Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«Южный федеральный университет»

Методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода с логарифмической особенностью ядра для двухмерных задач электродинамики

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2022

УДК 537.86
М21

Коллектив авторов:
А. М. Лерер, П. Е. Тимошенко, И. Н. Иванова

М21 Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с логарифмической особенностью ядра для двухмерных задач электродинамики/ А. М. Лерер, П. Е. Тимошенко, И. Н. Иванова — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2022. — 21 с.

В учебно-методическом пособии описаны методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода с логарифмической особенностью ядра и разобраны типовые примеры. Учебно-методическое пособие может быть использовано при подготовке студентов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики, математического моделирования, радиофизике, прикладной механике, электродинамике и материаловедении, а также инженерами и научными работниками, занимающимися теоретическими исследованиями и разработкой новых математических моделей, описывающих в интегральном представлении процессы излучения, распространения, дифракции и трансформации волн в естественных и искусственных средах.

УДК 537.86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Начало теории интегральных уравнений было заложено в начале 20-го века в работах шведского математика Эрика Ивара Фредгольма, который исходил из идеи аппроксимации интеграла конечными интегральными суммами. Позже Э. Шмидт предложил новый подход к построению теории линейных интегральных уравнений, основанный на представлении ядра интегрального оператора в виде суммы вырожденного ядра и ядра, малого по норме. Это позволило упростить вывод основных теорем Фредгольма. В настоящее время теория линейных интегральных уравнений Фредгольма получила широкое распространение при решении широкого круга задач [1, 2] в области прикладной математики, математического моделирования, прикладной механике, электродинамике и материаловедении, а также в теоретических исследованиях и разработках новых математических моделей, описывающих в интегральном представлении процессы излучения, распространения, дифракции и трансформации волн в естественных и искусственных средах.

Интегральные уравнения (ИУ) [3] — это уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. Если интегральное уравнение содержит также производные от неизвестной функции, то говорят об *интегро-дифференциальном уравнении* (ИДУ).

Неоднородные линейные интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода имеют следующий вид:

$$\int\limits_a^b K(s,x)f(s)\,ds = \psi(x), \quad s,x \in [a,b], \tag{1}$$

$$\lambda f(x) + \int\limits_a^b K(s,x)f(s)\,ds = \psi(x), \quad s,x \in [a,b], \tag{2}$$

где f — неизвестная функция, ψ и K — известные функции, определенные на отрезке $[a,b]$, который может быть как конечным, так и бесконечным, λ — постоянная величина, *параметр интегрального уравнения*, от которого зависит существование решения и его множественность, обычно называется *характеристическим числом*, а обратное ему число — *собственным*. Функция ψ обычно называется *свободным членом* уравнения или *функцией источника*, а функция двух переменных K – *ядром* ИУ, определяющим некий линейный интегральный оператор $\mathcal{L}$ равенством

$$\psi(x) = \mathcal{L}[f(s)] = \int\limits_a^b K(s,x) f(s)\, ds. \tag{3}$$

В ряде случаев, для краткости, удобно использовать операторную форму записи линейных интегральных уравнений (1) и (2):

$$\mathcal{L}[f] = \psi(x),$$
$$\lambda f(x) + \mathcal{L}[f] = \psi(x).$$

Линейный оператор $\mathcal{L}$ обладает свойствами аддитивности и однородности:

$$\mathcal{L}[f_1 + f_2] = \mathcal{L}[f_1] + \mathcal{L}[f_2],$$
$$\mathcal{L}[\lambda f] = \lambda \mathcal{L}[f], \quad \lambda = \text{const}.$$

При $\psi(x) = 0$ интегральное уравнение называется *однородным*, а при $\psi(x) \not\equiv 0$ — *неоднородным*. При $\lambda = 0$ уравнение (2) преобразуется к виду линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1).

