
Оглавление

Введение	5
1 Прямая линия	6
1.1 Базовые формулы для решения простейших задач на плоскости	6
1.2 Решение основных задач на плоскости	10
1.3 Решение базовых задач на прямую линию	15
2 Линии второго порядка	22
2.1 Элементарная теория линий второго порядка	22
3 Задачи для линий второго порядка, заданных общими уравнениями	32
3.1 Общее исследование линий второго порядка	33
4 Элементарная теория поверхностей второго порядка	49
4.1 Сфера	49
4.2 Конусы и цилиндры второго порядка	54
5 Общая теория поверхностей второго порядка	69
5.1 Упрощение уравнения центральной поверхности второго порядка ($I_3 \neq 0$)	70
5.2 Упрощение уравнения поверхности второго порядка, имеющую несобственный центр ($I_3 = 0, I_4 \neq 0$)	71

5.3	Упрощение уравнения поверхности второго порядка, центр которой прямая линия ($I_3 = I_4 = 0, I_2 \neq 0$)	71
5.4	Упрощение уравнения поверхности второго порядка, центр которой несобственная прямая ($I_2 = I_3 = I_4 = 0, S_2 \neq 0$) .	72
5.5	Упрощение уравнения поверхности второго порядка, центр которой плоскость ($I_2 = I_3 = I_4 = 0, S_2 = 0$)	73
5.6	Примеры и задачи	74
Литература		87

Введение

Как известно, аналитическую геометрию определяет метод координат, идея которого наиболее полно была изложена Рене Декартом (1596–1650). Традиционное содержание предмета обязательно содержит теорию образов первого и второго порядков.

В первой части пособия приводятся первоначальные сведения и методы решения задач аналитической геометрии на плоскости. При решении этих задач студенты испытывают обычные трудности, связанные с нестандартными формулировками и необходимостью перейти от геометрии к алгебре. Особое внимание в пособии уделяется линиям второго порядка.

Во второй части пособия приводятся основные сведения и методы решения задач по элементарной и общей теории поверхностей второго порядка.

Автор рассчитывает, что пособие будет полезно студентам первого курса физико-математических специальностей.

Глава 1

Прямая линия

1.1 Базовые формулы для решения простейших задач на плоскости

Расстояние между двумя точками в декартовой косоугольной системе координат с углом ω между координатными осями определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \omega}, \quad (1.1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}. \quad (1.2)$$

Площадь треугольника $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ в декартовой прямоугольной системе координат вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Если треугольник задан уравнениями сторон: $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, то его площадь вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} \quad (1.4)$$

Условие коллинеарности трех точек M_1, M_2, M_3 в аффинной системе координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.5)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Формулы деления отрезка $[M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2)]$ в отношении $\lambda \neq -1$ имеют вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1.7)$$

При $\lambda = 1$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.8)$$

Координаты центра вписанной окружности в треугольнике с вершинами M_1, M_2, M_3 и длинами сторон $|M_1M_2| = c, |M_1M_3| = b, |M_2M_3| = a$ определяются формулами:

$$x_0 = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \quad y_0 = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}. \quad (1.9)$$

Выведем формулу (1.4). Из систем уравнений, определяющих точки $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$, найдем по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_1 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_2 = \frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_3 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Высота, опущенная на сторону M_2M_3 , равна расстоянию от вершина M_1 до прямой M_2M_3 : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$d = \text{mod} \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \left| \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \right|^{-1},$$

так как

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = \frac{A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Длина стороны M_2M_3 вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} |M_2M_3| &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = \left| \frac{x_2 - x_3}{B_1} \right| \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \\ &= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{|B_1|} \cdot \text{mod} \left(\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \right) = \\ &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \text{mod} \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Площадь треугольника $M_1M_2M_3$ равна

$$S = \frac{1}{2} d |M_2M_3| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Формула (1.4) доказана.

Выведем теперь формулу (1.9). Для этого воспользуемся формулой (1.7) и свойствами биссектрисы угла треугольника.

Обозначим через M точку пересечения биссектрисы, выходящей из вершины M_3 , со стороной M_1M_2 . В этом случае

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{b}{a}$$

и по формулам (1.7) получим

$$M \left(\frac{x_1 + \frac{b}{a}x_2}{1 + \frac{b}{a}}, \frac{y_1 + \frac{b}{a}y_2}{1 + \frac{b}{a}} \right)$$

или

$$M \left(\frac{ax_1 + bx_2}{a + b}, \frac{ay_1 + by_2}{a + b} \right).$$

По другой школьной формуле известно, что

$$\frac{|M_3O|}{|OM|} = \frac{a + b}{c},$$

поэтому из (1.7) следует, что

$$O \left(\frac{x_3 + x \frac{a+b}{c}}{1 + \frac{a+b}{c}}, \frac{y_3 + y \frac{a+b}{c}}{1 + \frac{a+b}{c}} \right)$$

или

$$O \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c} \right).$$

Формула (1.9) доказана.

Остальные формулы хорошо известны из указанной в конце пособия литературе.

1.2 Решение основных задач на плоскости

Задача 1.1. Расстояние между точками $M_1(1, 2)$ и $M_2(2, 1)$ равно 1. Найти координатный угол ω .

Решение. По формуле (1.1) имеем

$$\sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + 2(1-2)(2-1)\cos\omega} = 1$$

или

$$\sqrt{2 - 2\cos\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\omega = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\omega = \pi/3$.

Задача 1.2. Найти прямоугольные координаты точек, равноудалённых от точек $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$. лежащих на биссектрисах координатных углов.

Решение. Найдём точки $M(x, x)$, $N(x, -x)$ из условий:

$$|AM| = |BM|, \quad |AN| = |BN|,$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (x-3)^2} \Rightarrow x = 1,$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (-x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (-x-3)^2} \Rightarrow x = 2.$$

Ответ: $M(1, 1)$, $N(2, -2)$.

Задача 1.3. В треугольнике ABC со сторонами

$$A(3, 1), \quad B(7, 5), \quad C(4, -1)$$

найти бóльший угол. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Найдём длины сторон треугольника ABC :

$$|AB| = \sqrt{(7-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32};$$

$$|AC| = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5};$$

$$|BC| = \sqrt{(4-7)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{45}.$$

Найдём угол, лежащий против бóльшей стороны, в нашем случае это $|BC|$. Запишем теорему косинусов в следующем виде:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cos \angle A.$$

Выразим из последнего равенства $\cos \angle A$:

$$\cos \angle A = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} < 0.$$

Следовательно, треугольник ABC — тупоугольный, с тупым углом $\angle A$.

Ответ: Угол $\angle A$.

Задача 1.4. Через точки $A(4, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -6)$ проведена окружность. Найти её центр и радиус.

Решение. Центр искомой окружности определяется из равенств

$$\begin{cases} |AO|^2 = |BO|^2 \\ |AO|^2 = |CO|^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x + 3)^2 + (y - 2)^2, \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y + 6)^2. \end{cases}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$\begin{cases} 7x + y - 6 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow O(1, -1).$$

Теперь найдём радиус $R = |OA| = 5$.

Ответ: $O(1, -1)$, $R = 5$.

Задача 1.5. На продолжении отрезка $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 5)$ найти точку M из условия

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = 2.$$

Решение. В этом случае $\lambda = -2$ и из формул (1.7):

$$x_M = \frac{1 - 2 \cdot 3}{1 - 2} = 5, \quad y_M = \frac{2 - 2 \cdot 5}{1 - 2} = 8.$$

Ответ: $M(5, 8)$.

Задача 1.6. Известны середины сторон треугольника

$$M_1(2, 4), \quad M_2(-3, 0), \quad M_3(2, 1).$$

Найти координаты вершин.

Решение. Пусть M_1, M_2, M_3 середины сторон AB, BC и AC . Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 2, \\ \frac{x_B + x_C}{2} = -3, \\ \frac{x_C + x_A}{2} = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 4, \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 0, \\ \frac{y_C + y_A}{2} = 1. \end{cases}$$

Решив эти системы уравнений, получим искомые координаты вершин.

Ответ: $A(7, 5), B(-3, 3), C(-3, -3)$.

Задача 1.7. Даны вершины $A(4, 3), C(-2, 5)$ квадрата $ABCD$. Найти вершины B и D .

Решение. По формулам (6) найдём центр квадрата $O(1, 4)$. Диагональ квадрата $|AC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, поэтому сторона квадрата

$$|AB| = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{5}.$$

Точки B и D найдём из условия, что

$$\begin{cases} |OB| = |OD| = \sqrt{10}, \\ |CB| = |CD| = 2\sqrt{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{10}, \\ \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

Возведём в квадрат обе части уравнения

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-4)^2 = 10, \\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = 20, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 10, \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 20. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения левую и правую части первого уравнения, получим

$$3x - y + 1 = 0.$$

Подставим $y = 3x + 1$ в первое уравнение системы

$$(x - 1)^2 + (3x - 3)^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 7, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $B(2, 7), D(0, 1)$.

Задача 1.8. В треугольнике с вершинами $A(5, -4), B(-1, 2), C(5, 1)$ найти длину медианы AD . Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Найдём середину стороны BC по формуле (1.8):

$$D\left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{2 + 1}{2}\right); \quad D\left(2, \frac{3}{2}\right).$$

Вычислим теперь длину AD :

$$|AD| = \sqrt{(5 - 2)^2 + \left(-4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{137}}{2}.$$

Ответ: $|AD| = \frac{\sqrt{137}}{2}$.

Задача 1.9. В треугольнике с вершинами $A(4, 1), B(7, 5), C(-4, 7)$ проведена биссектриса AD . Найти её длину. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Найдём длины сторон

$$|AB| = 5, \quad |AC| = 10.$$

Имеет место пропорция

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = 2.$$

Координаты точки D найдём, используя формулу (1.7):

$$D\left(\frac{-4 + 7 \cdot 2}{1 + 2}, \frac{7 + 5 \cdot 2}{1 + 2}\right); \quad D\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right).$$

Теперь находим $|AD|$: $|AD| = \frac{10}{3}\sqrt{2}$.

Ответ: $|AD| = \frac{10}{3}\sqrt{2}$.

Задача 1.10. В прямоугольный треугольник ABC : $A(9, 2)$, $(0, 20)$, $C(-15, -10)$ вписана окружность. Найти центр и радиус этой окружности. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Воспользуемся формулой (1.9)

$$\begin{cases} x_0 = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}, \\ y_0 = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}. \end{cases}$$

Найдём стороны треугольника ABC :

$$a = |BC| = 15\sqrt{5}, \quad b = |AC| = 12\sqrt{5}, \quad c = |AB| = 9\sqrt{5}.$$

Так как $a^2 = b^2 + c^2$, то данный треугольник прямоугольный. Из приведённых выше формул получим $O(0, 5)$.

Радиус вписанной окружности найдём из формулы $S = pr$, где S площадь треугольника ABC , а p полупериметр

$$r = \frac{S}{p} = \frac{12\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5}}{36\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

Ответ: $(0, 5)$, $r = 3\sqrt{5}$.

Задача 1.11. Найти площадь треугольника с вершинами $A(4, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -6)$. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Применяя формулу (1.4), получим

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 30.$$

Ответ: $S_{\Delta} = 30$.

1.3 Решение базовых задач на прямую линию

Задача 1.12. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A = (-1, -2)$ с угловым коэффициентом $k = 3$.

Решение основано на следующей формуле [3]:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.10)$$

Подставив заданные угловой коэффициент и точку, получим: $y = 3x + 1$.

Ответ: $y = 3x + 1$.

Задача 1.13. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1, 3)$ и $M_2(2, 4)$.

Решение. Используем уравнений прямой, проходящей через две точки [3]:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.11)$$

Подставим в общую формулу координаты точек:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 3}{4 - 3}.$$

После упрощения получаем $x - y + 2 = 0$.

Ответ: $x - y + 2 = 0$.

Задача 1.14. В треугольнике ABC :

$$A(2, 3), \quad B(4, 1), \quad C(6, -5).$$

найти уравнение медианы AD .

Решение. Найдём середину отрезка BC :

$$D \left(\frac{4 + 6}{2}, \frac{1 - 5}{2} \right); \quad D(4, -2).$$

Используя формулу (3.10), получаем

$$\frac{x - 4}{-2 - 4} = \frac{y + 2}{3 + 2}; \quad 5x + 2y - 16 = 0.$$

Ответ: $5x + 2y - 16 = 0$.

