Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Саранчук Юрий Сергеевич

Однородные уравнения π-свертки

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель
доктор физ.–мат. наук, проф.
Шишкин Андрей Борисович

Краснодар
2024

Оглавление

Введение

Пусть $O(G)$ — пространство локально аналитических функций на открытом множестве $G \subseteq \mathbf{C}$ с топологией равномерной сходимости на компактах; $O^*(G)$ — сильное сопряженное к пространству $O(G)$; Ω_0, Ω — выпуклые области, удовлетворяющие условию $\Omega_0 + U \subseteq \Omega$, где U — открытый круг $|z| < \varepsilon$. Оператор сдвига на фиксированный шаг $h \in U$

$$T_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0) \mid f(z) \mapsto f(z+h)$$

и произвольный функционал $S \in O^*(\Omega_0)$ порождают оператор свертки (функции f и функционала S)

$$M_S(f) : O(\Omega) \to O(U) \mid f \mapsto \langle S, T_h(f) \rangle$$

и однородное уравнение свертки

$$M_S(f) = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{0.0.1}$$

множество решений которого совпадает с ядром оператора свертки. Функция $\varphi : \lambda \mapsto \left\langle S, e^{\lambda z} \right\rangle$ является целой и называется характеристической функцией уравнения (0.0.1).

Операторы свертки были введены в 1888 году Пинкерле [9]. К этим операторам, как выяснилось позднее, сводятся некоторые дифференциальные операторы и дифференциально разностные операторы с постоянными коэффициентами. Если характеристическая функция дифференциального оператора бесконечного порядка имеет экспоненциальный тип, например, то он совпадает с оператором свертки [32]. Операторы свертки имеют большое прикладное значение. Имеют эти операторы и высокое теоретическое значениияе. Их используют, как эффективное средство исследования рядов Дирихле, например, Пойа, Валирон, Бернштейн и др. (сводка результатов есть в [14]). Операторы свертки и однородные уравнения свертки выступали предметом исследования в работах многих известных математиков ([3, 5–8, 13, ,15 ,18 , 22, 24–30, 32–34, 45–48, 50, 57, 58, 70] и др.).

Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (0.0.1), называются элементарными решениями этого уравнения. Совокупность всех элементарных решений уравнения (0.0.1) исчерпывается линейными комбинациями экспоненциальных одночленов вида $e^{\lambda z}, ze^{\lambda z}, ..., z^{n-1}e^{\lambda z}$, где λ — нуль характеристической функции φ уравнения (0.0.1) кратности n.

Если всякое решение $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения свертки можно аппроксимировать его элементарными решениями в топологии пространства $O(\Omega)$, то говорят, что для этого уравнения выполняется аппроксимационная теорема. Выполнение аппроксимационной теоремы для уравнения (0.0.1) в случае Ω — комплексная плоскость доказана в работе [10]. Аналогичный результат в общем случае получен в работах [32,34]. Среди более поздних работ следует отметить статьи [10, 52–54, 62, 69].

Дальнейшие исследования в данном направлении связаны с переходом к уравнениям более общего вида. Обобщение однородного уравнения свертки осуществляется путем обобщением оператора сдвига T_h. Это обобщение связано с представлением оператора T_h в виде дифференциального оператора бесконечного порядка

$$T_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}(D^n f)(z).$$

Пусть A — произвольный непрерывный эндоморфизм $O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ пространства целых функций и рассмотрим оператор

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \left(D^n f\right)(z).$$

Этот оператор является дифференциальным оператором бесконечного порядка. Он называется оператором A-сдвига при условии, что действует непрерывно из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$. Пусть AT_h — произвольный оператор A-сдвига, S — произвольный функционал из $O^*(\Omega_0)$. Рассмотрим оператор A-свертки

$$AM_S(f) : O(\Omega) \to O(U) \mid f \mapsto \left\langle S, AT_h(f)\right\rangle .$$

Ядро оператора A-свертки совпадает с множеством решений однородного уравнения A-свертки

$$AM_S(f) = 0, \quad f \in O(\Omega) \tag{0.0.2}$$

с характеристической функцией $\varphi : \lambda \mapsto \left\langle S, e^{\lambda z} \right\rangle$.

Как и прежде элементарным решением уравнения (0.0.2) называем произвольный экспоненциальный полином, удовлетворяющий этому уравнению. Решение уравнения (0.0.2) предполагает решение пары самостоятельных задач. Первая из них — *задача экспоненциального анализа*, а вторая — *задача экспоненциального синтеза*. Решение первой задачи предполагает описание всех элементарных решений уравнения (0.0.2), а решение второй задачи предполагает доказательство аппроксимационной теоремы (утверждающей плотность элементарных решений в множестве всех решений уравнения).

Однородные уравнения (0.0.2) впервые рассмотрены в работах Андрея Борисовича Шишкина [72,78]. В этих работах исследована задача экспоненциального синтеза для однородного уравнения A-свертки (0.0.2). Доказана, в частности, аппроксимационная теорема для него, если выполнены следующие условия:

1) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty, z\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|A(z^n)|}{\exp \varepsilon\, |z|} \right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{\varepsilon e};$$

2) существует такой полином $\pi(z)$, что $A(1) = 1$, $A(\mathbf{C}[z]) = \mathbf{C}[\pi(z)]$, где $\mathbf{C}[z]$ — кольцо многочленов от z, $\mathbf{C}[\pi(z)]$ — кольцо многочленов от $\pi(z)$.

Условие 1) является естественным и не может быть опущено. Его необходимость вызвана самим определением оператора A-свертки [72]. Если непрерывный эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ удовлетворяет условию 2), то его называют оператором π-симметризации. Остается открытым вопрос: в какой мере условие 2) (условие π-симметризации) является необходимым для обеспечения справедливости аппроксимационной теоремы для уравнения (0.0.2). Другой открытый вопрос связан с решением задачи экспоненциального анализа для уравнения (0.0.2). В общем случае эта задача еще не исследовалась. Известны лишь ее решения в некоторых частных случаях [12,60].

Цель диссертационного исследования — получить ответы на поставленные вопросы в условиях некоторого специального класса однородных уравнений A-свертки.

Пусть $\pi\left(z\right)$ — многочлен, $\deg q \geq 1$. Композиции вида $\hat{g}(\pi(z))$, где $\hat{g}$ — целая функция, являются целыми функциями и называются целыми π-симметричными функциями. Любая целая функция $g(z)$ допускает единственное представление в виде

$$g(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_p(z), \tag{0.0.3}$$

в котором коэффициенты $g_p(z)$ являются целыми π-симметричными функциями [40]. Такие представления мы называем π-симметричными представлениями. Пусть $\{a_0(z), ..., a_{q-1}(z)\}$ — произвольный набор многочленов, не все из которых равны тождественному нулю, и выполняются неравенства $\deg a_p\left(z\right) \leq p$. Считаем, что существует такое $p \in \{0, ..., q-1\}$, что $\deg a_p\left(z\right) = p$. Рассмотрим непрерывный эндоморфизм A пространства целых функций $O(\mathbf{C})$, действующий по правилу

$$A : g(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p\left(z\right) g_p(z), \tag{0.0.4}$$

где $g_p(z)$ — π-симметричные коэффициенты представления (0.0.3). Однородное уравнение A-свертки

$$\langle S, AT_h(f)\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{0.0.5}$$

порождаемое эндоморфизмом (0.0.4), называется *однородным уравнением π-свертки.*

Такие уравнения рассматривались ранее неоднократно. К ним относятся однородные уравнения q-сторонней свертки [32, 76], однородные уравнения π-свертки [40] и однородные уравнения типа q-сторонней свертки [12, 60].

Дадим краткое описание содержания настоящей диссертации.

В первой главе осуществлены постановки задач экспоненциального анализа и экспоненциального синтеза. В разделе 1.1 рассмотрены необходимые предварительные сведения — циклические биголоморфизмы, разностные отношения, симметричные представления, операторы симметризации, дуальные операторы, дуальные аннуляторы. В разделе 1.2 определен *оператор π-сдвига*, исследованы свойства этого оператора, его возможные представления и вопрос преемственности данного определения. Оказалось, что оператор π-сдвига обобщает известные понятия оператора q-стороннего сдвига и оператора π-сдвига (в смысле Игоря Федоровича Красичкова-Терновского [40]). В разделе 1.3 исследован соответствующий *оператор π-свертки.* Постановки задач экспоненциального анализа и экспоненциального синтеза для *однородного уравнения π-свертки* проведены в разделе 1.4. Постановка первой задачи потребовала доказательства нетривиальности запаса всех элементарных решений однородным уравнением π-свертки (предложение 1.4.1). Постановка второй задачи потребовала рассмотрения вопроса преемственности нового определения оператора π-свертки.

Вторая глава посвящена решению задачи экспоненциального анализа. В разделе 2.1 эта задача сведена к задаче спектрального анализа для дифференциального оператора $\pi(D)$ (предложение 2.1.1). Описание элементарных решений однородного уравнения π-свертки сведено к описанию *элементарных экспоненциальных полиномов*, удовлетворяющих этому уравнению (предложение 2.1.2).

В разделе 2.2 получен критерий принадлежности элементарного экспоненциального полинома пространству решений однородного уравнения π-свертки (теорема 2.2.1). Этот критерий в разделе 2.3 используется для описания *общего элементарного решения* (общего вида элементарного решения) уравнения (теорема 2.3.1). Оказалось, что множество элементарных решений уравнения совпадает с линейной оболочкой экспоненциальных полиномов вида

$$\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\left(\operatorname{sym}_\zeta \frac{(\pi(\zeta)-\pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi(\zeta)} C(z)e^{\zeta z}\right)(\omega)\Bigg|_{\omega=\pi(\lambda)},$$

где $\varphi(\zeta)$ — характеристическая функция уравнения, $m \in \mathbf{Z}_+$, sym_ζ — оператор π-симметризации (по переменной ζ), $\lambda \in \mathbf{C}$ и локально аналитическая функция $C(\zeta)$ выбрана из условия: произведение

$$\frac{(\pi(\zeta) - \pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi(\zeta)} C(\zeta)$$

является аналитической функцией в точках π-слоя $\pi^{-1}(\pi(\lambda))$. Последнее условие можно записать в виде неравенства

$$m_C(\zeta) \geq m_\varphi(\zeta) - (m+1) m_{\pi-\pi(\lambda)}(\zeta), \quad \zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda)),$$

где $m_g(\zeta)$ – кратность корня локально аналитической функции g в точке ζ.

Третья глава посвящена решению задачи экспоненциального синтеза. Эндоморфизм (0.0.4) в общем случае не является оператором симметризации (в смысле условия 2)). Это означает, что результаты Андрея Борисовича Шишкина из статей [72,78], вообще говоря, не распространяются на порождаемые этим эндоморфизмом однородные уравнения π-свертки. Можно говорить лишь о их частичном распространении на такие уравнения. Точное описание семейства однородных уравнений π-свертки, для которых справедлива аппроксимационная теорема, связано с уточнением понятия оператора π-симметризации. Это уточнение носит чисто алгебраический характер и связано со структурой модуля многочленов $\mathbf{C}[z]$ над кольцом π-симметричных многочленов $\mathbf{C}[\pi(z)]$.

В разделе 3.1 исследуются базисы в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[z]$. В основе этого исследования лежит понятие независимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ системы многочленов. В этом разделе получен критерий независимости системы многочленов над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ (предложение 3.1.3), описаны базисы в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[z]$ (предложение 3.1.4). Наконец, доказана теорема о разложении многочленов кольца $\mathbf{C}[z]$ по базисам, с коэффициентами из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$ (теорема 3.1.1).

В разделе 3.2 обобщается понятие оператора π-симметризации. Эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называется называется *оператором*

π-*симметризации* (в обобщенном смысле), если

$$A(d(z)) = d(z), \quad A(\mathbf{C}[z]) = d(z)\mathbf{C}[\pi(z)],$$

где $d(z)$ — многочлен из кольца $\mathbf{C}[z]$. Предложение 3.2.1 описывает условия на полиномиальные коэффициенты $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ эндоморфизма (0.0.4), при выполнении которых этот эндоморфизм является оператором π-симметризации. В подразделе 3.2.2 вводится понятие *индикатора* порождающего эндоморфизма (0.0.4). Предложение 3.2.2 описывает условия на индикатор эндоморфизма (0.0.4), при выполнении которых он является оператором π-симметризации. Оказалось, что эндоморфизм (0.0.4) является оператором π-симметризации, если он *декомпозиционно периодичен*, то есть удовлетворяет условию *периодичности* и условию *декомпозиции* (см. подраздел 3.2.2).

Раздел 3.3 посвящен аппросимационной теореме для однородного уравнения π-свертки. Здесь доказана справедливость следующего утверждения. Для того чтобы аппроксимационная теорема для уравнения (0.0.5) была справедлива достаточно, а если порождающие полиномы $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ являются мономами, то и необходимо, чтобы порождающий эндоморфизм (0.0.4) являлся оператором π-симметризации в обобщенном смысле (теорема 3.3.1). Понятно, что эта теорема допускает формулировку в терминах индикатора порождающего эндоморфизма (0.0.4): для того чтобы аппроксимационная теорема для уравнения (0.0.5) была справедлива достаточно, а если порождающие полиномы $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ являются мономами, то и необходимо, чтобы индикатор порождающего эндоморфизма (0.0.4) был декомпозиционно периодичен.

Научная новизна, результаты выносимые на защиту. В работе получены следующие результаты:

– определение оператора π-свертки, обобщающего все известные операторы типа свертки в комплексной области; исследование свойств оператора π-свертки;

– описание общего элементарного решения однородного уравнения π-свертки в терминах его характеристической функции;

– описание точных условий справедливости аппроксимационной теоремы для однородного уравнения π-свертки в терминах порождающих его коэффициентов (или в терминах порождающего его эндоморфизма целых функций).

Практическая ценность результатов исследования. Проведенные исследования относятся к теории локального описания целых функций экспоненциального типа и к теории спектрального синтеза в комплексной области. Они носят характер фундаментальных исследований по теории функций комплексной переменной и могут быть полезными на научно-исследовательских семинарах, тематика которых связана с действительным, комплексным и функциональным анализом. Результаты настоящей диссертации продолжают исследования известных математиков, чем и обусловлена их теоретическая и практическая значимость.

Апробация исследования. В ходе аппробации результаты исследования представлялись:

– на семинаре по теории функций в филиале ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г. Славянске-на-Кубани (руководитель семинара Андрей Борисович Шишкин, 2017–2023 гг.);

– на ежегодной Региональной научно-практической конференции «Инновационная деятельность в сфере естественнонаучного образования» (ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», филиал в г. Славянске-на-Кубани 2015–2020 гг.);

– в ходе работы Международной школы-конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвященной 90-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Игоря Петровича Митюка (ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», филиал в г. Геленджик, 2018 г.);

– в ходе работы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной юбилею филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани, «Педагогический вуз в социокультурном и образовательном пространстве региона» (ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», филиал в г. Славянске-на-Кубани, 2019 г.);

– в ходе работы третьей Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее» (Адыгейский Государственный Университет, 2019 г.).

– в ходе работы Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», 2022 г.).

Все результаты диссертационного исследования являются достоверными, поскольку приводятся со строгими доказательствами, основанными на известных фактах и методах теории функций и функционального анализа.

Публикации автора и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 научных статьях [11, 59, 60, 62] , и 7 тезисах научных конференций [12, 61]. Работа [11] опубликована в издании, входящем в международную наукометрическую базу данных Scopus, статьи [59, 60, 62] опубликованы в журнале, рекомендованном ВАК РФ.

Статьи [11, 60, 62] опубликованы в соавторстве. Понятие однородного уравнения типа q-сторонней свертки, введенное в статье [60], является промежуточным и лежит в основе более общего понятия однородного уравнения π-свертки, введенного в настоящем диссертационном исследовании. Обобщение теоремы 15.1 из статьи [60] позволило получить ключевой результат из второй главы. В публикации [62] автору диссертации принадлежит определение оператора π-сдвига и доказательство его основных свойств. Полученный результат отображен в первой главе диссертационой работы и является основополагающим для всего дальнейшего исследования. В работе [11] автору диссертации принадлежит Теорема 1.

Автор выражает благодарность Андрею Борисовичу Шишкину за формулировку задач и помощь в выборе методов их решения.

Глава 1.

Однородное уравнение типа свертки

1.1. Предварительные сведения

1. Циклические биголоморфизмы. Пусть $q \in \mathbf{N}$, $\pi(z)$ — фиксированный многочлен

$$\pi(z) := z^q + c_1 z^{q-1} + ... + c_q, \quad c_j \in \mathbf{C}$$

степени q. Отождествим многочлен $\pi(z)$ с отображением

$$\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \,|z \mapsto \pi(z).$$

Это отображение определяет аналитическое накрытие $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$. Комплексную плоскость, из которой удалено критическое множество аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, обозначим символом Λ, а π-прообраз множества Λ обозначим символом $\mathbf{C}_*$. Сужение

$$\pi|_{\mathbf{C}_*} : \mathbf{C}_* \to \Lambda | z \mapsto \pi(z)$$

отображения $\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ определяет q-листное безграничное неразветвленное накрытие $(\mathbf{C}_*, \pi, \Lambda)$. Фундаментальную группу топологического пространства Λ (с индуцированной из $\mathbf{C}$ топологией) обозначим стандартно $\pi_1(\Lambda)$. Элементы $\Gamma \in \pi_1(\Lambda)$ называются гомотопическими классами. Каждый из них порождает послойный биголоморфизм $\omega_\Gamma : \mathbf{C}_* \to \mathbf{C}_*$, действие которого на фиксированном π-слое

$\pi^{-1}(\lambda)$ можно определить так. Пусть γ — произвольный замкнутый путь из класса Γ с началом в точке $\lambda \in \Lambda$, z — произвольный корень уравнения $\pi(z) - \lambda = 0$, то есть произвольный элемент π-слоя $\pi^{-1}(\lambda)$. Обход пути γ точкой ω приводит к тому, что корень z_ω уравнения $\pi(z) - \omega = 0$ непрерывно меняется от начального значения $z \in \pi^{-1}(\lambda)$ до некоторого конечного значения $z' \in \pi^{-1}(\lambda)$, которое принимается в качестве значения биголоморфизма ω_Γ в точке z.

Биголоморфизмы ω_Γ, $\Gamma \in \pi_1(\Lambda)$ образуют группу гомоморфную фундаментальной группе $\pi_1(\Lambda)$ (относительно групповой операции $\omega_{\Gamma'} \circ \omega_\Gamma := \omega_{\Gamma\circ\Gamma'}$). Ее называют накрывающей группой накрытия $(\mathbf{C}_*, \pi, \Lambda)$ и обозначают стандартным символом $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$. Если биголоморфизм $\omega \in \mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$ порождает циклическую группу порядка q:

$$\langle\omega\rangle = \{\omega^0, ..., \omega^{q-1}\},$$

то его называют циклическим. Если Γ — гомотопический класс замкнутых путей $\gamma \subseteq \Lambda$, однократно обходящих всю совокупность критических точек против часовой стрелки, то биголоморфизм ω_Γ является циклическим и соответствует переходу от одного листа римановой поверхности функции π^{-1} на другой. Предположим, что биголоморфизм ω является циклическим. Тогда каждый обыкновенный π-слой $\pi^{-1}(\lambda)$ можно упорядочить так, что $\pi^{-1}(\lambda) = (z_0, ..., z_{q-1})$ и ω действует на слой $\pi^{-1}(\lambda)$ как циклическая перестановка $(z_0, ..., z_{q-1}) \to (z_1, ..., z_{q-1}, z_0)$. Например, можно положить

$$z_0 = \omega^0(z), z_1 = \omega^1(z), ..., z_{q-1} = \omega^{q-1}(z),$$

где z — произвольный элемент π-слоя $\pi^{-1}(\lambda)$.

2. Разностные отношения. Пусть $\varphi_0, ..., \varphi_{q-1}$ — фиксированные элементы пространства $O(G)$ локально аналитических функций на открытом множестве $G \subseteq \mathbf{C}$ с топологией равномерной сходимости на компактах, $\Delta(\varphi_0, ..., \varphi_{q-1})$ — функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(z_0) & \cdots & \varphi_p(z_0) & \cdots & \varphi_{q-1}(z_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(z_{q-1}) & \cdots & \varphi_p(z_{q-1}) & \cdots & \varphi_{q-1}(z_{q-1}) \end{vmatrix},$$

который рассматриваем как функцию q комплексных переменных $z_0, ..., z_{q-1} \in G$. Рассмотрим разностное отношение

$$\Phi(z_0, ..., z_{q-1}) := \frac{\Delta(\varphi_0, ..., \varphi_{q-1})}{\Delta(1, z, ..., z^{q-1})},$$

где $\Delta(1, z, ..., z^{q-1})$ — определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & z_0^p & \cdots & z_0^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & z_{q-1}^p & \cdots & z_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le q-1} (z_j - z_i).$$

Пусть $z_0, ..., z_{q-1}$ — попарно различные точки из G и $\varphi_p \in \{\varphi_0, ..., \varphi_{q-1}\}$. Рассмотрим разделенные разности

$$[z_i]\varphi_p := \varphi_p(z_i), \quad [z_i z_j]\varphi_p := \frac{[z_i]\varphi_p - [z_j]\varphi_p}{z_i - z_j}, ...$$

$$..., [z_i z_j z_k]\varphi_p := \frac{[z_i z_j]\varphi_p - [z_j z_k]\varphi_p}{z_i - z_k}, ...$$

с узлами в точках $z_0, ..., z_{q-1}$ [17, Гл. 1]. В предложении 2.1 из работы [38] показано, что значение функции $\Phi(z_0, ..., z_{q-1})$ в фиксированной точке совпадает с определителем

$$\delta(\varphi_0, ..., \varphi_{q-1}) :=$$

$$:= \begin{vmatrix} [z_0]\varphi_0 & \cdots & [z_0]\varphi_p & \cdots & [z_0]\varphi_{q-1} \\ [z_0 z_1]\varphi_0 & \cdots & [z_0 z_1]\varphi_p & \cdots & [z_0 z_1]\varphi_{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [z_0 z_1 ... z_{q-1}]\varphi_0 & \cdots & [z_0 z_1 ... z_{q-1}]\varphi_p & \cdots & [z_0 z_1 ... z_{q-1}]\varphi_{q-1} \end{vmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Разностное отношение $\Phi(z_0, ..., z_{q-1})$ является аналитической функцией на декартовом произведении G^q, так как элементы определителя $\delta(\varphi_0, ..., \varphi_{q-1})$ являются разделенными разностями порядка $\le q-1$ и представляют собой аналитические функции переменной $(z_0, ..., z_{q-1})$. При этом справедливо интегральное представление

$$[z_0 z_1 ... z_j]\varphi_p = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_p(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)...(\zeta - z_j)}, \quad (1.1.2)$$

где $(j,p) \in \{0,...,q-1\}^2$, L — произвольный спрямляемый контур, охватывающий точки $z_0,...,z_j$ [17, Гл. 1, § 4]. Здесь $[z_0 z_1 ... z_j]\varphi_p$ — произвольный элемент определителя $\delta(\varphi_0,...,\varphi_{q-1})$ и $z_0,...,z_{q-1}$ фиксированы.

3. Симметричные представления. Если $G \subseteq \mathbf{C}$ и $G = \pi^{-1} \circ \pi(G)$, то множество G называется *π-симметричным.* Если комплексная функция g, определенная на π-симметричном множестве G, представляется в виде композиции $g = \hat{g} \circ \pi$, где $\hat{g}$ — комплексная функция, заданная на образе $\pi(G)$, то она тоже называется *π-симметричной.* Если функция $\hat{g}$ локально аналитична на множестве $\pi(G)$ (соотв. целая функция), то функцию $g = \hat{g} \circ \pi$ называем *локально аналитической π-симметричной* (соотв. *целой π-симметричной*) функцией. Далее $O_\pi(G)$ — семейство всех локально аналитических π-симметричных функций на π-симметричном множестве G с топологией равномерной сходимости на компактах.