Решение ИУ состоит в том, что при заданной непрерывной функции ядра K и функции ψ найти функцию f, непрерывную на отрезке $[a,b]$, которая при подстановке ее в исходное уравнение обращает последнее в тождество. Любое интегральное уравнение имеет тривиальное решение $f(x) \equiv 0$.

Если $f_n = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ — частные решения однородного ИУ, то их линейная комбинация $\sum_n C_n f_n$ с произвольными постоянными C_n также будет решением данного уравнения. Обычно в физических задачах это свойство называют *принципом суперпозиции*.

Общее решение $f = f(x)$ линейного неоднородного ИУ равно сумме общего решения $F = F(x)$ соответствующего однородного ИУ $\mathcal{L}[F] = 0$ и любого частного решения $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ неоднородного ИУ $\mathcal{L}[\tilde{f}] = \psi$:

$$f = F + \tilde{f} \tag{4}$$

Если однородное ИУ имеет только тривиальное решение $F \equiv 0$, то, в случае существования решения соответствующего неоднородного уравнения, оно будет единственным.

Основным предметом рассмотрения теории интегральных уравнений обычно являются L_2-ядра, удовлетворяющие условию:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s,x)|^2 \, ds dx < \infty. \tag{5}$$

Ядра, удовлетворяющие этому условию, будем называть *фредгольмовыми*.

Далее будем считать, что свободный член $\psi(x)$ либо непрерывен, либо удовлетворяет условию:

$$\int\limits_a^b |\psi(x)|^2 \, dx < \infty. \tag{6}$$

В интегральных уравнениях на ядра могут быть наложены дополнительные условия. Если выполняется тождество $K(s,x) = K(x,s)$, то это *симметричное ядро*. В случае комплексных ядер, если выполняется тождество $K(s,x) = \bar{K}(x,s)$, то такое ядро называют *эрмитовым*. Ядро $K(s,x)$ называется *вырожденным*, если оно имеет вид:

$$K(s,x) = \sum_n S_n(s) X_n(x), \tag{7}$$

где S_n и X_n — две системы линейно-независимых функций. *Разностное* ядро зависит от разности аргументов: $K(s,x) = K(s-x)$.

В общем случае задача решения ИУ Фредгольма первого рода (ИУ1) относится к классу *некорректных задач* [4]. Бесконечно малое изменение правой части может привести к конечному изменению решения. Продемонстрируем это утверждение на примере следующего уравнения:

$$\int\limits_{-1}^{1} \exp(ik(x-s)) f(s) \, ds = 1, \quad |x| \leqslant 1, \tag{8}$$

где k — постоянная величина. Представим неизвестную функцию f в виде $f(s) + C\exp(i\omega s)$ (C и ω — постоянные величины):

$$\int\limits_{-1}^{1} \exp(ik(x-s))\,[f(s) + C\exp(i\omega s)]\;ds = 1. \tag{9}$$

После частичного интегрирования, получим:

$$\int\limits_{-1}^{1} \exp(ik(x-s))f(s)\,ds = 1 - 2C\exp\left[\frac{\sin(\omega-k)}{\omega-k}\right]. \tag{10}$$

Если устремить ω к бесконечности, то правая часть уравнения будет стремиться к единице. Следовательно, добавление быстро осциллирующего члена к решению приводит к малому изменению правой части. Из этого можно сделать вывод, что задача некорректно поставлена[1].

С классом некорректных задач при решении ИУ1 часто сталкиваются на практике [6, 7], например, при решении задач синтеза антенн, у которых ядро представлено в виде гладкой[2] функции.

Далее будем рассматривать решения ИУ Фредгольма с ядром, имеющим логарифмическую особенность, т.е. при $s \to x$:

$$K(s,x) \approx C\ln|s-x|. \tag{11}$$

Такие ядра встречаются в большинстве двумерных задач дифракции и распространения волн [6, 7]. Ниже будет показано, что решение ИУ1 с логарифмическим ядром может быть сведено к решению ИУ второго рода (ИУ2), поскольку решение ИУ2 при любых ядрах представляет корректную задачу.