Задача 1.15. В треугольнике ABC :

$$A(-4, -4), \quad B(6, 1), \quad C(2, 4)$$

найти уравнение биссектрисы, выходящей из вершины C . Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Согласно характеристическому свойству биссектрисы, имеет место пропорция

$$\lambda = \frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|DB|}.$$

Вычислим длины сторон CA и CB :

$$|CA| = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-4 - 4)^2} = 10,$$

$$|CB| = \sqrt{(-2 + 6)^2 + (-4 + 1)^2} = 5.$$

Тогда точка D делит отрезок AB в отношении $\lambda = 2$. Из формул (1.7) получим

$$D \left(\frac{-4 + 6 \cdot 2}{1 + 2}, \frac{-4 + 1 \cdot 2}{1 + 2} \right); \quad D \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Применяя формулу (3.10), получаем уравнение биссектрисы

$$7x + y - 18 = 0.$$

Ответ: $7x + y - 18 = 0$.

Задача 1.16. Найти уравнение прямой, параллельной прямой

$$3x - 2y + 4 = 0$$

и проходящей через точку $A(7, 4)$. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Уравнение прямой будем искать в виде

$$3x - 2y + C = 0.$$

Так как прямая проходит через точку $A(7, 4)$, то координаты точки должны удовлетворять уравнению прямой:

$$3 \cdot 7 - 2 \cdot 4 + C = 0.$$

Отсюда, $C = -14$. Искомая прямая

$$3x - 2y - 14 = 0.$$

Ответ: $3x - 2y - 14 = 0$.

Задача 1.17. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(0, 5)$, равноудалённую от точек $A(1, 2)$ и $B(5, 4)$. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Из элементарных геометрических соображений следует, что задача имеет два решения: прямая, параллельная отрезку AB , и прямая, проходящая через середину этого отрезка.

Найдём уравнение прямой AB . По формуле (3.10) имеем

$$\frac{x - 5}{1 - 5} = \frac{y - 4}{2 - 4}; \quad x - 2y + 3 = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно прямой AB , имеет вид:

$$x - 2y + C = 0, \quad C = 2 \cdot 5 - 0 = 10.$$

Одна из двух искомых прямых имеет вид $x - 2y + 10 = 0$.

Вторая прямая проходит через середину отрезка AB : $C(3, 3)$ и имеет вид:

$$\frac{x}{3} = \frac{y - 5}{3 - 5}.$$

Ответ: $x - 2y + 10 = 0$, $2x + 3y - 15 = 0$.

Задача 1.18. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, 2)$ на прямую $3x + y + 4 = 0$. Система координат декартова прямоугольная.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой найдём из её уравнения:

$$y = -3x - 4.$$

Следовательно, используя признак перпендикулярности, угловой коэффициент искомой прямой $k = 1/3$. Уравнение перпендикуляра запишем в виде

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \quad \text{или} \quad x - 3y + 5 = 0.$$

Ответ: $x - 3y + 5 = 0$.

Задача 1.19. Найти расстояние между проекциями точек $A(1, -8)$, $B(5, -9)$ на прямую $x + 3y - 8 = 0$.

Решение. Множество прямых, перпендикулярных данной прямой, имеет вид,

$$3x - y + C = 0.$$

Подставляя координаты точек A и B , найдём перпендикуляры

$$AH: 3x - y - 4 = 0, \quad BG: 3x - y - 24 = 0.$$

Поэтому

$$H: \begin{cases} 3x - y - 4 = 0, \\ x + 3y - 8 = 0, \end{cases} \Rightarrow H(2, 2),$$

$$G: \begin{cases} 3x - y - 24 = 0, \\ x + 3y - 8 = 0, \end{cases} \Rightarrow G(8, 0),$$

$$|GH| = \sqrt{(8 - 2)^2 + 2^2} = \sqrt{40}.$$

Ответ: $2\sqrt{10}$.

Задача 1.20. Найти расстояние между двумя прямыми:

$$3x + 4y - 12 = 0, \quad 3x + 4y + 13 = 0.$$

Решение. Так как прямые параллельны, то расстояние между ними постоянно. Возьмём на первой прямой точку $A(0, 3)$ и найдём расстояние до второй прямой

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Ответ: $d = 5$.

Задача 1.21. Найти биссектрису угла между прямыми

$$9x - 12y + 2 = 0, \quad 4x - 3y + 1 = 0,$$

в котором находится точка $A(1, 1)$.

Решение. Для любой точки $M(x, y)$ на биссектрисе угла выполняется равенство $d_1 = d_2$, где

$$d_1 = \frac{|9x - 12y + 2|}{\sqrt{9^2 + 12^2}}, \quad d_2 = \frac{|4x - 3y + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}.$$

Так как для точек указанного угла выполняются неравенства

$$9x - 12y + 2 < 0, \quad 4x - 3y + 1 > 0,$$

то из равенства $d_1 = d_2$ следует, что

$$\frac{9x - 12y + 2}{15} = -\frac{4x - 3y + 1}{5}$$

или $21x - 21y + 5 = 0$.

Ответ: $21x - 21y + 5 = 0$.

Задача 1.22. Через точку пересечения прямых

$$x + 2y - 1 = 0, \quad x - y + 1 = 0$$

провести прямую, перпендикулярную прямой $2x + y - 1$.

Решение. Из уравнения пучка прямых

$$\lambda(x + 2y - 1) + \mu(x - y + 1) = 0$$

или

$$(1 + k)x + (2 - k)y + (k - 1) = 0, \quad k = \frac{\mu}{\lambda}$$

найдем угловой коэффициент искомой прямой

$$k_1 = -\frac{1 + k}{2 - k},$$

который удовлетворяет условию ортогональности $k_1 \cdot (-2) = -1$, то есть $k_1 = 1/2$.

Из равенства

$$\frac{1}{2} = -\frac{1+k}{2-k}$$

следует, что $k = -4$

Ответ: $-3x + 6y - 5 = 0$.

Задача 1.23. Луч света, выходящий из точки $A(1, 2)$, отразившись от прямой $x + 5y - 1 = 0$, проходит через точку $B(-1, 3)$. Найти точку встречи луча и прямой.

Решение. Найдём точку $A'(x', y')$, симметричную точке $A(1, 2)$ относительно прямой $x + 5y + 1 = 0$. Затем уравнение прямой $(A'B)$.

Проекция точки A на прямую

$$x + 5y + 1 = 0$$

находится из систем уравнений

$$C: \begin{cases} x + 5y + 1 = 0 \\ y - 2 = 5(x - 1) \end{cases} \implies C \left(\frac{7}{13}, -\frac{4}{13} \right),$$

$$A': \begin{cases} \frac{7}{13} = \frac{x' + 1}{2} \\ -\frac{4}{13} = \frac{y' + 2}{2} \end{cases} \implies A' \left(\frac{1}{13}, -\frac{34}{13} \right),$$

$$(A'B): \frac{x + 1}{\frac{1}{13} + 1} = \frac{y - 3}{-\frac{34}{13} - 3} \implies 73x + 14y + 31 = 0.$$

Точка встречи находится из системы уравнений

$$\begin{cases} 73x + 14y + 31 = 0, \\ x + 5y - 1 = 0, \end{cases} \implies D \left(-\frac{169}{351}, -\frac{104}{351} \right).$$

Ответ: $D \left(-\frac{169}{351}, -\frac{104}{351} \right)$.

Задача 1.24. На сторонах угла $\angle S$: $2x + y - 1 = 0$, $x - 3y - 4 = 0$ найти такие точки B и C , что треугольник ABC , где $A(1, 1)$, будет иметь наименьший периметр.

Решение. Найдём точки A' и A'' , симметричные точке A , относительно сторон угла. Пусть H_1, H_2 проекции точки A на заданные прямые.

1)

$$H_1: \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies H_1 \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right),$$

$$A': \begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{1 + x'}{2} \\ \frac{3}{5} = \frac{1 + y'}{2} \end{cases} \implies A' \left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

2)

$$H_2: \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases} \implies H_2 \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5} \right),$$

$$A'': \begin{cases} \frac{8}{5} = \frac{1 + x''}{2} \\ -\frac{4}{5} = \frac{1 + y''}{2} \end{cases} \implies A'' \left(\frac{11}{5}, -\frac{13}{5} \right).$$

Точки пересечения прямой $A'A''$ со сторонами угла будут искомыми точками:

$$(A'A''): \frac{x + \frac{3}{5}}{\frac{11}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{y - \frac{1}{5}}{-\frac{13}{5} - \frac{1}{5}} \implies 5x + 5y + 2 = 0.$$

$$B: \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases} \implies B \left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{5} \right),$$

$$C: \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases} \implies C \left(\frac{7}{10}, -\frac{11}{10} \right).$$

Ответ: $B \left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{5} \right), C \left(\frac{7}{10}, -\frac{11}{10} \right).$

Глава 2

Линии второго порядка

2.1 Элементарная теория линий второго порядка

В этой главе будут рассмотрены три вида линий: эллипс, гипербола и парабола, отнесённые к специально подобранной системе координат.

Далее будут использованы определения и свойства эллипса, гиперболы, параболы из цитированной литературы [3–5].

Задача 2.1. Известны фокусы эллипса $F_1(-1, 0)$, $F_2(0, 1)$ и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Найти уравнение эллипса.

Решение. По определению эллипса [5]

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

где M — любая точка эллипса, a — большая полуось.

Из условия $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4}$ следует, что

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{|F_1F_2|}{2a} \Rightarrow 2a = 4.$$

Уравнение эллипса принимает вид

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4.$$

Освободимся от иррациональности

$$\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 16 - 8\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + x^2 + y^2 - 2y + 1 \\
2x + 2y - 16 &= -8\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\
(x + y - 8)^2 &= \left(-4\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2 \\
x^2 + y^2 + 64 + 2xy - 16x - 16y &= 16(x^2 + y^2 - 2y + 1) \\
15x^2 - 2xy + 15y^2 + 16x - 16y - 48 &= 0.
\end{aligned}$$

Ответ: $15x^2 - 2xy + 15y^2 + 16x - 16y - 48 = 0$.

Задача 2.2. Найти каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки

$$A\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right), \quad B(2\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Решение. Координаты точек A и B удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{7}{4b^2} = 1, \\ \frac{8}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} 36u + 7v = 4, \\ 8u + 2v = 1. \end{cases} \quad \text{где } u = \frac{1}{a^2}, \quad v = \frac{1}{b^2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{16}, \\ v = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 = 16, \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Задача 2.3. Найти каноническое уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равно двум, а директрисы определяются уравнениями $x = \pm 5$.

Решение. Из уравнения директрис получим

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}, \Rightarrow a^2 = 5.$$

Найдём малую полуось b из равенства $a^2 - b^2 = c^2$, $b^2 = 4$.

Уравнение эллипса запишется в виде: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ответ: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Задача 2.4. Найти угол между касательными к эллипсу

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

проходящих через точку $M(3, 2)$.

Решение. Касательные прямые найдём из пучка прямых

$$A(x - 3) + B(y - 2) = 0,$$

используя признак касания: $A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$.

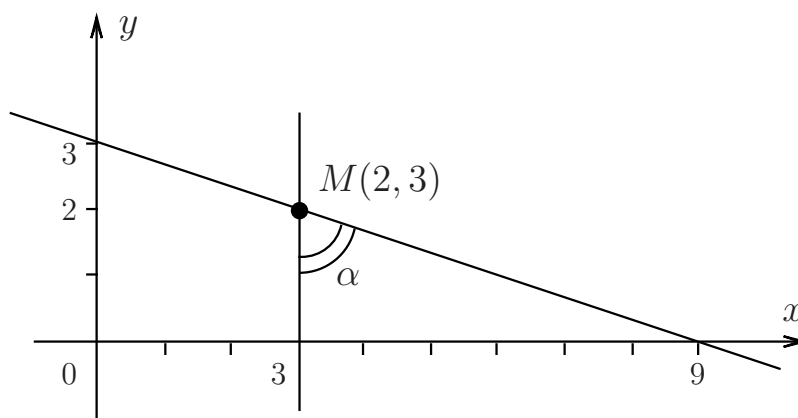
$$Ax + By - (3A + 2B) = 0,$$

$$9A^2 + 8B^2 = (3A + 2B)^2,$$

$$12AB - 4B^2 = 0,$$

$$\begin{cases} B = 0 \\ 3A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

Из рисунка



найдем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{2} = 3$

Ответ: $\operatorname{arctg} 3$

Задача 2.5. Найти расстояние между касательными к эллипсу

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

параллельными прямой $x + 2y - 1 = 0$.

Решение. Искомые касательные определяются уравнениями

$$x + 2y + C = 0,$$

где $C^2 = A^2a^2 + B^2b^2$, т. е. $C^2 = 9 + 4 \cdot 4 = 25$. Таким образом, касательные прямые заданы уравнениями:

$$x + 2y + 5 = 0, \quad x + 2y - 5 = 0.$$

Искомое расстояние найдём, например, от точки $M(1, -3)$

$$d = \frac{|1 + 2 \cdot (-3) - 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $d = 2\sqrt{5}$.

