МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт компьютерных технологий и информационной безопасности

Синтез систем управления с дискретным ПИД-регулятором

Методические указания к выполнению лабораторной работы

по курсу

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для студентов специальностей и направлений подготовки

27.03.03, 09.05.01, 17.03.01

Составили:

Воронков О.Ю., Олейников К.А.

Ростов-на-Дону – Таганрог
2020

УДК 519.714.2
ББК 32.966
В75

Воронков, О.Ю.
В75 Синтез систем управления с дискретным ПИД-регулятором. Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу: Теория автоматического управления / сост. О.Ю. Воронков, К.А. Олейников ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог, 2020. – 26 с.

УДК 519.714.2
ББК 32.966

Задача

На рис. 1 представлена структурная схема цифровой системы управления с цифровым регулятором.

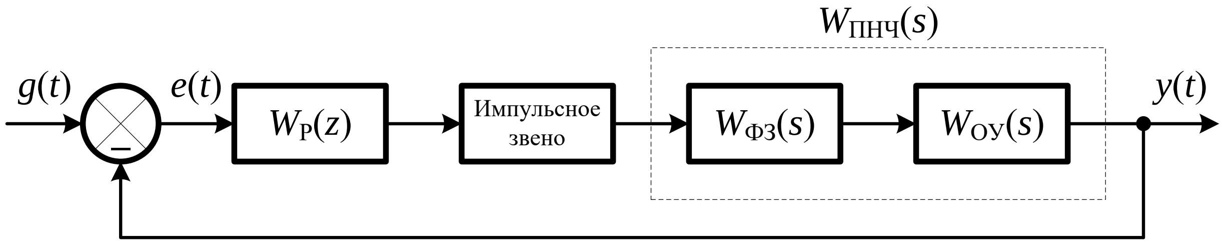

Рис. 1 – Структурная схема цифровой системы управления с цифровым регулятором

На рис. 1:

- $W_{\text{Р}}(z)$ – дискретная передаточная функция цифрового регулятора;
- $W_{\text{ФЗ}}(s)$ – непрерывная передаточная функция формирующего звена;
- $W_{\text{ОУ}}(s)$ – непрерывная передаточная функция объекта управления;
- $W_{\text{ПНЧ}}(s)$ – непрерывная передаточная функция приведённой непрерывной части.

Объект управления имеет следующую передаточную функцию:

$$W_{\text{ОУ}}(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}. \quad (1)$$

Требуется синтезировать цифровой регулятор, то есть определить такую его передаточную функцию, при которой цифровая система управления удовлетворяет требуемым критериям качества.

Решение

Передаточная функция формирующего звена цифровой системы управления имеет следующий вид:

$$W_{\text{ФЗ}}(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}. \tag{2}$$

Период квантования равен

$$T_0 = 0{,}1\ \text{с}. \tag{3}$$

Передаточная функция приведённой непрерывной части цифровой системы управления вычисляется как произведение передаточных функций формирующего звена (2) и непрерывной части (1):

$$\begin{gathered} W_{\text{ПНЧ}}(s) = W_{\text{ФЗ}}(s) W_{\text{ОУ}}(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \cdot \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \\ = \left(1 - e^{-T_0 s}\right) \frac{10}{s(s+1)(s+2)} = \left(1 - e^{-T_0 s}\right) W_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Передаточную функцию приведённой непрерывной части (4) можно представить следующим образом:

$$W_{\text{ПНЧ}}(s) = \left(1 - e^{-T_0 s}\right) \frac{B(s)}{A(s)} = \left(1 - e^{-T_0 s}\right) \frac{10}{s(s+1)(s+2)}. \tag{5}$$

В формуле (5) $B(s)$ – числитель, $A(s)$ – знаменатель вспомогательной передаточной функции $W_0 = \dfrac{W_{\text{ОУ}}(s)}{s} = \dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$. Z_T-изображение передаточной функции (5) выглядит так:

$$W^*_{\text{ПНЧ}}(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{s_i T}}, \qquad A'(s_i) = \left.\frac{dA(s)}{ds}\right|_{s = s_i}. \tag{6}$$

В выражениях (6) s_i – полюсы передаточной функции (5), т.е. корни её характеристического уравнения $A(s) = 0$. Передаточная функция разомкнутой системы без регулятора:

$$W_{\text{диск. разомк.}}(z) = W^*_{\text{ПНЧ}}(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{s_i T}}. \tag{7}$$

В результате расчёта по формуле (7) получается следующее выражение для дискретной передаточной функции разомкнутой системы без регулятора:

$$W_{\text{диск. разомк.}}(z) = \frac{0{,}0453\left(z+0{,}904\right)}{\left(z-0{,}905\right)\left(z-0{,}819\right)} = \\ = \frac{0{,}0453z+0{,}04097}{z^2-1{,}7236z+0{,}7408}. \tag{8}$$

В программном пакете *Maple 11* и выше дискретная передаточная функция разомкнутой системы без регулятора получается следующим образом:

> $restart:$

Подключение библиотеки "Интегральные преобразования"

$with(inttrans):$

Непрерывная передаточная функция объекта управления

$W_{cont_{unres}} := \dfrac{10}{(s+1)\cdot(s+2)};$

$$\frac{10}{(s+1)\,(s+2)}$$

Непрерывная передаточная функция замкнутой системы без регулятора

$W_{cont_{res}} := normal\left(\dfrac{W_{cont_{unres}}}{1+W_{cont_{unres}}}, expanded\right);$

$$\frac{10}{s^2+3\,s+12}$$

Передаточная функция W_0

$W_0 := \dfrac{W_{cont_{unres}}}{s};$

$$\frac{10}{(s+1)\,(s+2)\,s}$$

Числитель передаточной функции W_0

$B := numer(W_0);$

$$10$$

Знаменатель(характеристический полином)передаточной функции W_0

$A := denom(W_0);$

$$(s+1)\,(s+2)\,s$$

Производная знаменателя передаточной функции W_0

$DiffA := diff(A, s);$

$$(s+2)\,s+(s+1)\,s+(s+1)\,(s+2)$$

Корни характеристического полинома передаточной функции W_0

$Rootz_{W0} := solve(A, s);$

$$-1,\ -2,\ 0$$

Период квантования

$T := 0.1;$

$$0.1$$

Дискретная передаточная функция разомкнутой системы без регулятора

$W_{disc_{unres}} := evalf\left(normal\left(\left(1-z^{-1}\right)\cdot add\left(\dfrac{B}{DiffA}\cdot\dfrac{z}{z-\exp(s\cdot T)}, s = Rootz_{W0}\right), expanded\right)\right);$

$$\frac{0.04527958500\,z+0.04097066300}{z^2-1.723568171\,z+0.7408182207}$$

Замкнутая система без регулятора имеет дискретную передаточную функцию

$$W_{\text{диск.замк.}}(z) = \frac{W_{\text{диск.разомк.}}(z)}{1 + W_{\text{диск.разомк.}}(z)} = \frac{0,0453z + 0,04097}{z^2 - 1,679z + 0,782}. \qquad (9)$$

Расчёт в *Maple*:

Дискретная передаточная функция замкнутой системы без регулятора

$$W_{disc_{res}} := normal\left(\frac{W_{disc_{unres}}}{1 + W_{disc_{unres}}}, expanded\right);$$

$$\frac{0.04527958500z + 0.04097066300}{-1.678288586z + 0.7817888837 + z^2}$$

Корни характеристического полинома замкнутой системы без регулятора (9) равны:

$$z_1 = 0,84 + j0,278, \qquad z_2 = 0,84 - j0,278.$$

Следовательно, замкнутая система без регулятора является **устойчивой**.

Расчёт в *Maple*:

Знаменатель дискретной передаточной функции (характеристический полином) замкнутой системы без регулятора

$$Polynom_{res} := denom\left(W_{disc_{res}}\right);$$

$$-1.678288586z + 0.7817888837 + z^2$$

Устойчивость замкнутой системы без регулятора: корни характеристического полинома замкнутой системы без регулятора

$$Rootz_{disc_{res}} := solve\left(Polynom_{res}, z\right);$$

$$0.8391442930 + 0.2786139609\,I,\ 0.8391442930 - 0.2786139609\,I$$

При подаче на вход замкнутой системы без регулятора (9) единичного ступенчатого воздействия (то есть функции Хевисайда) установившаяся ошибка системы **не равна нулю**, потому что передаточная функция разомкнутой системы без регулятора (8) не имеет хотя бы одного полюса

$$z = 1.$$

При единичном ступенчатом воздействии установившееся значение выходного сигнала замкнутой системы без регулятора составляет

$$y = \lim_{z=1} W_{\text{диск. замк.}}(z) = 0{,}833,$$

откуда следует, что установившаяся ошибка замкнутой системы без регулятора равна

$$e = 1 - y = 1 - 0{,}833 = 0{,}167.$$

Расчёт в *Maple*:

Установившееся значение выходного сигнала замкнутой системы без регулятора

$y := limit\left(W_{disc_{res}}, z = 1\right);$

$$0.833333332$$

Установившаяся ошибка замкнутой системы без регулятора

$e := 1 - y;$

$$0.166666667$$

Переходные функции непрерывной и дискретной замкнутой системы без регулятора строятся в *Maple* следующим образом:

Непрерывная переходная функция замкнутой системы без регулятора

$step_{cont_{res}} := invlaplace\left(\frac{W_{cont_{res}}}{s}, s, t\right);$

$$\frac{5}{6} - \frac{5}{78}\,e^{-\frac{3}{2}t}\left(13\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{39}\,t\right) + \sqrt{39}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{39}\,t\right)\right)$$