Если G — открытое π-симметричное множество и $g \in O(G)$, то имеет место единственное *π-симметричное представление* функции g:

$$g(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_p(z), \quad g_p \in O_\pi(G) \tag{1.1.3}$$

[38, теорема 2.1]. Для любой обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ π-симметричные коэффициенты $g_p(z)$, в свою очередь, представляются в виде разностного отношения

$$g_p(z) = \frac{\Delta_p(1,...,g,...,z^{q-1})}{\Delta(1,...,z^{q-1})},$$

где ω — циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$, $z_j = \omega^j(z)$, $j \in \{0,...,q-1\}$ и

$$\Delta_p(1,...,g,...,z^{q-1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & g(z_0) & \cdots & z_0^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & g(z_{q-1}) & \cdots & z_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix}.$$

Далее рассмотрим π-симметричное представление многочлена $g(z)$ на $G := \mathbf{C}$.

Предложение 1.1.1. *Если* $\deg g(z) = m$, *то при* $m \geq p$ *коэффициент* $g_p(z)$ *представления* (1.1.3) *является многочленом и* $\deg g_p(z) \leq m - p$. *Если* $m < p$, *то коэффициент* $g_p(z)$ *совпадает с тождественным нулем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай z — обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ и $z_i := \omega^i z \in \{z_0, ..., z_{q-1}\}$, где ω — циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$. По свойствам многочленов

$$\pi(z_i) = \frac{\pi(z)}{z^q} z^q = (1 + o(1))\, z^q, \quad z \to \infty.$$

Значит, $\pi(z_i) \to \infty$ и, значит, $z_i \to \infty$ при $z \to \infty$. Следовательно,

$$\alpha := \frac{z_i^q}{\pi(z_i)} - \frac{z^q}{\pi(z)} = o(1), \quad z \to \infty,$$

$$z_i^q = \left(1 + \alpha \frac{\pi(z)}{z^q}\right) z^q = (1 + o(1))\, z^q, \quad z \to \infty.$$

Значит,

$$|z_i| = |(1 + o(1))|\, |z|\,, \quad z \to \infty, \tag{1.1.4}$$

$$\operatorname{Arg} z_i^q = \operatorname{Arg} z^q + o(1), \quad z \to \infty. \tag{1.1.5}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ и $\varepsilon_1 \in (\varepsilon_0, \varepsilon)$. В силу (1.1.4)

$$|z_i|^n \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n\,, \quad |z| \geq R' > 0. \tag{1.1.6}$$

В силу (1.1.5)

$$|z_i - z_j| \geq 2\,|z| \sin\frac{\pi}{q+1}, \quad |z| \geq R'' > 0. \tag{1.1.7}$$

Положим $R := \max\{R', R''\}$. Тогда вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{z : |z| < R\}$ выполняются неравенства (1.1.6) и (1.1.7).

Рассмотрим π-симметричное представление монома z^n

$$z^n = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_{n,p}(z), \quad g_{n,p} \in O_\pi(\mathbf{C}),$$

в котором π-симметричные коэффициенты $g_{n,p}(z)$ в обыкновенных точках z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ представляются в виде

$$g_{n,p}(z) = \frac{\Delta_p(1, ..., z^n, ..., z^{q-1})}{\Delta(1, ..., z^{q-1})}.$$

В силу (1.1.6) для всех целых $n \geq 0$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{z : |z| < R\}$ выполняется неравенство

$$\left|\Delta_p(1, ..., z^n, ..., z^{q-1})\right| \leq \left| \begin{matrix} 1 & \cdots & |z_0|^n & \cdots & |z_0|^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & |z_{q-1}|^n & \cdots & |z_{q-1}|^{q-1} \end{matrix} \right| \leq$$

$$\leq q! \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{q(q-1)}{2}-p+n} |z|^{\frac{q(q-1)}{2}-p+n},$$

а в силу (1.1.7) вне этого множества выполняется неравенство

$$\ln\left|\Delta(1, ..., z^{q-1})\right| \geq \frac{q(q-1)}{2}\left(\ln 2 + \ln|z| + \ln\sin\frac{\pi}{q+1}\right).$$

Следовательно,

$$|g_{n,p}(z)| = \frac{\left|\Delta_p(1, ..., z^n, ..., z^{q-1})\right|}{|\Delta(1, ..., z^{q-1})|} \leq$$

$$\leq \frac{q!\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}|z|\right)^{\frac{q(q-1)}{2}-p+n}}{\left(2|z|\sin\frac{\pi}{q+1}\right)^{\frac{q(q-1)}{2}}} \leq C\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^{n-p}, \tag{1.1.8}$$

где

$$\ln C := \frac{q(q-1)}{2}\left(\ln q!\varepsilon_1 - \ln\left(2\varepsilon_0 \sin\frac{\pi}{q+1}\right)\right).$$

Значит, $g_{n,p}(z)$ — многочлен и $\deg g_{n,p}(z) \leq n-p$ при $n \geq p$. Если $n < p$, то $g_{n,p}(z)$ — тождественный нуль. Далее

$$g(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_{n,p}(z) = \sum_{p=0}^{q-1}\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{g^{(n)}(0)}{n!} g_{n,p}(z)\right) z^p$$

вытекает, что

$$g_p(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} g_{n,p}(z),$$

то есть $g_p(z)$ — многочлен и $\deg g_p(z) \leq m - p$ при $m \geq p$. Если $m < p$, то $g_{n,p}(z)$ — тождественный нуль. Предложение доказано. $\square$

В общем случае (например, z — особая точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$) коэффициенты $g_p(z)$ представления (1.1.3), в свою очередь, представляются в виде определителя

$$\delta_p(1, ..., g, ..., z^{q-1}) :=$$

$$:= \begin{vmatrix} [z_0]z^0 & \cdots & [z_0]g & \cdots & [z_0]z^{q-1} \\ [z_0z_1]z^0 & \cdots & [z_0z_1]g & \cdots & [z_0z_1]z^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [z_0z_1...z_{q-1}]z^0 & \cdots & [z_0z_1...z_{q-1}]g & \cdots & [z_0z_1...z_{q-1}]z^{q-1} \end{vmatrix}$$

[38, теорема 2.1], элементы которого допускают интегральные представления вида (1.1.2) [17, Гл. 1, § 4].

4. Оператор симметризации. Пусть G — открытое π-симметричное множество в $\mathbf{C}$. Для любого $z \in G$ символами $z_0, ..., z_{q-1}$ обозначаем элементы π-слоя $\pi^{-1} \circ \pi(z)$. Если π-слой $\pi^{-1} \circ \pi(z)$ соответствует критической точке $\lambda = \pi(z)$ аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, то отдельные элементы *упорядочения* $z_0, ..., z_{q-1}$ совпадают (повторяются). В этом случае порядок следования элементов упорядочения $z_0, ..., z_{q-1}$ считаем произвольным.

Для любой функции $g \in O(G)$ определим функцию $\operatorname{sym} g$ по правилу

$$\operatorname{sym} g : z \to \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} g(z_j), \quad (z_0, ..., z_{q-1}) = \pi^{-1} \circ \pi(z).$$

Функция $\operatorname{sym} g$ принадлежит $O_\pi(G)$, то есть является локально аналитической π-симметричной на G [38, предложение 2.2]. Оператор

$$O(G) \to O_\pi(G) \mid g \mapsto \operatorname{sym} g$$

называется *оператором π-симметризации.* Образ $\operatorname{sym} g$ называется *π-симметризацией* функции g. Легко убедиться, что оператор π-симметризации $\operatorname{sym} : O(G) \to O_\pi(G)$ является линейным и непрерывным. Если оператор sym действует по переменной λ, то используем символ $\operatorname{sym}_\lambda$.

Для произвольного целого $n \geq 0$ π-симметризацию целой функции $z \mapsto z^n$ обозначим символом $s_n(z)$. Целая π-симметричная функция $s_n(z)$ представляется в виде композиции $\sigma_n \circ \pi$, где σ — многочлен степени $\leq \frac{n}{q}$ [78, §2]. Значит, для любого $n \in \{0, ..., q-1\}$ функция $s_n(z)$ является константой. Будем обозначать ее символом s_n. Легко увидеть, например, что $s_0 = 1$ и по теореме Виета

$$s_1 = -c_1 = -\frac{\pi^{(q-1)}(0)}{(q-1)!}.$$

Выберем произвольное открытое π-симметричное множество $G \subseteq \mathbf{C}$, произвольную функцию $g \in O(G)$ и рассмотрим ее π-симметричное представление (1.1.3). Следующее предложение раскрывает связь оператора π-симметризации с π-симметричным представлением локально аналитической функций g.

Предложение 1.1.2. *Для любого $z \in G$ имеет место представление*

$$\operatorname{sym} g(z) = \sum_{p=0}^{q-1} s_p g_p(z). \tag{1.1.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $z \in G$ и $z_0, ..., z_{q-1}$ — произвольное упорядочение π-слоя $\pi^{-1} \circ \pi(z)$. Из π-симметричного представления

$$g(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_p(z), \quad g_p \in O_\pi(G)$$

и определения оператора π-симметризации

$$\operatorname{sym} g(z) := \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} g(z_j)$$

вытекает, что

$$\operatorname{sym} g(z) := \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} g(z_j) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{p=0}^{q-1} z_j^p g_p(z) =$$

$$= \sum_{p=0}^{q-1}\left(\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} z_j^p\right) g_p(z) = \sum_{p=0}^{q-1}\left(\operatorname{sym} z^p\right) g_p(z) = \sum_{p=0}^{q-1} s_p g_p(z).$$

Предложение доказано. □

Отметим еще одно свойство оператора симметризации.

Предложение 1.1.3. *Если $g \in O(G)$ и $s \in O_\pi(G)$, то справедливо соотношение*

$$\operatorname{sym} sg = s \operatorname{sym} g,$$

то есть π-симметричные функции можно выносить за знак оператора π-симметризации.

Доказательство. Действительно, пусть $z \in G$ и $z_0, ..., z_{q-1}$ — произвольное упорядочение π-слоя $\pi^{-1} \circ \pi(z)$. Тогда

$$\operatorname{sym} s(z)g(z) := \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} s(z_j)g(z_j).$$

Функция s по предположению является π-симметричной на G, значит, $s(z_j) = \sigma \circ \pi(z_j) = \sigma \circ \pi(z) = s(z)$. Следовательно,

$$\operatorname{sym} s(z)g(z) := s(z)\left(\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} g(z_j)\right) = s(z) \operatorname{sym} g(z).$$

Предложение доказано. □

Пусть D_ζ — оператор частного дифференцирования $O(G\times U) \to O(G \times U)$ по параметру $\zeta \in U$, где $U \subseteq \mathbf{C}$ — открытое множество, $O(G\times U)$ — семейство всех локально аналитических функций на $G\times U$ (по совокупности переменных). В следующем предложении мы покажем, что оператор π-симметризации sym (действующий по переменной z) коммутирует с оператором дифференцирования (действующим по параметру $\zeta \in U$).

Предложение 1.1.4. *Если функция $g(z,\zeta)$ принадлежит семейству $O(G\times U)$, то для любых $(z,\zeta)\in G\times U$ имеет место соотношение*

$$(D_\zeta\circ\mathrm{sym})\,g(z,\zeta)=(\mathrm{sym}\circ D_\zeta)\,g(z,\zeta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(z,\zeta)\in O(G\times U)$ и $g'(z,\zeta):=D_\zeta g(z,\zeta)\in O(G\times U)$. Зафиксируем произвольную точку $\zeta\in U$ и воспользуемся симметричным представлением функции $g(z,\zeta)$ (одной комплексной переменной z) на множестве G:

$$g(z,\zeta)=z^0g_0(z,\zeta)+...+z^{q-1}g_{q-1}(z,\zeta),$$

$$g_p(z,\zeta)=\frac{\Delta_p(1,...,g(z,\zeta),...,z^{q-1})}{\Delta(1,...,z^{q-1})},\quad p\in\{0,...,q-1\}. \qquad (1.1.10)$$

Это представление справедливо для любой обыкновенной точки из G. В силу соотношения (1.1.9) имеем

$$\mathrm{sym}\,g(z,\zeta)=\sum_{p=0}^{q-1}s_pg_p(z,\zeta).$$

Из этого представления и представления (1.1.10) вытекает, что функции $(z,\zeta)\mapsto g_p(z,\zeta)$ и $(z,\zeta)\mapsto\mathrm{sym}\,g(z,\zeta)$ принадлежат пространству $O(G_*\times U)$, где $G_*:=G\cap\mathbf{C}_*$. Далее зафиксируем $z\in G_*$ и рассмотрим функцию $\zeta\mapsto g_p(z,\zeta)$. Так как z — обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbf{C},\pi,\mathbf{C})$, то для всех $\zeta\in U$ выполняются равенства

$$D_\zeta g_p(z,\zeta)=\frac{\Delta_p(1,...,D_\zeta g(z,\zeta),...,z^{q-1})}{\Delta(1,...,z^{q-1})}=$$

$$=\frac{\Delta_p(1,...,g'(z,\zeta),...,z^{q-1})}{\Delta(1,...,z^{q-1})}=g'_p(z,\zeta),$$

где $g'_p(z,\zeta)$ — коэффициенты π-симметричного представления

$$g'(z,\zeta)=\sum_{p=0}^{q-1}z^pg'_p(z,\zeta),\quad g'_p(z,\zeta)\in O_\pi(G)$$

функции $z \mapsto g'(z,\zeta)$. Значит, для всех $z \in G_*$ и всех $\zeta \in U$ выполняются равенства

$$(D_\zeta \circ \mathrm{sym})\, g(z,\zeta) = D_\zeta \sum_{p=0}^{q-1} s_p g_p(z,\zeta) = \sum_{p=0}^{q-1} s_p g'_p(z,\zeta) =$$

$$= \mathrm{sym}\, g'(z,\zeta) = (\mathrm{sym} \circ D_\zeta)\, g(z,\zeta).$$

На особые точки $z \in G$ это равенство переносится по непрерывности. Предложение доказано. $\square$

5. Дуальные операторы. Пусть $O(\Omega)$ — пространства голоморфных функций на односвязной области $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ с топологией равномерной сходимости на компактах; $O^*(\Omega)$ — сильное сопряженное пространство; $P(\Omega) \subseteq O(\mathbf{C})$ — полный образ преобразования Лапласа

$$L_\Omega : O^*(\Omega) \to O(\mathbf{C}) \mid S \to \varphi(\lambda) := \left\langle S, e^{\lambda z} \right\rangle .$$

Взаимно однозначное отображение $L_\Omega : O^*(\Omega) \to P(\Omega)$ индуцирует в $P(\Omega)$ отделимую локально выпуклую топологию. Эта топология допускает простое описание в случае выпуклой области Ω, содержащей начало. Пусть h_Ω — опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа. Тогда отделимое локально выпуклое пространство $P(\Omega)$ совпадает с индуктивным пределом $P[1, h_\Omega)$ [32].

Выберем еще одну односвязную область Ω_0 в плоскости $\mathbf{C}$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
O^*(\Omega_0) & \xrightarrow{u^*} & O^*(\Omega) & & O(\Omega) & \xrightarrow{u} & O(\Omega_0) \\
{\scriptstyle L_{\Omega_0}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle L_\Omega} & \overset{(*)}{\longleftrightarrow} & {\scriptstyle L^*_\Omega}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle L^*_{\Omega_0}} \\
P(\Omega_0) & \xrightarrow[v]{} & P(\Omega) & & P^*(\Omega) & \xrightarrow[v^*]{} & P^*(\Omega_0)
\end{array}$$

в которой u и v — линейные непрерывные отображения; u^* и v^* — их сопряженные отображения. Естественно предположить, что эта диаграмма коммутативна. В этом случае отображение v (соотв. u) называется *дуальным* по отношению к *прямому* отображению u (соотв. v). Дуальные отображения обозначаются символами $u^{\circledast}$ и $v^{\circledast}$ соответственно. Пусть $L^{-1}_{\Omega_0}$ и $(L^*_\Omega)^{-1}$ — обратные к отображениям L_{Ω_0} и L^*_Ω.

Легко убедиться в справедливости следующих соотношений

$$u^{\circledast} = L_{\Omega} \circ u^{*} \circ L_{\Omega_0}^{-1}, \quad v^{\circledast} = L_{\Omega_0}^{*} \circ v^{*} \circ \left(L_{\Omega}^{*}\right)^{-1}.$$

Эти соотношения могут рассматриваться как определения дуальных операторов. Из этих пределений и свойств $(u^*)^* = u$ и $(v^*)^* = v$ сопряженных отображений вытекает, что

$$\left(u^{\circledast}\right)^{\circledast} = u, \quad \left(v^{\circledast}\right)^{\circledast} = v.$$

Известно, что дуальный оператор $p(D)^{\circledast}$ по отношению к дифференциальному оператору $p(D)$ конечного порядка действует из $P(\Omega)$ в $P(\Omega)$ и совпадает с оператором умножения на многочлен $p(z)$. Отсюда следует, что $\left(p(D)^{\circledast}\right)^{\circledast} = p(D)$, то есть дифференциальный оператор $p(D) : O(\Omega) \to O(\Omega)$ совпадает с дуальным оператором по отношению к оператору $P(\Omega) \to P(\Omega)$ умножения на многочлен $p(z)$.

Дифференциальный оператор $p(D)$, определяемый полиномом $p(z)$, можно рассматривать и как оператор $p_{\Omega,\Omega_0}(D) : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$, где Ω_0 — любая односвязная область, лежащая в Ω. В этом случае оператор $p_{\Omega,\Omega_0}(D)$ совпадает с композицией $\mu_{\Omega,\Omega_0} \circ p_{\Omega}(D)$, где μ_{Ω,Ω_0} — оператор вложения $O(\Omega) \subseteq O(\Omega_0)$, а дуальный оператор $p_{\Omega,\Omega_0}(D)^{\circledast}$ совпадает с композицией $v_{\Omega}^{\circledast} \circ \mu_{\Omega,\Omega_0}^{\circledast}$, где $\mu_{\Omega,\Omega_0}^{\circledast}$ — дуальный оператор по отношению к оператору μ_{Ω,Ω_0}. Легко увидеть, что дуальный оператор $\mu_{\Omega,\Omega_0}^{\circledast}$ совпадает с оператором вложения $P(\Omega_0) \subseteq P(\Omega)$ [72], значит, дуальный оператор $p_{\Omega,\Omega_0}(D)^{\circledast}$ действует из $P(\Omega_0)$ в $P(\Omega)$ и совпадает с оператором умножения на многочлен $p(z)$:

$$v_{\Omega,\Omega_0} : \varphi(z) \mapsto p(z)\varphi(z).$$

6. Дуальные подпространства и дуальные аннуляторы. Пусть $f \in O(\Omega)$ и $g \in P(\Omega)$. Функционалы $\hat{f} := (L_{\Omega}^{*})^{-1}(f) \in P^{*}(\Omega)$ и $\hat{g} := L_{\Omega}^{-1}(g) \in O^{*}(\Omega)$ называются дуальными функционалами по отношению к функциям $f \in O(\Omega)$ и $g \in P(\Omega)$ соответственно. Известно, что произвольные функции $f \in O(\Omega)$ и $g \in P(\Omega)$ и их дуальные функционалы $\hat{f} \in P^{*}(\Omega)$ и $\hat{g} \in O^{*}(\Omega)$ связаны соотношением

$$\langle f, \hat{g} \rangle = \left\langle \hat{f}, g \right\rangle.$$

Понятие дуального элемента тесно связано с понятием дуального подпространства и с понятием дуального аннулятора. Пусть W — замкнутое подпространство $O(\Omega)$, I — замкнутое подпространство $P(\Omega)$, $W^0 \subseteq O^*(\Omega)$ — аннулятор подпространства $W \subseteq O(\Omega)$, $I^0 \subseteq P^*(\Omega)$ — аннулятор подпространства $I \subseteq P(\Omega)$.

Замкнутые подпространства

$$\widehat{W} := \left(L_\Omega^*\right)^{-1}(W) \subseteq P^*(\Omega), \quad \widehat{I} := L_\Omega^{-1}(I) \subseteq O^*(\Omega)$$

называются *дуальными подпространствами*, а замкнутые подпространства

$$\widehat{W}^0 := L_\Omega(W^0) \subseteq P(\Omega), \quad \widehat{I}^0 := L_\Omega^*(I^0) \subseteq O(\Omega)$$

называются *дуальными аннуляторами* подпространств $W \subseteq O(\Omega)$ и $I \subseteq P(\Omega)$ соответственно. Здесь $W^0 \subseteq O^*(\Omega)$ — аннулятор $W \subseteq O(\Omega)$, а $I^0 \subseteq P^*(\Omega)$ — аннулятор $I \subseteq P(\Omega)$. Аннуляторы $\left(\widehat{W}\right)^0 \subseteq P(\Omega)$ и $\left(\widehat{I}\right)^0 \subseteq O(\Omega)$ и дуальные аннуляторы $\widehat{W}^0 \subseteq P(\Omega)$ и $\widehat{I}^0 \subseteq O(\Omega)$ связаны следующими соотношениями:

$$\widehat{W}^0 = \left(\widehat{W}\right)^0, \ \widehat{I}^0 = \left(\widehat{I}\right)^0.$$

По свойствам биполяр из этих соотношений вытекают два принципа двойственности:

$$W = V^0, \quad V = W^0;$$
$$W = \widehat{I}^0, \quad I = \widehat{W}^0.$$

Эти принципы устанавливают взаимно однозначные соответствия между совокупностью $\{W\}$ всех замкнутых подпространств в $O(\Omega)$, совокупностью $\{V\}$ всех замкнутых подпространств в $O^*(\Omega)$ и совокупностью $\{I\}$ всех замкнутых подпространств в $P(\Omega)$ [78].

1.2. Оператор π-сдвига

1. Порождающий непрерывный эндоморфизм целых функций. Обозначим символом A эндоморфизм пространства целых функций $O(\mathbf{C})$

$$g(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p\,(z)\, g_p(z). \tag{1.2.1}$$

Здесь $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ — многочлены; $g_0(z), ..., g_{q-1}(z)$ — π-симметричные коэффициенты представления (1.1.3). Исследуем свойства эндоморфизма (1.2.1).