Задача 2.6. Даны фокусы $F_1(-1, 0)$, $F_2(0, 1)$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$ гиперболы. общее уравнение гиперболы.

Решение. По определению гиперболы:

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a,$$

где M любая точка гиперболы.

Зная эксцентриситет $\varepsilon = c/a$, найдём $2a$ из равенства

$$\sqrt{2} = \frac{2c}{2a} \Rightarrow 2a = 1.$$

Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= \pm 1; \\ (x+1)^2 + y^2 &= 1 \pm 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + x^2 + (y-1)^2; \\ 2x + 2y - 1 &= 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}. \end{aligned}$$

Обе части уравнения возведём в квадрат:

$$(2x + 2y - 1)^2 = \left[2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right]^2;$$

$$4x^2 + 4y^2 + 1 + 8xy - 4x - 4y = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4.$$

Приводим подобные слагаемые, в результате получим:

$$8xy - 4x + 4y - 3 = 0.$$

Ответ: $8xy - 4x + 4y - 3 = 0$.

Задача 2.7. Точки $A\left(5, \frac{9}{4}\right)$, $B\left(\frac{16}{3}, \sqrt{7}\right)$ лежат на гиперболе. Найти каноническое уравнение гиперболы.

Решение. Аналогично задаче 2.2, подставим координаты точек A и B гиперболы в её каноническое уравнение

$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1, \\ \frac{256}{9a^2} - \frac{7}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{1}{a^2}, \\ v = \frac{1}{b^2}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 400u - 81v = 16, \\ 256u - 63v = 9, \end{cases}$$

найдём

$$u = \frac{1}{16}, \quad v = \frac{1}{9}.$$

Следовательно,

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 2.8. Расстояние между фокусами гиперболы равно десяти, а директрисами служат прямые $x = \pm \frac{16}{5}$. Найти каноническое уравнение гиперболы.

Решение. Аналогично, как и в задаче 2.3, запишем уравнение директрис

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{5} = \frac{a^2}{5} \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

Из соотношения $c^2 - a^2 = b^2$ найдём, что

$$b^2 = 25 - 16 = 9.$$

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 2.9. Из точки $M(3, 2)$ проведены касательные к гиперболе

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Найти прямую, проходящую через точки касания.

Решение. Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ точки касания прямых, проходящих через точку $M(2, 1)$. Тогда из уравнений касательных к гиперболе

$$\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{9} = 1, \quad \frac{xx_2}{16} - \frac{yy_2}{9} = 1$$

получим уравнение для координат точек M_1 и M_2

$$\frac{3 \cdot x_1}{16} - \frac{2 \cdot y_1}{9} = 1, \quad \frac{3 \cdot x_2}{16} - \frac{2 \cdot y_2}{9} = 1.$$

Отсюда следует, что искомая прямая

$$\frac{3x}{16} - \frac{2y}{9} = 1$$

или $27x - 32y - 144 = 0$.

Ответ: $27x - 32y - 144 = 0$.

Задача 2.10. Найти координаты точек касания прямых, касательных к гиперболе:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

параллельных прямой $5x + 4y + 1 = 0$.

Решение. Искомые касательные определяются из уравнения

$$5x + 4y + C = 0,$$

где C удовлетворяет условию касания

$$C^2 = 16 \cdot 5^2 - 9 \cdot 4^2,$$

откуда $C = \pm 16$.

Координаты точек касания найдём из условия, пропорциональности коэффициентов линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y \pm 16 = 0, \\ \frac{xx_0}{16} - \frac{yy_0}{9} - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0}{16 \cdot 5} = -\frac{y_0}{9 \cdot 5} = \frac{-1}{\pm 16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 5, \\ y_0 = \mp \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $M'_0 \left(5, -\frac{9}{4} \right), M''_0 = \left(-5, \frac{9}{4} \right).$

Задача 2.11. Известны фокус $F(1, -1)$ и директриса параболы

$$2x + 3y + 1 = 0.$$

Найти уравнение параболы.

Решение. Из определения параболы

$$d(M) = |FM|$$

следует

$$\frac{|2x + 3y + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}.$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

$$\begin{aligned} (2x + 3y + 1)^2 &= 13[(x - 1)^2 + (y + 1)^2], \\ 4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy + 4x + 6y &= \\ &= 13(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1) \end{aligned}$$

или

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 30x + 20y + 25 = 0.$$

Ответ: $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 30x + 20y + 25 = 0$.

Задача 2.12. Найти угол между касательными к параболе $y^2 = 6x$, проведенных из точки $M(-1, 2)$.

Решение. Уравнения касательных, проходящих через точку $M(-1, 2)$ имеют вид: $y - 2 = k(x + 1)$ или $kx - y + (2 + k) = 0$. Из признака касания: $pB^2 = 2AC$ получим

$$3 = 2k(2 + k) \Rightarrow 2k^2 + 4k - 3 = 0.$$

Угловые коэффициенты касательных равны

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}.$$

Угол найдём из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 k_2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{-2 + \sqrt{10}}{2} - \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}}{1 - \frac{3}{2}} \right| = 2\sqrt{10}.$$

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 2\sqrt{10}$.

Задача 2.13. Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 2x$, перпендикулярной к прямой $2x - y + 2 = 0$.

Решение. Уравнения касательных будем искать в виде $x + 2y + C = 0$, где коэффициент C найдём из условия $pB^2 = 2AC$

$$1 \cdot 2^2 = 2 \cdot 1 \cdot C \Rightarrow C = 2.$$

Ответ: $x + 2y + 2 = 0$.

Задача 2.14. Найти хорду эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

которая в точке $M(1, 1)$ делится пополам.

Решение. Уравнение диаметра OM имеет вид

$$OM: y - 1 = (x - 1) \implies y = x, \quad k = 1.$$

Из условия сопряжённости $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$ найдём $k' = -\frac{4}{9}$. Тогда уравнение хорды имеет вид

$$y - 1 = -\frac{4}{9}(x - 1).$$

Ответ: $4x + 9y - 13 = 0$.

Задача 2.15. Найти хорду параболы $y^2 = 8x$, которая в точке $M(2, 1)$ делится пополам.

Решение. Решим эту задачу, используя идею вывода уравнения диаметра параболы.

Пусть точки пересечения хорды с параболой $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Тогда они удовлетворяют уравнению:

$$y^2 = 8x, \Rightarrow y_1^2 = 8x_1, y_2^2 = 8x_2.$$

Отсюда

$$y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1 - x_2) \Rightarrow k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2},$$

но $\frac{y_1 + y_2}{2} = 1$, поэтому $k = \frac{8}{2} = 4$.

Ответ: $y - 1 = 4(x - 2)$ или $4x - y - 7 = 0$.

Задача 2.16. Найти уравнение множества точек, из которых эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

виден под прямым углом (ортооптическая окружность).

Решение. Обозначим произвольную точку искомого множества через $M(X, Y)$. Уравнение касательной запишем в виде $y - Y = k(x - X)$ или

$$kx + y + (Y - kX) = 0.$$

Из условия касания $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$ следует уравнение

$$k^2a^2 + b^2 = (Y - kX)^2$$

или

$$(a^2 - X^2)k^2 + 2kXY + (b^2 - Y^2) = 0.$$

Корни этого уравнения удовлетворяют условию ортогональности

$$k_1 k_2 = -1,$$

поэтому по теореме Виета,

$$\frac{b^2 - Y^2}{a^2 - X^2} = -1$$

или

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2.$$

Ответ: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Глава 3

Задачи для линий второго порядка, заданных общими уравнениями

Уравнение линии второго порядка в общем случае записывают в виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \quad (0.1)$$

Известно [3, 5], что это уравнение определяет одну из девяти линий второго порядка. В том числе эллипс, гиперболу, параболу. Характер этих линий во многом определяется с помощью следующих величин:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (0.2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}, \quad (0.3)$$

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad (0.4)$$

которые являются инвариантами по отношению к преобразованию одной декартовой прямоугольной системы координат в другую прямоугольную.

В случае $\delta = 0$, $\Delta = 0$ инвариантом будет также

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}. \quad (0.5)$$

S называется семиинвариантом.

Важную роль играет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0, \quad (0.6)$$

корни которого λ_1 и λ_2 всегда действительны.

Координаты центра линии второго порядка можно найти решая систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0. \end{cases} \quad (0.7)$$

3.1 Общее исследование линий второго порядка

Задача 3.1. Найти вид и расположение линии

$$2x^2 + xy - y^2 + 3y - 2 = 0.$$

Решение. Так как $\delta = -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, $\Delta = 0$, то данная линия распадается на пару пересекающихся прямых. Найдём их:

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - (y^2 - 3y + 2) &= 0, \\ x &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 8(y^2 - 3y + 2)}}{4}, \\ x &= \frac{-y \pm \sqrt{(3y - 4)^2}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$.

Задача 3.2. Определить вид линии

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Решение. Так как $\delta = 8$, то данная линия эллиптического типа. Перепишем уравнение линии так:

$$3y^2 + 2(1 - x)y + (3x^2 - 2x + 1) = 0$$

и найдём пересечение линии с произвольной прямой $x = h$.

Решим уравнение $3y^2 + 2(1 - h)y + (3h^2 - 2h + 1) = 0$ относительно y . Тогда

$$y = \frac{-(1 - h) \pm \sqrt{-8h^2 + 4h - 2}}{3}.$$

Под корнем квадратный трёхчлен меньше нуля для любого числа h , поэтому вещественных точек пересечения с прямой $x = h$ нет и данная линия есть мнимый эллипс.

Задача 3.3. Прибавить к левой части уравнения

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$$

такое число, чтобы получилось уравнение двух пересекающихся прямых.

Решение. Предположим, что к левой части уравнения кривой надо прибавить число k , чтобы уравнение представляло собой совокупность двух прямых. Разложим уравнение по степеням y . Имеем:

$$y^2 + 2y(3x + 1) + (x^2 + 6x - 1 + k) = 0,$$

отсюда

$$y = -(3x + 1) \pm \sqrt{(3x + 1)^2 - x^2 - 6x + 1 - k},$$

или

$$y = -(3x + 1) \pm \sqrt{8x^2 + 2 - k}.$$

Подкоренная величина должна быть полным квадратом, чтобы наше уравнение распадалось на два уравнения первой степени или иначе, чтобы левая часть уравнения раскладывалась на два множителя. Значит, $8x^2 + 2 - k$ должно быть полным квадратом, то есть $k = 2$. В этом случае уравнения прямых имеют вид

$$y = -(3x + 1) \pm 2\sqrt{2}x.$$

Ответ: $3x \pm 2\sqrt{2}x + y + 1 = 0$.

Задача 3.4. Подобрать параметры a и b в уравнении

$$x^2 - 2axy + y^2 + 2x + 2by - 3 = 0$$

так, чтобы линия распадалась на пару параллельных прямых. Найти уравнения этих прямых.

Решение. Перепишем уравнение линии в виде

$$y^2 - 2y(ax - b) + x^2 + 2x - 3 = 0$$

и найдём

$$\begin{aligned} y &= (ax - b) \pm \sqrt{(ax - b)^2 - (x^2 + 2x - 3)} = \\ &= (ax - b) \pm \sqrt{(a^2 - 1)x^2 - 2x(ab + 1) + b^2 + 3}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ ab + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_2 = -1$, $b_2 = 1$.

Ответ: $y = x + 3$, $y = x - 1$;

$y = -x + 1$, $y = -x - 3$.

Задача 3.5. Найти уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек

$$M_1(0, -1), \quad M_2(-2, 1), \quad M_3(1, 3), \quad M_4(3, 2), \quad M_5(2, -1).$$

Решение. Составим уравнения прямых

$$M_1M_2: \quad x + y + 1 = 0,$$

$$M_2M_3: \quad 2x - 3y + 7 = 0,$$

$$M_3M_4: \quad x + 2y - 7 = 0,$$

$$M_4M_1: \quad x - y - 1 = 0.$$

Составим уравнение линии, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$(x - y - 1)(2x - 3y + 7) + t(x + y + 1)(x + 2y - 7) = 0.$$

Потребуем, чтобы эта линия проходила через точку M_5 . Получим

$$2 \cdot 14 - t \cdot 2 \cdot 7 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

При $t = 2$ уравнений линии принимает вид

$$(x - y - 1)(2x - 3y + 7) + 2(x + y + 1)(x + 2y - 7) = 0.$$

Ответ: $4x^2 + xy + 7y^2 - 7x - 14y - 21 = 0.$

Замечание. В общем случае можно написать уравнение линии, проходящей через пять точек в форме определителя шестого порядка, но на практике это редко используется.