Дискретная переходная функция замкнутой системы без регулятора

delay := **proc** (*X*, *F*, *R*) **local** *ans*, *pts*, *n*, *var*; *var* := *op*(1, *R*); *ans* := *invztrans*(*X*, *F*, *var*); *ans* := *eval*([('seq')([*var*, *ans*], *R*)]); *pts* := *NULL*; **for** *n* **to** *nops*(*ans*) − 1 **do** *pts* := *pts*, *ans*[*n*], [*op*(1, *ans*[*n* + 1]), *op*(2, *ans*[*n*])] **end do**; [*pts*]·*T* **end proc**;

```
proc(X, F, R)
    local ans, pts, n, var;
    var := op(1, R);
    ans := invztrans(X, F, var);
    ans := eval(['seq'([var, ans], R)]);
    pts := NULL;
    for n to nops(ans) - 1 do
        pts := pts, ans[n], [op(1, ans[n + 1]), op(2, ans[n])]
    end do;
    [pts]*T
end proc
```

Подключение библиотеки "Графики"

with(*plots*) :

Построение графика непрерывной переходной функции замкнутой системы без регулятора

$graphics_{cont_{res}} := plot\big(step_{cont_{res}}, t = 0..100\cdot T, color = magenta,$ $thickness = 4, legend = $ '*Непрерывная система без регулятора*' $\big)$:

Построение графика дискретной переходной функции замкнутой системы без регулятора

$graphics_{disc_{res}} := plot\left(delay\left(\frac{W_{disc_{res}}}{T}\cdot\frac{z}{z-1}, z, t = seq\left(i, i = 0..\frac{20}{2\cdot T}, T\right)\right), color = blue, thickness = 1, legend = \right.$ '*Дискретная система без регулятора*' $\Big)$:

Вывод обоих графиков

$display\left(graphics_{cont_{res}}, graphics_{disc_{res}}\right);$

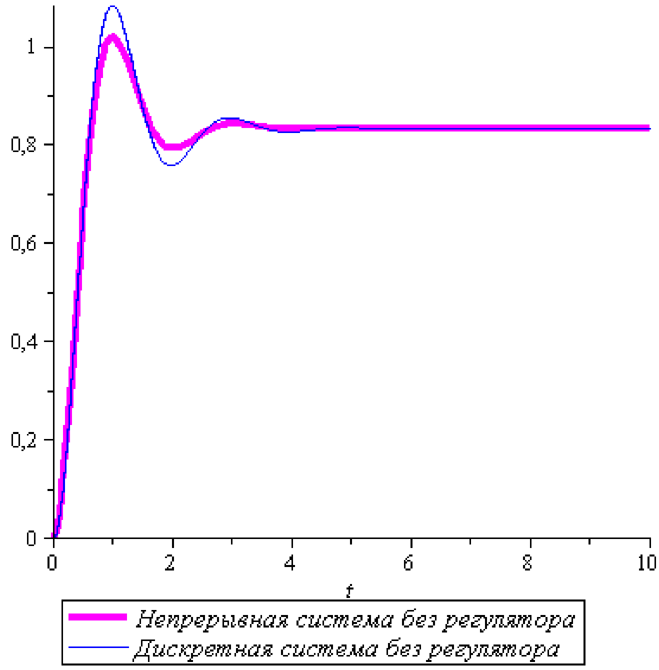

Рис. 2 – Переходные функции непрерывной и дискретной замкнутой системы без регулятора

Дальнейший расчёт регуляторов будет вестись с опорой на значения корней характеристического полинома дискретной разомкнутой системы без регулятора (8), поэтому требуется вычислить эти корни. Характеристический полином, то есть знаменатель передаточной функции (8), имеет вид:

$$A(z) = z^2 - 1,7236z + 0,7408 = (z - 0,905)(z - 0,819). \qquad (10)$$

Корни полинома (10) равны:

$$z_1 = 0,905, \qquad z_2 = 0,819. \qquad (11)$$

Расчёт в *Maple*:

Знаменатель дискретной передаточной функции (характеристический полином) разомкнутой системы без регулятора

$Polynom_{unres} := denom\left(W_{disc_{unres}}\right);$

$$z^2 - 1.723568171z + 0.740818220'$$

Корни характеристического полинома разомкнутой системы без регулятора

$Rootz_{disc_{unres}} := solve\left(Polynom_{unres}, z\right);$

0.9048374166,0.818730754

ПИ-регулятор

Дискретная передаточная функция ПИ-регулятора имеет вид:

$$W_{\text{Р}}(z)=W_{\text{ПИ}}(z)=K_{\text{П}}+\frac{K_{\text{И}}T_0(z+1)}{2(z-1)}, \qquad (12)$$

где $K_{\text{П}}$ – пропорциональный коэффициент регулятора, $K_{\text{И}}$ – интегральный коэффициент регулятора, T_0 – период квантования (3).