Предложение 1.2.1. *Отображение A является непрерывным отображением из $O(\mathbf{C})$ в $O(\mathbf{C})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g^{(k)}(z)$ — произвольная последовательность целых функций, сходящуюся к нулю в пространстве $O(\mathbf{C})$;

$$g^{(k)}(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_p^{(k)}(z), \quad g_p^{(k)} \in O_\pi(\mathbf{C})$$

— симметричные представления этих функций. Если $z \in \mathbf{C}$ и $z_j := \omega^j(z)$, ω — произвольный циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$, то π-симметричные функции $g_p^{(k)}(z)$ представляются с помощью определителя вида (1.1.1)

$$\delta_p(1, ..., g^{(k)}, ..., z^{q-1}) :=$$

$$:= \begin{vmatrix} [z_0]z^0 & \cdots & [z_0]g^{(k)} & \cdots & [z_0]z^{q-1} \\ [z_0z_1]z^0 & \cdots & [z_0z_1]g^{(k)} & \cdots & [z_0z_1]z^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [z_0z_1...z_{q-1}]z^0 & \cdots & [z_0z_1...z_{q-1}]g^{(k)} & \cdots & [z_0z_1...z_{q-1}]z^{q-1} \end{vmatrix}.$$

Пусть d — произвольный компакт в $\mathbf{C}$. Достаточно показать, что элементы p-го столбца определителя $\delta_p(1, ..., g^{(k)}, ..., z^{q-1})$ стремятся к нулю на компакте d. Прообраз $d' := \pi^{-1} \circ \pi(d)$ включает d и является π-симметричным множеством в $\mathbf{C}$. Пусть положительные ε и R удовлетворяют условиям: $\varepsilon < R$ и $\max_{\zeta \in d'} |\zeta| < R - \varepsilon$. Если $z \in d$, то $\pi^{-1} \circ \pi(z) := \{z_0, ..., z_{q-1}\} \subseteq d'$ и из интегрального представления

$$[z_0z_1...z_j]g^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g^{(k)}(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)...(\zeta - z_j)}, \quad (j,p) \in \{0, ..., q-1\}^2,$$

следует оценка

$$\left|[z_0z_1...z_j]g^{(k)}\right| \le \frac{R\max_{\zeta\in L}\left|g^{(k)}(\zeta)\right|}{\min_{\zeta\in L}|(\zeta-z_0)...(\zeta-z_j)|} \le \frac{R}{\varepsilon^{j+1}}\max_{|\zeta|=R}\left|g^{(k)}(\zeta)\right|,$$

где L — граница круга $|\zeta| \le R$. Так как $\max_{|\zeta|=R}\left|g^{(k)}(\zeta)\right| \to 0$, то $\max_{z\in d}\left|g_p^{(k)}(z)\right| \to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно,

$$\left|A(g^{(k)}(z))\right| \le \sum_{p=0}^{q-1}|a_p(z)|\,|g_p(z)| \to 0$$

равномерно по $z \in d$. Значит, оператор A при любом выборе полиномиальных коэффициентов $a_0(z),...,a_{q-1}(z) \in \mathbf{C}[z]$ является непрерывным эндоморфизмом пространства $O(\mathbf{C})$. Предложение доказано. □

Предложение 1.2.2. *Если для любого* $p \in \{0,1,...,q-1\}$ *степень* $q_p := \deg a_p(z)$ *полинома* $a_p(z)$ *не превосходит* p, *то для любого* $n \in \mathbf{Z}_+$ *образ* $A(z^n)$ *монома* z^n *является многочленом, степени* $\deg A(z^n) \le n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию степень $\deg a_p(z)$ полинома $a_p(z)$ не превосходит p. К тому же по предложению 1.1.1 коэффициенты $g_{n,p}(z)$ в π-симметричном представлении монома

$$z^n = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_{n,p}(z), \quad g_{n,p} \in O_\pi(\mathbf{C})$$

являются многочленами и $\deg g_{n,p}(z) \le n-p$ для любого $p \in \{0,...,q-1\}$. Значит, $\deg a_p(z)g_{n,p}(z) = \deg a_p(z) + \deg g_{n,p}(z) \le n$ для любого $p \in \{0,...,q-1\}$. По определению оператора A имеем

$$A(z^n) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z)g_{p,n}(z).$$

Из этого представления вытекает, что образ $A(z^n)$ является многочленом и

$$\deg A(z^n) \le \max_{0\le p\le q-1}\deg a_p(z)g_{n,p}(z) \le n.$$

□

Предложение 1.2.3. *Если для любого* $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$ *степень* $q_p := \deg a_p(z)$ *полинома* $a_p(z)$ *не превосходит* p, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty, z\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|A(z^n)|}{\exp\varepsilon\,|z|}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{\varepsilon e}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение заявленного неравенства означает выполнение следующего условия: для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ найдутся натуральное N и положительное R такие, что для всех $n \ge N$ и z, удовлетворяющих неравенству $|z| \ge R$, будет выполняться неравенство

$$|A(z^n)| \le \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n e^{\varepsilon|z|}. \tag{1.2.2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. В силу (1.1.8) для всех $n \in \mathbf{Z}_+$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{z : |z| < R\}$ выполняется неравенство

$$|g_{n,p}(z)| \le C'\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^{n-p}$$

(при достаточно больших $R > 0$ и $C' > 0$). Отсюда вытекает, что

$$|A(z^n)| \le \sum_{p=0}^{q-1} |a_p(z)|\,|g_{p,n}(z)| \le C'\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n \sum_{p=0}^{q-1}\left|\frac{a_p(z)}{z^p}\right| \le$$

$$\le C'\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n \sum_{p=0}^{q-1}\left|\frac{a_p(z)}{z^p}\right| \le C\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n,$$

где

$$C := 2C' \sum_{p=0}^{q-1} |c_p|,$$

c_p — старший коэффициент полинома $a_p(z)$. Так как

$$\max_{r\ge 0} r^n e^{-\varepsilon_1 r} = \left(\frac{n}{\varepsilon_1}\right)^n e^{-\varepsilon_1\frac{n}{\varepsilon_1}} = \left(\frac{n}{\varepsilon_1 e}\right)^n,$$

то для любого $r \geq 0$ справедливо неравенство

$$r^n \leq \left(\frac{n}{\varepsilon_1 e}\right)^n e^{\varepsilon_1 r},$$

из которого вытекает, что

$$|A(z^n)| \leq C\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n \leq C\left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n e^{\varepsilon_1 |z|}.$$

Так как $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то из последнего неравенства вытекает, что при достаточно большом $R > 0$ для всех $n \in \mathbf{Z}_+$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{z : |z| < R\}$ выполняется неравенство (1.2.2). По соображениям непрерывности неравенство (1.2.2) будет выполняться для всех z, удовлетворяющих условию $|z| \geq R$, и всех $n \in \mathbf{Z}_+$. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.2.4. *Для любого $z \in \mathbf{C}$ имеет место равенство*

$$\pi(D_h) \circ A(e^{hz}) = \pi(z) A(e^{hz}),$$

где $D_h : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ — оператор частного дифференцирования по переменной $h \in \mathbf{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся симметричным представлением показательной функции $z \mapsto e^{hz}$

$$e^{hz} = \sum_{p=0}^{q-1} z^p e_p^{hz}, \quad e_p^{hz} \in O_\pi(\mathbf{C}),$$

где h фиксировано и лежит в $\mathbf{C}$. Для обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ π-симметричный коэффициент e_p^{hz} представляется в виде

$$e_p^{hz} = \frac{\Delta_p(1, ..., e^{hz}, ..., z^{q-1})}{\Delta(1, ..., z^{q-1})},$$

$$\Delta_p(1, ..., e^{hz}, ..., z^{q-1}) \leq \begin{vmatrix} 1 & \cdots & e^{hz_0} & \cdots & z_0^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & e^{hz_{q-1}} & \cdots & z_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix},$$

где ω — циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$ и $z_j = \omega^j(z)$, $j \in \{0, ..., q-1\}$. По определению оператора A имеем

$$A(e^{hz}) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) e_p^{hz}.$$

Далее зафиксируем $z \in \mathbf{C}$ и рассмотрим функцию $h \mapsto e_p^{hz}$. Если z — обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, то легко убедиться, что

$$\pi(D_h) e_p^{hz} = \frac{\Delta_p(1, ..., \pi(D_h)e^{hz}, ..., z^{q-1})}{\Delta(1, ..., z^{q-1})} =$$

$$= \frac{\Delta_p(1, ..., \pi(z)e^{hz}, ..., z^{q-1})}{\Delta(1, ..., z^{q-1})} = \pi(z) e_p^{hz}$$

для всех $h \in \mathbf{C}$. Значит, в обыкновенных точках выполняются равенства

$$(\pi(D_h) \circ A)(e^{hz}) = \pi(D_h) \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) e_p^{hz} = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) \pi(D_h) e_p^{hz} =$$

$$= \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) \pi(z) e_p^{hz} = \pi(z) \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) e_p^{hz} = \pi(z) A(e^{hz}).$$

На критические слои равенство $(\pi(D_h) \circ A)(e^{hz}) = \pi(z)A(e^{hz})$ распространяется по непрерывности и, значит, выполняется для всех $z \in \mathbf{C}$. Предложение доказано. $\square$

2. Определение оператора π-сдвига. Произвольный набор многочленов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ определяет линейный непрерывный оператор $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$, действующий по правилу (1.2.1). Наложим на многочлены $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ дополнительное условие: степень $q_p := \deg a_p(z)$ полинома $a_p(z)$ не превосходит p для любого $p \in \{0, ..., q-1\}$. Непрерывный эндоморфизмом $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$, в свою очередь, порождает оператор

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} (D^n f)(\zeta), \tag{1.2.3}$$

который при фиксированном h может рассматриваться как линейный дифференциальный оператор (с постоянными коэффициентами) бесконечного порядка. Оператор AT_h, определенный по правилу (1.2.3), называется оператором π-*сдвига* (на шаг h).

Выберем две произвольные выпуклые области $\Omega_0, \Omega \subseteq \mathbf{C}$. Считаем, что $\Omega_0 + U_{\varepsilon'} \subseteq \Omega$, где $\varepsilon' > 0$ и $U_{\varepsilon'} := \{h : |h| < \varepsilon'\}$. В силу предложений 1.2.1 и 1.2.3 для любого $f \in O(\Omega)$ ряд (1.2.3) сходится равномерно по (ζ, h) на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_{\varepsilon'}$ (при произвольном выборе выпуклых областей Ω_0, $\Omega \subseteq \mathbf{C}$, удовлетворяющих условию $\Omega_0 + U_{\varepsilon'} \subseteq \Omega$) [72]. Это означает, что образ $AT_h(f)$ для всякого $f \in O(\Omega)$ является аналитической функцией на бицилиндре $\Omega_0 \times U_{\varepsilon'}$ по переменной (ζ, h). Это означает, что оператор π-сдвига AT_h действует из $O(\Omega)$ в $O(\Omega_0)$, где $O(\Omega)$ и $O(\Omega_0)$ — пространства аналитических функций на областях Ω и Ω_0 соответственно.

3. Свойства оператора π-сдвига. Исследуем свойства оператора $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$. Они тесно связаны со свойствами дуального оператора $AT_h^{\circledast}$. Так как оператор AT_h действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$, то согласно аналитической дуальной схеме дуальный оператор $AT_h^{\circledast}$ действует из пространства $P(\Omega_0)$ в пространство $P(\Omega)$.

Прежде всего вскроем строение дуального оператора. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1.2.5. *Оператор $AT_h^{\circledast} : P(\Omega_0) \to P(\Omega)$, дуальный по отношению к оператору π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$, действует на элементы $\varphi \in P(\Omega_0)$ по правилу*

$$\varphi(\lambda) \to \varphi(\lambda) A(e^{hz})(\lambda).$$

Доказательство. По предложению 1.2.1 линейный оператор $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$, действующий по правилу (1.2.1), является непрерывным эндоморфизмом пространства целых функций $O(\mathbf{C})$. Значит, справедливость доказываемого предложения вытекает из леммы 1 статьи [72, раздел 5.1]. $\square$

Предложение 1.2.6. *Характеристическая функция оператора π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ совпадет с образом $A(e^{hz})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для характеристической функции

$$\lambda \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

оператора AT_h при любых $\lambda \in \mathbf{C}$ и $\zeta \in \Omega_0$ выполняется очевидное соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n = \frac{AT_h(e^{\lambda z})(\zeta)}{e^{\lambda\zeta}}.$$

При этом образ $A(e^{hz})$ является целой функцией. Значит,

$$A(e^{hz})(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n,$$

$$AT_h(e^{\lambda z})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \left(D^n e^{\lambda z}\right)(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n e^{\lambda\zeta} =$$

$$= e^{\lambda\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n = e^{\lambda\zeta} A(e^{hz})(\lambda). \tag{1.2.4}$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n = A(e^{hz})(\lambda).$$

Предложение доказано. $\square$

В силу предложения 1.2.3 для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty, z\to\infty}} \frac{1}{n} \left(\frac{|A(z^n)|}{\exp \varepsilon\, |z|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\varepsilon e}.$$

Отсюда и результатов статьи [72] следует справедливость следующего предложения.

Предложение 1.2.7. *Оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ является непрерывным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 1.2.5 дуальный оператор $AT_h^{\circledast}$ действует из пространства $P(\Omega_0)$ в пространство $P(\Omega)$ по правилу $\varphi(\lambda) \to \varphi(\lambda)A(e^{h\lambda})$. Значит, по предложению 10 статьи [72] дуальный оператор $AT_h^{\circledast} : P(\Omega_0) \to P(\Omega)$ является непрерывным. Отсюда следует непрерывность прямого оператора $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$. Предложение доказано. $\square$

Дифференциальный оператор $O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ с постоянными коэффициентами называется *оператором A-сдвига*, (на шаг h), если он непрерывен и его характеристическая функция совпадает с образом $A(e^{hz})$ [78].

Предложение 1.2.8. *Оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ является оператором A-сдвига.*

Для доказательства этого предложения достаточно сослаться на предложения 1.1.4 и 1.1.1.

4. Представления оператора π-сдвига. Оператор π-сдвига допускает разные представления. Рассмотрим одно такое альтернативное определению представление оператора π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$.

Предложение 1.2.9. *Для любого $f \in O(\Omega)$ имеет место равенство*

$$AT_h(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(A(z^n)(D)f\right)(\zeta), \tag{1.2.5}$$

в котором ряд (1.2.5) сходится равномерно на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_{\varepsilon'}$ по переменной (ζ, h).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 1.2.8 оператор π-сдвига является оператором A-сдвига. Значит, справедливость доказывемого предложения вытекает из предложения 1.2.3 и предложения 12 статьи [72]. $\square$

В силу предложения 1.2.2 образ $A(z^n)(\zeta)$ является полиномом степени $\leq n$. Введем обозначения

$$b_n(\zeta) = A(z^n)(\zeta), \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

Тогда представление (1.2.5) принимает следующий вид

$$AT_h(f)(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} b_n(D)(f)(\zeta).$$

Воспользуемся π-симметричным представлением одночлена z^n

$$z^n = \sum_{p=0}^{q-1} z^p (z^n)_p.$$

В силу единственности этого представления

$$(z^n)_p = \begin{cases} 1, \text{ если } n = p; \\ 0, \text{ если } n \neq p; \end{cases}$$

для всех n и p из $\{0, ..., q-1\}$. Следовательно, при $n \in \{0, ..., q-1\}$ имеем

$$b_n(\zeta) := A(z^n)(\zeta) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\zeta)(z^n)_p(\zeta) = a_n(\zeta),$$

а при $n \in \{q, q+1, ...\}$ имеем

$$b_n(\zeta) := A(z^n)(\zeta) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\zeta)(z^n)_p(\zeta).$$

Значит, справедливо следующее предложение.

Предложение 1.2.10. *Оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ допускает представление*

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} b_n(D)(f)(\zeta), \tag{1.2.6}$$

где $b_n(\zeta)$ – полиномы из кольца $\mathbf{C}[\zeta]$ степени $\leq n$, определяемые по правилу

$$b_n(\zeta) = \begin{cases} a_n(\zeta), & \text{если } n \in \{0, ..., q-1\}, \\ \sum\limits_{p=0}^{q-1} a_p(\zeta)(z^n)_p(\zeta), & \text{если } n \in \{q, q+1, ...\}. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Ряд (1.2.6) сходится равномерно на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_{\varepsilon'}$ по переменной (ζ, h) для любого $f \in O(\Omega)$.

Из предложения 1.2.10 вытекает, что полиномы $b_n(\zeta) \in \mathbf{C}[\zeta]$, $n \in \mathbf{Z}_+$, определяемые по правилу (1.2.7), однозначно определяют оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$. Эти полиномы являются характеристическими многочленами дифференциальных операторов $b_n(D)$, $n \in \mathbf{Z}_+$ соответственно. Первые q из них

$$b_0(\zeta) := a_0(\zeta), ..., b_{q-1}(\zeta) := a_{q-1}(\zeta)$$

называются *характеристическими коэффициентами* оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$. Остальные коэффициенты (полиномы)

$$b_q(\zeta), b_{q+1}(\zeta), ...$$

выражаются через характеристические коэффициенты с помощью соотношения

$$b_n(\zeta) = \sum_{p=0}^{q-1} b_p(\zeta)(z^n)_p(\zeta), \quad n \in \{q, q+1, ...\}.$$

Если положить

$$b_n(\zeta) = a_n(\zeta) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\zeta^j, \quad n \in \{0, ..., q-1\},$$

где

$$a_{n,j} := \frac{a_n^{(j)}(0)}{j!} = \frac{b_n^{(j)}(0)}{j!}, \quad n \in \{0, ..., q-1\}, \;\; j \in \{0, ..., n\},$$

то получим квадратную матрицу

$$a := \begin{pmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,0} & a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{pmatrix},$$

которая называется *характеристической матрицей* оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$.

5. Преемственность определения оператора π-сдвига. Если Ω_0, Ω — выпуклые области в $\mathbf{C}$ и $\Omega_0 + U_{\varepsilon'} \subseteq \Omega$, то можно рассмотреть классический оператор

$$T_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0) \mid f(z) \to f(z+h),$$

который принять называть оператором сдвига. Известны разные процедуры обобщения этого оператора. Нас интерисуют лишь две такие процедуры. Первая процедура изложена в работе [40] и лежит в основе определения оператора типа свертки (π-свертки по терминологии этой статьи). Вторая процедура рассмотрена в работах [76, 60] и лежит в основе определения оператора q-сторонней свертки. Остановимся на первой из этих процедур (она является более общей).

Если $\pi(z)$ — произвольный многочлен степени q и при этом

$$a_0(z) := \operatorname{sym} z^0 \equiv s_0, ..., a_{q-1}(z) := \operatorname{sym} z^{q-1} \equiv s_{q-1}, \tag{1.2.8}$$

то в силу (1.1.9)

$$A(g(z)) := \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) g_p(z) = \sum_{p=0}^{q-1} s_p g_p(z) = \operatorname{sym} g(z).$$

При этом $A(z^n) = \operatorname{sym} z^n =: s_n(z)$, значит, в силу (1.2.5)

$$AT_h(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(A(z^n)(D)f\right)(\zeta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(\operatorname{sym} z^n)(D)f\right)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (s_n(D)f)(z).$$

Значит, при выполнении условия (1.2.8) определенный нами оператор π-сдвига AT_h совпадает с оператором π-сдвига

$$AT_h : f \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(D) f,$$

который определен в работе [40]. Это означает, что наше определение соблюдает преемственность с более ранним и частным определением этого оператора.

Рассмотрим вторую процедуру обобщения оператора сдвига. Предположим, что $\pi(z) = z^q$ и

$$a_0(z) = c_0 z^0, ..., a_{q-1}(z) = c_{q-1} z^{q-1}, \tag{1.2.9}$$

где $c_0, ..., c_{q-1} \in \mathbf{C}$ и $|c_0| + ... + |c_{q-1}| \neq 0$. В этом случае эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ имеет вид

$$A : g(z) \to \sum_{p=0}^{q-1} c_p z^p g_p(z).$$

С помощью коэффициентов $c_0, ..., c_{q-1} \in \mathbf{C}$ определим коэффициенты $b_0, ..., b_{q-1} \in \mathbf{C}$ по правилу

$$b_k := \frac{1}{q} \sum_{p=0}^{q-1} \varepsilon_q^{-pk} c_p.$$

Здесь ε_q — комплексное число $\exp \frac{2\pi i}{q}$. Обозначим символом $\mathbf{A}$ матрицу

$$\frac{1}{q} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_q^{-1} & \cdots & \varepsilon_q^{-(q-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_q^{-(q-1)} & \cdots & \varepsilon_q^{-(q-1)(q-1)} \end{pmatrix}$$

системы уравнений

$$b_k := \frac{1}{q} \sum_{p=0}^{q-1} \varepsilon_q^{-pk} c_p, \quad k \in \{0, ..., q-1\}.$$

Ее определитель легко выражается через определитель Вандермонда и отличен от нуля. Значит, $|b_0| + ... + |b_{q-1}| \neq 0$, то есть не все коэффициенты $b_0, ..., b_{q-1}$ равны нулю. По известным свойствам чисела ε_q^k имеем

$$\sum_{p=0}^{q-1} \varepsilon_q^{mp} = \begin{cases} 0, \text{ если } m \equiv 0 (\operatorname{mod} q), \\ q, \text{ если } m \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q). \end{cases}$$

Опираясь на это соотношение, легко показать, что обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ к матрице $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_q^1 & \cdots & \varepsilon_q^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_q^{q-1} & \cdots & \varepsilon_q^{(q-1)(q-1)} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что набор коэффициентов $c_0, ..., c_{q-1}$ удовлетворяет системе уравнений

$$c_p = \sum_{k=0}^{q-1} \varepsilon_q^{pk} b_k, \quad p \in \{0, ..., q-1\}.$$

Следовательно,

$$A(g(z)) = \sum_{p=0}^{q-1} c_p z^p g_p(z) = \sum_{p=0}^{q-1} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \varepsilon_q^{pk} b_k \right) z^p g_p(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} b_k \sum_{p=0}^{q-1} \varepsilon_q^{kp} z^p g_p(z) = \sum_{k=0}^{q-1} b_k g(\varepsilon_q^k z),$$

При этом

$$A(e^{hz})^{(n)} = \sum_{k=0}^{q-1} b_k \left(e^{\varepsilon_q^k hz} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{q-1} b_k \varepsilon_q^{kn} h^n e^{\varepsilon_q^k hz},$$

значит,

$$d_n := \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{q-1} b_k \varepsilon_q^{kn} h^n,$$

$$AT_h(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left(D^n f \right)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{q-1} b_k \varepsilon_q^{kn} h^n \left(D^n f \right)(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} b_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(D^n f \right)(z)}{n!} \varepsilon_q^{kn} h^n = \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h).$$

Следовательно, в рассматриваемом случае оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ совпадает с оператором q-стороннего сдвига

$$AT_h(f) = \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h),$$

исследованным в работах [76], [60].

1.3. Оператор π-свертки

1. Определение оператора π-свертки. Пусть AT_h — фиксированный оператор π-сдвига $O(\Omega) \to O(\Omega_0)$, где $\Omega_0, \Omega \subseteq \mathbf{C}$ — выпуклые области, $\varepsilon' > 0$, $U_{\varepsilon'} := \{h : |h| < \varepsilon'\}$ и $\Omega_0 + U_{\varepsilon'} \subseteq \Omega$. Выберем произвольную аналитическую функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал $S_0 \in O^*(\Omega_0)$. Функцию $\psi(h)$, определенную по правилу

$$h \to \langle S_0, AT_h(f) \rangle ,$$

называют *π-сверткой функции f и функционала S_0*. Зафиксируем функционал S_0 и положительное число ε'. Линейный оператор AM_{S_0}, определенный по правилу

$$f \mapsto \psi(h) := \langle S_0, AT_h(f) \rangle , \quad h \in U_{\varepsilon'},$$

принято называть оператором *π-свертки.*

Если выполняется условие (1.2.8), то, как показано выше, оператор π-сдвига имеет вид

$$AT_h(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(D) f.$$

Это означает, что оператор AM_{S_0} совпадает с оператором π-свертки

$$AM_{S_0} : f \mapsto \left\langle S_0, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(D) f \right\rangle ,$$

введенном в статье [40].

Если выполняется условие (1.2.9), то оператор π-сдвига имеет вид

$$AT_h(f) = \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h),$$

где $\varepsilon_q := \exp\frac{2\pi i}{q}$ и не все коэффициенты $b_0, ..., b_{q-1} \in \mathbf{C}$ равны нулю. Это означает, что оператор AM_{S_0} совпадает с оператором q-сторонней свертки

$$AM_{S_0} : f \mapsto \left\langle S_0, \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h) \right\rangle,$$

исследуемом, например, в работе [60].

2. Свойства оператора π-свертки. Исследуем основные свойства оператора π-свертки AM_{S_0}.

Предложение 1.3.1. *Оператор π-свертки AM_{S_0} действует непрерывно из $O(\Omega)$ в $O(U_{\varepsilon'})$.*

Доказательство. Легко убедиться, что по предложению 1.2.3 неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty, z\to\infty}} \frac{1}{n} \left(\frac{|A(z^n)|}{\exp\varepsilon\,|z|} \right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{\varepsilon e}.$$

выполняется для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Осталось сослаться на предложения 13 статьи [72] и сделать вывод, что оператор π-свертки AM_{S_0} действует непрерывно из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_{\varepsilon'})$. Все доказано. $\square$

В силу предложения 1.3.1 оператор $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$ является оператором A-свертки [78].

Предложение 1.3.2. *Оператор $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$ перестановочен с дифференциальным оператором*

$$\pi(D) := D^q + c_1 D^{q-1} + ... + c_{q-1} D + c_q.$$

Другими словами, для любого $f \in O(\Omega)$ выполняется следующее соотношение

$$(\pi(D_h) \circ AM_{S_0})(f) = (AM_{S_0} \circ \pi(D))(f),$$

где оператор $\pi(D_h)$ действует (по переменной h) в пространстве $O(U_{\varepsilon'})$, а оператор $\pi(D)$ действует (по переменной z) в пространство $O(\Omega)$.

Доказательство. Нам достаточно показать, что

$$(\pi(D_h) \circ AT_h)^{\circledast} = (AT_h \circ \pi(D))^{\circledast}. \tag{1.3.1}$$

Действительно, из равенства дуальных операторов следует равенство самих операторов, значит, для любого $f \in O(\Omega)$ будем иметь

$$(\pi(D_h) \circ AT_h)(f) = (AT_h \circ \pi(D))(f).$$

Следовательно, после действия функционалом $S_0 \in O^*(\Omega_0)$ получим

$$(\pi(D_h) \circ AM_{S_0})(f) = \pi(D_h)\langle S_0, AT_h(f)\rangle =$$

$$= \langle S_0, (\pi(D_h) \circ AT_h)(f)\rangle = \langle S_0, (AT_h \circ \pi(D))(f)\rangle = AM_{S_0}(\pi(D)f).$$

Докажем выполнение соотношения (1.3.1).