Упрощение уравнений линий второго порядка с помощью ортогональных преобразований

Задача 3.6. Упростить уравнение линии второго порядка с помощью преобразования координат

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

Решение. Так как $\delta = 0$, то данная линия параболического типа. Найдём угол α по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}, \quad (1.8)$$

где λ — корень характеристического уравнения (0.6). Получим

$$(\operatorname{tg} \alpha)_1 = 2, \quad (\operatorname{tg} \alpha)_2 = -1/2.$$

Возьмём, например, $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

$$\begin{aligned} & \frac{4}{5}(x' - 2y')^2 - \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + \frac{1}{5}(2x' + y')^2 - \\ & - \frac{2}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{14}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 7 = 0, \\ & 5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0, \\ & 5 \left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = 6\sqrt{5} \left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5} \right). \end{aligned}$$

Введём новые переменные

$$\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5}/5, \\ y'' = y' - \sqrt{5}/5. \end{cases}$$

Тогда уравнение $y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''$ есть каноническое уравнение параболы.

Ответ: $y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''$.

Задача 3.7. Упростить уравнение линии второго порядка с помощью преобразования координат

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Решение. Так как $\delta = 36 > 0$, то данная линия эллиптического типа. Найдём угол α поворота координатных осей из уравнения

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0.$$

Получим $(\operatorname{tg} \alpha)_1 = 2$, $(\operatorname{tg} \alpha)_2 = -1/2$. Возьмём $(\operatorname{tg} \alpha)_1 = 2$. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Запишем преобразование координат

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}, \\ y = \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Подставим эти значения x, y в уравнение линии:

$$\begin{aligned} 5 \left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \right) + 8 \left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \right)^2 - \\ - 32 \left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \right) - 56 \left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \right) + 80 = 0; \\ 45x'^2 + 20y'^2 - 144\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y' + 400 = 0; \end{aligned}$$

$$(3\sqrt{5}x' - 24)^2 + (2\sqrt{5}y' + 2)^2 + 400 - 24^2 - 2^2 = 0;$$

$$45 \left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}} \right)^2 + 20 \left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 180.$$

Обозначим

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{8}{\sqrt{5}}, \\ y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Тогда уравнение $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$ есть каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси ординат.

Ответ: $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1.$

Упрощение уравнений линий второго порядка с помощью ортогональных инвариантов

Задача 3.8. Упростить уравнение линии второго порядка с помощью ортогональных инвариантов

$$x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 6 = 0.$$

Решение. Найдём

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Мы видим, что линия центральная, гиперболического типа. Вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 40$$

и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем, $\lambda^2 - 2 = 0$, $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}x'^2 - \sqrt{2}y'^2 = 20.$

Задача 3.9. Упростить уравнение линии второго порядка с помощью ортогональных инвариантов

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Решение. Вычислим

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{vmatrix} = -64.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Ответ: $2y'^2 \pm 2x'\sqrt{32} = 0$.

Задача 3.10. Упростить уравнение линии второго порядка с помощью ортогональных инвариантов

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Решение. Вычислим

$$I = 1 + 1 = 2, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Уравнение линии принимает вид: $2x^2 - 1 = 0$; $x^2 - \frac{1}{2} = 0$.

Ответ: $x^2 - \frac{1}{2} = 0$.

Задача 3.11. Определить форму линии второго порядка с помощью ортогональных инвариантов

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 8y + 6 = 0.$$

Решение. Имеем

$$I = 1 + 2 = 3, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -2.$$

Так как $\delta > 0$, $I\Delta < 0$, то линия — действительный эллипс. Найдём корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Отсюда

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x'^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}y'^2 - 2 = 0.$$

Ответ:
$$\frac{x'^2}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} + \frac{y'^2}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = 1.$$

Задача 3.12. Найти систему новых координат, в которой уравнение линии

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y = 0$$

имеет простейший вид.

Решение. Вычислим инварианты

$$I = 5 + 5 = 10, \quad \delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -162.$$

Найдём корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 1.$$

Каноническое уравнение кривой имеет вид $9x'^2 + y'^2 - 18 = 0$ или

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{18} = 1.$$

Найдём угол поворота координатных осей:

$$(\operatorname{tg} \alpha)_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = 1, \quad (\operatorname{tg} \alpha)_2 = -1.$$

Уравнения координатных осей найдём из формул

$$\begin{aligned} O'x': F_1(x, y) + (\operatorname{tg} \alpha)_1 F_2(x, y) &= 0, \\ O'y': F_1(x, y) + (\operatorname{tg} \alpha)_2 F_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $F_i(x, y)$ — производная по i -ой переменной уравнения нашей линии.

Имеем $O'x': x - y = 0$, $O'y': x + y - 2 = 0$.

Ответ: эллипс $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{18} = 1$, отнесённый к осям

$$\begin{cases} O'x': x - y = 0, \\ O'y': x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Задача 3.13. Построить параболу

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0.$$

Решение. Найдём инварианты: $I = 10$, $\delta = 0$, $\Delta = -100$. Каноническое уравнение параболы

$$y'^2 - 2\frac{\sqrt{10}}{10} = 0.$$

Найдём корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 10\lambda = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$. Найдём главные направления по формулам

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = 3, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = -\frac{1}{3}.$$

Найдём ось параболы по формуле $F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} 9x - 3y - 2 + 3(-3x + y + 4) = 0, \\ 9x - 3y - 2 - \frac{1}{3}(-3x + y + 4) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 10 \neq 0, \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Найдём вершину параболы

$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4/5, \\ y = 7/5. \end{cases}$$

Ответ: Парабола, отнесённая к оси абсцисс $3x - y - 1 = 0$ с вершиной $O\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Задача 3.14. Найти центр линии $2y^2 + 3x + 4y + 5 = 0$.

Решение. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 3/2 = 0, \\ 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений несовместна. Если перейти к однородным координатам, то данная система примет вид

$$\begin{cases} 3/2 \cdot x_3 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_2 = x_3 = 0$, x_1 — любое число. Следовательно центром линии будет бесконечно удалённая точка.

Ответ: центр не существует (лежит в бесконечности).

Задача 3.15. Найти вершины линии $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Найдём главные направления из уравнения $k^2 - 1 = 0$:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1.$$

Уравнения осей будут иметь вид

$$y - 2 + (x + 1) = 0, \quad y - 2 - (x + 1) = 0.$$

Найдём вершины нашей линии, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} x = -y + 1 \\ 2xy - 4x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = -6 \\ y_1 = 1, & y_2 = 7 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ 2xy - 4x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

следовательно, действительных корней нет.

Ответ: $(0, 1)$, $(-6, 7)$.

Задача 3.16. Исследовать линию второго порядка, заданную уравнением

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0.$$

Решение. Привести линию к каноническому виду.

Вычислим инварианты

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -9 < 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -81 < 0.$$

Следовательно, наша линия — гипербола. Из уравнений центра

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

имеем

$$\begin{cases} x - 4y + 3 = 0 \\ -4x + 7y - 3 = 0 \end{cases} \implies C(1, 1).$$

Из уравнения асимптотических направлений

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 \quad (1.11)$$

находим $1 - 8k + 7k^2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1/7$. Уравнения асимптот будут иметь вид

$$\begin{aligned} y - 1 &= (x - 1), & x - y &= 0, \\ y - 1 &= \frac{1}{7}(x - 1), & x - 7y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Угловые коэффициенты главных направлений находим из уравнения

$$-4k^2 + (1 - 7)k - (-4) = 0,$$

$k_1 = -2$, $k_2 = 1/2$. Уравнения осей будут иметь вид

$$\begin{aligned} y - 1 &= -2(x - 1), & 2x + y - 3 &= 0, \\ y - 1 &= \frac{1}{2}(x - 1), & x - 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Найдём координаты вершин

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 5x^2 - 10x + 7 = 0. \end{cases}$$

У этой системы нет действительных корней.

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y - 1, \\ 5y^2 - 10y - 4 = 0. \end{cases}$$

Из второй системы получаем решения

$$B_1 \left(\frac{5 + 6\sqrt{5}}{5}, \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5} \right), \quad B_2 \left(\frac{5 - 6\sqrt{5}}{5}, \frac{5 - 3\sqrt{5}}{5} \right).$$

Если оси нашей линии принять за координатные оси Ox' , Oy' , то уравнение линии в новой системе координат примет канонический вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

где

$$\begin{cases} x = x' \frac{2}{\sqrt{5}} - y' \frac{1}{\sqrt{5}} + 1, \\ y = x' \frac{1}{\sqrt{5}} + y' \frac{2}{\sqrt{5}} + 1, \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x' = (x - 1) \frac{2}{\sqrt{5}} + (y - 1) \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ y' = (x - 1) \frac{1}{\sqrt{5}} + (y - 1) \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Уравнения асимптот в новой системе координат имеют вид

$$y' = \pm 1/3x',$$

следовательно, $b/a = 1/3$. С другой стороны, имеем

$$2a = |B_1 B_2| = \sqrt{36} = 6.$$

Тогда каноническое уравнение гиперболы запишется в виде

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Ответ: $\frac{x''^2}{9} - y''^2 = 1.$

Задача 3.17 [2]. «Найти уравнение линии второго порядка, касающейся оси Ox в точке $A(1, 0)$, оси Oy — в точке $B(0, 1)$ и имеющую касательную прямую $x + y - 2 = 0$.»

Решение. Ищем уравнение линии в виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z = 0.$$

Координатные оси являются касательными, поэтому уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0,$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

определяющие точки пересечения осей координат с линией, должны иметь кратные корни. Следовательно,

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0$$

и

$$a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0.$$

Кроме того, точки $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$ лежат на линии, следовательно

$$a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0, \quad a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 0.$$

Запишем все эти уравнения в виде двух систем:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{33} = -2a_{13}, \\ a_{11}a_{33} = a_{13}^2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{22} + a_{33} = -2a_{23}, \\ a_{22}a_{33} = a_{23}^2. \end{cases}$$

Из систем элементарно следует, что $a_{11} = a_{22} = a_{33} = -a_{23} = -a_{13}$.

Искомое уравнение примет вид

$$-a_{13}x^2 + 2a_{12}xy - a_{13}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{13}y - a_{13} = 0$$

или

$$x^2 + 2\tilde{a}_{12}xy - y^2 + 2x + 2y - 1 = 0,$$

($a_{13} \neq 0$, так как в противном случае уравнение имело бы вид $xy = 0$ и, следовательно, оси координат были бы асимптотами, а не касательными).

Учтём наконец последнее требование задачи: прямая $x + y - 2 = 0$ является касательной. Это означает, что система

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x^2 + 2\tilde{a}_{12}xy - y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет кратное решение. Отсюда находим

$$y^2(2 + 2\tilde{a}_{12}) - 2y(2 + 2\tilde{a}_{12}) + 1 = 0,$$

$$(2 + 2\tilde{a}_{12})^2 - (2 + 2\tilde{a}_{12}) = 0.$$

Но $2 + 2\tilde{a}_{12} \neq 0$ (иначе прямая $x + y - 2 = 0$ была бы асимптотой), поэтому

$$2 + 2\tilde{a}_{12} = 1, \quad \tilde{a} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Задача 3.18. Найти уравнение линии второго порядка, проходящей через точки $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, сопряжённые диаметры которой заданы уравнениями $x - 2y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

Решение. Уравнение линии будем искать в виде

$$a(x - 2y - 1)^2 + b(2x - y + 1)^2 + c = 0.$$

Подставляя координаты точек A и B в это уравнение, найдём

$$\begin{cases} 9b + c = 0, \\ 9a + c = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = b = -\frac{c}{9}$.

Ответ: $5x^2 - 8xy + 5y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$.

Задача 3.19. Найти касательные к линии

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 14 = 0$$

параллельные осям координат.

Решение. Уравнения искомого касательных имеют вид: $x = a$, $y = b$. Так как касательные пересекаются с линией второго порядка в двух совпавших точках, то квадратные уравнения, которые получаются после замены $x = a$ или $y = b$ должны иметь кратные корни.

Получаем

$$3x^2 + 2x(2 - b) + 3b^2 + 4b - 14 = 0,$$

$$D = (2 - b)^2 - 3(3b^2 + 4b - 14) = 0.$$

Решая уравнение относительно b , получаем $b = -1 \pm \sqrt{3}$.

Уравнения касательных $y = -1 \pm \sqrt{3}$.

Замечая, что уравнение линии симметрично относительно x и y , то найдём, не решая, уравнения касательных, параллельных оси Oy :

$$x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Ответ: $x = -1 \pm \sqrt{3}$, $y = -1 \pm \sqrt{3}$.

Задача 3.20. Найти касательные к линии

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0,$$

проходящие через точку $M(3, 4)$.