Расчёт в *Maple*:

Значения по умолчанию коэффициентов регулятора

K_p :='K_p'; K_i :='K_i'; K_d := 0;

$$K_p$$

$$K_i$$

$$0$$

Дискретная передаточная функция ПИ-регулятора

$$ControlPI := normal\left(K_p+\frac{K_i\cdot T\cdot(z+1)}{2\cdot(z-1)}, expanded\right);$$

$$\frac{K_p\,z-1.\,K_p+0.05000000000K_i\,z+0.05000000000K_i}{z-1.}$$

Поскольку и пропорциональный коэффициент регулятора $K_{\text{П}}$, и интегральный коэффициент регулятора $K_{\text{И}}$ выбираются произвольно, то можно выбрать значения этих коэффициентов такими, чтобы нуль регулятора компенсировал один из двух полюсов (11) передаточной функции (8).

Если в выражении для дискретной передаточной функции ПИ-регулятора (12) привести слагаемые к общему знаменателю, раскрыть скобки в числителе и вынести за скобки z, то (12) принимает вид:

$$\begin{aligned} W_{ПИ}(z) &= \frac{2K_{П}\left(z-1\right)+K_{И}T_0\left(z+1\right)}{2\left(z-1\right)} = \\ &= \frac{2K_{П}z-2K_{П}+K_{И}T_0 z+K_{И}T_0}{2\left(z-1\right)} = \\ &= \frac{\left(2K_{П}+K_{И}T_0\right)z-2K_{П}+K_{И}T_0}{2\left(z-1\right)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для расчёта коэффициентов регулятора необходим лишь числитель выражения (13), который нужно приравнять к нулю:

$$\left(2K_{П}+K_{И}T_0\right)z-2K_{П}+K_{И}T_0=0. \tag{14}$$

Теперь требуется решить уравнение (14) относительно величин $K_{П}$ и $K_{И}$, приняв z равной одному из полюсов (11). В результате можно выразить интегральный коэффициент регулятора $K_{И}$ через пропорциональный коэффициент регулятора $K_{П}$. Имеет смысл сделать пропорциональный коэффициент регулятора $K_{П}$ равным единице: $K_{П} = 1$. В этом случае становится возможным рассчитать и точное значение интегрального коэффициента регулятора $K_{И}$.

Расчёт в *Maple* для обоих значений полюсов (11) представлен ниже:

Числитель дискретной передаточной функции ПИ-регулятора с выносом переменной z за скобки

$Numerator_{ContrPI} := collect(numer(ControlPI), z);$

$$(K_p + 0.05000000000 K_i)\, z - 1.\, K_p + 0.05000000000 K_i$$

Выражение интегрального коэффициента ПИ-регулятора через пропорциональный коэффициент ПИ-регулятора

$Equation_{ContrPI} := \dfrac{coeff\left(Numerator_{ContrPI}, z, 0\right)}{coeff\left(Numerator_{ContrPI}, z\right)};$

$$\frac{-1.\, K_p + 0.05000000000 K_i}{K_p + 0.05000000000 K_i}$$

$K_{i1} := solve\left(Equation_{ContrPI} = -Rootz_{disc_{unres}}[1], K_i\right);$

$$0.9991675150 K_p$$

$K_{i2} := solve\left(Equation_{ContrPI} = -Rootz_{disc_{unres}}[2], K_i\right);$

$$1.993359877 K_p$$

Приравнивание пропорционального коэффициента ПИ-регулятора к единице

$K_p := 1;$

$$1$$

Возможные значения интегральных коэффициентов ПИ-регулятора

$K_{i1};$

$$0.999167515$$

$K_{i2};$

$$1.99335987$$

В этом случае полученные дискретные передаточные функции ПИ-регулятора определяются по формулам (12) или (13) с подстановкой найденных значений коэффициентов, а возможные передаточные функции замкнутой системы с регулятором – по следующей формуле:

$$W_{\text{искомая}}(z) = \frac{W_{\text{ПИ}}(z) W_{\text{диск.разомк.}}(z)}{1 + W_{\text{ПИ}}(z) W_{\text{диск.разомк.}}(z)}. \quad (15)$$

Расчёт в *Maple* для обоих значений полюсов (11) представлен ниже:

Возможные дискретные передаточные функции ПИ-регулятора

$$ControlPI_{first} := normal\left(K_p + \frac{K_{i1}\cdot T\cdot(z+1)}{2\cdot(z-1)}, expanded\right);$$

$$\frac{1.049958376z - 0.9500416242}{z - 1.}$$

$$ControlPI_{second} := normal\left(K_p + \frac{K_{i2}\cdot T\cdot(z+1)}{2\cdot(z-1)}, expanded\right);$$

$$\frac{1.099667994z - 0.9003320062}{z - 1.}$$

Возможные дискретные передаточные функции замкнутой системы с ПИ-регулятором

$$W_{ContrPI_{first}} := normal\left(\frac{W_{disc_{unres}}\cdot ControlPI_{first}}{1 + W_{disc_{unres}}\cdot ControlPI_{first}}, expanded\right);$$

$$\frac{0.04754167953z^2 + 3.10000000010^{-10}\,z - 0.03892383522}{z^3 - 2.676026491z^2 + 2.464386392z - 0.7797420559}$$

$$W_{ContrPI_{second}} := normal\left(\frac{W_{disc_{unres}}\cdot ControlPI_{second}}{1 + W_{disc_{unres}}\cdot ControlPI_{second}}, expanded\right);$$

$$\frac{0.04979251041z^2 + 0.004287467190z - 0.03688719921}{z^3 - 2.673775661z^2 + 2.468673859z - 0.7777054199}$$