Представленные далее материалы основаны на работе [8]. В качестве дополнительных материалов для углубленного изучения методов решения интегрально-дифференциальных уравнений рекомендуется [1, 2].

---

[1]Согласно определения, данного Жаком Адамаром [5], корректно поставленная задача в математике — прикладная задача, математическое решение которой существует, единственно и устойчиво.

[2]Гладкая функция, или непрерывно дифференцируемая функция, — функция, имеющая непрерывную производную на всём множестве определения.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Рассмотрим решения интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} K(x,s)f(s)ds = \psi(x), \quad |x| \leqslant 1, \tag{1.1}$$

и интегро-дифференциального (ИДУ) уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1} K(x,s)f(s)ds = \psi(x), \quad |x| \leqslant 1. \tag{1.2}$$

В начале разберем некоторые частные случаи решения уравнений (1.1) и (1.2) с ядром, содержащим логарифмическую особенность, и полиномами Чебышева первого рода T_n и второго рода U_n, которые являются собственными функциями интегрального и интегро-дифференциального операторов.

При учете логарифмических особенностей понадобятся следующие формулы для аналитического вычисления интегралов:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} \ln\frac{|x-s|}{C}\,ds = \lambda_n T_n(x), \quad \lambda_n = \begin{cases} \ln 2C, & n = 0, \\ n^{-1}, & n \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}U_n(s)\ln\frac{|x-s|}{C}\,ds = \mu_n U_n(x), \quad \mu_n = n+1. \tag{1.4}$$

Формула (1.3) доказана в [1]. Для доказательства (1.4) используем соотношения для полиномов Чебышева первого и второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}U_n(s)\ln\frac{|x-s|}{C}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(s)-T_{n+2}(s)}{\sqrt{1-s^2}}\ln\frac{|x-s|}{C}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\lambda_n T_n(x) - \lambda_{n+2} T_{n+2}(x)\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[U_{n-1}(x) - U_{n+1}(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x} T_{n+1} = (n+1)U_n(x). \tag{1.5}$$

При $n = 0$ в (1.5) отсутствует член U_{n-1}, но дальнейшие преобразования справедливы и при $n = 0$.

Формулы (1.3) и (1.4) позволяют найти решение следующих ИУ и ИДУ, содержащих логарифмическую особенность в ядре:

$$\frac{C_2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{|x-s|}{C_1} f(s)\,ds = \psi(x), \quad |x| \leqslant 1, \tag{1.6}$$

$$\frac{C_2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{|x-s|}{C_1} f(s)\,ds = \psi(x), \quad |x| \leqslant 1. \tag{1.7}$$

Решение (1.6) представим в виде ряда:

$$f(x) = \frac{2}{\pi C_2\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n}{\lambda_n}\nu_n T_n(x), \quad \nu_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

где t_n — коэффициенты в разложении в ряд ψ по полиномам Чебышева первого рода:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n t_n T_n(x),$$
$$t_n = \int\limits_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\psi(x)\,dx.$$

Аналогично, решение (1.7) представим в виде ряда:

$$f(x) = \frac{2}{\pi C_2}\sqrt{1-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{\mu_n}U_n(x) \tag{1.9}$$

где u_n — коэффициенты в разложении в ряд ψ по полиномам Чебышева второго рода:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} u_n U_n(x), \tag{1.10}$$

$$u_n = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,U_n(x)\psi(x)\,dx. \tag{1.11}$$

Если полином степени N, то ряды (1.8) и (1.9) содержат только члены $n \leqslant N$.