Решение. Проверим сначала, не является ли прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $M(3, 4)$ касательной. Для этого подставим в уравнение $x = 3$. Получим

$$y^2 - 6y + 9 = 0, \quad y_{1,2} = 3.$$

Следовательно, $x = 3$ — касательная прямая.

Наклонные прямые, проходящие через точку $M(3, 4)$ определяются уравнением

$$y - 4 = k(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad y = kx + (4 - 3k).$$

Подставим найденное значение y в уравнение линии, получим квадратное уравнение и потребуем, чтобы дискриминант этого уравнения был равен нулю:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 4x[kx + (4 - 3k)] + [kx + (4 - 3k)]^2 - \\ & \quad - 2x + 6[kx + (4 - 3k)] - 3 = 0; \\ & (k^2 - 4k + 2)x^2 - 2(3k^2 - 13k + 9)x + (9k^2 - 42k + 37) = 0; \\ & D = (3k^2 - 13k + 9)^2 - (k^2 - 4k + 2)(9k^2 - 42k + 37) = 0; \\ & \quad -2k + 7 = 0, \quad k = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Получаем касательную $7x - 2y - 13 = 0$.

Ответ: $x - 3 = 0, 7x - 2y - 13 = 0$.

Глава 4

Элементарная теория поверхностей второго порядка

4.1 Сфера

Уравнение сферы с центром в точке $C(a, b, c)$ и радиусом r имеет вид [2, 3]:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

при условии

$$A \neq 0, \quad B^2 + C^2 + D^2 - AE > 0$$

определяет сферу с центром в точке $-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}, -\frac{D}{A}$ и

$$r = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 + D^2 - AE}{A^2}}.$$

Задача 4.1. Определить координаты центра и радиус каждой из следующих сфер:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y + 6z = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$.

Решение. 1) Решение сводится к выделению полных квадратов, содержащих x , y , z

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 36 + 4 + 9,$$

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 49,$$

$$O(6, -2, -3), \quad r = 7.$$

2) $x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = 16,$

$$(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16,$$

$$O(4, 0, 0), \quad r = 4.$$

Задача 4.2. Определить координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 4y - 6z + 24 = 0, \quad 2x + 2y + z + 4 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение сферы, как в предыдущей задаче

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 36 + 4 + 9 - 24,$$

$$(x + 6)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25,$$

$$O(6, -2, 3), \quad r = 5.$$

Центр искомой окружности O' -проекция точки O на плоскость

$$2x + 2y + z + 4 = 0.$$

Решим систему уравнений

$$O': \begin{cases} 2x + 2y + z + 4 = 0, \\ \frac{x + 6}{2} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 3}{1} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z + 4 = 0, \\ \begin{cases} x = -6 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow O'(-4, 0, 4).$$

Радиус искомой окружности равен

$$R = \sqrt{5^2 - d^2(O')},$$

где

$$d(O') = \frac{|2(-6) + 2(-2) + 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{9}} = 3,$$

следовательно, $R = 4$.

Ответ: $O'(-4, 0, 4)$, $R = 4$.

Задача 4.3. «Составить уравнение сферы, проходящей через окружности $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ и $x^2 + y^2 = 25$, $z = 2$.» [2, № 1554]

Решение. Уравнение сферы будем искать в виде

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Чтобы найти параметры c и r , подставим в это уравнение координаты точки $M_1(2, 0, 0)$, лежащей на первой окружности и координаты точки $M_2(0, 5, 2)$, лежащей на второй окружности.

$$\begin{cases} 4 + c^2 = r^2 \\ 25 + (c - 2)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + c^2 = r^2 \\ 21 + (c - 2)^2 - c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{25}{4} \\ r^2 = \frac{689}{16} \end{cases}$$

Ответ: $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{25}{4}\right)^2 = \frac{689}{16}$.

Задача 4.4. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y + 2z - 5 = 0, \quad x - 2y - 2z + 1 = 0$$

и касающейся плоскости $2x + 2y + z = 0$.

Решение. 1) Центр $O(a, b, c)$ искомой сферы радиуса r , лежит на перпендикуляре к плоскости $x - 2y - 2z + 1 = 0$, проходящем через центр сферы $O' \left(+\frac{3}{2}, -3, -1 \right)$, так как

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 5 + \frac{9}{4} + 9 + 1.$$

Поэтому

$$\frac{a - 3/2}{1} = \frac{b + 3}{-2} = \frac{c + 1}{-2} = t \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} + t \\ b = -3 - 2t \\ c = -1 - 2t. \end{cases}$$

2) Из условия касания получим

$$\frac{|2a + 2b + c - 7|}{\sqrt{9}} = r \Rightarrow \left| \frac{-11 - 4t}{3} \right| = r.$$

3) Уравнение искомой сферы имеет вид

$$\left(x - \left(\frac{3}{2} + t \right) \right)^2 + (y - (-3 - 2t))^2 + (z - (-1 - 2t))^2 = r^2.$$

Подставим в это уравнение координаты точки $M(1, 1, 0)$, лежащей на окружности из условия задачи. Тогда получим следующую систему уравнений для определения неизвестных параметров t и r

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2} - t \right)^2 + (4 + 2t)^2 + (-1 - 2t)^2 = r^2 \\ \left| \frac{-11 - 4t}{3} \right| = r. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + (2t + 4)^2 + (2t + 1)^2 = \frac{(11 + 4t)^2}{9}$$

или $260t^2 + 404t + 137 = 0$,

$$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = -\frac{137}{130}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \\ b_1 = -3 + 1 = -2 \\ c_1 = -1 + 1 = 0 \\ r_1 = \frac{|-11 + 2|}{3} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{3}{2} - \frac{137}{130} = \frac{29}{65} \\ b_2 = -3 + \frac{137}{65} = -\frac{58}{65} \\ c_2 = -1 + \frac{137}{65} = \frac{72}{65} \\ r_2 = \frac{|-11 + \frac{274}{65}|}{3} = \frac{147}{65}. \end{cases}$$

Ответ: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{58}{65}x + \frac{116}{65}y - \frac{144}{65}z - \frac{188}{65} = 0.$$

Задача 4.5. Найти признак касания плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ к сфере

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Решение. Необходимым и достаточным условием, очевидно, является $d(O) = r$, то есть

$$\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = r.$$

Задача 4.6. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки $A(3, 2, 2)$ на плоскости, касающиеся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ вдоль окружности, по которой эта сфера пересекается с плоскостью $2x + 2y + z - 1 = 0$.

Решение. Обозначим координаты произвольной точки, искомого множества через X, Y, Z координаты точки касания x_0, y_0, z_0 . Тогда

$$\Pi: (X - 3)(x - x_0) + (Y - 2)(y - y_0) + (Z - 2)(z - z_0) = 0.$$

Так как точка $M(X, Y, Z) \in \Pi$, то

$$(X - 3)(X - x_0) + (Y - 2)(Y - y_0) + (Z - 2)(Z - z_0) = 0$$

или

$$\begin{aligned} (X - 3)X + (Y - 2)Y + (Z - 2)Z &= \\ &= (X - 3)x_0 + (Y - 2)y_0 + (Z - 2)z_0. \end{aligned}$$

По признаку касания

$$\frac{|(X - 3)(-x_0) + (Y - 2)(-y_0) + (Z - 2)(-z_0)|}{\sqrt{(X - 3)^2 + (Y - 2)^2 + (Z - 2)^2}} = 1$$

или

$$[(X - 3)X + (Y - 2)Y + (Z - 2)Z]^2 = (X - 3)^2 + (Y - 2)^2 + (Z - 2)^2.$$

Это первое условие на координаты точки M .

Так как касательная плоскость к сфере вдоль окружности

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

образует с ней один и тот же угол во всех точках $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, то должно выполняться условие

$$|\cos \varphi| = \frac{|\overline{AM}\overline{n}|}{|\overline{AM}||\overline{n}|} = \frac{|\overline{OM_0}\overline{n}|}{|\overline{OM_0}||\overline{n}|}, \quad |\overline{n}| = \{2, 2, 1\}$$

$$\frac{|(X-3) \cdot 2 + (Y-2) \cdot 2 + (Z-2) \cdot 1|}{3\sqrt{(X-3)^2 + (Y-2)^2 + (Z-2)^2}} = \frac{|2x_0 + 2y_0 + z_0|}{1 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2(X-3) + 2(Y-2) + Z-2]^2 = (X-3)^2 + (Y-2)^2 + (Z-2)^2.$$

$$\text{Ответ: } (X-3)^2 + (Y-2)^2 + (Z-2)^2 = [2(X-3) + 2(Y-2) + Z-2]^2,$$

$$(X-3)^2 + (Y-2)^2 + (Z-2)^2 = [X(X-3) + Y(Y-2) + Z-2]^2.$$

4.2 Конусы и цилиндры второго порядка

Задача 4.7. Составить уравнение поверхности круглого цилиндра, проходящего через прямые

$$x = y = z, \quad x + 1 = y = z - 1, \quad x - 1 = y + 1 = z - 2.$$

Решение. Найдём ось симметрии

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1}$$

и цилиндр как множество точек пространства, удалённых от оси на данное расстояние r .

Ось симметрии цилиндра:

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0,$$

где точка $O(x_0, y_0, z_0)$ — центр окружности, лежащей в плоскости

$$x + y + z = 0,$$

пересекающей данные прямые в точках:

$$M_1: \begin{cases} x + 1 = y = z - 1, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = t, \\ z = 1 + t \\ x + y + z = 0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1(-1, 0, 1),$$

$$M_2: \begin{cases} x - 1 = y + 1 = z - 2, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t + t, \\ z = 2 + t \\ x + y + z = 0, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

$$M_3: \begin{cases} x = y = z, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow M_3(0, 0, 0).$$

Координаты центра окружности удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 0, \\ |M_0M_1|^2 = |M_0M_2|^2, \Leftrightarrow \\ |M_0M_1|^2 = |M_0M_3|^2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = (x_0 + 1)^2 + y_0^2 + (z_0 - 1)^2, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z_0 - \frac{4}{3}\right)^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 0, \\ x_0 - z_0 = -1, \\ x_0 - 5y_0 + 4z_0 = 7, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -5 & 4 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -5 & 5 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 15 & | & 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow O\left(-\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, -\frac{13}{15}\right),$$

$$r^2 = |M_0M_3|^2 = \left(-\frac{2}{15}\right)^2 + \left(-\frac{11}{15}\right)^2 + \left(-\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{294}{225}.$$

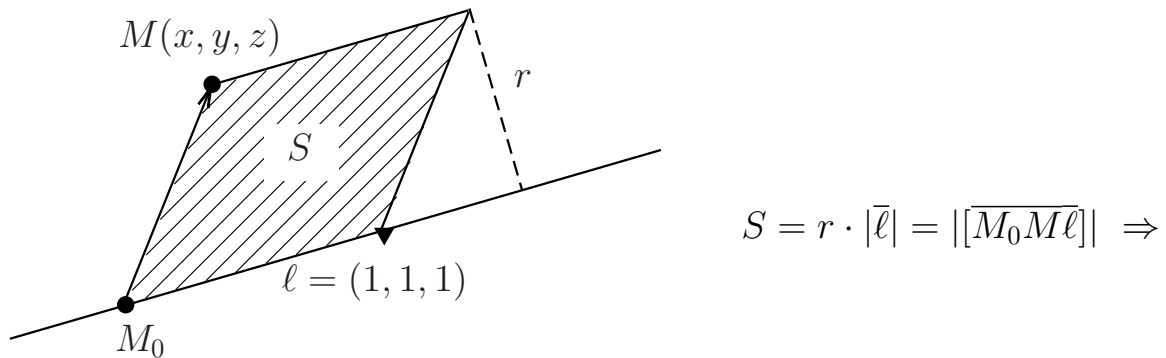


Рис. 4.1

$$r \cdot |\bar{\ell}| = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} y + \frac{11}{15} & z - \frac{13}{15} \\ 1 & 1 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x + \frac{2}{15} & z - \frac{13}{15} \\ 1 & 1 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x + \frac{2}{15} & y + \frac{11}{15} \\ 1 & 1 \end{array} \right|^2}.$$

Возведём обе части в квадрат и раскроем определители под корнем:

$$\left(y - z + \frac{24}{15}\right)^2 + \left(x - z + \frac{15}{15}\right)^2 + \left(x - y - \frac{9}{15}\right)^2 = \frac{294}{225} \cdot 3,$$

$$\left(y - z + \frac{8}{5}\right)^2 + (x - z + 1)^2 + \left(x - y - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{294}{75},$$

$$\frac{1}{25}(5y - 5z + 8)^2 + (x - z + 1)^2 + \frac{1}{25}(5x - 5y - 3)^2 = \frac{98}{25}.$$