Построение графиков дискретных переходных функций замкнутой системы с ПИ-регулятором

$$graphics_{ContrPI_{first}} := plot\left(delay\left(\frac{W_{ContrPI_{first}}}{T}\cdot\frac{z}{z-1}, z, t = seq\left(i, i = 0..\frac{20}{2\cdot T}, T\right)\right), color = red, thickness = 2, legend = \text{'Дискретная система с первым ПИрегулятором'}\right):$$

$$graphics_{ContrPI_{second}} := plot\left(delay\left(\frac{W_{ContrPI_{second}}}{T}\cdot\frac{z}{z-1}, z, t = seq\left(i, i = 0..\frac{20}{2\cdot T}, T\right)\right), color = yellow, thickness = 4, legend = \text{'Дискретная система со вторым ПИрегулятором'}\right):$$

Вывод графиков

$$display\left(graphics_{ContrPI_{second}}, graphics_{ContrPI_{first}}, graphics_{disc_{res}}\right);$$

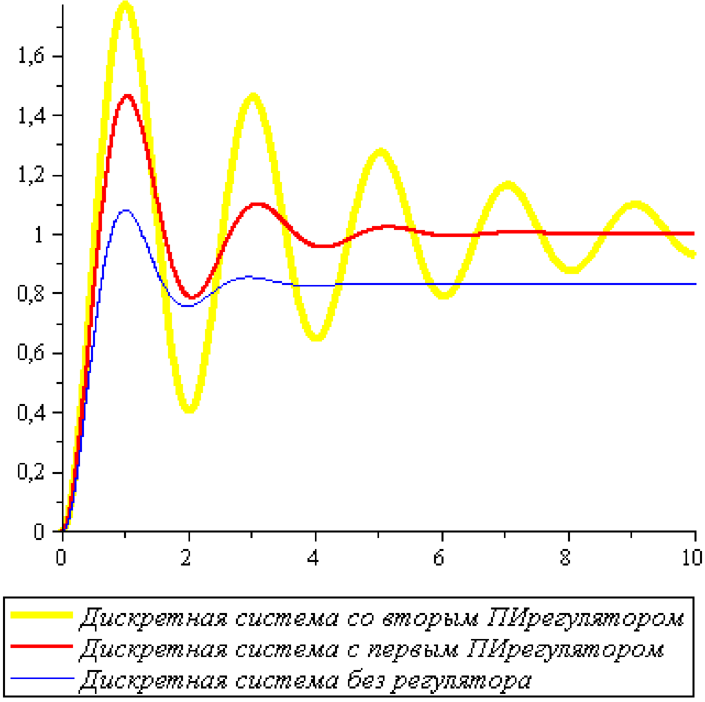

Рис. 3 – Переходные функции дискретной замкнутой системы без регулятора, с первым ПИ-регулятором, использующим первый полюс (11), и со вторым ПИ-регулятором, использующим второй полюс (11)

Как можно видеть из графиков на рис. 3, использование второго полюса (11) даёт худшее качество переходного процесса, нежели использование первого полюса (11). Тем не менее, в обоих случаях ПИ-регулятор **полностью устраняет статическую ошибку**.

ПД-регулятор

Дискретная передаточная функция ПД-регулятора имеет вид:

$$W_{\text{Р}}(z) = W_{\text{ПД}}(z) = K_{\text{П}} + \frac{K_{\text{Д}}(z+1)}{T_0 z}, \tag{16}$$

где $K_{\text{П}}$ – пропорциональный коэффициент регулятора, $K_{\text{Д}}$ – дифференциальный коэффициент регулятора, T_0 – период квантования (3).

Расчёт в *Maple*:

Значения по умолчанию коэффициентов регулятора

K_p :='K_p'; K_i := 0; K_d :='K_d';

$$K_p$$

$$0$$

$$K_d$$

Дискретная передаточная функция ПД-регулятора

$ControlPD := normal\left(K_p + \frac{K_d \cdot (z-1)}{T \cdot z}\right);$

$$\frac{K_p z + 10.\,K_d z - 10.\,K_d}{z}$$

Так же, как в случае ПИ-регулятора, и пропорциональный коэффициент регулятора $K_{\text{П}}$, и дифференциальный коэффициент регулятора $K_{\text{Д}}$ выбираются произвольно, поэтому вновь можно выбрать значения этих коэффициентов такими, чтобы нуль регулятора компенсировал один из двух полюсов (11) передаточной функции (8).