На основании представленных выше рассуждений можно рассмотреть решение уравнений (1.1), содержащих логарифмическую особенность в ядре:

$$-\frac{C_2}{\pi}\ln\frac{|x-s|}{C_1}. \tag{1.12}$$

Из ядра K выделяем логарифмическую особенность, выполнив следующую замену:

$$\begin{aligned}
K(s,x) &\to \frac{C_2}{\pi}\left[K^{(0)}(s,x) + K^{(1)}(s,x)\right], \\
K^{(0)}(s,x) &= -\ln\frac{|x-s|}{C_1}, \\
K^{(1)}(s,x) &= K(s,x) - K^{(0)}(s,x),
\end{aligned}$$

где $K^{(0)}$ — часть ядра, содержащая выделенную в явном виде логарифмическую особенность, $K^{(1)}$ — часть ядра с исключенной логарифмической особенностью.

Преобразуем уравнение (1.1), выполняя замену ядра:

$$-\frac{C_2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{|x-s|}{C_1}f(s)\,ds = \psi(x) - \frac{C_2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}K^{(1)}(s,x)f(s)\,ds. \tag{1.13}$$

Используя (1.6), представим решение уравнения (1.13) в виде:

$$f(x) = \frac{2}{\pi C_2\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n - \tilde{t}_n}{\lambda_n}\nu_n T_n(x), \tag{1.14}$$

$$\tilde{t}_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \int\limits_{-1}^{1} f(s) K^{(1)}(s,x) f(s)\, ds. \qquad (1.15)$$

Корректность решения ИУ1 с логарифмическим ядром можно доказать, получив ИУ2. Для этого нужно подставить (1.15) в (1.14) и изменить порядок интегрирования.

В формулах (1.14) и (1.15) функцию f можно представить в виде следующего разложения в ряд по полиномам Чебышева первого рода:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(T)} \nu_n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (1.16)$$

$$X_n^{(T)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx. \qquad (1.17)$$

Подставив (1.16) и (1.15) в (1.14), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$X_n^{(T)} = \frac{1}{C_2 \lambda_n} \left[t_n - \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm} X_m^{(T)} \right], \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (1.18)$$

$$T_{nm} = \frac{2}{\pi^2} \nu_m \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \int\limits_{-1}^{1} K^{(1)}(s,x) \frac{T_m(s)}{\sqrt{1-s^2}}\, ds. \qquad (1.19)$$

Так как функция $K^{(1)}(s,x)$ не имеет особенности при $s \to x$, интегралы могут быть найдены численно с помощью квадратур наивысшей точности для этого типа интегралов [12]. Данный способ будет представлен ниже.

Рассмотрим решение уравнений (1.2), содержащих логарифмическую особенность в бисингулярном ядре:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{C_2}{\pi} \ln \frac{|x-s|}{C_1}. \qquad (1.20)$$

Аналогичным образом из ядра K выделяем логарифмическую особенность, выполняя следующую замену:

$$K(s,x) \to \frac{C_2}{\pi} \left[K^{(0)}(s,x) + K^{(1)}(s,x) \right],$$

$$
\begin{aligned}
&K^{(0)}(s,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\frac{|x-s|}{C_1},\\
&K^{(1)}(s,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{K}^{(1)}(s,x),\\
&\tilde{K}^{(1)}(s,x) = K(s,x) - K^{(0)}(s,x).
\end{aligned}
$$

Преобразуем уравнение (1.2), выполняя замену ядра:

$$
-\frac{C_2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-1}^{1}\ln\frac{|x-s|}{C_1}f(s)\,ds = \psi(x) - \frac{C_2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}K^{(1)}(s,x)f(s)\,ds. \tag{1.21}
$$

Используя (1.7), представим решение уравнения (1.21) в виде:

$$
f(x) = \frac{2}{\pi C_2}\sqrt{1-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n-\tilde{u}_n}{\mu_n}U_n(x), \tag{1.22}
$$

$$
\tilde{u}_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_n(x)\,dx\int\limits_{-1}^{1}K^{(1)}(s,x)f(s)\,ds. \tag{1.23}
$$

В формулах (1.22) и (1.23) функцию f можно представить в виде следующего разложения в ряд по полиномам Чебышева второго рода:

$$
f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}X_n^{(U)}\sqrt{1-x^2}U_n(x), \tag{1.24}
$$

$$
X_n^{(U)} = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_n(x)f(x)\,dx. \tag{1.25}
$$