Во-первых, при любом $f \in O(\Omega)$ функция $g(\zeta, h) := \pi(D_h) \circ AT_h(f)$ является аналитической на бицилиндре $\Omega_0 \times U_{\varepsilon'}$. Значит, при фиксированном $h \in U_{\varepsilon'}$ оператор $\pi(D_h) \circ AT_h$ действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$, а дуальный оператор $(\pi(D_h) \circ AT_h)^{\circledast}$ действует из пространства $P(\Omega_0)$ в пространство $P(\Omega)$. При этом сопряженный оператор $(\pi(D_h) \circ AT_h)^*$ действует из сильного сопряженного пространства $O^*(\Omega_0)$ в пространство $O(\Omega)$ следующим образом: функционалу $S_0 \in O^*(\Omega_0)$ он ставит в соответствие функционал $S \in O^*(\Omega)$, определенный по правилу $\langle S, f\rangle = \langle S_0, (\pi(D_h) \circ AT_h)(f)\rangle$. Из определения дуального оператора вытекает, что оператор

$$(\pi(D_h) \circ AT_h)^{\circledast} = L_\Omega \circ (\pi(D_h) \circ AT_h)^* \circ L_{\Omega_0}^{-1}$$

целой функции $\varphi_0(\lambda) := \left\langle S_0, e^{\lambda\zeta} \right\rangle \in P(\Omega_0)$ ставит в соответствие целую функцию $\varphi(\lambda) := \left\langle S, e^{\lambda z} \right\rangle \in P(\Omega)$, которая определяется следующим образом $\varphi(\lambda) = \left\langle S_0, \left(\pi(D_h) \circ AT_h\right)\left(e^{\lambda z}\right) \right\rangle$. В силу (1.2.4)

$$AT_h(e^{\lambda z})(\zeta) = e^{\lambda\zeta} A(e^{hz})(\lambda),$$

значит, $\varphi(\lambda) = \left\langle S_0, e^{\lambda\zeta} \right\rangle \left(\pi(D_h) \circ A\right)(e^{hz})(\lambda)$ и по предложению 1.2.4 $\varphi(\lambda) = \varphi_0(\lambda)\pi(\lambda)A(e^{hz})(\lambda)$. Следовательно, для любой целой функции $\varphi_0 \in P(\Omega_0)$ имеем

$$\left(\pi(D_h) \circ AT_h\right)^{\circledast}(\varphi_0) = \varphi_0 \pi A(e^{hz}).$$

Во-вторых, из свойств сопряженных отображений вытекает, что справедливо соотношение

$$\left(AT_h \circ \pi(D)\right)^{\circledast} = \pi(D)^{\circledast} \circ \left(AT_h\right)^{\circledast},$$

где дуальный оператор $\pi(D)^{\circledast} : P(\Omega) \to P(\Omega)$ совпадает с оператором умножения $\varphi(\lambda) \to \pi(\lambda)\varphi(\lambda)$, а дуальный оператор $\left(AT_h\right)^{\circledast} : P(\Omega_0) \to P(\Omega)$ совпадает с оператором $\varphi_0(\lambda) \to \varphi_0(\lambda)A(e^{hz})$ [72, лемма 5.1]. Значит, для любой целой функции $\varphi_0 \in P(\Omega_0)$ имеем

$$\left(AT_h \circ \pi(D)\right)^{\circledast}(\varphi_0) = \varphi_0 \pi A(e^{hz}).$$

Следовательно, соотношение (1.3.1) выполняется. Предложение доказано. $\square$

Подпространство $W \subseteq O(\Omega)$ договоримся называть $\pi(D)$-*инвариантным*, если справедлива импликация

$$f \in W \Rightarrow \pi(D)f \in W,$$

то есть оно инвариантно относительно сужения дифференциального оператора $\pi(D)$ на пространство $O(\Omega)$.

Предложение 1.3.3. *Ядро* $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$ *оператора* π-*свертки* $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$ *является замкнутым* $\pi(D)$-*инвариантным подпространством в* $O(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ядро W_{S_0} оператора π-свертки $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$ является замкнутым подпространством в пространстве $O(\Omega)$, так как по предложению 1.3.1 этот оператор является непрерывным. Убедимся, что подпространство $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$ является $\pi(D)$-инвариантным. Пусть $f \in W_{S_0}$, то есть $AM_{S_0}(f) = 0$. Значит, в силу предложения 1.3.2

$$0 = \pi(D_h)AM_{S_0}(f) = AM_{S_0}(\pi(D)f),$$

следовательно, $\pi(D)f \in W_{S_0}$. Предложение доказано. $\square$

1.4. Однородное уравнение π-свертки. Постановка задач

1. Однородное уравнение π-свертки. Пусть $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ — линейный оператор, действующий в пространстве целых функций по правилу

$$A(g(z)) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) g_p(z),$$

где $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ — многочлены, $g_0(z), ..., g_{q-1}(z)$ — π-симметричные коэффициенты представления (1.1.3). Считаем, что степень $q_p := \deg a_p(z)$ полинома $a_p(z)$ не превосходит p для любого $p \in \{0, ..., q-1\}$. Предположим, что Ω_0, Ω — выпуклые области в комплексной плоскости, удовлетворяющие условию $\Omega_0 + U_{\varepsilon'} \subseteq \Omega$, где $\varepsilon' > 0$, $U_{\varepsilon'} := \{h : |h| < \varepsilon'\}$. По предложению 1.2.1 оператор A является непрерывным эндоморфизмом пространства целых функций $O(\mathbf{C})$. Этот эндоморфизм порождает оператор π-сдвига

$$AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0) \mid f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} \left(D^n f\right)(\zeta)$$

на шаг $h \in U_{\varepsilon'}$. По предложению 1.2.7 этот оператор действует непрерывно из $O(\Omega)$ в $O(\Omega_0)$. Оператор π-сдвига , в свою очередь, по предложению 13 из статьи [72] порождает оператор

$$AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'}) \mid f \mapsto \langle S_0, AT_h(f)\rangle\,,$$

A-свертки. Здесь $S_0 \in O^*(\Omega_0)$ — фиксированный аналитический функционал. Однородное уравнение

$$AM_{S_0}(f) = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{1.4.1}$$

называется *однородным уравнением* π*-свертки*. По предложению 1.3.3 множество решений $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения π-свертки является замкнутым $\pi(D)$-инвариантным подпространством в $O(\Omega)$, так как совпадает с ядром W_{S_0} оператора π-свертки $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$. Функция $\varphi_0(\lambda) := \left\langle S_0, e^{\lambda z}\right\rangle$ является целой и называется *характеристической функцией* уравнения (1.4.1).

2. Задача экспоненциального анализа. Экспоненциальными полиномами называются целые функции вида

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(z)e^{\lambda_k z}, \quad p_k(z) \in \mathbf{C}[z], \quad \lambda_k \in \mathbf{C}.$$

Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (1.4.1), называют *элементарными решениями* этого уравнения. Докажем следующее предложение.

Предложение 1.4.1. *Если характеристическая функция $\varphi_0(\lambda)$ уравнения (1.4.1) имеет в точке $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ нуль кратности n, то экспоненциальные одночлены*

$$e^{\lambda_0 z},\ ze^{\lambda_0 z}, ..., z^{n-1}e^{\lambda_0 z}$$

являются элементарными решениями этого уравнения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1.2.4) $AT_h(e^{\lambda z})(\zeta) = e^{\lambda\zeta}\psi_h(\lambda)$, где $\psi_h(\lambda) := A(e^{hz})(\lambda)$. По предложению 1.2.7 оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ является непрерывным, значит, $AT_h\left(D_\lambda^j e^{\lambda z}\right) =$

$D_\lambda^j AT_h(e^{\lambda z})$ для любого целого $j \geq 0$, где D_λ^j — оператор кратного дифференцирования по переменной λ. Следовательно,

$$AT_h(z^j e^{\lambda z}) = AT_h\left(D_\lambda^j e^{\lambda z}\right) =$$

$$= D_\lambda^j\left(e^{\lambda\zeta}\psi_h(\lambda)\right) = \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} \zeta^i e^{\lambda\zeta}\psi_h^{(j-i)}(\lambda).$$

При этом в силу непрерывности функционала S_0

$$\left\langle S_0, \zeta^j e^{\lambda\zeta}\right\rangle = \left\langle S_0, D_\lambda^j e^{\lambda\zeta}\right\rangle = D_\lambda^j \left\langle S_0, e^{\lambda\zeta}\right\rangle = \varphi_0^{(j)}(\lambda).$$

Значит,

$$AM_{S_0}(z^j e^{\lambda z}) = \left\langle S_0, AT_h(z^j e^{\lambda z})\right\rangle = \left\langle S_0, \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} \zeta^i e^{\lambda\zeta}\psi_h^{(j-i)}(\lambda)\right\rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} \left\langle S_0, \zeta^i e^{\lambda\zeta}\right\rangle \psi_h^{(j-i)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} \varphi_0^{(i)}(\lambda)\psi_h^{(j-i)}(\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$AM_{S_0}(z^j e^{\lambda z}) = D^j\left(\varphi_0\psi_h\right)(\lambda). \tag{1.4.2}$$

Значит, для любого $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ имеем $AM_{S_0}(z^j e^{\lambda_0 z}) = 0$. Предложение доказано. $\square$

Доказанное предложение дает возможность сделать вывод, что подпространство элементарных решений однородного уравнения π-свертки не является пустым.

Задача экспоненциального анализа: дать описание всего семейства элементарных решений однородного уравнения (1.4.1).

Решение задачи экспоненциального анализа связано с решением задачи спектрального анализа для дифференциального оператора $\pi(D)$. Последняя задача исследовалась ранее. Известны конкретные методы описания семейства корневых элементов дифференциального оператора $\pi(D)$ конечного порядка, содержащихся в фиксированном инвариантном относительно оператора $\pi(D)$ подпространстве $W \subseteq O(\Omega)$.

3. Задача экспоненциального синтеза. В ряде случаев для однородного уравнения π-свертки оказывается справедливой аппроксимационная теорема, утверждающая, что всякое решение $f \in O(\Omega)$ этого уравнения можно аппроксимировать в топологии пространства $O(\Omega)$ элементарными решениями этого уравнения. Рассмотрим два основных примера.

Первый пример. Пусть $\pi(z)$ — произвольный многочлен степени q. Определим коэффициенты однородного уравнения π-свертки следующим образом:

$$a_0(z) := \operatorname{sym} z^0 \equiv s_0, ..., a_{q-1}(z) := \operatorname{sym} z^{q-1} \equiv s_{q-1},$$

то, как показано выше, оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ совпадает с оператором

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(D) f,$$

определенным в статье [40]. В этой статье показано, что для однородного уравнения типа свертки

$$\left\langle S_0, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(D) f \right\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega)$$

при любом выборе линейного непрерывного функционала S_0 на пространстве $O(\Omega_0)$ аппроксимационная теорема справедлива.

Второй пример. Предположим, что $\pi(z) = z^q$. Если

$$a_0(z) = c_0 z^0, ..., a_{q-1}(z) = c_{q-1} z^{q-1}$$

и не все коэффициенты $c_0, ..., c_{q-1}$ равны нулю, то, как показано выше, оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ совпадает с оператором q-стороннего сдвига

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h),$$

где коэффициенты $b_0, ..., b_{q-1} \in \mathbf{C}$ определяются по правилу

$$b_k := \frac{1}{q} \sum_{p=0}^{q-1} \varepsilon_q^{-pk} c_p, \quad k \in \{0, ..., q-1\},$$

$\varepsilon_q := \exp \frac{2\pi i}{q}$. В статье [63] решена задача экспоненционального синтеза для однородного уравнения q-сторонней свертки. В ней показано, что при условии периодичности индикатор оператора q-стороннего сдвига аппроксимационная теорема справедлива.

Задача экспоненциального синтеза: описать условия, обеспечивающие справедливость аппроксимационной теоремы для однородного уравнения π-свертки.

В силу предложения 1.3.3 пространство $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$ решений однородного уравнения π-свертки является замкнутым инвариантным подпространством в пространстве аналитических функций $O(\Omega)$. Значит, при решении задачи экспоненциального синтеза мы можем пойти традиционным путем и перейти к к задаче спектрального синтеза для дифференциального оператора $\pi(D)$. Естественно начать с решения задачи спектрального анализа. Эта задача связана с описанием семейства экспоненциальных полиномов, лежащих в инвариантном подпространстве W_{S_0}.

Глава 2.

Экспоненциальный анализ

2.1. Элементарные экспоненциальные полиномы

Произвольный экспоненциальный полином $e(z)$ допускает представление в виде

$$e(z) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{q-1} p_{j,k}(z) e^{\lambda_{j,k} z},$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — попарно различные комплексные числа; $\lambda_{j,0}, ..., \lambda_{j,q-1}$ — произвольное упорядочение π-слоя $\pi^{-1} \circ \pi(\lambda_j)$; $p_{j,k}(z)$ — многочлены. Если λ_j — критическая точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, то упорядочение $\lambda_{j,0}, ..., \lambda_{j,q-1}$ включает повторы — кратные элементы. Можно считать, что $p_{j,i}(z) \equiv p_{j,k}(z)$, если $\lambda_{j,i} = \lambda_{j,k}$. Выберем произвольное $\pi(D)$-инвариантное подпространство $W \subseteq O(\Omega)$. Будем считать, что $e(z) \in W$. Далее мы будем опираться на некоторые общие свойства экспоненциальных полиномов, лежащих в W.

Например, условие принадлежности экспоненциального полинома $e(z)$ инвариантному подпространству $W \subseteq O(\Omega)$ дает возможность представления этого полинома как линейной комбинации экспоненциальных полиномов из W более простого вида

$$\sum_{k=0}^{q-1} p_k(z)e^{\lambda_k z}, \tag{2.1.1}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$; $\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}$ — упорядочение π-слоя $\pi^{-1} \circ \pi(\lambda)$; $p_k(z)$ — многочлены. Экспоненциальные полиномы вида (2.1.1) называются *элементарными экспоненциальными полиномами.*

Предложение 2.1.1. *Линейная оболочка семейства экспоненциальных полиномов из* $\pi(D)$*-инвариантного подпространства* $W \subseteq O(\Omega)$ *вида* (2.1.1) *исчерпывает совокупность всех экспоненциальных полином из этого подпространства.*

Доказательство. Подействуем на экспоненциальный полином $e(z) \in W$ оператором $\pi(D) - \pi(\lambda)$, где $\lambda \in \mathbf{C}$. В силу обобщенной формулы Лейбница [41, предложение 3.1]

$$\pi(D)\left(p_{j,k}(z)e^{\lambda_{j,k}z}\right) = \sum_{i=0}^{q} \frac{p_{j,k}^{(i)}(z)}{i!}\pi^{(i)}(D)e^{\lambda_{j,k}z} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} \frac{p_{j,k}^{(i)}(z)}{i!}\pi^{(i)}(\lambda_{j,k})e^{\lambda_{j,k}z}.$$

Значит,

$$(\pi(D) - \pi(\lambda))e(z) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\sum_{i=0}^{q} \frac{p_{j,k}^{(i)}(z)}{i!}\pi^{(i)}(\lambda_{j,k}) - \pi(\lambda)p_{j,k}(z)\right)e^{\lambda_{j,k}z} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q-1} r_{j,k}(z)e^{\lambda_{j,k}z}.$$

Легко увидеть, что полиномы $r_{j,k}(z)$ обладают следующими свойствами:

1) если $\pi(\lambda) = \pi(\lambda_{j,k})$, то $\deg r_{j,k}(z) < \deg p_{j,k}(z)$;

2) если $\pi(\lambda) \neq \pi(\lambda_{j,k})$, то $\deg r_{j,k}(z) = \deg p_{j,k}(z)$ и старший коэффициент полинома $r_{j,k}(z)$ совпадает со старшим коэффициентом полинома $p_{j,k}(z)$, умноженным на число $\pi(\lambda_{j,k}) - \pi(\lambda)$.

Подействуем на экспоненциальный полином $e(z) \in W$ оператором

$$(\pi(D) - \pi(\lambda_2))^{n_1+1} ... (\pi(D) - \pi(\lambda_m))^{n_1+1},$$

где n_1 — наибольшая из степеней полиномов $p_{j,k}(z)$, $(j,k) \in \{2, ..., m\} \times \{0, ..., q-1\}$. В силу утверждений 1) и 2) экспоненциальный полином

$$e_1(z) := (\pi(D) - \pi(\lambda_2))^{n_1+1} ... (\pi(D) - \pi(\lambda_m))^{n_1+1} e(z)$$

будет иметь вид

$$e_1(z) := \sum_{k=0}^{q-1} p_k(z) e^{\lambda_{1,k} z}.$$

При этом старший коэффициент полинома $p_k(z)$ совпадает со старшим коэффициентом полинома $p_{1,k}(z)$, умноженным на комплексное число

$$c_1 := (\pi(\lambda_{1,k}) - \pi(\lambda_2))^{n_1+1} ... (\pi(\lambda_{1,k}) - \pi(\lambda_m))^{n_1+1} \neq 0.$$

Значит, экспоненциальный полином $e(z) - c_1 e_1(z)$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{q-1} r_{j,k}(z) e^{\lambda_{j,k} z},$$

где $r_{j,k}(z)$ — полиномы. При этом степень полинома $r_{j,k}$ не превосходит степени полинома $p_{j,k}$ при любом $(j,k) \in \{2, ..., m\} \times \{0, ..., q-1\}$ и степень полинома $r_{1,k}$ меньше степени полинома $p_{1,k}$ для любого $k \in \{0, ..., q-1\}$. Осталось применить эту процедуру к полиному $e(z) - c_1 e_1(z)$ и т.д. После m шагов будем иметь

$$e(z) = \sum_{n=1}^{m} c_n e_n(z).$$

Предложение доказано. $\square$

Пусть U_λ — открытая π-симметричная окрестность π-слоя $\pi^{-1}\circ\pi(\lambda)$, $O(U_\lambda)$ — пространство локально аналитических функций на открытом множестве U_λ, $O_\pi(U_\lambda)$ — пространство локально аналитических π-симметричных функций на открытом множестве U_λ. Элементарные экспоненциальные полиномы допускают простое описание в терминах локально аналитических функций $g(\zeta)\in O(U_\lambda)$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 2.1.2. *Любой элементарный экспоненциальный полином (ассоциированный с π-слоем $\pi^{-1}\circ\pi(\lambda)$) из $\pi(D)$-инвариантного подпространства $W\subseteq O(\Omega)$ допускает представление в виде*

$$\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\,\mathrm{sym}_\zeta\left(g(\zeta)e^{\zeta z}\right)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)}, \tag{2.1.2}$$

где $m\in\mathbf{Z}_+$, $\lambda\in\mathbf{C}$, $g(\zeta)\in O(U_\lambda)$, $\mathrm{sym}_\zeta : O(U_\lambda)\to O_\pi(U_\lambda)$ — оператор π-симметризации.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $\zeta\mapsto e^{\zeta z}$ можно рассматривать как элемент пространства $O(U_\lambda)$. В этом случае справедливо π-симметричное представление

$$e^{\zeta z}=\sum_{p=0}^{q-1}\zeta^p\left(e^{\zeta z}\right)_p(\omega),\quad \omega=\pi(\zeta),$$

где $\left(e^{\zeta z}\right)_p(\omega)\in O_\pi(U_\lambda)$. В силу предложения 1.1.3

$$\mathrm{sym}_\zeta\left(\zeta^k e^{\zeta z}\right)=\sum_{p=0}^{q-1}s_{p+k}(\omega)\left(e^{\zeta z}\right)_p(\omega),\quad \omega=\pi(\zeta),$$

где

$$s_n(\omega):=\mathrm{sym}_\zeta\left(\zeta^n\right),\quad n\in\mathbf{N}.$$

Тогда для любой функции $g(\zeta)\in O(U_\lambda)$ имеем

$$\mathrm{sym}_\zeta\left(g(\zeta)e^{\zeta z}\right)=\mathrm{sym}_\zeta\left(g(\zeta)\sum_{p=0}^{q-1}\zeta^p\left(e^{\zeta z}\right)_p(\omega)\right)=$$

$$= \sum_{p=0}^{q-1} \mathrm{sym}_\zeta \left(\zeta^p g(\zeta)\right) \left(e^{\zeta z}\right)_p (\omega) = \sum_{p=0}^{q-1} \varphi_p(\omega) \left(e^{\zeta z}\right)_p (\omega), \qquad (2.1.3)$$

где $\varphi_0(\omega), ..., \varphi_{q-1}(\omega) \in O_\pi(U_\lambda)$.

С другой стороны, для любого семейства π-симметричных функций $\varphi_0(\omega), ..., \varphi_{q-1}(\omega) \in O_\pi(U_\lambda)$ положим

$$\psi_k(\omega) = \frac{\Delta_k(\varphi_0(\omega), ..., \varphi_{q-1}(\omega))}{\Delta(\omega)}, \quad k \in \{0, ..., q-1\},$$

где $\Delta(\omega)$ — определитель

$$\begin{vmatrix} s_0(\omega) & \cdots & s_k(\omega) & \cdots & s_{q-1}(\omega) \\ s_1(\omega) & \cdots & s_{k+1}(\omega) & \cdots & s_q(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{q-1}(\omega) & \cdots & s_{k+q-1}(\omega) & \cdots & s_{2q-2}(\omega) \end{vmatrix},$$

а $\Delta_k(\varphi_0(\omega), ..., \varphi_{q-1}(\omega))$ — определитель

$$\begin{vmatrix} s_0(\omega) & \cdots & \varphi_0(\omega) & \cdots & s_{q-1}(\omega) \\ s_1(\omega) & \cdots & \varphi_1(\omega) & \cdots & s_q(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{q-1}(\omega) & \cdots & \varphi_{q-1}(\omega) & \cdots & s_{2q-2}(\omega) \end{vmatrix}.$$

Предположим, что π-слой $\pi^{-1}(\omega)$ является простым. Пусть $\zeta_0, ..., \zeta_{q-1}$ — произвольное упорядочение π-слоя $\pi^{-1}(\omega)$. Тогда

$$s_n(\omega) := \mathrm{sym}_\zeta \left(\zeta^n\right) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Следовательно,

$$q^q \Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^0 & \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^1 & \cdots & \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^{q-1} \\ \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^1 & \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^{q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^{q-1} & \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^q & \cdots & \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k^{2q-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \zeta_1^0 & \cdots & \zeta_{q-1}^0 \\ \zeta_0^1 & \zeta_1^1 & \cdots & \zeta_{q-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_0^{q-1} & \zeta_1^{q-1} & \cdots & \zeta_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \zeta_0^1 & \cdots & \zeta_0^{q-1} \\ \zeta_1^0 & \zeta_1^1 & \cdots & \zeta_1^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_{q-1}^0 & \zeta_{q-1}^1 & \cdots & \zeta_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это означает, что функции $\psi_k(\omega)$ принадлежат $O_\pi(U_\lambda)$ и

$$\varphi_p(\omega) = \sum_{k=0}^{q-1} \psi_k(\omega) s_{p+k}(\omega), \quad p \in \{0, ..., q-1\}.$$

Положим

$$g(\zeta) := \sum_{k=0}^{q-1} \zeta^k \psi_k(\omega), \quad \omega = \pi(\zeta).$$

Тогда

$$\sum_{p=0}^{q-1} \varphi_p(\omega) \left(e^{\zeta z}\right)_p (\omega) = \sum_{p=0}^{q-1} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \psi_k(\omega) s_{p+k}(\omega) \right) \left(e^{\zeta z}\right)_p (\omega) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} \psi_k(\omega) \sum_{p=0}^{q-1} s_{p+k}(\omega) \left(e^{\zeta z}\right)_p (\omega) = \sum_{k=0}^{q-1} \psi_k(\omega) \operatorname{sym}_\zeta \left(\zeta^k e^{\zeta z}\right) =$$

$$= \operatorname{sym}_\zeta \left(\sum_{k=0}^{q-1} \zeta^k \psi_k(\omega) e^{\zeta z} \right) = \operatorname{sym}_\zeta \left(g(\zeta) e^{\zeta z} \right). \qquad (2.1.4)$$

Из (2.1.3) и (2.1.4) и предложения 4.2 из статьи [38] вытекает справедливость доказываемого предложения. □

Из предложений 2.1.1 и 2.1.2 следует, что всякий экспоненциальный полином $e(z)$ из инвариантного подпространства $W \subseteq O(\Omega)$ является выражается как линейная комбинация экспоненциальных полиномов вида (2.1.2) из W. Докажем еще одно важное свойство элементарных экспоненциальных полиномов.