Ответ: $(5y - 5z + 8)^2 + 25(x - z + 1)^2 + (5x - 5y - 3)^2 = 98.$

Второй метод решения основан на формуле для равностороннего треугольника:

$$3R^2 = 2d_1^2 + 2d_2^2 + 2d_3^2, \quad (2.1)$$

где d_1, d_2, d_3 — расстояние от любой точки окружности, описанной вокруг треугольника до его медиан. Ось конуса —

$$\frac{x + \frac{2}{15}}{1} = \frac{y + \frac{11}{15}}{1} = \frac{z - \frac{13}{15}}{1}$$

очевидно лежит в плоскостях

$$1 \left(x + \frac{2}{15} \right) - 2 \left(y + \frac{11}{15} \right) + 1 \left(z - \frac{13}{15} \right) = 0,$$

$$2 \left(x + \frac{2}{15} \right) - 1 \left(y + \frac{11}{15} \right) - 1 \left(z - \frac{13}{15} \right) = 0,$$

$$1 \left(x + \frac{2}{15} \right) + 1 \left(y + \frac{11}{15} \right) - 2 \left(z - \frac{13}{15} \right) = 0$$

или

$$x - 2y + z - \frac{33}{15} = 0, \quad 2x - y - z + \frac{6}{15} = 0, \quad x + y - 2z + \frac{39}{15} = 0.$$

$$x - 2y + z - \frac{11}{5} = 0, \quad 2x - y - z + \frac{2}{5} = 0, \quad x + y - 2z + \frac{13}{5} = 0.$$

Произвольная точка $M(x, y, z)$ будет удовлетворять уравнению (2.1) при $R^2 = \frac{294}{225}$

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{x - 2y + z - \frac{11}{5}}{\sqrt{6}} \right)^2 + 2 \left(\frac{2x - y - z + \frac{2}{5}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \\ & + 2 \left(\frac{x + y - 2z + \frac{13}{5}}{\sqrt{6}} \right)^2 = \frac{294}{225} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{25} (5x - 10y + 5z - 11)^2 + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{25} (10x - 5y - 5z + 2)^2 + \\ & + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{25} (5x + 5y - 10z + 13)^2 = \frac{294}{225} = \frac{3 \cdot 98}{3 \cdot 75}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$(5x - 10y + 5z - 11)^2 + (10x - 5y - 5z + 2)^2 +$$

$$+ (5x + 5y - 10z + 13)^2 = 294.$$

Третий метод решения основан на определении круглого цилиндра, как множество всех точек, равноудалённых от оси симметрии на расстоянии $R = \sqrt{\frac{294}{225}}$.

Ось симметрии

$$\frac{x + \frac{2}{15}}{1} = \frac{y + \frac{11}{15}}{1} = \frac{z - \frac{13}{15}}{1}$$

можно записать как

$$\begin{cases} 1 \left(x + \frac{2}{15} \right) - 2 \left(y + \frac{11}{15} \right) + 1 \left(z - \frac{13}{15} \right) = 0, \\ 1 \left(x + \frac{2}{15} \right) - 1 \left(z - \frac{13}{15} \right) = 0, \end{cases}$$

то есть

$$x - 2y + z - \frac{11}{5} = 0, \quad x - z + 1 = 0.$$

Эти плоскости перпендикулярны, поэтому

$$d_1^2 + d_2^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x - 2y + z - \frac{11}{5}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{x - z + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{294}{225},$$

$$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{6} (5x - 10y + 5z - 11)^2 + \frac{1}{2} (x - z + 1)^2 = \frac{294}{225} = \frac{3 \cdot 98}{3 \cdot 75},$$

$$(5x - 10y + 5z - 11)^2 + 75(x - z + 1)^2 = \frac{3 \cdot 98}{3 \cdot 75} = 2 \cdot 98.$$

Ответ: $(5x - 10y + 5z - 11)^2 + 75(x - z + 1)^2 = 196$.

Окончательный ответ:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 5xy - 5xz - 5yz + 2x + 11y - 13z = 0.$$

Задача 4.8. Составить уравнение конуса, описанного около сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

если вершина конуса находится в точке $S(3, 0, 0)$.

Решение. Все точки M конуса характеризуются свойством: вектор \overline{SM} составляет с ортом оси Ox один и тот же угол. Поэтому (см. рис. 4.2)

$$\frac{(\overline{SM} \bar{i})}{|\overline{SM}| |\bar{i}|} = \cos \varphi.$$

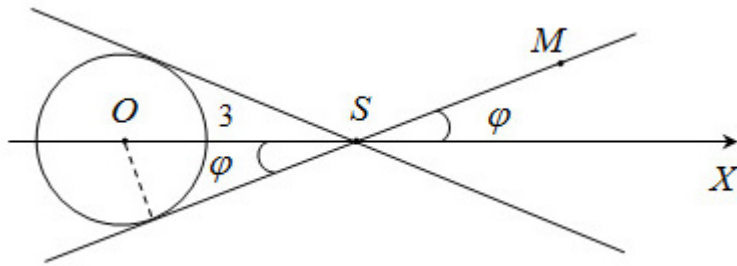


Рис. 4.2

$$\begin{aligned} \frac{|x-3|}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 9(x-3)^2 &= 8[(x-3)^2 + y^2 + z^2]. \end{aligned}$$

Ответ: $(x-3)^2 - 8(y^2 + z^2) = 0$.

Задача 4.9. Составить уравнение круглого цилиндра, описанного около двух сфер

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 16, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

Решение. Любая точка M , лежащая на искомом цилиндре, находится на расстоянии $R = 4$ от оси (OO_1) , где $O(0, 0, 0)$, $O_1(1, 2, -2)$.

Из формулы

$$4 = \frac{|[\overline{OM} \bar{n}]|}{|\bar{n}|}, \quad \bar{n} = \{1, 2, -2\}$$

следует

$$4 = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}}{3}.$$

Ответ: $(2x - y)^2 + (2x + z)^2 + (2y + 2z)^2 = 324$.

Задача 4.10. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если известно, что он проходит через окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z = x$$

и точку $M(3, 1, 1)$.

Решение. Уравнение окружности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x$ можно записать по-другому: $2x^2 + y^2 = 9$, $z = x$. Тогда из уравнения эллипсоида при $z = x$ получим

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение эллипсоида координаты точки $M(3, 1, 1)$ получим еще одно уравнение:

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1.$$

Поэтому необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} b^2 = 9, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{9}, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9, \\ \frac{1}{a^2} = \frac{6}{8 \cdot 9} = \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{c^2} = \frac{5}{36}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} + \frac{5z^2}{36} = 1$.

Задача 4.11. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{75} = 1$$

в точке $M_0(1, 2, 5)$.

Решение. Точка $M_0(1, 2, 5)$ лежит на эллипсоиде, поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{1 \cdot x}{3} + \frac{2y}{12} + \frac{5z}{75} = 1.$$

Задача 4.12. Найти необходимое и достаточное условие того, что плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ касается эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Решение. Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ точка касания, то уравнения

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0$$

и

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяют одну и ту же плоскость, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{a^2 A} + \frac{y_0}{b^2 B} + \frac{z_0}{c^2 C} &= \frac{-1}{D} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_0 &= -\frac{a^2 A}{D}, \quad y_0 = -\frac{b^2 B}{D}, \quad z_0 = -\frac{c^2 C}{D}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение эллипсоида, получим «условие касания»

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2 = D^2.$$

Легко доказывается и обратное утверждение.

Задача 4.13. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

на касательные плоскости к нему.

Решение. Пусть точка $M(X, Y, Z)$ основание перпендикуляра (OM), а $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Уравнение касательной плоскости можно записать так

$$X(x - x_0) + Y(y - y_0) + Z(z - z_0) = 0.$$

Из условия касания $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 = D^2$ следует

$$X^2a^2 + Y^2b^2 + Z^2c^2 = (Xx_0 + Yy_0 + Zz_0)^2.$$

Так как $Xx_0 + Yy_0 + Zz_0 = \overline{OM} \overline{OM}_0$, где при $\overline{OM} = \bar{n}$ — вектор нормали касательной плоскости, то

$$|\overline{OM}| |\overline{OM}_0| \cos \varphi = |\overline{OM}|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Ответ: $x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

Задача 4.14. Составить уравнение диаметральной плоскости эллипсоида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

делящей пополам хорды, параллельные вектору $a = \{2, 1, 2\}$.

Решение. Задача решается с использованием уравнения диаметральной плоскости, сопряженной хордами с направлением $\bar{a} = \{\ell, m, n\}$

$$\frac{\ell x}{a^2} + \frac{m y}{b^2} + \frac{n z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{2x}{9} + \frac{1 \cdot y}{16} + \frac{2n}{4} = 0.$$

Ответ: $32x + 9y + 72z = 0$.

Задача 4.15. Определить центр сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{1} = 1,$$

плоскостью $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Решение. Запишем уравнение плоскости в параметрической форме

$$x = 2u, \quad y = 3v, \quad z = 2 - u - 2v.$$

Уравнение линии сечения на этой плоскости имеет вид

$$4(2u)^2 + 9(3u)^2 + 36(2 - u - 2v)^2 = 36$$

или

$$52u^2 + 144uv + 225v^2 - 144u - 228v - 108 = 0.$$

Координаты u, v центра сечения определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} 52u + 72v - 72 = 0, \\ 72u + 225v - 144 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{162}{181}, \\ v = \frac{64}{181}. \end{cases}$$

Из уравнения плоскости найдем координаты центра

$$C \left(\frac{324}{181}, \frac{192}{181}, \frac{72}{181} \right).$$

Ответ: $C \left(\frac{324}{181}, \frac{192}{181}, \frac{72}{181} \right).$

Замечание. Систему координат $Oxyz$ можно считать аффинной.

Задача 4.16. Определить угол между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, проходящими через произвольную точку.

Решение. Перепишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2 \quad \text{или} \quad (x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y).$$

Отсюда получим уравнения прямолинейных образующих

$$\begin{cases} \alpha(x - z) = \beta(1 - y), \\ \beta(x + z) = \alpha(1 + y); \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha(x - z) = \beta(1 + y), \\ \beta(x + z) = \alpha(1 - y) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - z = k(1 - y), \\ k(x + z) = 1 + y; \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = \ell(1 + y), \\ \ell(x + z) = 1 - y, \end{cases}$$

где k, ℓ — произвольные константы. Найдем направляющие векторы этих прямых:

$$\bar{m}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & k & -1 \\ k & -1 & k \end{vmatrix} = \{k^2 - 1, -2k, -k^2 - 1\},$$

$$\bar{m}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -\ell & -1 \\ \ell & 1 & \ell \end{vmatrix} = \{-\ell^2 + 1, -2\ell, 1 + \ell^2\}.$$

Искомый угол найдем из формулы:

$$\cos \varphi = \pm \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_2}{|\bar{m}_1| |\bar{m}_2|} = \pm \frac{(k\ell - 1)^2}{(k^2 + 1)(\ell^2 + 1)}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \pm \frac{(k\ell - 1)^2}{(k^2 + 1)(\ell^2 + 1)}.$

Задача 4.17. Найти прямолинейные образующие гиперболического параболоида $2z = x^2 - y^2$, и проходящие через точку $M(3, -1, 4)$.

Решение. Перепишем уравнение гиперболического параболоида в виде:

$$2z = (x - y)(x + y).$$

Тогда уравнения прямолинейных образующих имеют вид:

$$\begin{cases} 2 = k(x - y), \\ kz = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = \ell(x + y), \\ \ell z = x - y. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения координаты точки: M найдем $k = 1/2$, $\ell = 1$. Поэтому уравнения прямолинейных образующих определяются уравнениями

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + 2y = z \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 4}{4},$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = z \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x - 3}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 4}{-2}.$$

Ответ: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{4}, \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}.$

Задача 4.18. Составить уравнения прямой, на которой расположены центры сечений эллипсоида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

плоскостями, параллельными плоскости $x - z = 0$.

Решение. Из общей формулы для диаметра, сопряженного плоскостями, параллельными $x - z = 0$ получим

$$x = 4 \cdot 1 \cdot t, \quad y = 9 \cdot 0 \cdot t, \quad z = 16 \cdot (-1) \cdot t$$

или

$$x = 4t, \quad y = 0, \quad z = -16t.$$

Ответ: $\frac{x}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-16}.$

Задача 4.19. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через линию пересечения поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, $x^2 - y^2 - 2z = 0$ и через точку $S(0, 0, 2)$.

Решение. Будем искать уравнение поверхности в виде

$$(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + t(x^2 - y^2 - 2z) = 0,$$

где t — параметр.