В выражении для дискретной передаточной функции ПД-регулятора (16) также требуется привести слагаемые к общему знаменателю, раскрыть скобки в числителе и вынести за скобки z, в результате чего аналогично расчёту для ПИ-регулятора, приведённому ранее, можно получить значения коэффициентов регулятора и возможные передаточные функции самого регулятора и замкнутой системы с таковым.

Расчёт в *Maple*:

Числитель дискретной передаточной функции ПД-регулятора с выносом переменной z за скобки

$Numerator_{ContrPD} := collect(numer(ControlPD), z);$

$$\left(K_p + 10.\,K_d\right) z - 10.\,K_a$$

Выражение дифференциального коэффициента ПД-регулятора через пропорциональный коэффициент ПД-регулятора

$Equation_{ContrPD} := \dfrac{coeff\left(Numerator_{ContrPD}, z, 0\right)}{coeff\left(Numerator_{ContrPD}, z\right)};$

$$-\frac{10.\,K_d}{K_p + 10.\,K_d}$$

$K_{d1} := solve\left(Equation_{ContrPD} = -Rootz_{disc_{unres}}[2], K_d\right);$

$$0.4516655606K_p$$

$K_{d2} := solve\left(Equation_{ContrPD} = -Rootz_{disc_{unres}}[1], K_d\right);$

$$0.9508331786K_p$$

Приравнивание пропорционального коэффициента ПД-регулятора к единице

$K_p := 1;$

$$1$$

Возможные значения интегральных коэффициентов ПД-регулятора

$K_{d1};$

$$0.451665560$$

$K_{d2};$

$$0.950833178$$

Возможные дискретные передаточные функции ПД-регулятора

$ControlPD_{first} := normal\left(K_p + \dfrac{K_{d1}\cdot(z-1)}{T\cdot z}\right);$

$$\frac{5.516655606z - 4.516655606}{z}$$

$ControlPD_{second} := normal\left(K_p + \dfrac{K_{d2}\cdot(z-1)}{T\cdot z}\right);$

$$\frac{10.50833179z - 9.508331786}{z}$$

Возможные дискретные передаточные функции замкнутой системы с ПД-регулятором

$W_{ContrPD_{first}} := normal\left(\dfrac{W_{disc_{unres}}\cdot ControlPD_{first}}{1 + W_{disc_{unres}}\cdot ControlPD_{first}}, expanded\right);$

$$\frac{0.2497918764z^2 + 0.02150874630z - 0.1850503747}{z^3 - 1.473776295z^2 + 0.7623269670z - 0.1850503747}$$

$W_{ContrPD_{second}} := normal\left(\dfrac{W_{disc_{unres}}\cdot ControlPD_{second}}{1 + W_{disc_{unres}}\cdot ControlPD_{second}},\right.$

$\left. expanded\right);$

$$\frac{0.4758129025z^{2}+3.20000000010^{-9}\,z-0.3895626573}{z^{3}-1.247755268z^{2}+0.7408182239z-0.3895626573}$$

Построение графиков дискретных переходных функций замкнутой системы с ПД-регулятором

$$graphics_{ContrPD_{first}} := plot\left(delay\left(\frac{W_{ContrPD_{first}}}{T}\cdot\frac{z}{z-1}, z, t = seq\left(i, i = 0\,..\,\frac{20}{2\cdot T}, T\right)\right), color = brown, thickness = 2, legend = \text{'Дискретная система с первым ПДрегулятором'}\right):$$

$$graphics_{ContrPD_{second}} := plot\left(delay\left(\frac{W_{ContrPD_{second}}}{T}\cdot\frac{z}{z-1}, z, t = seq\left(i, i = 0\,..\,\frac{20}{2\cdot T}, T\right)\right), color = cyan, thickness = 4, legend = \text{'Дискретная система со вторым ПДрегулятором'}\right):$$

Вывод графиков

$$display\left(graphics_{ContrPD_{second}}, graphics_{ContrPD_{first}}, graphics_{disc_{res}}\right);$$