Предложение 2.1.3. *Элементарный экспоненциальный полином*

$$\frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \operatorname{sym}_\zeta \left(g(\zeta) e^{\zeta z} \right) \Big|_{\omega = \pi(\lambda)}$$

принадлежит $\pi(D)$-инвариантному подпространству $W \subseteq O(\Omega)$ тогда и только тогда, когда элементарные экспоненциальные полиномы

$$\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \operatorname{sym}_\zeta \left(g(\zeta) e^{\zeta z} \right) \Big|_{\omega = \pi(\lambda)}, \quad k \in \{0, ..., m\}$$

принадлежат W.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В подразделе 4.2 статьи [38, свойство 4] показано, что сформулированное свойство выполняется для экспоненциальных полиномов из W вида

$$\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\sum_{p=0}^{q-1}\varphi_p(\omega)\left(e^{\zeta z}\right)_p(\omega)\bigg|_{\omega=\pi(\lambda)},$$

где $\varphi_0(\omega),...,\varphi_{q-1}(\omega)$ — π-симметричные функции из $O_\pi(U_\lambda)$. В силу предложения 2.1.2 оно выполняется и для экспоненциальных полиномов из W вида (2.1.2). Предложение доказано. □

2.2. Критерий элементарного решения однородного уравнения π-свертки

Выберем произвольный элементарный экспоненциальный полином

$$e_m(z) := \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\operatorname{sym}_\zeta\left(g(\zeta)e^{\zeta z}\right)\bigg|_{\omega=\pi(\lambda)} =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\sum_{k=0}^{q-1}g(\zeta_k)\exp\{\zeta_k z\}\bigg|_{\omega=\pi(\lambda)},$$

где $\zeta\in\mathbf{C}$, $\{\zeta_0,...,\zeta_{q-1}\}$ — произвольное упорядочение π-слоя $\pi^{-1}\circ\pi(\zeta)$. Подействуем на него оператором n-кратного дифференцирования D^n (по переменной z). Получаем

$$D^n e_m(z) = D^n\,\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\sum_{k=0}^{q-1}g(\zeta_k)\exp\{\zeta_k z\}\bigg|_{\omega=\pi(\lambda)} =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\sum_{k=0}^{q-1}g(\zeta_k)D^n\exp\{\zeta_k z\}\bigg|_{\omega=\pi(\lambda)} =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\sum_{k=0}^{q-1}\zeta_k^n g(\zeta_k)\exp\{\zeta_k z\}\bigg|_{\omega=\pi(\lambda)}.$$

Значит,

$$A(z^n)(D)e_m(z) =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial\omega^m} \sum_{k=0}^{q-1} A(z^n)(\zeta_k) g(\zeta_k) \exp\{\zeta_k z\} \Big|_{\omega=\pi(\lambda)},$$

где $A(z^n)$ — A-образ одночлена z^n.

Воспользуемся π-симметричным представлением одночлена z^n

$$z^n = \sum_{p=0}^{q-1} z^p (z^n)_p.$$

Из единственности этого представления вытекает, что

$$(z^n)_p = \begin{cases} 1, \text{ если } n = p; \\ 0, \text{ если } n \neq p; \end{cases}$$

для всех n и p из $\{0, ..., q-1\}$. Следовательно, при $n \in \{0, ..., q-1\}$

$$A(z^n)(\zeta) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\zeta)(z^n)_p(\zeta) = a_n(\zeta),$$

$n \in \{0, ..., q-1\}$. Введем обозначение $a_n(\zeta) := A(z^n)(\zeta)$ для $n \in \{q, q+1, ...\}$. Тогда равенство

$$A(z^n)(\zeta) = a_n(\zeta)$$

будет выполняться для любого $n \in \mathbf{Z}_+$. Отсюда вытекает, что для любого $n \in \mathbf{Z}_+$

$$A(z^n)(D)e_m(z) =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial\omega^m} \sum_{k=0}^{q-1} a_n(\zeta_k) g(\zeta_k) \exp\{\zeta_k z\} \Big|_{\omega=\pi(\lambda)}.$$

Далее подействуем на элементарный экспоненциальный полином $e_m(z)$ оператором π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ на шаг $h \in U_{\varepsilon'}$. По предложению 1.2.9 оператор AT_h допускает представление

$$AT_h : f(z) \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(A(z^n)(D) f\right)(\zeta),$$

в котором ряд сходится равномерно на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_{\varepsilon'}$ по (ζ, h) для любого $f \in O(\Omega)$. Значит,

$$AT_h(e_m(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(A(z^n)(D)e_m(z)\right)(\zeta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \sum_{k=0}^{q-1} a_n(\zeta_k) g(\zeta_k) \exp\{\zeta_k z\}\Big|_{\omega=\pi(\lambda)}.$$

Затем выберем произвольный функционал $S_0 \in O^*(\Omega_0)$ и подействуем этим функционалом на функцию $AT_h(e_m(z))$. Получим

$$\langle S_0, AT_h(e_m(z))\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \left(\sum_{k=0}^{q-1} a_n(\zeta_k) g(\zeta_k) \varphi_0(\zeta_k) \right)\Bigg|_{\omega=\pi(\lambda)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \operatorname{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)}, \qquad (2.2.1)$$

где φ_0 — дуальный элемент $L_{\Omega_0}(S_0)$ (характеристическая функция) функционала S_0.

Предложение 2.2.1. *Для любой функции $g(\zeta) \in O(U_\lambda)$ равенство*

$$\langle S_0, AT_h(e_m(z))\rangle :=$$

$$:= \left\langle S_0, AT_h \left(\frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \operatorname{sym}_\zeta \left(g(\zeta) e^{\zeta z}\right)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)} \right) \right\rangle = 0$$

будет выполняться для всех $h \in U_{\varepsilon'}$ тогда и только тогда, когда функции

$$b_n(\omega) := \left(\operatorname{sym}_\zeta a_n(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right)(\omega),$$

$n \in \{0, ..., q-1\}$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Предположим, что для всех $h \in U_{\varepsilon'}$ выполняется равенство $\langle S_0, AT_h(e_m(z))\rangle = 0$. Следовательно, $e_m(z) \in W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$. По предложению 1.3.3 ядро оператора π-свертки W_{S_0} является инвариантным. Значит, по предложения 2.1.3

$$e_k(z) W_{S_0}, \quad k \in \{0, ..., m\}.$$

Следовательно,

$$\langle S_0, AT_h(e_k(z))\rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \operatorname{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)} = 0$$

для любого $k \in \{0, ..., m\}$ и для всех $h \in U_{\varepsilon'}$ и $n \in \mathbf{Z}_+$. Значит, для всех $k \in \{0, ..., m\}$ и $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} b_n(\omega)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)} = \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \operatorname{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)} = 0.$$

Отсюда следует, что для любых $n \in \mathbf{Z}_+$ функции $b_n(\omega)$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью $> m$.

Достаточность. Пусть функции $b_n(\omega)$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью $> m$. По определению полиномов $a_n(\zeta)$, $n \in \mathbf{Z}_+$ имеем

$$a_n(\zeta) = A(z^n)(\zeta) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\zeta)(z^n)_p(\omega).$$

Значит, для любого $n \in \mathbf{Z}_+$ имеем

$$b_n(\omega) = \operatorname{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right) =$$
$$= \operatorname{sym}_\zeta \left(\left(\sum_{p=0}^{q-1} a_p(\zeta)(z^n)_p(\omega) \right) g(\zeta) \varphi_0(\zeta) \right) =$$
$$= \sum_{p=0}^{q-1} (z^n)_p(\omega) \operatorname{sym}_\zeta \left(a_p(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right),$$

то есть

$$b_n(\omega) = \sum_{p=0}^{q-1} (z^n)_p(\omega) b_p(\omega), \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

Отсюда вытекает, что функции $b_n(\omega)$, $n \in \mathbf{Z}_+$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m. Предложение доказано. $\square$

Пусть

$$a_n(\zeta) := \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\zeta^j, \quad n \in \{0, ..., q-1\}, \tag{2.2.2}$$

$$\psi_j(\omega) := \mathrm{sym}_\zeta \left(\zeta^j g(\zeta)\varphi_0(\zeta)\right), \quad j \in \{0, ..., q-1\}, \quad \omega = \pi(\zeta).$$

Базисный минор характеристической матрицы

$$a := \begin{pmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q-1,0} & a_{q-1,1} & \cdots & a_{q-1,q-1} \end{pmatrix}$$

оператора π-сдвига обозначим

$$\Delta_a := \begin{vmatrix} a_{n_0,j_0} & a_{n_0,j_1} & \cdots & a_{n_0,j_\nu} \\ a_{n_1,j_0} & a_{n_1,j_1} & \cdots & a_{n_1,j_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n_\nu,j_0} & a_{n_\nu,j_1} & \cdots & a_{n_\nu,j_\nu} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Символом j_a обозначим множество $\{j_0, ..., j_\nu\} \subseteq \{0, ..., q-1\}$, а символом n_a обозначим множество $\{n_0, ..., n_\nu\} \subseteq \{0, ..., q-1\}$. Из определения (2.2.2) вытекает, что

$$b_n(\omega) := \mathrm{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta)g(\zeta)\varphi_0(\zeta)\right) = \mathrm{sym}_\zeta \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\zeta^j g(\zeta)\varphi_0(\zeta)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\, \mathrm{sym}_\zeta \left(\zeta^j g(\zeta)\varphi_0(\zeta)\right) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\psi_j(\omega).$$

для всех $n \in \{0, ..., q-1\}$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_n(\omega) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\psi_j(\omega), \quad n \in \{0, ..., q-1\}. \tag{2.2.3}$$

Одно из решений системы можно записать так $\tilde{\psi}(\omega) := (\tilde{\psi}_0(\omega), ..., \tilde{\psi}_{q-1}(\omega))$, где

$$\tilde{\psi}_j(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{\Delta_a}\Delta_{a,j}(b(\omega)), \text{ если } j \in j_a, \\ 0, \text{ если } j \notin j_a, \end{cases}, \quad b(\omega) := (b_0(\omega), ..., b_{q-1}(\omega)),$$

$$\Delta_{a,j}(b(\omega)) := \begin{vmatrix} a_{n_0,j_0} & \cdots & b_{n_0}(\omega) & \cdots & a_{n_0,j_\nu} \\ a_{n_1,j_0} & \cdots & b_{n_1}(\omega) & \cdots & a_{n_1,j_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n_\nu,j_0} & \cdots & b_{n_\nu}(\omega) & \cdots & a_{n_\nu,j_\nu} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$b_n(\omega) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}\tilde{\psi}_j(\omega), \quad n \in \{0, ..., q-1\}. \tag{2.2.4}$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 2.2.2. *Для любой функции $g(\zeta) \in O(U_\lambda)$ функции*

$$b_n(\omega) := \left(\operatorname{sym}_\zeta a_n(\zeta)g(\zeta)\varphi_0(\zeta)\right)(\omega),$$

$n \in \{0, ..., q-1\}$ *обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m тогда и только тогда, когда функции $\tilde{\psi}_j(\omega)$, $j \in j_a$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если функции $b_n(\omega)$, $n \in \{0, ..., q-1\}$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m, то из определения $\tilde{\psi}_j(\omega) := \frac{1}{\Delta_a}\Delta_{a,j}(b(\omega))$ вытекает, что функции $\tilde{\psi}_j(\omega)$, $j \in j_a$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m.

Достаточность. Предположим, что функции $\tilde{\psi}_j(\omega)$, $j \in j_a$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m, то из равенств (2.2.4) вытекает, что функции $b_n(\omega)$, $n \in \{0, ..., q-1\}$ обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m. Предложение доказано. $\square$

На основании предложения 2.2.1 и предложения 2.2.2 делаем вывод о выполнимости такой теоремы.

Теорема 2.2.1. *Элементарный экспоненциальный полином*

$$\frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\left(\mathrm{sym}_\zeta\, g(\zeta)e^{\zeta z}\right)(\omega)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)}, \quad g(\zeta)\in O(U_\lambda)$$

принадлежит ядру оператора π-свертки тогда и только тогда, когда функции

$$\tilde{\psi}_j(\omega) := \frac{\Delta_{a,j}(b(\omega))}{\Delta_a}, \quad j\in j_a$$

обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m.

2.3. Общее элементарное решение однородного уравнения π-свертки

Дальнейшие усилия посвятим описанию общего вида элементарных решений однородного уравнения π-свертки.

1. Элементарные решения. Пусть $\zeta\in U_\lambda$ и $\{\zeta_0,...,\zeta_{q-1}\}$ — произвольное упорядочение π-слоя $\pi^{-1}(\pi(\zeta))$. Мы вправе считать, что π-слой $\pi^{-1}(\pi(\zeta))$ является обыкновенным. По определению оператора π-симметризации

$$\psi_j(\omega) := \mathrm{sym}_\zeta\left(\zeta^j g(\zeta)\varphi_0(\zeta)\right) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\zeta_k^j\varphi_0(\zeta_k)g(\zeta_k).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{q-1}\zeta_k^j\varphi_0(\zeta_k)g(\zeta_k) = q\tilde{\psi}_j(\omega), \quad j\in\{0,...,q-1\}, \quad \omega=\pi(\zeta).$$

Так как определитель Вандермонда

$$\Delta_\zeta := \begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \zeta_1^0 & \cdots & \zeta_{q-1}^0 \\ \zeta_0^1 & \zeta_1^1 & \cdots & \zeta_{q-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_0^{q-1} & \zeta_1^{q-1} & \cdots & \zeta_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то

$$\varphi_0(\zeta_k)g(\zeta_k) = q\frac{\Delta_{\zeta,k}(\tilde{\psi}(\omega))}{\Delta_\zeta}, \quad k \in \{0, ..., q-1\},$$

где

$$\Delta_{\zeta,k}(\tilde{\psi}(\omega)) := \begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \cdots & \tilde{\psi}_0(\omega) & \cdots & \zeta_{q-1}^0 \\ \zeta_0^1 & \cdots & \tilde{\psi}_1(\omega) & \cdots & \zeta_{q-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_0^{q-1} & \cdots & \tilde{\psi}_{q-1}(\omega) & \cdots & \zeta_{q-1}^{q-1} \end{vmatrix}.$$

Значит,

$$g(\zeta_k) = \frac{q}{\varphi_0(\zeta_k)}\frac{\Delta_{\zeta,k}(\tilde{\psi}(\omega))}{\Delta_\zeta} = \frac{(\omega-\pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta_k)}C(\zeta_k), \quad k \in \{0, ..., q-1\},$$

где

$$C(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)g(\zeta)}{(\pi(\zeta)-\pi(\lambda))^{m+1}}.$$

Из представления

$$C(\zeta_k) := \frac{q}{\Delta_\zeta}\Delta_{\zeta,k}\left(\frac{\tilde{\psi}(\omega)}{(\omega-\pi(\lambda))^{m+1}}\right)$$

вытекает, что $C \in O(U_\lambda)$ и

$$e_m(z) := \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\operatorname{sym}_\zeta\left(g(\zeta)e^{\zeta z}\right)\Big|_{\omega=\pi(\lambda)} =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\operatorname{sym}_\zeta\left(\frac{(\omega-\pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta)}C(\zeta)e^{\zeta z}\right)\Bigg|_{\omega=\pi(\lambda)}. \qquad (2.3.1)$$

Рассмотрим произвольный полином $e_m(z)$ вида (2.3.1), в котором $C(\zeta)$ — некоторая функция из $O(U_\lambda)$ и $m \in \mathbf{Z}_+$. Предположим, что C и m выбраны так, что функции

$$C(\zeta) \quad \text{и} \quad \frac{(\pi(\zeta)-\pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta)}C(\zeta)$$

лежат в пространстве $O(U_\lambda)$. Убедимся, что $e_m(z) \in W_{S_0}$. Нужно показать, что

$$\langle S, AT_h e_m(z)\rangle = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$b_n(\omega) := \mathrm{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta) g(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right) =$$
$$= \mathrm{sym}_\zeta \left(a_n(\zeta) \frac{(\omega - \pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta)} C(\zeta) \varphi_0(\zeta)\right) =$$
$$= \mathrm{sym}_\zeta \Big(a_n(\zeta) \left(\omega - \pi(\lambda)\right)^{m+1} C(\zeta)\Big) =$$
$$= (\omega - \pi(\lambda))^{m+1}\, \mathrm{sym}_\zeta\, a_n(\zeta) C(\zeta).$$

Значит, функции $b_n(\omega)$, $\omega = \pi(\zeta)$, обращаются в ноль в точке $\pi(\lambda)$ с кратностью больше m. По предложению (2.2.1) имеем $e_m(z) \in W_{S_0}$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что справедливо следующее

Предложение 2.3.1. *Совокупность элементарных решений однородного уравнения π-свертки совпадает с линейной оболочкой системы экспоненциальных полиномов вида*

$$e(z) := \frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \left(\mathrm{sym}_\zeta \frac{(\omega - \pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta)} C(\zeta) e^{\zeta z} \right)\Bigg|_{\omega = \pi(\lambda)},$$

где функции

$$C(\zeta) \quad \text{и} \quad \frac{(\pi(\zeta) - \pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta)} C(\zeta)$$

принадлежат $O(U_\lambda)$, то есть являются аналитическими функциями в точках π-слоя $\pi^{-1}(\pi(\lambda))$.

2. Общее элементарное решение однородного уравнения π-свертки. Пусть φ_0 – характеристическая функция функционала S_0 и $m_g(\zeta)$ – кратность корня $\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))$ локально аналитической функции $g \in O(U_\lambda)$. Если $\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))$ не является корнем функции $g \in O(U_\lambda)$, то полагаем $m_g(\zeta) = 0$. Если $g := \pi - \pi(\lambda)$ и $\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))$, то число $m_g(\zeta) := m_{\pi - \pi(\lambda)}(\zeta)$ обозначаем символом $q(\zeta)$. Понятно, что $q(\zeta) \geq 1$ для любого $\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))$. Степень полинома π равна q, значит,

$$\sum_{\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))} q(\zeta) = q.$$

Если $C(\zeta) \in O(U_\lambda)$, то включение

$$\frac{(\pi(\zeta) - \pi(\lambda))^{m+1}}{\varphi_0(\zeta)} C(\zeta) \in O(U_\lambda)$$

означает выполнение неравенства $q(\zeta)(m+1) \geq m_{\varphi_0}(\zeta) - m_C(\zeta)$ для любого $\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))$. Значит, справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Совокупность элементарных решений однородного уравнения π-свертки совпадает с линейной оболочкой системы экспоненциальных полиномов вида*

$$\frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \left(\mathrm{sym}_\zeta \frac{(\pi(\zeta) - \pi(\lambda))^{m+1} C(\zeta)}{\varphi_0(\zeta)} e^{\zeta z} \right) (\omega) \Bigg|_{\omega = \pi(\lambda)},$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$, $C \in O(U_\lambda)$ и для любого $\zeta \in \pi^{-1}(\pi(\lambda))$ выполняется неравенство $q(\zeta)(m+1) \geq m_{\varphi_0}(\zeta) - m_C(\zeta)$.

Отметим, что полученное описание не зависит от порождающих коэффициентов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$, то есть при описании множества элементарных решений однородного уравнения типа π-свертки специфика этого уравнения пропадает.

Глава 3.

Экспоненциальный синтез

3.1. О базисах в модулях многочленов

1. Симметричные представления многочленов. Пусть $\mathbf{C}[z]$, $\mathbf{C}[\pi(z)]$ — кольца многочленов от z и от $\pi(z)$ соответственно. Элементы второго кольца называем *π-симметричными многочленами.* Первое кольцо естественно рассматривать как модуль над вторым кольцом. В силу предложения 1.1.1 из представления (1.1.3) вытекает, что система одночленов $1, z, ..., z^{q-1}$ является базисом в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[z]$. Точнее, справедливо следующее предложение.

Предложение 3.1.1. *При любом выборе многочлена $r(z) \in \mathbf{C}[z]$ на всей комплексной плоскости имеет место единственное представление*

$$r(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p r_p(z), \quad r_p \in \mathbf{C}[\pi(z)]. \tag{3.1.1}$$

Если z — произвольная точка, то для любого многочлена $r(z) \in \mathbf{C}[z]$ π-симметричные многочлены $r_p(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ представляются с помощью определителя вида (1.1.1)

$$\delta_p(1, ..., r, ..., z^{q-1}) :=$$

$$:= \begin{vmatrix} [z_0]z^0 & \cdots & [z_0]r & \cdots & [z_0]z^{q-1} \\ [z_0z_1]z^0 & \cdots & [z_0z_1]r & \cdots & [z_0z_1]z^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [z_0z_1...z_{q-1}]z^0 & \cdots & [z_0z_1...z_{q-1}]r & \cdots & [z_0z_1...z_{q-1}]z^{q-1} \end{vmatrix}$$

[38, теорема 2.1], элементы которого допускают интегральные представления вида (1.1.2) [17, Гл. 1, § 4]. Если z — обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, то многочлен $r_p \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ представляется в виде

$$r_p(z) = \frac{\Delta_p(1, ..., r(z), ..., z^{q-1})}{\Delta(1, ..., z^{q-1})},$$

где $z_j = \omega^j(z)$, ω – циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$ и определитель $\Delta_p(1, ..., r(z), ..., z^{q-1})$ получен из определителя $\Delta(1, ..., z^{q-1})$ путем замены его p-го столбца на столбец $(r(z_0), ..., r(z_{q-1}))^T$.

Отметим, что π-симметричные многочлены вполне характеризуются тем, что в точках всякого обыкновенного π-слоя $\pi^{-1}(\pi(z))$ они принимают одинаковые значения.

Предложение 3.1.2. *Многочлен $r(z) \in \mathbf{C}[z]$ является π-симметричным тогда и только тогда, когда для любой обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ выполняется равенство $r(\omega(z)) = r(z)$, где ω – произвольный циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in \mathbf{C}_*$ (то есть z_0 – обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$), ω – произвольный циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$. Выберем окрестность $U_0 \subseteq \mathbf{C}_*$ точки z_0 из условия: образы $U_p := \omega^p(U_0)$, $p \in \{0, ..., q-1\}$ дизъюнктны, то есть попарно не пересекаются и сужение полинома $\pi(z)$ на образ U_p осуществляет биголоморфное отображение $\pi_p : U_p \to \pi(U_0)$. Объединение U образов U_p, $p \in \{0, ..., q-1\}$ является π-симметричной окрестностью π-слоя $\pi^{-1}(\pi(z_0))$, а сужение полинома $r(z)$ на множество U представляется в виде $r(z) = \hat{r}_p(\pi(z))$, $z \in U_p$, где $\hat{r}_p(\lambda) = r \circ \pi_p^{-1}(\lambda) \in O(\pi(U))$. Значит, сужение полинома $r(z)$ на множество U принадлежит $O_\pi(U)$. Следовательно, сужение $g(z)$ полинома $r(z)$ на множество U допускает единственное π-симметричное представление [38, теорема 2.1]

$$g(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_p(z), \quad r_p \in O_\pi(U). \tag{3.1.2}$$

В силу единственности этого представления $r(z) = g_0(z)$ на множестве U. Значит, $r(z_0) = g_0(z_0)$. Отметим, что π-симметричное представление (3.1.2) можно получить сужением π-симметричного представления (3.1.1) на множество U. Значит, $r(z_0) = r_0(z_0)$ для любой точки $z_0 \in \mathbf{C}_*$. Следовательно, полиномы $r(z)$ и $r_0(z)$ совпадают. Это означает, что $r(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$. Предложение доказано. $\square$

2. Независимые системы многочленов. Система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$ *зависима* над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$, если существуют такие многочлены $c_0(z), ..., c_m(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$, одновременно не равные тождественному нулю, что

$$c_0(z)a_0(z) + ... + c_m(z)a_m(z) = 0$$

для любого $z \in \mathbf{C}$. В противном случае система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ называется *независимой* над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Пусть $K \subseteq \mathbf{C}[z]$. $\mathbf{C}[\pi(z)]$-*рангом* множества K называется максимальное число элементов в независимых над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ системах $a_0(z), ..., a_m(z) \in K$. $\mathbf{C}[\pi(z)]$-ранг множества $K \subseteq \mathbf{C}[z]$ будем обозначать $\mathbf{C}[\pi(z)]\text{-Rank}\, K$.

