субгармонических функций, а также в других областях анализа, работающим в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, ПОМИ РАН им. В.А. Стеклова, Южном федеральном университете, Институте математики с ВЦ УФИЦ РАН и других научных центрах.

Выносимые на защиту результаты являются новыми, корректно доказанными, получены автором лично, своевременно опубликованы в 18 статьях в изданиях, входящих в БД Scopus и (или) Web of Science, а также в Перечень научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, представленных для защиты в диссертационные советы ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет». По полученным результатам были представлены доклады на 17 международных и всероссийских конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании вышесказанного считаю, что диссертация Абузяровой Натальи Фаирбаховны «Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций» соответствует требованиям, предъявляемым Южным федеральным университетом к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук. Диссертация удовлетворяет всем требованиями, включая п. 2.1 о докторских диссертациях, Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет», паспорту специальности 1.1.1 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а ее автор, Абузярова Наталья Фаирбаховна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 - «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Московский педагогический
Государственный университет»

Брайчев Георгий Генрихович

Контактные данные:
Рабочий тел.: +7(495) 438-19-21 , e-mail: braichev@mail.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.01.– «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Адрес места работы:
119991, Центральный федеральный округ,
г. Москва, улица Малая Пироговская, дом 1, стр. 1
Тел.: +7(499) 245-03-10;
e-mail: mail@mpgu.su

Г.Г. Брайчева
УДОСТОВЕРЯЮ
Зам. начальника
Управления
делами С.С. Яковлев