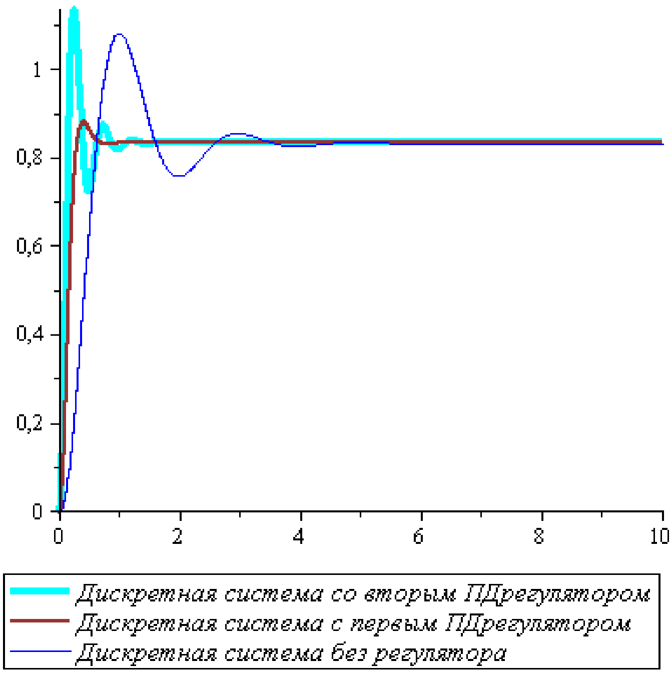

Рис. 4 – Переходные функции дискретной замкнутой системы без регулятора, с первым ПД-регулятором, использующим первый полюс (11), и со вторым ПД-регулятором, использующим второй полюс (11)

Как можно видеть из графиков на рис. 4, использование второго полюса (11) снова даёт худшее качество переходного процесса, нежели использование первого полюса (11). Тем не менее, в обоих случаях ПД-регулятор **значительно уменьшает время регулирования**.

ПИД-регулятор

Дискретная передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид:

$$W_{\text{Р}}(z) = W_{\text{ПИД}}(z) = K_{\text{П}} + \frac{K_{\text{И}} T_0 (z+1)}{2(z-1)} + \frac{K_{\text{Д}}(z+1)}{T_0 z}, \tag{17}$$

где $K_{\text{П}}$ – пропорциональный коэффициент регулятора, $K_{\text{И}}$ – интегральный коэффициент регулятора, $K_{\text{Д}}$ – дифференциальный коэффициент регулятора, T_0 – период квантования (3).

Расчёт в *Maple*:

Значения по умолчанию коэффициентов регулятора

$K_p := 'K_p'; K_i := 'K_i'; K_d := 'K_d';$

$$K_p$$
$$K_i$$
$$K_d$$

Дискретная передаточная функция ПИД-регулятора

$ControlPID := normal\left(K_p + \frac{K_i \cdot T \cdot (z+1)}{2 \cdot (z-1)} + \frac{K_d \cdot (z-1)}{T \cdot z}\right);$

$$\frac{1}{z\,(z-1.)}\left(K_p z^2 - 1.\,K_p z + 0.05000000000 K_i z^2 + 0.05000000000 K_i z + 10.\,K_d z^2 - 20.\,K_d z + 10.\,K_d\right)$$

Пусть коэффициент ошибки по скорости будет равен:

$$K_v = 5. \tag{18}$$

Также пусть при этом двумя нулями ПИД-регулятора компенсируются оба полюса (11) передаточной функции (8).

Выражение для расчёта коэффициента ошибки по скорости приведено ниже:

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z=1}(z-1) W_{\text{ПИД}}(z) W_{\text{диск.разомк.}}(z) = 5K_{\text{И}}. \tag{19}$$

Коэффициент ошибки по скорости (19) определяется исключительно интегральным коэффициентом регулятора $K_И$ и параметрами передаточной функции (8). При этом коэффициент ошибки по скорости (19) не зависит от пропорционального коэффициента регулятора $K_П$ и дифференциального коэффициента регулятора $K_Д$. Путём подстановки (18) в (19) вычисляется интегральный коэффициент регулятора $K_И$:

$$K_И = 1. \tag{20}$$

Расчёт в *Maple*:

Числитель дискретной передаточной функции ПИД-регулятора с выносом переменной zза скобки

$Numerator_{ContrPID} := collect(numer(ControlPID), z);$

$$(K_p + 0.05000000000K_i + 10.\,K_d)\,z^2 + (-1.\,K_p + 0.05000000000K_i - 20.\,K_d)\,z + 10.\,K_d$$

Коэффициент ошибки по скорости

$K_v := \frac{1}{T} \cdot limit\left((z-1)\cdot ControlPID \cdot W_{disc_{unres}}, z = 1\right);$

$$4.999999971K_i$$

Интегральный коэффициент ПИД-регулятора

$K_i := solve(K_v = 5, K_i);$

$$1.00000000$$

Теперь есть возможность выразить пропорциональный коэффициент регулятора $K_П$ и дифференциальный коэффициент регулятора $K_Д$ через найденное значение (20) интегрального коэффициента регулятора $K_И$.