Пусть ω – циклический биголоморфизм из $\mathrm{Deck}(\mathbf{C}_*/\pi)$, $z \in \mathbf{C}$ и $z_p := \omega^p(z)$, $p \in \mathbf{Z}_+$. Рассмотрим определитель

$$\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) := \begin{vmatrix} a_0(z_0) & \cdots & a_m(z_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0(z_m) & \cdots & a_m(z_m) \end{vmatrix}.$$

Предложение 3.1.3. *Система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ тогда и только тогда, когда определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z))$ совпадает с тождественным нулем.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Тогда выполнено тождество $c_0(z)a_0(z)+...+c_m(z)a_m(z) \equiv 0$, где $c_0(z), ..., c_m(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ и $|c_0(z)| + ... + |c_m(z)| \not\equiv 0$. Значит,

$$c_0(z)a_0(z_p) + ... + c_m(z)a_m(z_p) = 0$$

для любого $z \in \mathbf{C}$ и любого $p \in \mathbf{Z}_+$. Если $z \in \mathbf{C}$ и $|c_0(z)|+...+|c_m(z)| \neq 0$, то определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z))$ равен нулю. Следовательно, определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z))$ равен нулю вне конечного множества точек, для которых $|c_0(z)| + ... + |c_m(z)| = 0$. В силу непрерывности определителя $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z))$ он совпадает с нулем в любой точке $z \in \mathbf{C}$.

Достаточность. Пусть $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) \equiv 0$. Покажем, что система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Выберем из системы многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ подсистему $a_0(z), ..., a_k(z)$ из следующих условий: $k < m$, определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_k(z))$ отличен от тождественного нуля, а определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_{k+1}(z))$ совпадает с тождественным нулем. Покажем, что система $a_0(z), ..., a_{k+1}(z)$, а значит, и система $a_0(z), ..., a_m(z)$, зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Действительно, разложим определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_{k+1}(z))$ по последней строке. Получим

$$\Delta_{0,k+1}(z)a_0(z) + ... + \Delta_{k+1,k+1}(z)a_{k+1}(z) \equiv 0, \qquad (3.1.3)$$

где $\Delta_{p,k+1}(z)$ – алгебраическое дополнение элемента $a_p(z_{k+1})$ определителя $\Delta(a_0(z), ..., a_{k+1}(z))$. Представим определитель

$$\Delta(a_0(z), ..., a_{k+1}(z)) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0(z_0) & a_1(z_0) & \cdots & a_k(z_0) & a_{k+1}(z_0) \\ a_0(z_1) & a_1(z_1) & \cdots & a_k(z_1) & a_{k+1}(z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0(z_k) & a_1(z_k) & \cdots & a_k(z_k) & a_{k+1}(z_k) \\ a_0(z_{k+1}) & a_1(z_{k+1}) & \cdots & a_k(z_{k+1}) & a_{k+1}(z_{k+1}) \end{vmatrix}$$

в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$a_{11} = (a_0(z_0)), \quad a_{13} = (a_{k+1}(z_0)),$$

$$a_{31} = (a_0(z_{k+1})), \quad a_{33} = (a_{k+1}(z_{k+1}))$$

– квадратные матрицы порядка 1,

$$a_{12} = \begin{pmatrix} a_1(z_0) & \cdots & a_k(z_0) \end{pmatrix}, \quad a_{32} = \begin{pmatrix} a_1(z_{k+1}) & \cdots & a_k(z_{k+1}) \end{pmatrix}$$

– матрицы строки,

$$a_{21} = \begin{pmatrix} a_0(z_1) \\ \cdots \\ a_0(z_k) \end{pmatrix}, \quad a_{23} = \begin{pmatrix} a_{k+1}(z_1) \\ \cdots \\ a_{k+1}(z_k) \end{pmatrix}$$

– матрицы-столбцы,

$$a_{22} = \begin{pmatrix} a_1(z_1) & \cdots & a_k(z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(z_k) & \cdots & a_k(z_k) \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица порядка k. Известное свойство определителей (свойство конденсации Доджсона) состоит в следующем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} |a_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Из этого свойства следует, что для любого $z \in \mathbf{C}$ справедливы соотношения

$$\Delta(a_0(z), ..., a_{k+1}(z)) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0(z_0) & \cdots & a_k(z_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0(z_k) & \cdots & a_k(z_k) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1(z_1) & \cdots & a_{k+1}(z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(z_{k+1}) & \cdots & a_{k+1}(z_{k+1}) \end{vmatrix} -$$

$$
-\begin{vmatrix} a_1(z_0) & \cdots & a_{k+1}(z_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(z_k) & \cdots & a_{k+1}(z_k) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0(z_1) & \cdots & a_k(z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0(z_{k+1}) & \cdots & a_k(z_{k+1}) \end{vmatrix} \equiv 0,
$$

то есть $\Delta_{0,0}(z)\Delta_{k+1,k+1}(z) = \Delta_{0,k+1}(z)\Delta_{k+1,0}(z)$ для любого $z \in \mathbf{C}$ и, значит,

$$
\Delta_{0,0}(z) = \Delta_{0,k+1}(\omega(z)), \quad \Delta_{k+1,0}(z) = \Delta_{k+1,k+1}(\omega(z)),
$$

$$
\Delta_{0,k+1}(\omega(z))\Delta_{k+1,k+1}(z) = \Delta_{0,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega(z)) \tag{3.1.4}
$$

для любого $z \in \mathbf{C}$. Если переместить строку определителя $\Delta(a_0(z), ..., a_{k+1}(z))$ под номером $p \in \{1, ..., k\}$ на первое место, то легко убедиться, что для любого $z \in \mathbf{C}$ имеет место равенство

$$
\Delta_{p,k+1}(\omega(z))\Delta_{k+1,k+1}(z) = \Delta_{p,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega(z)).
$$

Для $p \in \{0, k+1\}$ оно выполняется автоматически. Далее, для любого $p \in \{0, ..., k+1\}$ обозначим через $\Delta_p(z)$ произведение

$$
\Delta_{p,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega(z)) \cdot ... \cdot \Delta_{k+1,k+1}(\omega^{q-1}(z)).
$$

Отмечаем, что для обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ справедливы равенства $z_q = \omega^q(z) = \omega^0(z) = z_0$, значит, в силу (3.1.4) для любой обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ выполняются равенства

$$
\Delta_p(\omega(z)) = \Delta_{p,k+1}(\omega(z))\Delta_{k+1,k+1}(\omega^2(z)) \cdot ... \cdot \Delta_{k+1,k+1}(\omega^q(z)) =
$$

$$
= \Delta_{p,k+1}(\omega(z))\Delta_{k+1,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega^2(z)) \cdot ... \cdot \Delta_{k+1,k+1}(\omega^{q-1}(z)) =
$$

$$
= \Delta_{p,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega(z))\Delta_{k+1,k+1}(\omega^2(z)) \cdot ... \cdot \Delta_{k+1,k+1}(\omega^{q-1}(z)) =
$$

$$
= \Delta_{p,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega(z)) \cdot ... \cdot \Delta_{k+1,k+1}(\omega^{q-1}(z)) = \Delta_p(z).
$$

В силу предложения 3.1.2 полиномы $\Delta_p(z)$, $p \in \{0, ..., k+1\}$ принадлежат кольцу $\mathbf{C}[\pi(z)]$. При этом в силу (3.1.3) выполняется тождество

$$
\Delta_0(z)a_0(z) + ... + \Delta_{k+1}(z)a_{k+1}(z) \equiv 0.
$$

Остается заметить, что полином

$$\Delta_{k+1}(z) := \Delta_{k+1,k+1}(z)\Delta_{k+1,k+1}(\omega(z)) \cdot ... \cdot \Delta_{k+1,k+1}(\omega^{q-1}(z))$$

отличен от тождественного нуля, так как определитель $\Delta_{k+1,k+1}(z) = \Delta(a_0(z), ..., a_k(z))$ отличен от тождественного нуля по условиям на выбор k. Значит, система многочленов $a_0(z), ..., a_{k+1}(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Предложение доказано. $\square$

Из предложения 3.1.3 сразу вытекает, что система одночленов $1, z, ..., z^m$ независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ тогда и только тогда, когда определитель Вандермонда $\Delta(1, z, ..., z^m)$ отличен от тождественного нуля, а это возможно только при условии $m \leq q - 1$.

Сформулируем и докажем еще некоторые следствия предложения 3.1.3.

Следствие 3.1. *Если ситема многочленов $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$ независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$, то $m \leq q - 1$. При этом $\mathbf{C}[\pi(z)]$-ранг кольца $\mathbf{C}[z]$ равен q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ имеем $z_q = \omega^q(z) = \omega^0(z) = z_0$. Значит, если $m > q - 1$, то определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z))$ содержит одинаковые строки $(a_0(z_0), ..., a_m(z_0))$ и $(a_0(z_q), ..., a_m(z_q))$. Это означает, что $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) \equiv 0$ и по предложению 3.1.3 система $a_0(z), ..., a_m(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. С другой стороны, для любой обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ при $m \leq q - 1$ числа $z_p := \omega^p(z)$, $p \in \{0, ..., m\}$ являются попарно различными. Следовательно, определитель Вандермонда

$$\Delta(1, z, ..., z^m) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & z_0^p & \cdots & z_0^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & z_m^p & \cdots & z_m^m \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq p} (z_j - z_i)$$

отличен от нуля в обыкновенных точках $z \in \mathbf{C}$ аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$. Значит, по предложению 3.1.3 система одночленов

$1, z, ...z^{q-1}$ независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. При этом система одночленов $1, z, ...z^{q-1}$ содержит ровно q различных элементов. Следствие доказано. $\square$

Пусть $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$. Предположим, что для любого $p \in \{0, ..., m\}$ степень полинома $a_p(z)$ из системы многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ не превосходит p. Тогда

$$a_p(z) := \sum_{k=0}^{p} a_{p,k} z^k, \quad p \in \{0, ..., m\}. \tag{3.1.5}$$

Следствие 3.2. *Система многочленов* (3.1.5) *независима над кольцом* $\mathbf{C}[\pi(z)]$ *тогда и только тогда, когда* $m \leq q-1$ *и старшие коэффициенты* $a_{p,p}$, $p \in \{0, ..., m\}$ *этих многочленов отличны от нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z))$ для системы многочленов (3.1.5) допускает простое вычисление

$$\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{0,0} & \cdots & \sum_{k=0}^{p} a_{p,k} z_0^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} z_0^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0,0} & \cdots & \sum_{k=0}^{p} a_{p,k} z_m^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} z_{q-1}^k \end{vmatrix} =$$
$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & \cdots & z_0^p & \cdots & z_0^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & z_m^p & \cdots & z_m^m \end{vmatrix},$$

где

$$\alpha := \prod_{p=0}^{m} a_{p,p}.$$

Значит,

$$\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) = \alpha \Delta(1, z, ..., z^m),$$

где $\Delta(1, z, ..., z^m)$ – определитель Вандермонда. Если предположить, что $m > q-1$, то определитель Вандермонда $\Delta(1, z, ..., z^m)$ имеет одинаковые строки. Значит, $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) \equiv 0$ и система многочленов (3.1.5) окажется зависимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Следовательно,

$m \leq q-1$. Если предположить, что для некоторого $p \in \{0, ..., m\}$ выполняется равенство $a_{p,p} = 0$, то α будет равно нулю и мы опять получим тождество $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) \equiv 0$. Значит, система многочленов (3.1.5) опять окажется зависимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Следовательно, $a_{p,p} \neq 0$ для любого $p \in \{0, ..., m\}$.

Достаточность. Для обыкновенной точки z аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ при $m \leq q-1$ числа $z_p := \omega^p(z)$, $p \in \{0, ..., m\}$ являются попарно различными. Значит, определитель Вандермонда $\Delta(1, z, ..., z^m)$ отличен от нуля. Следовательно, определитель $\Delta(a_0(z), ..., a_m(z)) = \alpha\Delta(1, z, ..., z^m)$ отличен от тождественного нуля. По предложению 3.1.3 система многочленов (3.1.5) независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Следствие доказано. □

Следствие 3.3. *Система многочленов вида*

$$a_p(z) := \sum_{k=0}^{m} a_{p,k} z^k, \quad p \in \{0, ..., m\} \tag{3.1.6}$$

независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ *только при условии, что она линейно независима (независима над полем* $\mathbf{C}$*) и* $m \leq q-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Предположим, что система многочленов вида (3.1.6) независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Из следствия 3.1 предложения 3.1.3 вытекает, что $m \leq q-1$. При этом поле $\mathbf{C}$ вложено в кольцо $\mathbf{C}[\pi(z)]$, значит, независимость системы многочленов (3.1.6) над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ влечет независимость этой системы над полем $\mathbf{C}$, то есть ее линейную независимость.

Достаточность. Предположим, что $m \leq q-1$ и система многочленов вида (3.1.6) линейно независима. Отсюда вытекает, что система векторов

$$(a_{0,0}, a_{0,1}, ..., a_{0,m}), ..., (a_{m,0}, a_{m,1}, ..., a_{m,m})$$

линейно независима. Значит, определитель $|a|$ матрицы

$$a := \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Используя элементарные преобразования над строками, приведем матрицу a к ступенчатому виду

$$\tilde{a} := \begin{pmatrix} \tilde{a}_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a}_{1,0} & \tilde{a}_{1,1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{m,0} & \tilde{a}_{m,1} & \cdots & \tilde{a}_{m,m} \end{pmatrix}.$$

Так как $|a| \neq 0$, то и определитель $|\tilde{a}|$ матрицы $\tilde{a}$ отличен от нуля. Следовательно,

$$|\tilde{\alpha}| := \tilde{a}_{0,0} \cdot ... \cdot \tilde{a}_{m,m} \neq 0.$$

Значит, старшие коэффициенты $a_{p,p}$, $p \in \{0, ..., m\}$ многочленов $\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_m(z)$ отличны от нуля. По следствию 3.2 предложения 3.1.3 система многочленов

$$\tilde{a}_p(z) := \sum_{k=0}^{p} \tilde{a}_{p,k} z^k, \quad p \in \{0, ..., m\}$$

является независимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. При этом многочлены (3.1.6) являются линейными комбинациями многочленов $\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbf{C}$, то есть

$$a_p(z) = \sum_{j=0}^{m} c_{p,j} \tilde{a}_j(z), \quad p \in \{0, ..., m\}.$$

Так как система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ линейно независима, то определитель

$$c := \begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m,0} & \cdots & c_{m,m} \end{vmatrix}$$

этой системы отличен от нуля. Если предположить, что система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$, то при некоторых $c_p(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$, $p \in \{0, ..., m\}$ получим

$$|c_0(z)| + ... + |c_m(z)| \not\equiv 0, \quad \sum_{p=0}^{m} c_p(z) a_p(z) \equiv 0.$$

Значит,

$$\sum_{p=0}^{m} c_p(z) \sum_{j=0}^{m} c_{p,j} \tilde{a}_j(z) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{m} c_{p,j} c_p(z) \right) \tilde{a}_j(z) \equiv 0.$$

Так как система многочленов $\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_m(z)$ является независимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$, то

$$\sum_{p=0}^{m} c_{p,j} c_p(z) \equiv 0, \quad j \in \{0, ..., m\}.$$

Но определитель c отличен от нуля, значит, $c_p(z) \equiv 0, \ \ p \in \{0, ..., m\}$ и $|c_0(z)| + ... + |c_m(z)| \equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что система многочленов (3.1.6) независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Следствие доказано. □

3. О базисах в модулях многочленов. Конечная система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$ называется *базисом* $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуля $\mathbf{C}[z]$, если выполнены условия:

1) любой многочлен $r(z) \in \mathbf{C}[z]$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $a_0(z), ..., a_m(z)$ с коэффициентами из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$;

2) система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$ является независимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$.

Из предложения 3.1.1 вытекает, что система одночленов $1, z, ..., z^{q-1}$, где q – степень многочлена $\pi(z)$, является базисом в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[z]$.

Предложение 3.1.4. *Система многочленов* $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$ *вида*

$$a_p(z) := \sum_{k=0}^{m} a_{p,k} z^k, \quad p \in \{0, ..., m\} \tag{3.1.7}$$

является базисом $\mathbf{C}[\pi(z)]$*-модуля* $\mathbf{C}[z]$ *только при условии, что она линейно независима и* $m = q - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Предположим, что $m = q-1$ и система многочленов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ вида (3.1.6) линейно независима. По следствию 3.3 предложения 3.1.3 система многочленов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Пусть $b(z) \in \mathbf{C}[z]$. Покажем, что найдутся такие полиномы $c_0(z), ..., c_{q-1} \in \mathbf{C}[\pi(z)]$, что

$$b(z) = c_0(z)a_0(z) + ... + c_{q-1}(z)a_{q-1}(z). \tag{3.1.8}$$

Для этого приведем матрицу a к ступенчатому виду $\tilde{a}$ и заменим систему многочленов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ линейно независимой системой многочленов $\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_{q-1}(z)$. По следствию 3.2 предложения 3.1.3 система многочленов $\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_{q-1}(z)$ тоже независима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. По следствию 3.1 предложения 3.1.3 имеем $\mathbf{C}[\pi(z)]\text{-Rank}\,\mathbf{C}[z] = q$, значит, система полиномов $b(z), \tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_{q-1}(z)$ зависима над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Следовательно, по предложению 3.1.3 определитель

$$\Delta(b(z), a_0(z), ..., a_{q-1}(z)) := \begin{vmatrix} b(z_0) & \tilde{a}_0(z_0) & \cdots & \tilde{a}_{q-1}(z_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b(z_q) & \tilde{a}_0(z_q) & \cdots & \tilde{a}_{q-1}(z_q) \end{vmatrix}$$

является тождественным нулем. Разложим этот определитель по последней строке. При этом учтем, что $z_q := \omega^q(z) = z$. Получим

$$\Delta(z)b(z) + \Delta_0(z)\tilde{a}_0(z) + ... + \Delta_{q-1}(z)\tilde{a}_{q-1}(z) = 0,$$

где $\Delta(z)$ – алгебраическое дополнение элемента $b(z_q) = b(z)$, $\Delta_p(z)$ – алгебраическое дополнение элемента $\tilde{a}_p(z_q) = \tilde{a}_p(z)$, $p \in \{0, ..., q-1\}$. При этом

$$b(z) = -\frac{\Delta_0(z)}{\Delta(z)}a_0(z) - ... - \frac{\Delta_{q-1}(z)}{\Delta(z)}a_{q-1}(z),$$

где

$$\Delta(z) = (-1)^q\Delta(\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_{q-1}(z)) = (-1)^q\tilde{\alpha}\Delta(1, z, ..., z^{q-1}),$$

$$\tilde{\alpha} := \prod\nolimits_{p=0}^{q-1} \tilde{a}_{p,p} \neq 0$$

– определитель матрицы $\tilde{a}$. Значит,

$$\tilde{c}_p(z) := -\frac{\Delta_p(z)}{\Delta(z)} = -\frac{\Delta_p(z)}{\tilde{\alpha}\Delta(1, z, ..., z^{q-1})}, \quad p \in \{0, ..., q-1\}.$$

В силу предложения 2.3 из статьи [38] функции $\tilde{c}_p(z)$, $p \in \{0, ..., q-1\}$ являются целыми π-симметричными функциями. Повторяя оценки из доказательства предложения 1.1.1, убеждаемся, что функции $\tilde{c}_p(z)$, $p \in \{0, ..., q-1\}$ имеют полиномиальный рост. Значит, $\tilde{c}_p(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$, $p \in \{0, ..., q-1\}$. Следовательно,

$$b(z) = \tilde{c}_0(z)\tilde{a}_0(z) + ... + \tilde{c}_{q-1}(z)\tilde{a}_{q-1}(z).$$

Но полиномы $\tilde{a}_0(z), ..., \tilde{a}_{q-1}(z)$ являются линейными комбинациями полиномов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$, значит, при некоторых $c_0(z), ..., c_{q-1}(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ будем иметь представление (3.1.8). Таким образом, система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ является базисом $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуля $\mathbf{C}[z]$. Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z) \in \mathbf{C}[z]$ общего вида (3.1.7) является базисом $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуля $\mathbf{C}[z]$. По определению базиса $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуля $\mathbf{C}[z]$ система многочленов $a_0(z), ..., a_m(z)$ является независимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Значит, по следствию 3.3 предложения 3.1.3 система $a_0(z), ..., a_m(z)$ линейно независима и $m \leq q-1$. Предположим, что $m < q-1$. По определению базиса $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуля $\mathbf{C}[z]$ одночлен z^{q-1} допускает разложение по базису $a_0(z), ..., a_m(z)$:

$$z^n \equiv \sum_{j=0}^{m} c_{n,j}(z)a_j(z), \quad c_{p,j}(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)].$$

Следовательно,

$$z^{q-1} \equiv \sum_{j=0}^{m} c_{q-1,j}(z)a_j(z) = \sum_{j=0}^{m} c_{q-1,j}(z) \sum_{k=0}^{m} a_{j,k}z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{m} c_{q-1,j}(z)a_{j,k} \right) z^k = \sum_{k=0}^{m} c_k(z)z^k, \quad c_{p,j}(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)],$$

то есть система одночленов $1, z, .., z^m, z^{q-1}$ оказалась зависимой над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Это противоречие убеждает в том, что $m = q-1$. Предложение доказано. $\square$

По предложению 3.1.4 произвольная линейно независимая система многочленов из $\mathbf{C}[z]$ вида 3.1.9 является базисом в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[z]$. Однако этим все базисы в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[z]$ не описываются. Например, легко убедиться, что система многочленов

$$z+1, \quad z^3+z^2+1$$

является базисом в $\mathbf{C}[z^2]$-модуле $\mathbf{C}[z]$, но не имеет вид (3.1.9).

Следующая теорема имеет самостоятельное значение. Она вытекает из предложения 3.1.4.

Теорема 3.1.1. *Пусть $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ – произвольная линейно независимая система многочленов из $\mathbf{C}[z]$ вида*

$$a_p(z) := \sum_{k=0}^{q-1} a_{p,k} z^k, \quad p \in \{0, ..., q-1\}. \tag{3.1.9}$$

Для любого многочлена $r(z) \in \mathbf{C}[z]$ имеет место единственное представление

$$r(z) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) r_p(z), \quad r_p(z) = \frac{\Delta_p}{\Delta} \in \mathbf{C}[\pi(z)],$$

где $\Delta := \Delta(a_0(z), ..., a_{q-1}(z))$; Δ_p – определитель, полученный из определителе Δ заменой p-го столбца на столбец $(r(z_0), ..., r(z_{q-1}))^T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 3.1.4 вытекает, что для любого многочлена $r(z) \in \mathbf{C}[z]$ имеет место единственное представление $r(z) = r_0(z)a_0(z) + ... + r_{q-1}(z)a_{q-1}(z)$, где $r_0(z), ..., r_{q-1}(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$. Значит, для любого $z \in \mathbf{C}$ имеет место система равенств

$$r(z_p) = r_0(z)a_0(z_p) + ... + r_{q-1}(z)a_{q-1}(z_p), \quad p \in \{0, ..., q-1\}.$$

По известному правилу вне нулевого множества определителя Δ

$$r_p(z) = \frac{\Delta_p}{\Delta} = \frac{\Delta_p}{\Delta(1, z, ..., z^{q-1})} : \frac{\Delta}{\Delta(1, z, ..., z^{q-1})}, \quad p \in \{0, ..., q-1\}.$$

В силу предложения 2.3 из статьи [38] дроби в правой части являются целыми π-симметричными функциями. Значит, функция Δ_p/Δ является мероморфной π-симметричной функцией. Множество ее полюсов дискретно, следовательно, равенства

$$r_p(z) = \frac{\Delta_p}{\Delta}, \quad p \in \{0, ..., q-1\}$$

продолжаются по непрерывности на всю комплексную плоскость. Теорема доказана. $\square$

3.2. Оператор симметризации в обобщенном смысле

1. Общее определение оператора симметризации. Линейный оператор $L : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называется *оператором симметризации* (в обобщенном смысле), если

$$L(d(z)) = d(z), \quad L(\mathbf{C}[z]) = d(z)\mathbf{C}[\xi(z)],$$

где $d(z)$ и $\xi(z)$ – некоторые многочлены из кольца $\mathbf{C}[z]$.