Подставив (1.24) и (1.25) в (1.22), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$
X_n^{(U)} = \frac{1}{C_2\mu_n}\left[u_m - \sum_{m=0}^{\infty}U_{nm}X_m^{(U)}\right], \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.26}
$$

$$
U_{nm} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_n(x)\,dx\int\limits_{-1}^{1}K^{(1)}(s,x)\sqrt{1-s^2}U_m(s)\,ds. \tag{1.27}
$$

Матричные элементы (1.11) и (1.25) системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (1.24) в общем случае находим численно с помощью квадратур наивысшей точности для этого типа интегралов [12].

В теории дифракции часто можно встретить разностное ядро. В этом случае:

$$\begin{aligned}&\tilde{K}^{(1)}(s,x)=\tilde{K}^{(1)}(s-x),\\&K^{(1)}(s,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{K}^{(1)}(s-x)=-\frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\tilde{K}^{(1)}(s-x).\end{aligned}\tag{1.28}$$

Подставляем (1.28) в (1.28), интегрируем по частям:

$$U_{nm}=-\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\int\limits_{-1}^{1}\tilde{K}^{(1)}(s-x)\frac{T_{m+1}(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds.\tag{1.29}$$

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

2.1. Решение интегрального уравнения методом Галеркина

Найдем решение следующего уравнения:

$$\int\limits_{-l}^{l} K(s,x) f(s)\, ds = \psi(x), \quad |x| \leqslant l. \tag{2.1}$$

Представим решение уравнения в виде разложения по полиномам Чебышева первого рода T_n:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n\left(\frac{x}{l}\right), \tag{2.2}$$

где X_n — неизвестные коэффициенты.

Подставим разложение (2.2) в (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \int\limits_{-l}^{l} K(s,x) \tilde{T}_n(s)\, ds = \psi(x), \tag{2.3}$$

$$\tilde{T}(x) = \frac{T_n\left(\dfrac{x}{l}\right)}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \tag{2.4}$$

Умножим (2.3) на $\tilde{T}_m$ и проинтегрируем по x в пределах $[-l, l]$. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} X_m = t_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

$$T_{nm} = \int\limits_{-l}^{l} \tilde{T}_n(x)\, dx \int\limits_{-l}^{l} K(s,x) \tilde{T}_m(s)\, ds, \tag{2.6}$$

$$t_n = \int\limits_{-l}^{l} \tilde{T}_m(x) \psi(x)\, dx. \tag{2.7}$$

Для вычисления коэффициентов T_{nm} выполним замену ядра K, выделяя логарифмическую особенность:

$$
\begin{aligned}
&K(s,x) \to K^{(0)}(s,x) + K^{(1)}(s,x),\\
&K^{(0)}(s,x) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2}{l}|x-s|,\\
&K^{(1)}(s,x) = K(s,x) - K^{(0)}(s,x),
\end{aligned}
$$

где $K^{(0)}$ — часть ядра, содержащая выделенную в явном виде логарифмическую особенность, $K^{(1)}$ — часть ядра с исключенной логарифмической особенностью.

В этом случае коэффициенты T_{mn} можно представить в виде суммы:

$$
\begin{aligned}
&T_{nm} = T_{nm}^{(0)} + T_{nm}^{(1)},\\
&T_{nm}^{(k)} = \int_{-l}^{l} \tilde{T}_n(x)\,dx \int_{-l}^{l} K^{(k)}(x,s)\tilde{T}_m(s)\,ds, \quad k = 0,1,
\end{aligned}
$$

где $T_{nm}^{(0)}$ — определяется аналитически с использованием (1.3), $T_{nm}^{(1)}$ — вычисляется численными методами.