Подставим координаты точки S в это уравнение и найдем $t = -5/4$.

Уравнение искомой поверхности имеет вид:

$$4(x^2 + y^2 - z^2 - 1) - 5(x^2 - y^2 - 2z) = 0$$

или

$$x^2 - 9y^2 + 4z^2 - 10z + 4 = 0.$$

Ответ: $x^2 - 9y^2 + 4z^2 - 10z + 4 = 0.$

Задача 4.20. Определить геометрическое место центров плоских сечений сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, полученных в результате пересечения ее касательными плоскостями к поверхности $x^2 + y^2 = 2z$.

Решение. Уравнение касательной плоскости к параболоиду Π :

$$2z = x^2 + y^2$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ имеет вид:

$$z - z_0 = x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0)$$

или

$$x_0x + y_0y - z - z_0 = 0.$$

Координаты центра сечения определяются из системы

$$\begin{cases} x_0x + y_0y - z - z_0 = 0, \\ \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{-1} \end{cases}$$

и имеют вид

$$x = \frac{x_0y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \quad y = \frac{x_0z_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \quad z = -\frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1},$$

где $x_0^2 + y_0^2 = 2z_0$.

Из этих соотношений найдем

$$\begin{cases} x(1 + 2z_0) = x_0z_0, \\ y(1 + 2z_0) = y_0z_0, \\ z(1 + 2z_0) = -z_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0 = -\frac{x}{z}, \\ y_0 = -\frac{y}{z}, \\ z_0 = -\frac{z}{1 + 2z}. \end{cases}$$

Подставляя x_0, y_0, z_0 в уравнение параболоида получим

$$\left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2 = -\frac{27}{1 + 2z}$$

или

$$(x^2 + y^2)(1 + 2z) + 2z^3 = 0.$$

Ответ: $(x^2 + y^2)(1 + 2z) + 2z^3 = 0$.

Задача 4.21. Составить уравнение конуса с вершиной в данной точке $S_0(6, 0, 0)$, описанного около данного эллипсоида

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Решение. Параметрические уравнения прямой (S_0M_0) , где

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

имеют вид:

$$x = 6 + t(x_0 - 6), \quad y = ty_0, \quad z = tz_0.$$

Для того чтобы эта прямая касалась эллипсоида необходимо и достаточно равенства нулю дискриминанта уравнения

$$\frac{[6 + t(x_0 - 6)]^2}{25} + \frac{t^2 y_0^2}{16} + \frac{t^2 z_0^2}{9} = 1$$

или

$$t^2 \left[\frac{(x_0 - 6)^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} + \frac{z_0^2}{9} \right] + \frac{12}{25} t(x - x_0) + \frac{11}{25} = 0.$$

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{25}(x_0 - 6)^2 - \frac{11}{25} \left(\frac{y_0^2}{16} + \frac{z_0^2}{9} \right) = 0.$$

Заменим в последнем равенстве

$$x_0 - 6 = \frac{x - 6}{t}, \quad y_0 = \frac{y}{t}, \quad z_0 = \frac{z}{t}.$$

Получим

$$\frac{1}{25}(x - 6)^2 - \frac{11}{25} \left(\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} \right) = 0.$$

Ответ: $\frac{1}{25}(x - 6)^2 - \frac{11}{25} \left(\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} \right) = 0.$

Задача 4.22. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных скрещивающихся прямых в пространстве.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Oz совпадала с общим перпендикуляром скрещивающихся прямых, проходящих через точки

$$M_1 \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right), \quad M_2 \left(0, 0, \frac{1}{2} \right).$$

Направления осей Ox и Oy возьмем такими, чтобы направляющие прямых имели координаты

$$\bar{\ell}_1 = \{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\}, \quad \bar{\ell}_2 = \{\sin \alpha, \cos \alpha, 0\}.$$

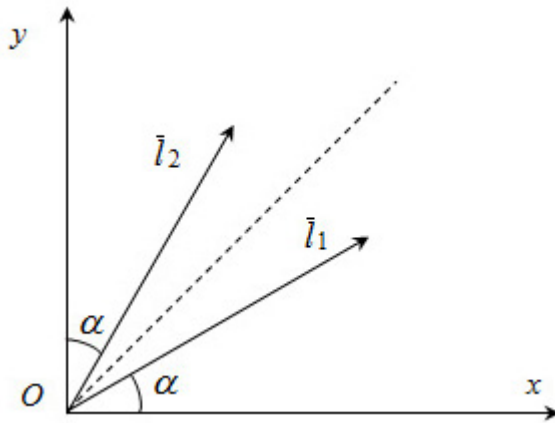


Рис. 4.3

Искомое множество точек $M(x, y, z)$ определяется из равенства

$$\frac{|[\overline{M_1 M} | \bar{\ell}_1]|}{|\ell_1|} = \frac{|[\overline{M_2 M} | \bar{\ell}_2]|}{|\ell_2|}$$

или

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z + \frac{1}{2} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z - \frac{1}{2} \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{array} \right|^2. \\ & \sin^2 \alpha \left(z + \frac{1}{2} \right)^2 + \cos^2 \alpha \left(z + \frac{1}{2} \right)^2 + (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 = \\ & = \cos^2 \alpha \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 + \sin^2 \alpha \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 + (x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$2z = x^2 \cos^2 2\alpha - y^2 \cos 2\alpha.$$

Ответ: гиперболический параболоид.

Глава 5

Общая теория поверхностей второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка и ортогональные инварианты

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид [1, 3]:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yx + 2a_{31}zx + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В случае, если уравнения (1.1) задано относительно декартовой прямоугольной системы координат, следующие выражения являются инвариантами поворота и переноса декартовой прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ \delta = I_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ \Delta = I_4 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Следующие два выражения, называемых *семиинвариантами*, являются инвариантами поворота декартовой прямоугольной системы координат:

$$S_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

В случае, если $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, семиинвариант S_2 будет также и инвариантом переноса; в случае же $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $I_2 = 0$, $S_2 = 0$ семиинвариант S_1 будет также и инвариантом переноса.

5.1 Упрощение уравнения центральной поверхности второго порядка ($I_3 \neq 0$)

Если $I_3 \neq 0$, то поверхность второго порядка называется *центральной*.

Координаты центра поверхности определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0, \tag{1.3}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

или

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0.$$

В зависимости от знаков коэффициентов в уравнении (1.3) получим шесть видов поверхностей 2-го порядка

	λ_1	λ_2	λ_3	I_4/I_3	Поверхность 2-го порядка
1	\pm	\pm	\pm	\pm	мнимый эллипсоид
2	\pm	\pm	\pm	\mp	эллипсоид
3	\pm	\pm	\mp	\mp	однополостный гиперболоид
4	\pm	\mp	\mp	\mp	двуполостный гиперболоид
5	\pm	\pm	\mp	$I_4 = 0$	мнимый конус
6	\pm	\pm	\mp	$I_4 = 0$	действительный конус

При определении вида поверхности полезно знать, что число положительных корней характеристического уравнения (1.4) равно числу перемен знаков у его коэффициентов (правило Декарта).

5.2 Упрощение уравнения поверхности второго порядка, имеющую несобственный центр ($I_3 = 0, I_4 \neq 0$)

Если $I_3 = 0, I_4 \neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} Z = 0, \quad (2.5)$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Если λ_1 и λ_2 разных знаков, то уравнение (2.5) определяет *гиперболический параболоид*.

Если λ_1 и λ_2 одного знака, то уравнение (2.5) определяет *эллиптический параболоид*.

5.3 Упрощение уравнения поверхности второго порядка, центр которой прямая линия ($I_3 = I_4 = 0, I_2 \neq 0$)

Если $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 \neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат

может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{S_2}{I_2} = 0, \quad (3.6)$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Характер поверхности (3.6) зависит от знаков коэффициентов

	λ_1	λ_2	S_2/I_2	Поверхность 2-го порядка
1	\pm	\pm	\pm	мнимый эллиптический цилиндр
2	\pm	\pm	\mp	эллиптический цилиндр
3	\pm	\mp	\forall	гиперболический цилиндр
4	\pm	\pm	$S_2 = 0$	пара мнимых, пересекающихся плоскостей
5	\pm	\mp	$S_2 = 0$	пара действительных, пересекающихся плоскостей

5.4 Упрощение уравнения поверхности второго порядка, центр которой несобственная прямая

$$(I_2 = I_3 = I_4 = 0, S_2 \neq 0)$$

Если $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $I_2 = 0$, $S_2 \neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 \pm \sqrt{-\frac{S_2}{I_1}} Y = 0, \quad (4.7)$$

где λ_1 — отличный от нуля корень характеристического уравнения.

Уравнение (4.7) можно переписать и так:

$$X^2 = 2\sqrt{-\frac{S_2}{I_1^3}} Y.$$

Это уравнение определяет *параболический цилиндр*. Параметр параболы, полученной в сечении этого цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим, определяется формулой

$$p = \sqrt{-\frac{S_2}{I_1^3}} Y.$$

5.5 Упрощение уравнения поверхности второго порядка, центр которой плоскость ($I_2 = I_3 = I_4 = 0, S_2 = 0$)

Если $I_2 = 0, I_3 = 0, I_4 = 0, S_2 = 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 + \frac{S_1}{I_2} = 0$$

или

$$I_1 X^2 + \frac{S_1}{I_1} = 0$$

или

$$X^2 + \frac{S_1}{I_1^2} = 0. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) может определять две параллельные (мнимые или действительные) плоскости, а также при $S_1 = 0$ две совпавшие плоскости.

Замечание. Уравнение (1.1) определяет одну из семнадцати поверхностей второго порядка.

Для определения расположения поверхности, каноническое уравнение которой уже известно, нужно знать координаты нового начала O' канонической системы координат, т. е. той системы координат, в которой поверхность имеет каноническое уравнение и координаты направляющих векторов осей системы.

Координаты направляющих векторов осей канонической системы координат определяются из уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\ell + a_{12}m + a_{13}n = 0, \\ a_{21}\ell + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0, \\ a_{31}\ell + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

где λ — корень характеристического уравнения. В случае поверхности вращения для определения расположения надо знать положение нового начала O' канонической системы координат и координаты направляющего вектора осей вращения, которые определяются из системы (5.9), где λ — простой корень характеристического уравнения.

В случае, если поверхность имеет центр (не обязательно единственный), за начало координат O' канонической системы берется центр поверхности.

5.6 Примеры и задачи

Задача 5.1. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Решение. Находим

$$I_1 = 7, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -36, \quad I_4 = 36.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = -2.$$

Поэтому уравнение (1.3) примет вид

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + \frac{36}{-36} = 0$$

или

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 = 1$$

и определяет однополостный гиперболоид.

Координаты центра найдем из системы (1.2):

$$\begin{cases} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y + z + 3 = 0 \\ 3x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow O' \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Обозначая через ℓ_1, m_1, n_1 координаты вектора, коллинеарного большей оси горлового эллипса, находим эти координаты из системы (5.9)

при λ_3

$$\begin{cases} (1-3)\ell_1 + m_1 + 3n_1 = 0, \\ \ell_1 + (5-3)m_1 + n_1 = 0, \\ 3\ell_1 + m_1 + (1-3)n_1 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\{\ell_1, m_1, n_1\} = \{1, 0, -1\}.$$

Аналогично находим векторы

$$\{\ell_2, m_2, n_2\} = \{1, 2, 1\}, \quad \{\ell_3, m_3, n_3\} = \{1, 0, -1\},$$

дающие направления осей: меньшей оси горлового эллипса и оси поверхности. Тем самым расположение поверхности определено.