Рассмотрим линейный оператор

$$A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C}) \mid g(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p\,(z)\,g_p(z),$$

где $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ — произвольный набор многочленов из кольца $\mathbf{C}[z]$, $g_0(z), ..., g_{q-1}(z)$ — π-симметричные коэффициенты представления (1.1.3). Если $g(z)$ – многочлен, то по предложению 1.1.1 коэффициенты $g_0(z), ..., g_{q-1}(z)$ являются многочленами. Следующее предложение раскрывает условия, при которых оператор $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором симметризации (в обобщенном смысле).

Предложение 3.2.1. *Оператор* $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ *с полиномиальными коэффициентами* $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ *общего вида является оператором симметризации тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *наибольший общий делитель* $d(z)$ *полиномов* $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ *допускает представление*

$$d(z) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{d^{(p)}(0)}{p!} a_p(z);$$

2) *для любого* $p \in \{0, ..., q-1\}$ *имеет место следующая декомпозиция*

$$\pi(z) =: (\tilde{\pi} \circ \xi)(z), \quad \frac{a_p(z)}{d(z)} =: (\tilde{a}_p \circ \xi)(z) \in \mathbf{C}[\xi(z)],$$

где $\xi(z)$ *– некоторый многочлен из кольца* $\mathbf{C}[z]$*;*

3) *полиномы* $\tilde{a}_0(\xi), ..., \tilde{a}_{q-1}(\xi)$ *порождают* $\mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)]$*-модуль* $\mathbf{C}[\xi]$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Предположим, что оператор A с полиномиальными коэффициентами $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ общего вида является оператором симметризации. Тогда справедливы соотношения $A(d(z)) = d(z)$, $A(\mathbf{C}[z]) = d(z)\mathbf{C}[\xi(z)]$, где $d(z)$ и $\xi(z)$ – некоторые многочлены из кольца $\mathbf{C}[z]$. Из π-симметричного представления одночлена z^n следует, что

$$(z^n)_p = \begin{cases} 1, \text{ если } n = p; \\ 0, \text{ если } n \neq p \end{cases}$$

для всех n и p из $\{0, ..., q-1\}$. Значит, при $n \in \{0, ..., q-1\}$ имеем

$$a_n(z) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z)(z^n)_p = A(z^n) \in A(\mathbf{C}[z]). \tag{3.2.1}$$

Из соотношения $A(\mathbf{C}[z]) = d(z)\mathbf{C}[\xi(z)]$ вытекает, что полиномы $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ делятся на полином $d(z)$. Из соотношения $A(d(z)) = d(z)$, в свою очередь, вытекает, что

$$d(z) = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z)\, d_p(z),$$

значит, любой полином, который делит полиномы $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ делит и полином $d(z)$. Следовательно, $d(z)$ – наибольший общий делитель полиномов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$. При этом степень полинома $d(z)$ меньше q, значит, в силу единственности π-симметричного разложения полинома $d(z)$ на комплексной плоскости $d_p(z) = \frac{d^{(p)}(0)}{p!}$, $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$. Значит условие 1) выполнено.

Рассмотрим линейный оператор

$$\hat{A} : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C}) \mid g(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} \hat{a}_p\,(z)\, g_p(z),$$

где

$$\hat{a}_0(z) := \frac{a_0(z)}{d(z)}, ..., \hat{a}_{q-1}(z) := \frac{a_{q-1}(z)}{d(z)},$$

$g_p(z)$ – π-симметричный коэффициент представления (1.1.3). Для этого оператора выполняются соотношения $\hat{A}(d(z)) = 1$, $\hat{A}(\mathbf{C}[z]) = \mathbf{C}[\xi(z)]$. Из равенства $\hat{A}(\mathbf{C}[z]) = \mathbf{C}[\xi(z)]$ вытекает, что, во-первых, для любого полинома $r(z) \in \mathbf{C}[\xi(z)]$ найдутся такие полиномы $r_0(z), ..., r_{q-1}(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$, что

$$r(z) = \sum_{p=0}^{q-1} \hat{a}_p\,(z)\, r_p(z). \tag{3.2.2}$$

Во-вторых, для любых полиномов $r_0(z), ..., r_{q-1}(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ сумма в левой части равенства (3.2.2) представляет собой полином из кольца $\mathbf{C}[\xi(z)]$. Значит, полиномы $\hat{a}_0(z), ..., \hat{a}_{q-1}(z)$ принадлежат кольцу $\mathbf{C}[\xi(z)]$. При этом из равенства $\hat{A}(d(z)) = 1$ вытекает, что

$$1 = \sum_{p=0}^{q-1} \hat{a}_p\,(z)\, d_p(z).$$

Следовательно, для любого полинома $r(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ имеем

$$r(z) = \sum_{p=0}^{q-1} \hat{a}_p\,(z)\, r(z) d_p(z) \in \mathbf{C}[\xi(z)],$$

то есть кольцо $\mathbf{C}[\pi(z)]$ является подкольцом кольца $\mathbf{C}[\xi(z)]$. Отсюда следует, что полином $\pi(z)$ тоже принадлежит кольцу $\mathbf{C}[\xi(z)]$. Таким образом, имеют место представления

$$\pi(z) = (\tilde{\pi} \circ \xi)(z)), \quad \hat{a}_0(z) = (\tilde{a}_0 \circ \xi)(z), \quad ..., \quad \hat{a}_{q-1}(z) = (\tilde{a}_{q-1} \circ \xi)(z),$$

где $\tilde{\pi}(\xi), \tilde{a}_0(\xi), ..., \tilde{a}_{q-1}(\xi)$ – некоторые полиномы, значит, условие 2) выполнено.

Осталось отметить, что в силу (3.2.2) любой многочлен $r(\xi) \in \mathbf{C}[\xi]$ допускает представление

$$r(\xi) = \sum_{p=0}^{q-1} \tilde{a}_p(\xi)\, \tilde{r}_p(\xi), \quad \tilde{r}_p(\xi) \in \mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)].$$

Это означает, что полиномы $\tilde{a}_0(\xi), ..., \tilde{a}_{q-1}(\xi)$ порождают $\mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)]$-модуль $\mathbf{C}[\xi]$, то есть условие 3) тоже выполнено. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что условия 1), 2) и 3) выполнены. По определению оператора $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ с полиномиальными коэффициентами $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ общего вида для любого многочлена $g(z) \in \mathbf{C}[z]$ имеем

$$A(g(z)) := \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z)\, g_p(z),$$

где π-симметричные коэффициенты $g_0(z), ..., g_{q-1}(z)$ по предложению 1.1.1 являются многочленами. В силу условия 1) выполняется соотношение $A(d(z)) = d(z)$. В силу условия 2) $g_p(z) = (\hat{g}_p \circ \pi)(z) = (\hat{g}_p \circ \tilde{\pi} \circ \xi)(z) = (\tilde{g}_p \circ \xi)(z)$, значит,

$$A(g(z)) = d(z) \sum_{p=0}^{q-1} \tilde{a}_p(\xi(z)) \tilde{g}_p(\xi(z)).$$

Но по условию 3) полиномы $\tilde{a}_0(\xi), ..., \tilde{a}_{q-1}(\xi) \in \mathbf{C}[\xi]$ порождают $\mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)]$-модуль $\mathbf{C}[\xi]$, значит, $A(\mathbf{C}[z]) = d(z)\mathbf{C}[\xi(z)]$. Значит, оператор $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором симметризации. Предложение доказано. $\square$

2. Индикатор порождающего эндоморфизма. Непрерывный эндоморфизм

$$A : g(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p\,(z)\, g_p(z), \quad g_p \in \mathbf{C}[\pi(z)]$$

называется порождающим, так как он порождает оператор типа π-сдвига AT_h и оператор типа π-свертки AM_{S_0}. По определению порождающего эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ для любого $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$ степень $\deg a_p(z)$ полинома $a_p(z)$ не превосходит p. Номер p первого полинома a_p, степень которого $\deg a_p(z)$ равна p, обозначим символом p_0. Значит,

$$\deg a_0(z) = ... = \deg a_{p_0-1}(z) < p_0, \quad 0 \leq \deg a_{p_0}(z) = p_0. \tag{3.2.3}$$

При этом степень нулевого многочлена $\deg 0$ понимаем в общепринятом смысле и считаем равной -1 (или $-\infty$).

Номер p_0, удовлетворяющий условиям (3.2.3), может и не существовать, но ниже мы убедимся, что он существует, если, например, порождающий эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором симметризации. Пусть $p_A := \{p_0, ..., p_{\nu-1}\}$ — непустой упорядоченный набор целых чисел, удовлетворяющих условиям:

1) $0 \leq p_0 < ... < p_{\nu-1} \leq q-1$;

2) если $p \in p_A$, то $\deg a_p(z) = p$;

3) если $p \in \{0, 1, ..., q-1\} \setminus p_A$, то $\deg a_p(z) < p$.

Совокупность $p_A := \{p_0, ..., p_{\nu-1}\}$ будем называть *индикатором* порождающего эндоморфизма A (оператора π-сдвига AT_h, оператора π-свертки AM_{S_0}, однородного уравнения типа π-свертки), если она удовлетворяет условиям 1)–3).

Будем говорить, что индикатор $p_A := \{p_0, ..., p_{\nu-1}\}$ порождающего эндоморфизма A *декомпозиционно периодичен*, если выполнены следующие условия:

1) многочлен $a_{p_0}(z)$ является делителем каждого из многочленов системы $\{a_0(z), ..., a_{q-1}(z)\}$, многочлен $\pi(z)$ и многочлены

$$\frac{a_0(z)}{a_{p_0}(z)}, ..., \frac{a_{q-1}(z)}{a_{p_0}(z)} \tag{3.2.4}$$

принадлежат кольцу $\mathbf{C}[\xi(z)]$, где $\xi(z)$ – некоторый полином из кольца $\mathbf{C}[z]$ (*условие декомпозиции*);

2) для всех $k \in \{0, 1, ..., \nu - 1\}$ выполняется равенство

$$p_{k+1} - p_k = q_0,$$

где $p_\nu := p_0 + q$, q_0 – степень $\deg \xi(z)$ полинома $\xi(z)$ (*условие периодичности*).

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, отметим, что $q_0 := \deg \xi(z) \geq 1$. При этом, если $p_0 = 0$ и $q_0 = 1$, то легко убедиться, что периодичность индикатора p_A означает совпадение его с множеством $\{0, 1, ..., q - 1\}$. В этом случае $\nu = q$, то есть индикатор p_A в этом случае является максимальным по числу элементов.

Во-вторых, число ν элементов в индикаторе p_A удовлетворяет условию $\nu = q/q_0$, значит, $q = q_0\nu$, то есть $\nu = \deg \tilde{\pi}(\xi)$, где $\tilde{\pi}(\xi)$ – полином из декомпозиции $(\tilde{\pi} \circ \xi)(z)$ полинома $\pi(z)$.

В-третьих, условия 1) и 2) декомпозиционной периодичности индикатора p_A выполняются, если $\nu = 1$. Действительно, если $\nu = 1$, то $q_0 = q$ и $\xi(z) = \pi(z)$. Индикатор p_A включает лишь один элемент p_0 и условие периодичности индикатора p_A содержит лишь одно равенство, выполнение которого следует из определения числа $p_\nu := p_0 + q$.

В-четвертых, условия 1) и 2) декомпозиционной периодичности индикатора p_A выполняются, если $q \leq 2$. Действительно, случай $q = 1$ сводится к уже рассмотренному случаю. Осталось рассмотреть случай $\nu = 2$ и $q = 2$. В этом случае $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ и $\xi(z) = z$. Многочлен $a_0(z)$ имеет нулевую степень, значит, он совпадает с отличной от нуля константой. Следовательно, условие декомпозиции индикатора p_A выполнено. При этом индикатор p_A включает два элемента $p_0 = 0$ и $p_1 = 1$ и, значит, условие периодичности индикатора p_A содержит два равенства $p_1 - p_0 = q_0$ и $p_2 - p_1 = q_0$. Первое равенство выполняется автоматически. Второе равенство следует из определения числа $p_\nu := p_0 + q$.

В-пятых, условия 1) и 2) декомпозиционной периодичности индикатора p_A выполняются, если $\nu = q$. Действительно, в этом случае многочлен $a_0(z)$ имеет нулевую степень, значит, полином $\xi(z)$ совпадает с

z. Следовательно, условие декомпозиции индикатора p_A автоматически выполнено. Условие периодичности индикатора p_A тоже выполнено, так как в этом случае $q_0 = 1$ и для любого $k \in \{0, 1, ..., q-1\}$ имеем $p_k = k$. Следовательно, $p_{k+1} - p_k = 1$ для любого $k \in \{0, 1, ..., q-1\}$ и $p_\nu = p = p_0 + q$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2.2. *Порождающий эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором симметризации только при условии, что его индикатор p_A является декомпозиционно периодичным.*

Доказательство. *Достаточность.* Будем считать, что индикатор p_A порождающего эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ декомпозиционно периодичен. Тогда по условию декомпозиции полином $\pi(z)$ и полиномы (3.2.4) принадлежат кольцу $\mathbf{C}[\xi(z)]$, где $\xi(z)$ – некоторый полином из кольца $\mathbf{C}[z]$. Это означает, что выполнено условие 2) предложения 3.2.1. В силу (3.2.3) полиномы $a_0(z), ..., a_{p_0-1}(z)$ совпадают с тождественными нулями, а полином $a_{p_0}(z)$ отличен от тождественного нуля (так как его степень $\deg a_{p_0}(z) = p_0 \geq 0$). Таким образом, полином $a_{p_0}(z)$ является первым отличным от тождественного нуля полиномом среди полиномов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$, значит, по определению порождающего эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ его старший коэффициент a_{p_0,p_0} равен единице. Полином $d(z) := a_{p_0}(z)$ является наибольшим общим делителем полиномов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$. При этом

$$\sum_{p=0}^{q-1} \frac{d^{(p)}(0)}{p!} a_p(z) = \sum_{p=0}^{p_0} \frac{d^{(p)}(0)}{p!} a_p(z) =$$

$$= \frac{d^{(p_0)}(0)}{p_0!} a_{p_0}(z) = a_{p_0,p_0} a_{p_0}(z) = a_{p_0}(z) = d(z),$$

значит, условие 1) предложения 3.2.1 тоже выполнено.

Далее, по условию периодичности для всякого $k \in \{0, 1, ..., \nu-1\}$ справедливы сотношения

$$p_{k+1} - p_0 = (p_{k+1} - p_k) + ... + (p_1 - p_0) = q_0(k+1),$$

где $p_\nu := p_0 + q$. Отсюда вытекает, что индикатор p_A состоит из целых чисел

$$p_k := q_0 k + p_0, \quad k \in \{0, 1, ..., \nu - 1\}.$$

Из определения индикатора p_A вытекает, что для любого $k \in \{0, 1, ..., \nu - 1\}$ степень полинома $a_{p_k}(z)$ равна p_k, а степень полинома $\tilde{a}_{p_k}(\xi)$ равна k. Значит, система многочленов $\tilde{a}_{p_0}(\xi), ..., \tilde{a}_{p_{\nu-1}}(\xi)$ линейно независима. По предложению 3.1.4 система многочленов $\tilde{a}_{p_0}(\xi), ..., \tilde{a}_{p_{\nu-1}}(\xi)$ является базисом в $\mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)]$-модуле $\mathbf{C}[\xi]$. Следовательно, условие 3) предложения 3.2.1 выполняется.

Факт выполнения условий 1), 2) и 3) предложения 3.2.1 позволяет заключить, что порождающий эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором симметризации. Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что оператор A является оператором симметризации. Тогда справедливы условия 1), 2) и 3) из предложения 3.2.1. По условию 3) полиномы $\tilde{a}_0(\xi), ..., \tilde{a}_{q-1}(\xi)$ порождают $\mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)]$-модуль $\mathbf{C}[\xi]$. В силу следствия 3.1 предложения 3.1.3 $\mathbf{C}[\pi]$-ранг системы $\{\tilde{a}_0(\xi), ..., \tilde{a}_{q-1}(\xi)\}$ равен $\nu := \deg \tilde{\pi}(\xi) \geq 1$. Выделим из этой системы независимую над кольцом $\mathbf{C}[\pi(z)]$ подсистему $\{\tilde{b}_0(\xi), ..., \tilde{b}_{\nu-1}(\xi)\}$, содержащую ν элементов. Так как поле $\mathbf{C}$ вложено в кольцо $\mathbf{C}[\pi(z)]$, то система многочленов $\tilde{b}_0(\xi), ..., \tilde{b}_{\nu-1}(\xi)$ является линейно независимой, то есть независимой над полем $\mathbf{C}$. Отсюда следует, что система многочленов

$$b_0(z) = d(z)\tilde{b}_0(\xi(z)), ..., b_{\nu-1}(z) = d(z)\tilde{b}_{\nu-1}(\xi(z))$$

тоже является линейно независимой. Здесь $d(z)$ – наибольший общий делитель полиномов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$.

По условию 2) имеем $q = q_0\nu$, где $q_0 := \deg \xi(z) \geq 1$. Кроме этого, для любого $p \in \{0, 1, ..., q - 1\}$ имеет место неравенство $\deg a_p(z) = q_0 \deg \tilde{a}_p(\xi) + n_0 \leq p$, где $n_0 := \deg d(z) \geq 0$. Но число $\deg \tilde{a}_p(\xi)$ является целым, значит,

$$\deg \tilde{a}_p(\xi) \leq \left[\frac{p - n_0}{q_0}\right],$$

где $\left[\frac{p-n_0}{q_0}\right]$ – целая часть числа $\frac{p-n_0}{q_0}$. Следовательно, $\deg \tilde{a}_p(\xi) \leq \frac{p-n_0}{q_0}$, если $\frac{p-n_0}{q_0} \in \mathbf{Z}_+$, и $\deg \tilde{a}_p(\xi) < \frac{p-n_0}{q_0}$, если $\frac{p-n_0}{q_0} \notin \mathbf{Z}_+$. Отсюда вытекает, что $\deg a_p(z) \leq p$, если $\frac{p-n_0}{q_0} \in \mathbf{Z}_+$, и $\deg a_p(z) < p$, если $\frac{p-n_0}{q_0} \notin \mathbf{Z}_+$. Значит, равенство $\deg a_p(z) = p$ может выполняться только, если $\frac{p-n_0}{q_0} \in \mathbf{Z}_+$. Последнее включение означает, что

$$p = p_k := q_0 k + n_0 \leq q - 1, \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

Так как $q = q_0 \nu$, то $p_\nu := q_0 \nu + n_0 = q + n_0 > q - 1$. Таким образом, линейно независимая подсистема $\{b_0(z), ..., b_{\nu-1}(z)\} \subseteq \{a_0(z), ..., a_{q-1}(z)\}$ обязана совпасть с системой многочленов $a_{p_0}(z), ..., a_{p_{\nu-1}}(z)$. Значит, для любого $k \in \{0, 1, ..., \nu - 1\}$ выполняются соотношения

$$\deg a_{p_k}(z) = p_k \leq q - 1.$$

Следовательно, индикатор p_A порождающего эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ совпадает с множеством $\{p_0, ..., p_{\nu-1}\}$. При этом $p_0 = n_0$, $p_\nu = q_0\nu + n_0 = p_0 + q$ и $p_\nu - p_{\nu-1} = p_0 + q - p_{\nu-1} = p_0 + q_0 - n_0 = q_0$, значит, для всех $k \in \{0, 1, ..., \nu - 1\}$ выполняется равенство $p_{k+1} - p_k = q_0$. Это означает, что индикатор p_A удовлетворяет условию периодичности.

Осталось показать, что индикатор p_A удовлетворяет условию декомпозиции. Действительно, из равенства $p_0 = n_0$ вытекает, что полиномы $a_0(z), ..., a_{p_0-1}(z)$ совпадают с тождественными нулями. При этом из условия 1) предложения 3.2.1 вытекает, что

$$d(z) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{d^{(p)}(0)}{p!} a_p(z) = \sum_{p=0}^{p_0} \frac{d^{(p)}(0)}{p!} a_p(z) = a_{p_0}(z).$$

Следовательно, полиномы (3.2.4) принадлежат кольцу $\mathbf{C}[\xi(z)]$. Предложение доказано. $\square$

3.3. Общее решение однородного уравнения π-свертки

Сейчас мы готовы перейти к решению задачи экспоненциального синтеза.

1. Дуальный аннулятор однородного уравнения π-свертки. Множество решений однородного уравнения π-свертки (1.4.1) обозначим W_{S_0}. Множество W_{S_0} совпадает с ядром оператора π-свертки $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$ и по предложению 1.3.3 является замкнутым $\pi(D)$-инвариантным подпространством в $O(\Omega)$. Нам потребуется строение дуального аннулятора $I_{S_0} := L_\Omega(W^0_{S_0})$ подпространства $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$, где $L_\Omega : O^*(\Omega) \to P(\Omega)$ – преобразование Лапласа, $W^0_{S_0}$ – аннулятор подпространства $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$ в сильном сопряженном пространстве $O^*(\Omega)$.

Пусть $g_1(z), ..., g_n(z) \in P(\Omega)$. Совокупность комбинаций

$$\{p_1(z)g_1(z) + ... + p_n(z)g_n(z) : p_k(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]\}$$

называется $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой системы функций $g_1(z), ..., g_n(z)$, а ее замыкание в топологии пространства $P(\Omega)$ называется замкнутой $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой системы функций $g_1(z), ..., g_n(z)$ в пространстве $P(\Omega)$. Замкнутую $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочку системы функций $\{a_0(z)\varphi_0(z), ..., a_{q-1}(z)\varphi_0(z)\}$ обозначим через $I_{\varphi_0,A}$. Здесь $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ – полиномиальные коэффициенты эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$, $\varphi_0(z)$ – характеристическая функция однородного уравнения π-свертки (1.4.1).

Справедливо следующее предложение.

Предложение 3.3.1. *Дуальный аннулятор $I_{S_0} \subseteq P(\Omega)$ замкнутого подпространства $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$ совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой оболочкой $I_{\varphi_0,A}$ системы функций $\{a_0(z)\varphi_0(z), ..., a_{q-1}(z)\varphi_0(z)\}$ в пространстве $P(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу рефлексивности пространства $O(\Omega)$ второе сопряженное отображение $\left(AM^*_{S_0}\right)^*$ совпадает с отображением $AM_{S_0} : O(\Omega) \to O(U_{\varepsilon'})$. Значит, подпространство $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$ совпадает с замыканием в пространстве $O^*(\Omega)$ полного образа $AM^*_{S_0}(O^*(U_{\varepsilon'}))$. Следовательно, дуальный аннулятор I_{S_0} совпадает с замыканием в $P(\Omega)$ полного образа $AM^{\circledast}_{S_0}(P(U_{\varepsilon'}))$, где $AM^{\circledast}_{S_0}$

– дуальный оператор по отношению к оператору AM_{S_0}. По лемме 2 статьи [72] оператор $AM^{\circledast}_{S_0}$ действует по правилу

$$P(U_{\varepsilon'}) \to P(\Omega) \mid g(z) \mapsto \varphi_0(z)A(g(z)).$$

Значит, полный образ $AM^{\circledast}_{S_0}(P(U_{\varepsilon'}))$ совпадает с замыканием в $P(\Omega)$ множества $\{\varphi_0(z)A(g(z)) : g(z) \in P(U_{\varepsilon'})\}$. При этом частичные суммы $g_n(z)$ ряда Тейлора функции $g(z) \in P(U_{\varepsilon'})$ сходятся к ней в топологии пространства $P(U_{\varepsilon'})$, значит, $A(g_n(z)) \to A(g)$ в пространстве $P(U_{\varepsilon'})$ и $\varphi_0(z)A(g_n(z)) \to \varphi_0(z)A(g(z))$ в топологии пространства $P(\Omega)$. Значит, любой элемент множества $\{\varphi_0(z)A(g(z)) : g(z) \in P(U_{\varepsilon'})\}$ можно аппроксимировать в топологии пространства $P(\Omega)$ функциями из множества $\{p(z)\varphi_0(z) : p(z) \in A(\mathbf{C}[z])\}$. По определению оператора $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ образ $A(\mathbf{C}[z])$ совпадает с подмодулем $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуля $\mathbf{C}[z]$ порождаемым многочленами $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$. Это означает, что дуальный аннулятор I_{S_0} совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой системы функций $\{a_0(z)\varphi_0(z), ..., a_{q-1}(z)\varphi_0(z)\}$, то есть совпадает с $I_{\varphi_0,A}$. Предложение доказано. $\square$

2. Аппроксимационная теорема. В этом разделе мы опишем условия, при которых элементарные решения однородного уравнения π-свертки плотны в подпространстве всех решений этого уравнения. Для формулировки основной теоремы определим используемые в ней обозначения и терминологию (опуская детали, которого рассмотрены выше в разных разделах и подразделах данной работы).