Расчёт в *Maple*:

Уравнение для расчёта дифференциального коэффициента ПИД-регулятора

$$Equation_{ContrPID_d} := \frac{coeff\left(Numerator_{ContrPID}, z, 0\right)}{coeff\left(Numerator_{ContrPID}, z^2\right)} = coeff\left(Polynom_{unres}, z, 0\right);$$

$$\frac{10.\,K_d}{K_p + 0.05000000030 + 10.\,K_d} = 0.740818220$$

Уравнение для расчёта пропорционального коэффициента ПИД-регулятора

$$Equation_{ContrPID_p} := \frac{coeff\left(Numerator_{ContrPID}, z\right)}{coeff\left(Numerator_{ContrPID}, z^2\right)} = coeff\left(Polynom_{unres}, z\right);$$

$$\frac{-1.\,K_p + 0.05000000030 - 20.\,K_d}{K_p + 0.05000000030 + 10.\,K_d} = -1.72356817$$

Расчёт дифференциального и пропорционального коэффициентов ПИД-регулятора

$$K_d := solve\left(Equation_{ContrPID_d}, K_d\right);$$

$$0.2858295914 K_p + 0.0142914796$$

$$K_p := solve\left(Equation_{ContrPID_p}, K_p\right);$$

$$1.45249874$$

$$K_d;$$

$$0.4294586030$$

После того как найдены значения коэффициентов регулятора, полученная дискретная передаточная функция ПИД-регулятора определяется по формуле (17) с подстановкой найденных значений коэффициентов, а передаточная функция замкнутой системы с регулятором – аналогично выражению (15).

Расчёт в *Maple*:

Дискретная передаточная функция ПИД-регулятора с подстановкой значений коэффициентов регулятора

$ControlPID;$

$$\frac{5.797084777z^2 - 9.991670810z + 4.294586030}{z\,(z - 1.)}$$

Дискретная передаточная функция замкнутой системы с ПИД-регулятором

$$W_{ContrPID} := normal\left(\frac{W_{disc_{unres}} \cdot ControlPID}{1 + W_{disc_{unres}} \cdot ControlPID}, expanded\right);$$

$$(0.2624895929z^3 - 0.2149083009z^2 - 0.2149083044z + 0.1759520370) \Big/ (z^4 - 2.461078578z^3 + 2.249478091z^2 - 0.9557265251z + 0.1759520370)$$

Построение графика дискретной переходной функции замкнутой системы с ПИД-регулятором

$$graphics_{ContrPID} := plot\left(delay\left(\frac{W_{ContrPID}}{T} \cdot \frac{z}{z-1}, z, t = seq\left(i, i = 0 .. \frac{20}{2 \cdot T}, T\right)\right), color = green, thickness = 3, legend = \text{'Дискретная система с ПИДрегулятором'}\right):$$

Вывод графиков

$$display\left(graphics_{ContrPI_{first}}, graphics_{ContrPD_{first}}, graphics_{ContrPID}, graphics_{disc_{res}}\right);$$

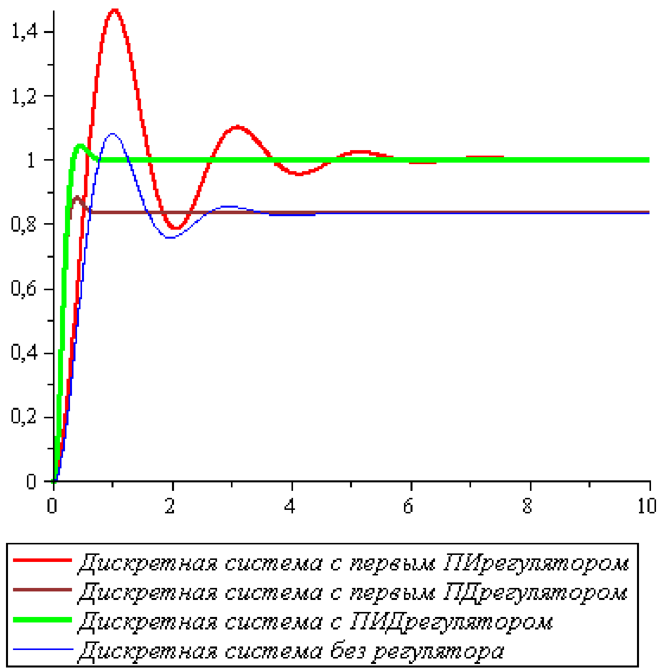

Рис. 5 – Переходные функции дискретной замкнутой системы без регулятора, с ПИ-регулятором, с ПД-регулятором и с ПИД-регулятором

Как можно видеть из графиков на рис. 5, ПИД-регулятор даёт **наилучшее качество регулирования**, сочетая в себе нулевую статическую ошибку ПИ-регулятора и высокую скорость работы, а также малую колебательность ПД-регулятора.

Задание на лабораторную работу

Дана структурная схема системы управления с непрерывной частью из формирующего звена и объекта управления 3-го порядка. Необходимо вычислить и выполнить моделирование в программном пакете *Maple*:

1) найти дискретную передаточную функцию разомкнутой системы с использованием *Z*-преобразования;
2) определить корни характеристического полинома замкнутой системы, установившуюся ошибку, перерегулирование замкнутой системы;
3) синтезировать регулятор и промоделировать замкнутую систему в соответствии с вариантом, получаемым в системе электронного обучения *LMS*;
4) сделать выводы о показателях качества замкнутой системы с регулятором.

Заказ № 7667 от 25.08. 2020.
Усл. печ. лист. 1,51. Уч. изд. л. 0,5.

Отдел полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.