Рассмотрим отдельно выражение $T_{nm}^{(0)}$ и упростим его. Для этого подставим (2.4), введем замену $x \to x/l$ и $s \to s/l$ и изменим пределы интегрирования на $[-1,1]$. В результате преобразований получим:

$$
\begin{aligned}
T_{nm}^{(0)} &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} \tilde{T}_n(x)\,dx \int_{-l}^{l} \tilde{T}_m(s)\ln\frac{2}{l}|x-s|\,ds =\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \left[-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(s)}{\sqrt{1-s^2}}\ln 2|x-s|\,ds\right].
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Используя (1.3) и условие ортогональности полиномов Чебышева, получим:

$$
T_{nm}^{(0)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4m}, & m = n \neq 0,\\ 0, & m \neq n, n = 0. \end{cases} \tag{2.9}
$$

Выражение $T_{nm}^{(1)}$ можно найти численно, используя квадратуру [12]:

$$\int\limits_{-l}^{l} K^{(1)}(x,s)\tilde{T}_m(s)\,ds \approx \frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} K^{(1)}(x,x_k)\cos\left[\frac{2k-1}{N}m\pi\right], \tag{2.10}$$

$$x_k = l\cos\left[\frac{2k-1}{N}m\pi\right].$$

2.2. Решение интегро-дифференциального уравнения методом Галеркина

Найдем решение следующего уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)\int\limits_{-l}^{l} G(x,s)E(s)\,ds = \psi(x), \quad |x| \leqslant l. \tag{2.11}$$

Рассматривая интеграл в (2.11), как неизвестную функцию в дифференциальном уравнении, получим:

$$\int\limits_{-l}^{l} G(x,s)E(s)\,ds = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \phi(x), \tag{2.12}$$

где $C_{1,2}$ — неизвестные постоянные, $\phi(x)$ — частное решение дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)\phi(x) = \psi(x).$$

Решаем методом Галеркина для ИУ, т. е. ищем решение уравнения в виде разложения по полиномам Чебышева

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(\frac{x}{l}), \tag{2.13}$$

где X_n — неизвестные коэффициенты.

Подставляем разложение (2.13) в уравнение (2.12) и умножим его на $\tilde{T}(x)$ и проинтегрируем в пределах от $-l$ до l по x. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} X_m = B_n + C_1 D_{1n} + C_2 D_{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.14}$$

где A_{mn}, B_m определяются как (2.6), (2.7),

$$D_{1n} = \int\limits_{-l}^{l} \tilde{T}_n(x) \cos ks\, dx = \begin{cases} (-1)^n \pi \mathrm{J}_{2p}\left(kl\right), & m = 2p, \\ 0, & m = 2p+1, \end{cases}$$

$$D_{2n} = \int\limits_{-l}^{l} \tilde{T}_n(x) \sin ks\, dx = \begin{cases} (-1)^n \pi \mathrm{J}_{2p+1}\left(kl\right), & m = 2p+1, \\ 0, & m = 2p. \end{cases}$$

Учитываем дополнительные условия: известно, что решение (2.11) ведет себя как $\sqrt{l^2 - x^2}$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n\left(\frac{x}{l}\right) = 0, \quad x = \pm l, \tag{2.15}$$

СЛАУ (2.14) и (2.15) позволяют найти решение уравнения (2.11).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А. Полиномы Чебышева

Полином Чебышёва первого рода $T_n(x)$ [9, 10] характеризуется как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, который меньше всего отклоняется от нуля на интервале $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k} = \\
&= \begin{cases} \cos(n \arccos x), & |x| \leqslant 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} x), & x \geqslant 1, \\ (-1)^n \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}(-x)), & x \leqslant -1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1, \\
&T_1(x) = x, \\
&T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Многочлен Чебышёва второго рода $U_n(x)$ [9, 10] характеризуется как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^n, интеграл от абсолютной величины которого по интервалу $[-1, 1]$ принимает наименьшее возможное значение:

$$\begin{aligned}
U_n(x) &= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (x^2-1)^k x^{n-2k} =
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ n+1, & |x| = 1, \\ \dfrac{\operatorname{sh}((n+1)\operatorname{arch} x)}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \dfrac{(-1)^n \operatorname{sh}((n+1)\operatorname{arch}(-x))}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}
$$