Пусть $\pi(z)$ — многочлен степени q из кольца $\mathbf{C}[z]$, $g(z)$ — целая функция,

$$g(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p g_p(z)$$

— ее π-симметричное представление на $\mathbf{C}$. Коэффициенты $g_p(z)$, $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$ этого представления определяются однозначно и являются целыми π-симметричными функциями. Непрерывный эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называем порождающим, если он действующий по правилу

$$A : g(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p\,(z)\,g_p(z),$$

где $g_p(z)$, $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$ – коэффициенты π-симметричного представления целой функции $g(z)$; $\{a_0(z), ..., a_{q-1}(z)\}$ – произвольный набор многочленов из кольца $\mathbf{C}[z]$, удовлетворяющих условиям:

1) для любого $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$ степень q_p полинома $a_p(z)$ не превосходит p;

2) старший коэффициент первого отличного от тождественного нуля полинома a_{p_0} равен единице.

Пусть S_0 — произвольный линейный непрерывный функционал на пространстве аналитических функций $O(\Omega)$, Ω — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Можно считать, что односвязная область Ω_0 вложена в Ω и функционал S_0 определен и непрерывен на пространстве $O(\Omega_0)$. Более того, можно считать, что $\Omega_0 + U \subseteq \Omega$, где U — некоторый открытый круг с центром в нуле. Если область Ω является выпуклой, то и область Ω_0 можно считать выпуклой.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!}\,(D^n f)\,(\zeta),$$

где $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ — порождающий эндоморфизм и $h \in U$. Оператор AT_h действует непрерывно из $O(\Omega)$ в $O(\Omega_0)$, называется оператором π-сдвига и является оператором A-сдвига. Произвольный линейный непрерывный функционал $S_0 \in O^*(\Omega_0)$ порождает линейный оператор

$$AM_{S_0} : f \mapsto \langle S_0, AT_h(f)\rangle\,,$$

который действует непрерывно из $O(\Omega)$ в $O(U)$, называется оператором π-свертки и является оператором A-свертки. Его ядро совпадает с множеством решений уравнения

$$AM_{S_0}(f) = 0, \quad f \in O(\Omega),$$

которое обычно называют однородным уравнением π-свертки.

Напомним, что эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называется оператором симметризации, если

$$A(d(z)) = d(z), \quad A(\mathbf{C}[z]) = d(z)\mathbf{C}[\xi(z)],$$

где $d(z)$ и $\xi(z)$ — некоторые многочлены из кольца $\mathbf{C}[z]$. Индикатором порождающего эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называется упорядоченное множество $p_A := \{j_0, ..., j_{\nu-1}\}$, определенное по правилу:

$$j_k \in p_A \Leftrightarrow j_k \in \{0, 1, ..., q-1\}, \deg a_{j_k}(z) = j_k.$$

Говорим, что индикатор p_A декомпозиционно периодичен, если выполнены условия:

$$j_{k+1} - j_k = q_0, \quad j_0 = p_0, \quad j_\nu = p_0 + q \text{ (условие периодичности)},$$

$$\pi(z), \frac{a_0(z)}{a_{p_0}(z)}, ..., \frac{a_{q-1}(z)}{a_{p_0}(z)} \in \mathbf{C}[\xi(z)] \text{ (условие декомпозиции)},$$

где q_0 – степень полинома $\xi(z) \in \mathbf{C}[z]$.

Теорема 3.3.1. *Пусть область $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ является выпуклой. Для того чтобы для однородного уравнения π-свертки была справедлива аппроксимационная теорема достаточно, а если порождающие полиномы $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ являются мономами, то и необходимо, чтобы порождающий эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ являлся оператором симметризации.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Пусть Ω — выпуклая область и $S_0 \in O^*(\Omega)$, $\varphi_0(z)$ — характеристическая функцией вункционала S_0,

$$AM_{S_0}(f) = 0, \quad f \in O(\Omega)$$

— однородное уравнение π-свертки. В силу предложения 1.2.3 при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty, z\to\infty}} \frac{1}{n} \left(\frac{|A(z^n)|}{\exp \varepsilon |z|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\varepsilon e},$$

значит, по предложению (1.2.9) однородное уравнение π-свертки можно записать в виде

$$\left\langle S_0, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A(z^n)(D)(f) \right\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega). \tag{3.3.1}$$

Предположим, что порождающий эндоморфизм $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором симметризации. По теореме 3.2.2 индикатор $p_A = \{p_0, ..., p_{\nu-1}\}$ эндоморфизма $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ декомпозиционно периодичен, то есть для него выполнены условия декомпозиции и периодичности. Из условия декомпозиции индикатора p_A вытекает, что

$$\pi(z) = \tilde{\pi}(\xi(z)),$$

где $\tilde{\pi}(z)$ и $\xi(z)$ — полиномы из кольца $\mathbf{C}[z]$. Пусть $\nu := \deg \tilde{\pi}(z)$, $q_0 := \deg \xi(z)$ и $\nu q_0 = q$. Полином $a_{p_0}(z)$ является наибольшим общим делителем $d(z)$ многочленов $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ и $a_p(z) = a_{p_0}(z)\tilde{a}_p(\xi(z))$ для любого $p \in \{0, 1, ..., q-1\}$, где $\tilde{a}_p(z) \in \mathbf{C}[z]$. Из определение оператора симметризации и равенства $a_{p_0}(z) = d(z)$ вытекает, что

$$A(a_{p_0}(z)) = a_{p_0}(z), \quad A(\mathbf{C}[z]) = a_{p_0}(z)\mathbf{C}[\xi(z)].$$

Пусть $\tilde{g}_0(z), ..., \tilde{g}_{q-1}(z)$ — коэффициенты $\tilde{\pi}$-симметричного представления целой функции $g(\xi)$. Рассмотрим линейный оператор

$$\hat{A} : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C}) \mid g(z) \mapsto \sum_{k=0}^{\nu-1} \hat{a}_{p_k}(z)\, \tilde{g}_k(z)$$

и порождаемый им оператор $\tilde{\pi}$-сдвига

$$\hat{A}T_h : f(z) \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} (D^n)(f).$$

Отметим, что коэффициенты $\hat{a}_{p_0}(z), ..., \hat{a}_{p_{\nu-1}}(z)$ удовлетворяют условию

$$\hat{a}_{p_k}(z) := \frac{a_{p_k}(z)}{a_{p_0}(z)} = \tilde{a}_{p_k}(\xi(z)), \quad k \in \{0, 1, ..., \nu-1\}.$$

Пусть $\hat{\varphi}_0(z) := a_{p_0}(z)\varphi_0(z)$, $\hat{S}_0$ — аналитический функционал из $O^*(\Omega)$ с характеристической функцией $\hat{\varphi}_0(z)$. Рассмотрим однородное уравнение $\tilde{\pi}$-свертки

$$\hat{A}M_{\hat{S}_0}(f) = 0, \quad f \in O(\Omega).$$

В силу предложения 1.2.3 при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty, z\to\infty}} \frac{1}{n} \left(\frac{\left|\hat{A}(z^n)\right|}{\exp \varepsilon \left|z\right|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\varepsilon e},$$

значит, по предложению (1.2.9) однородное уравнение $\tilde{\pi}$-свертки можно записать в виде

$$\left\langle \hat{S}_0, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \hat{A}(\xi^n)(D)(f) \right\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega). \qquad (3.3.2)$$

Отметим, что $\hat{a}_{p_0}(z) = \frac{a_{p_0}(z)}{a_{p_0}(z)} = 1$ для любого $z \in \mathbf{C}$, значит, $\hat{A}(1) = 1$. При этом по условию периодичности индикатора $p_A = \{p_0, ..., p_{\nu-1}\}$ для любого $k \in \{0, 1, ..., \nu - 1\}$ степень полинома $\tilde{a}_{p_k}(\xi)$ равна p_k, значит, система полиномов $\{\tilde{a}_{p_0}(\xi), ..., \tilde{a}_{p_{\nu-1}}(\xi)\}$ линейно независима. По предложению 3.1.4 система полиномов $\{\tilde{a}_{p_0}(\xi), ..., \tilde{a}_{p_{\nu-1}}(\xi)\}$ является базисом в $\mathbf{C}[\tilde{\pi}(\xi)]$-модуле $\mathbf{C}[\xi]$. Отсюда вытекает, что система полиномов $\{\hat{a}_{p_0}(z), ..., \hat{a}_{p_{\nu-1}}(z)\} = \{\tilde{a}_{p_0}(\xi(z)), ..., \tilde{a}_{p_{\nu-1}}(\xi(z))\}$ является базисом в $\mathbf{C}[\pi(z)]$-модуле $\mathbf{C}[\xi(z)]$. Значит, $\hat{A}(\mathbf{C}[z]) = \mathbf{C}[\xi(z)]$. Таким образом, для порождающего эндоморфизма $\hat{A} : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ выполняются равенства:

$$\hat{A}(1) = 1, \quad \hat{A}(\mathbf{C}[z]) = \mathbf{C}[\xi(z)].$$

Это означает, что оператор A является оператором ξ-симметризации в обычном (не обобщенном) смысле и по теореме 2 из работы [72] для уравнения (3.3.2) выполняется аппроксимационная теорема.

Нам осталось показать, что множество решений уравнения (3.3.1) (замкнутое подпространство $W_{S_0} \subseteq O(\Omega)$) совпадает с множеством решений уравнения (3.3.2) (замкнутым подпространством $W_{\hat{S}_0} \subseteq O(\Omega)$). Для этого нам достаточно показать, что совпадают дуальные аннуляторы подпространств W_{S_0} и $W_{\hat{S}_0}$, то есть $I_{S_0} := W_{S_0}^{\circledast} = W_{\hat{S}_0}^{\circledast} =: I_{\hat{S}_0}$.

По предложению 3.3.1 I_{S_0} совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой оболочкой системы функций $\{a_0(z)\varphi_0(z), ..., a_{q-1}(z)\varphi_0(z)\}$, а $I_{\hat{S}_0}$ совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой оболочкой системы функций $\{\hat{a}_{p_0}(z)\hat{\varphi}_0(z), ..., \hat{a}_{p_{\nu-1}}(z)\hat{\varphi}_0(z)\} = \{a_{p_0}(z)\varphi_0(z), ..., a_{p_{\nu-1}}(z)\varphi_0(z)\}$ в пространстве $P(\Omega)$. Значит, дуальные аннуляторы I_{S_0} и $I_{\hat{S}_0}$ совпадают, так как они оба совпадают с замыканием множества функций вида $r(z)a_{p_0}(z)\varphi_0(z)$, $r(z) \in \mathbf{C}[\xi(z)]$ в топологии пространства $P(\Omega)$. Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что порождающие полиномы $a_0(z), ..., a_{q-1}(z)$ являются мономами $c_0, c_1 z, ..., c_{q-1}z^{q-1}$ соответственно (см. 1.2.9)). В этом случае непрерывный эндоморфизм $A : O(\Omega) \to O(\Omega)$ принимает следующий вид

$$A(g(z)) := \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z)g_p(z) = \sum_{p=0}^{q-1} c_p z^p g_p(z),$$

а оператор π-сдвига $AT_h : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$ совпадает с оператором q-стороннего сдвига

$$f(z) \to \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h),$$

где коэффициенты $b_0, ..., b_{q-1} \in \mathbf{C}$ определяются по правилу

$$b_k := \frac{1}{q}\sum_{p=0}^{q-1} \varepsilon_q^{-pk} c_p, \quad k \in \{0, ..., q-1\}.$$

При этом однородное уравнение π-свертки принимает вид

$$\left\langle S, \sum_{k=0}^{q-1} b_k f(z + \varepsilon_q^k h) \right\rangle = 0, \quad f(z) \in O(\Omega),$$

то есть превращается в однородное уравнение q-сторонней свертки. Для таких уравнений аппроксимационная теорема выполнена только в том случае, когда индикатор p_A этого уравнения является периодичным (результат Александра Татаркина). Если индикатор p_A однородного уравнения q-сторонней свертки является периодичным, то как легко убедиться условие декомпозиции для него выполняется автоматически. Значит, по предложению 3.2.2 аппроксимационная теорема для однородного уравнения π-свертки справедлива только в том случае, в котором эндоморфизм A — оператор симметризации. Все доказано. $\square$

Заключение

Проведеные исследования показывают, что однородные уравнения π-свертки в выпуклой области комплексной плоскости наследуют и развивают общие свойства однородных уравнений типа q-сторонней свертки. Этот вывод распространяется и на свойства, связанные с задачей экспоненциального анализа, и на свойства, связанные с задачей экспоненциального синтеза.

Решение задачи экспоненциального анализа удалось провести в общем виде и получить окончательные, завершенные результаты. Решение задачи экспоненциального синтеза тесно связано с решением аналогичной задачи для однородных уравнений типа q-сторонней свертки и глубина общих исследований в этом направлении определяется глубиной исследования задачи экспоненциального синтеза для однородных уравнений типа q-сторонней свертки. Полученные в этом направлении общие результаты не являются окончательными и предполагают дальнейшие исследования открытых вопросов. Например, остается открытым вопрос описания необходимых и достаточных условий выполнения аппроксимационной теоремы для однородного уравнения π-свертки. В данной диссертации найдено лишь некоторое точное условие. Оно является достаточным, но необходимым оно является лишь для уравнений частного вида.

Список используемой литературы

[1] Beurling A. A critical topology in harmonic analysis on semigroups // Acta Math. — 1964. — V. 112, № 3–4. — P. 215–228.

[2] Cartan H. Idŕ eaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes // Bulletin de la Sociŕ etŕ e Mathematique de France. — 1950. — V. 78, № 1. — P. 29–64.

[3] Dickson D. G. Infinit order differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — V. 15, № 4. — P. 638–641.

[4] Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables. — New-York: Wiley- Intersci. publishers. — 1970.

[5] Ehrenpreis L. Mean periodic functions // Amer. J. Math. — 1955. — V. 77, № 2. — P. 293–326.

[6] Kelleher J. J., Taylor B. A. Closed ideals in locally convex algebras of analityc functions // J. for die reine und angewandte Mathematik. — 1972. — V. 225. — P. 190–209.

[7] Polya G. Eine verallgemeinerung des Fabryschen Zьckensatzes // Nach. Gesell Sch. Wissensck. Gцttingen. — 1927. — P. 187–195.

[8] Ritt J. E. On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients // Trans. Amer. Mathem. Soc. — 1917.— V. 18. — P. 27–49.

[9] Pincher1e S. Sur la resolution de l'equation fonctionnelle a coefficients constants // Acta Math., 48 (1926), 279—391

[10] Schwartz L. Theorie generale des fonctions moyenne–periodiques // Ann. Math. — 1947. — V. 48. — P. 857–929.

[11] Tatarkin A. A., Saranchuk U. S. Elementary solutions of a homogeneous q-sided convolution equation // Пробл. анал. Issues Anal. – 2018. – Т. 7(25), спецвыпуск. – С. 137–152.

[12] Tatarkin A. A., Saranchuk U. S. Elementary solutions of homogeneous q-sided convolution equation // Complex Analysis and its Applications: Материалы Международной школы-конференции, посвященной 90-летию со дня рождения И.П. Митюка, Геленджик, 02–09 июня 2018 года / Кубанский государственный университет. – Геленджик: Кубанский государственный университет, 2018. – P. 103.

[13] Taylor B. A., Williams D. L. Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. // Canad. J. Math. — 1970. — V.12, № 6. — P. 1266–1283.

[14] Bernstein V. Lecons sur les progres recents de la theorie des series de Dirichlet // Paris. Gauthier — Villars, 1933.

[15] Valiron G. Sur les solutions des e'quations differentielles line'ares d'order infinit et a'coefficiens constants // Ann. Ec. Norm. Sup. — 1929. — V. 46. — P. 25–53.

[16] Абузярова Н. Ф. Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез // Матем. сб. — 1999. — Т. 190, № 4. — С. 3–22.

[17] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей // М. : Физматгиз, 1959.

[18] Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и асимптотические периоды целых функций // Тр. МИАН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 42–67.

[19] Епифанов О. В. К вопросу об эпиморфности оператора свертки в выпуклых областях // Матем. заметки. — 1974. — Т. 16, № 3. — С. 415–422.

[20] Епифанов О. В. Критерий эпиморфности свертки в произвольных областях комплексной плоскости // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 695–705.

[21] Епифанов О. В. Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях // Матем. заметки. — 1974. — Т. 15, № 5. — С. 787–796.

[22] Епифанов О. В., Коробейник Ю. Ф. Нормальная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Матем. сб. — 1971. — Т. 84(126), № 3. — С. 378–405.

[23] Калинин С. И. К вопросу об аппроксимации решения однородного уравнения свертки посредством элементарных // Матем. заметки. — 1982. — Т. 32, № 2. — С. 199–211.

[24] Коренблюм Б. И. Замкнутые идеалы кольца A^n // Функциональный анализ и его приложения. — 1972. — Т. 6, № 3. — С. 38–52.

[25] Коробейник Ю. Ф. Нетривиальные разложения нуля по абсолютно представляющим системам. Приложения к операторам свертки // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 5. — С. 661–680.

[26] Коробейник Ю. Ф. О правом обратном для оператора свертки, действующего в пространствах ростков на связных множествах в C // Матем. сб. — 1996. — Т 187, № 1. — С. 55–82.

[27] Коробейник Ю. Ф. О разрешимости уравнения свертки в некоторых классах аналитических функций // Матем. заметки. — 1991. — Т. 49, № 2. — С. 74–83.

[28] Коробейник Ю. Ф. Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности // Матем. сб. — 1969. — Т. 80(122), № 1(9). — С. 52–76.

[29] Коробейник Ю. Ф. Уравнения свертки в комплексной области // Матем. сб. — 1985. — Т. 127(169), № 2(6). — С. 173–197.

[30] Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн. — 1993. — Т 34, № 1. — С. 70–84.

[31] Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн. — 1993. — Т 34, № 1. — С. 70–84.

[32] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. – 1972. – Т. 87(129), № 4. – С. 459-489.

[33] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. – 1972. – Т. 88, № 1. – С. 3-30.

[34] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. — 1972. — Т. 88, № 3. — С. 331–362.

[35] Красичков-Терновский И. Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1967. — Т. 31. — С. 37–60.

[36] Красичков-Терновский И. Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1968. — Т. 32. — С. 1024–1032.

[37] Красичков-Терновский И. Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций. Алгебры минимального типа // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9., № 1 — С. 77–96.

[38] Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб. – 1991. – Т. 182, № 11. – С. 1559-1588.

[39] Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. III. Обильные подмодули // Матем. сб. – 1992. – Т. 183, № 6. – С. 55–86.

[40] Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // Матем. сб. — 1992. — Т. 183, № 8. — С. 23–46.

[41] Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. **63** (1999), № 4, 101–130.

[42] Красичков-Терновский И. Ф., Шишкин А. Б. Спектральный синтез оператора кратного дифференцирования // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 307, № 1. С. 24–27.

[43] Красичков–Терновский И.Ф. Аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки // Матем. сб. – 2004. – Т. 195, № 9. – С. 37-56.

[44] Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. – 1992. – Т. 47, № 6. – С. 3-58.

[45] Леонтьев А. Ф. О представлении функций рядами полиномов Дирихле // Матем. сб. — 1966. — Т. 70. — С. 132–144.

[46] Леонтьев А. Ф. О суммировании ряда Дирихле с комплексными показателями и его применении // Тр. МИАН СССР. — 1971. — Т. 112. — С. 300 – 326.

[47] Леонтьев А. Ф. Об одном функциональном уравнении // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29. — С. 725–756.

[48] Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Тр. МИАН СССР. — 1951. — Т. 39.

[49] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. – М. : Наука, 1976. – 536 с.

[50] Мацаев В. И., Магульский Е. З. Теорема деления для аналитических функций с заданной мажорантой и некоторые ее приложения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1976. — Т. 56. — С. 73–89.

[51] Мелихов С. Н., Момм З. О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbf{C}$ // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 5. — С. 38–48.

[52] Мерзляков С. Г. Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. — 1983. — Т. 33, № 5. — С 701–713.

[53] Мерзляков С. Г. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования //Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 5. — С. 635–639.

[54] Мерзляков С. Г. Спектральный синтез для оператора дифференцирования на системах криволинейных полос // Матем. сб. — 1995. — Т. 186, № 5. — С. 85 – 102.

[55] Моржаков В. В. Об уравнениях свертки в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях и на выпуклых компактах в $\mathbf{C}^n$ // Матем. заметки. — 1974. — Т. 16, № 3. — С. 431–440.

[56] Моржаков В. В. Об эпиморфности оператора свертки в выпуклых областях из $\mathbf{C}^n$ // Матем. сб. — 1987. — Т. 132(174), № 3. — С. 352–370.

[57] Никольский Н. К. Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций // Сиб. мат. журн. — 1968. — Т. 9., № 1 — С. 211–215.

[58] Рашевский П. К. О замкнутых идеалах в одной счетно-нормированной алгебре целых аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 162, № 3. С. 513–515.

[59] Саранчук Ю. С. Однородные уравнения типа π-свертки // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2022. – № 4(1). – С. 108-118

[60] Саранчук Ю.С., Шишкин А.Б. Общее элементарное решание однородного уравнения типа q-сторонней свертки // Алгебра и анализ — 2022. — Том 34 — №4

[61] Саранчук Ю. С. Аппроксимационная теорема для однородного уравнения q-сторонней свертки // В сборнике: Педагогический вуз в социокультурном и образовательном пространстве региона. Сборник научных трудов региональной научно-практической конференции, посвященной 25-летию филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани. В 2-х частях. Ответственный редактор М.Ю. Беляева. 2020. С. 224-228.

[62] Саранчук Ю. С., Татаркин А. А. Об одном обобщении оператора сдвига // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2021. – № 3(211). – С. 32-36

[63] Татаркин А. А. О плотности многочленов в специальном пространстве целых функций экспоненциального типа / А. А. Татаркин // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2021. – № 2(210). – С. 34-41.

[64] Ткаченко В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // Матем. сб. – 1980. – Т. 112(154). №3(7). – С. 421-466.

[65] Ткаченко В. А. Спектральные разложения в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1979. – Т. 43. № 3. – С. 654-713.

[66] Хабибуллин Б. Н. Замкнутые идеалы голоморфных функций с двумя порождающими // Матем. зам. — 2004. — Т. 76, № 4. — С. 604–609.

[67] Хабибуллин Б. Н. Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38, № 1. — С. 65–80.

[68] Хабибуллин Б. Н. Спектральный синтез для пересечения инвариантных подпространств голоморфных функций // Матем. сб. — 2005. — Т. 196, № 3. — С. 119–142.

[69] Чернышев А. Н. Спектральный синтез для дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами: дис. канд. физ.- мат. наук: 01.01.01 / Чернышев Андрей Николаевич. — Армавир, 2004. — 100 с.

[70] Шамоян Ф.А. О замкнутых идеалах в одной алгебре быстро растущих аналитических функций // Изв. АН Арм. ССР. Сер. «Математика». — 1969. — Т. 4, № 4. — С. 267–277.

[71] Шишкин А. Б. Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. — 1989. Т. 46, № 6. — С. 94–100.

[72] Шишкин А. Б. О непрерывных эндоморфизмах целых функций // Мат. сб. 212 (2021), №4, 131–158.

[73] Шишкин А. Б. Обильность главных $C[\pi]$-подмодулей // Изв. вузов Сев.- Кавк. регион. Естеств. науки. — 2009. — № 3. — С. 34 – 38.

[74] Шишкин А. Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 47-65.

[75] Шишкин А. Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Спектральный синтез и локальное описание аналитических функций. – Славянск-на-Кубани : Издательский центр филиала ФГБОУ ВПО «КубГУ», 2013. – 304 с.

[76] Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной // Матем. сб. – 1991. – Т. 182, № 6. – С. 828-848.

[77] Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Матем. сб. – 1998. – Т. 189, № 9. – С. 143-160.

[78] Шишкин А. Б. Экспоненциальный синез в ядре оператора симметричной свертки // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2016. – Т. 447. – С. 129-170.

[79] Юлмухаметов Р. С. Спектральный синтез в ядре оператора свёртки в весовых пространствах // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 264–279.