Составим еще формулы преобразования координат. Найдем сначала единичные векторы i', j', k' , идущие в положительных направлениях осей $O'X, O'Y, O'Z$:

$$i' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \quad j' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\},$$

$$k' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\};$$

отсюда

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3}, \\ z = \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} - \frac{Z}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[x + \frac{1}{3} - \left(y + \frac{2}{3} \right) + z - \frac{2}{3} \right], \\ Y = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[x + \frac{1}{3} + 2 \left(y + \frac{2}{3} \right) + z - \frac{2}{3} \right], \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x + \frac{1}{3} - \left(z - \frac{2}{3} \right) \right] \end{cases}$$

или

$$X = \frac{x - y + z - 1}{\sqrt{3}}, \quad Y = \frac{x + 2y + z + 1}{\sqrt{6}}, \quad Z = \frac{x - z + 1}{\sqrt{2}}.$$

Задача 5.2. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$$

Решение. Найдем ортогональные инварианты $I_1 = 5$, $I_2 = -14$, $I_3 = 0$, $I_4 = 16$ и решим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0.$$

Получим $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Поэтому данное в задаче уравнение определяет гиперболический параболоид

$$7X^2 - 2Y^2 = 2\sqrt{\frac{16}{14}}Z.$$

Координаты вектора $\bar{l}_1 = \{\ell_1, m_1, n_1\}$ коллинеарного оси $O'X$ найдем из системы (5.9) при $\lambda = 7$:

$$\begin{cases} (5 - 7)\ell_1 + 2m_1 + 3n_1 = 0, \\ 2\ell_1 + (-1 - 7)m_1 + 0 \cdot n_1 = 0, \\ 3\ell_1 + 0 \cdot m_1 + (1 - 7)n_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\ell_1, m_1, n_1\} = c_1\{4, 1, 2\}, \quad c_1 = \text{const.}$$

Аналогично из системы (5.9) при $\lambda = -2$ получим \bar{l}_2 , коллинеарный оси $O'Y$:

$$\begin{cases} (5 + 2)\ell_2 + 2m_2 + 3n_2 = 0, \\ 2\ell_2 + (-1 + 2)m_2 + 0 \cdot n_2 = 0, \\ 3\ell_2 + 0 \cdot m_2 + (1 + 2)n_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\ell_2, m_2, n_2\} = c_2\{-1, 2, 2\}, \quad c_2 = \text{const.}$$

Вектор $\bar{\ell}_3 = \{\ell_3, m_3, n_3\}$ найдем из (5.9) при $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 5\ell_3 + 2m_3 + 3n_3 = 0, \\ 2\ell_3 - m_3 = 0, \\ 3\ell_3 + n_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\ell_3, m_3, n_3\} = c_3\{1, 2, -3\}, \quad c_3 = \text{const.}$$

Вершину найдем из системы

$$\begin{cases} \frac{5x + 2y + 3z + 1}{1} = \frac{2x - y + 2}{2} = \frac{3x + z + 3}{-3}, \\ 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 2x + 4y + 6z - 8 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \begin{cases} 8x + 5y + 6z = 0, \\ 12x - 3y + 2z - 12 = 0, \end{cases} & \begin{cases} y = 2x + \frac{18}{7}, \\ z = -3x - \frac{15}{7}, \end{cases} \\ 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 2x + 4y + 6z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 5x^2 - \left(2x + \frac{18}{7}\right)^2 + \left(3x + \frac{15}{7}\right)^2 + 4x \left(2x + \frac{18}{7}\right)^2 + \\ & + 6x \left(-3x - \frac{15}{7}\right) + 2x + 4 \left(2x + \frac{18}{7}\right) + 6 \left(-3x - \frac{15}{7}\right) - 8 = 0 \end{aligned}$$

Окончательно

$$-8x - \frac{617}{49} = 0 \Rightarrow -\frac{617}{392}.$$

Зная x , найдем

$$y = -\frac{113}{196}, \quad z = \frac{1011}{392}.$$

Поэтому, $O' \left(-\frac{617}{392}, -\frac{113}{196}, \frac{1011}{392} \right)$.

Задача 5.3. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 48 = 0.$$

Решение. Найдем координаты центра из системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 2y - z + 5 = 0, \\ -2x + 2y - 2z - 2 = 0, \\ -x - 2y + 5z - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - 2z - 2 = 0, \\ -x - 2y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$$

(прямая линия)

Уравнение определяет цилиндр. Найдем ортогональные инварианты

$$I_1 = 12, \quad I_2 = 16, \quad I_3 = I_4 = 0.$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -36.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 0.$$

Каноническое уравнение

$$6X^2 + 6Y^2 + \frac{-36}{36} = 0$$

определяет круглый цилиндр

$$X^2 + Y^2 = \frac{1}{6}$$

с осью

$$\begin{cases} -2x + 2y - 2z - 2 = 0, \\ -x - 2y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$$

или

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Задача 5.4. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0.$$

Решение. Из системы уравнений центра

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 4z - 3 = 0 \end{cases}$$

следует, что центр искомой поверхности — несобственная прямая.

Найдем

$$I_1 = 6, \quad I_2 = I_3 = I_4 = 0, \quad S_2 = -18.$$

Уравнение определяет параболический цилиндр

$$6X^2 = 2\sqrt{-\frac{18}{6}}Y \quad \text{или} \quad X^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}Y.$$

Для определения расположения поверхности перепишем уравнение в виде

$$(x + y + 2z + a)^2 - [2ax + 2ay + 2(2a + 3)z + 1] = 0.$$

Параметр a найдем из условия ортогональности плоскостей Π_1 и Π_2 , где

$$\Pi_1: \quad x + y + 2z + a = 0, \quad \bar{n}_1 = \{1, 1, 2\},$$

$$\Pi_2: \quad 2ax + 2ay + 2(2a + 3)z + 1 = 0, \quad \bar{n}_2 = \{a, a, 2a + 3\},$$

$$(\bar{n}_1 \bar{n}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + a + 4a + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

Следовательно, уравнение плоскости симметрии

$$\Pi_1: \quad x + y + 2z - 1 = 0$$

и уравнение касательной плоскости, перпендикулярной плоскости симметрии

$$\Pi_2: \quad -2x - 2y + 2z + 1 = 0.$$

Задача 5.5. Определить вид и расположение на поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0.$$

Решение. Из системы уравнение центра найдем

$$\begin{cases} y + 2z - 2 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2z - 2 = 0, \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

(прямая линия)

Найдем

$$I_1 = 0 + 1 + 0 = 1, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$I_3 = I_4 = S_2 = 0.$$

Данное уравнение определяет пару пересекающихся плоскостей. Легко проверить, что

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = (y + 2z - 2)(2x + y),$$

поэтому поверхность распадается на плоскости:

$$y + 2z - 2 = 0, \quad 2x + y = 0.$$

Задача 5.6. Пользуясь методом Лагранжа, показать, что нижеследующие уравнения определяют поверхности, распадающиеся на пару плоскостей, и найти эти плоскости:

$$1) x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - x + 2y - 3z - 6 = 0,$$

$$2) 16x^2 + 9y^2 + 100z^2 + 24xy + 80xz + 60yz + 56x + 140z + 49 = 0.$$

Решение. 1) Соберем все члены, содержащие x , и затем выделим полный квадрат

$$(x^2 - 4xy + 6xz - x) + 4y^2 + 9z^2 - 12yz + 2y - 3z - 6 = 0.$$

Так как

$$\left(x - 2y + 3z - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + \frac{1}{4} - 4xy +$$

$$+ 6xz - x - 14yz + 2y - 3z,$$

то

$$\left[\left(x - 2y + 3z - \frac{1}{2} \right)^2 - 4y^2 - 9z^2 - \frac{1}{4} + 12yz - 2y + 3z \right] + \\ + 4y^2 + 9z^2 - 12yz + 2y - 3z - 6 = 0$$

или

$$\left(x - 2y + 3z - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения, определяющих параллельные плоскости:

$$x - 2y + 3z - 3 = 0, \quad x - 2y + 3z + 2 = 0.$$

2) Второе уравнение приводится к виду:

$$(4x + 3y + 10z + 7)^2 = 0$$

и определяет две совпавшие плоскости.

Задача 5.7. Определить каноническое уравнение следующих поверхностей:

$$1) 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0,$$

$$2) 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4xz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0,$$

$$3) 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz - 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$$

Решение. 1) Найдем ортогональные инварианты

$$I_1 = -1, \quad I_2 = -17, \quad I_3 = -15, \quad I_4 = -12$$

и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 17\lambda + 15 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -5.$$

Уравнение поверхности записываются в виде:

$$1 \cdot X^2 + 3Y^2 - 5Z^2 + \frac{-12}{15} = 0$$

или

$$\frac{X^2}{4/5} + 3 \cdot \frac{Y^2}{4/5} - \frac{Z^2}{4/25} = -1$$

(двуполостный гиперболоид).

2) Из системы уравнений центра найдем:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ -x + 5y + z - 5 = 0, \\ -2x + y - 2z - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ -x + 5y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

(прямая линия)

Найдем ортогональные инварианты

$$I_1 = 9, \quad I_2 = 18, \quad I_3 = I_4 = 0,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -108$$

и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 18\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Каноническое уравнение

$$3X^2 + 6Y^2 - \frac{-108}{18} = 0$$

или

$$\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1$$

определяет эллиптический цилиндр.

3) Найдем центр поверхности из системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \\ 3x + 2z + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 3z - 3 = 0, \\ -9y + 6z + 8 = 0, \\ \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

(центр — несобственная точка)

Уравнение определяет либо эллиптический, либо гиперболический параболоид.

Найдем ортогональные инварианты:

$$I_1 = 5, \quad I_2 = -14, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = 16$$

и решим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 7, \quad \lambda_3 = -2.$$

Каноническое уравнение имеет вид:

$$3X^2 - 2Y^2 = 2\sqrt{-\frac{16}{-14}}Z \quad \text{или} \quad \frac{X^2}{\frac{4}{7\sqrt{14}}} - 3 \cdot \frac{Y^2}{\frac{2}{\sqrt{14}}} = 2Z.$$

Задача 5.8. Определить вид поверхности второго порядка:

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Решение.

$$I_1 = 7, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -36, \quad K_4 = 36.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36\lambda = 0.$$

Его коэффициенты: $+1, -7, +36$. Здесь имеются две перемены знака: при переходе от $+1$ к -7 и от -7 к $+36$; значит уравнение имеет два положительных корня и один отрицательный.

Кроме того, $\frac{K_4}{I_3} = -1 < 0$; следовательно, данная поверхность — однополосный гиперболоид.

Задача 5.9. Составить уравнение диаметральной плоскости поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$$

проходящей через точки $O(0, 0, 0)$ и $M(1, 1, 0)$.

Решение. Найдем центр поверхности из системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ -x + 2y - z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Так как диаметральная плоскость проходит через центр поверхности, то ее уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad x - y - z = 0.$$

Ответ: $x - y - z = 0$.

Задача 5.10. Найти уравнение диаметра поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$$

сопряжённого плоскости

$$x + y + z + 1 = 0.$$

Решение. Центр поверхности — $C(3, 2, 1)$ (см. задачу 8). Диаметр проходит через центр и имеет направление $\{\ell, m, n\}$, сопряжённое плоскости.

Запишем уравнение диаметральной плоскости, сопряженной хордам параллельными вектору $\{\ell, m, n\}$

$$\ell(x - y + z - 2) + m(-x + 2y - z) + n(x - y - z) = 0$$

или

$$x(\ell - m + n) + y(-\ell + 2m - n) + z(\ell - m - n) = 0.$$

Из условия параллельности плоскостей получим

$$\frac{\ell - m + n}{1} = \frac{-\ell + 2m - n}{1} = \frac{\ell - m - n}{1}$$

или $n = 0$, $2\ell - 3m = 0$. Отсюда находим вектор $\bar{\ell} = c\{3, 2, 0\}$, $c = \text{const}$.
Уравнение диаметра имеет вид:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}.$$

Ответ: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}.$

Задача 5.11. Найти асимптотический конус поверхности

$$2x^2 - y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz - 4x + 5 = 0.$$

Решение. Найдем центр поверхности:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{8}{11}, -\frac{6}{11}, \frac{2}{11}\right).$$

Уравнение асимптотических направлений имеет вид:

$$2\ell^2 - m^2 + 3n^2 - 2\ell m + 2nm = 0.$$

Уравнение прямолинейной образующей зададим уравнениями в параметрической форме:

$$x - \frac{8}{11} = \ell t, \quad y + \frac{6}{11} = mt, \quad z - \frac{2}{11} = nt.$$

Подставляя сюда ℓ , m , n в уравнение асимптотических направлений, получим уравнение искомого конуса

$$\begin{aligned} & 2\left(x - \frac{8}{11}\right)^2 - \left(y + \frac{6}{11}\right)^2 + 3\left(z - \frac{2}{11}\right)^2 - \\ & - 2\left(x - \frac{8}{11}\right)\left(y + \frac{6}{11}\right) + 2\left(y + \frac{6}{11}\right)\left(z - \frac{2}{11}\right) = 0. \end{aligned}$$

Задача 5.12. Найти центр линии пересечения поверхности

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + 2x + 6y + 2z = 0$$

с плоскостью $2x + 2y + z - 1 = 0$.

Решение. Найдем центр поверхности

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ x + 5y + z + 3 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ x + 5y + z + 3 = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{2}}{1} = \frac{y + \frac{1}{2}}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Так как центр — прямая линия, то поверхность будет цилиндром. Центр сечения найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 1 = 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -3\right).$$

Литература

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
2. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964.
3. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие. 13-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. М.: Альянс, 2017.
5. Казак В. В., Климентов Д. С. Аналитическая геометрия на плоскости: Учебн. пособие. Ростов-на-Дону – Таганрог, 2021.