Многочлены Чебышёва второго рода $U_n(x)$ могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения:

$$
\begin{aligned}
&U_0(x) = 1, \\
&U_1(x) = 2x, \\
&U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

Корни многочленов $T_n(x)$ и $U_n(x)$ видны из следующей пары тождеств:

$$
T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{m=1}^{2n-1} \left(x - \cos \frac{\pi m}{2n} \right), \tag{A.5}
$$

$$
U_n(x) = 2^n \prod_{m=1}^{2n-1} \left(x - \cos \frac{\pi m}{n+1} \right). \tag{A.6}
$$

Необходимо отметить, что нули многочленов Чебышёва являются оптимальными узлами в различных интерполяционных схемах.

Важным свойством полиномов $T_n(x)$ является то, что они ортогональны по отношению к внутреннему произведению:

$$
\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x)\, dx = \tag{A.7}
$$

$$
= \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \pi/2, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}
$$

Аналогичным образом, $U_n(x)$ ортогональны по отношению к следующим внутренним произведениям:

$$\langle U_n(x), U_m(x)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)\,dx = \tag{A.8}$$
$$= \begin{cases} \pi/2, & n = m \neq -1, \\ 0, & n \neq m, n = m = -1, \end{cases}$$

$$\langle U_n(x), U_m(x)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)U_m(x)\,dx = \tag{A.9}$$
$$= \begin{cases} \pi/2, & n = m \neq -1, \\ 0, & n \neq m, n = m = 0. \end{cases}$$

Ниже рассмотрим некоторые полезные соотношения полиномов Чебышева первого и второго рода [9, 11]:

$$T_{-n}(x) = T_n(x), \tag{A.10}$$
$$U_{-n}(x) = -U_n(x), \tag{A.11}$$
$$U_{n+m}(x) = U_n(x)U_m(x) - U_{n-1}(x)U_{m-1}(x), \tag{A.12}$$
$$U_{n+1}(x) \cdot U_{n-1}(x) = [U_n(x) + 1] \cdot [U_n(x) - 1], \tag{A.13}$$
$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x), \tag{A.14}$$
$$T_{n+1}(x) = xU_n(x) - U_{n-1}(x), \tag{A.15}$$
$$T_{n\cdot m}(x) = T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)), \tag{A.16}$$
$$(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x), \tag{A.17}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}T_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x), \tag{A.18}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}U_n(x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x). \tag{A.19}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: «Наука», 1974. 456 с.
2. Митра Р. Таблицы интегралов сумм рядов и призведений. М.: «Физматлит», 1977. 486 с.
3. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: «Физматлит», 2003. 608 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: «Бином. Лаб. знаний», 2020. 636 с.
5. Алексеев А. С. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: «Наука», 1984. 253 с.
6. Минкович Б.М., Яковлев В.П. Теория синтеза антенн. М.: «Советское радио», 1969. 296 с.
7. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн. Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом. М.: «Советское радио», 1980. 253 с.
8. Lerer A., Schuchinsky A. Full-wave analysis of three-dimensional planar structures // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1993. Vol. 41, no. 11. P. 2002–2015.
9. Васильев Н., Зелевинский А. Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения // Квант. 1982. № 1. С. 12–19.
10. Кампе де Ферье Ж. Функции математической физики: справочное руководство. М.: «Физматлит», 1963. 101 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Вычислительные методы в электродинамике. М.: «Физматлит», 1963. 1108 с.
12. Крылов В.И., Л.Т. Шульгина. Справочная книга по численному интегрированию. М.: «Наука», 1966. 372 с.

Заказ № 8703 от 11.11.2022 г.
Усл. печ. лист. 1,22. Уч. изд. л. 0,5.

Отдел полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.