

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Бигириндави Даниэль

**Усреднение многоточечных
краевых задач для дифференциальных уравнений
с большими быстро осциллирующими слагаемыми**

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет».

Научный руководитель: **Левенштам Валерий Борисович**,
доктор физико-математических наук,
доцент, ФГАОУ ВО «Южный федеральный
университет»

Официальные оппоненты: **Мирзоев Карахан Агахан оглы**,
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Москва»

Бутерин Сергей Александрович,
кандидат физико-математических наук,
доцент, ФГБОУ ВО «Саратовский
национальный исследовательский
государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов»

Защита состоится «14» мая 2024 г. в 16-00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю.А.Жданова Южного федерального университета по адресу 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21ж, и на сайте ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1326410/>

Автореферат разослан «___» _____ 2024г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

кандидат физико-математических наук



Кряквин В.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Многоточечные краевые задачи имеют глубокую физическую, биологическую, экономическую, инженерную и иную подоплеку. К изучению таких задач приводят исследования многих вопросов автоматического регулирования, теории колебаний, строительной механики, прикладной математики, математической физики и т.д. Этим объясняется актуальность развития теории метода усреднения, который связывают обычно с именами Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова, для многоточечных краевых задач.

Обзор литературы. Классическая теория метода усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений была создана в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова^{1, 2, 3}. Эта теория получила затем дальнейшее развитие для различных новых классов обыкновенных дифференциальных уравнений^{4, 5}, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений⁶, уравнений в частных производных^{7, 8} и др.

Тема настоящей диссертационной работы относится к первому из этих направлений. Она посвящена развитию теории метода усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми в случае многоточечных краевых условий. Отдельно рассмотрены случаи наличия в уравнениях слагаемых, пропорциональных определенным положительным степеням высокой частоты осцилляций.

Метод усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений разработан с большой полнотой в случае задачи Коши и некоторых иных задач.

¹Крылов, Н. М. Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — Киев.: Изд-во. АН УССР, 1937. — 353 с.

²Боголюбов, Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике/Н. Н. Боголюбов// Сб. ин-та строит. мех, АН УССР. — 1950. — Т. 14. — С. 9–34.

³Боголюбов, Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике/ Н. Н. Боголюбов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945. — 139 с.

⁴Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — Москва: Наука, 1974. — 503 с.

⁵Волосов, В. М. Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. — М.: изд-во. МГУ, 1971. — 507 с.

⁶Филатов, А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях /А. Н. Филатов. — Ташкент: Фан. АН УзССР. Ин-т кибернетики с ВЦ, 1971. — 279 с.

⁷Митропольский, Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. — К.: Наукова думка, 1971. — 440 С.

⁸Симоненко, И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости / И. Б. Симоненко. — Ростов-н.Д.: Изд-во. РГУ, 1989. — 112 с.

Результатов в случае многоточечных краевых задач значительно меньше. Отметим две работы, предшествовавшие нашим исследованиям: ⁹ (двухточечная краевая задача) и ¹⁰ (многоточечная краевая задача). В диссертации изучается иная, тоже классическая, двухточечная краевая задача, а также многоточечная краевая задача в иной, нежели ¹⁰, ситуации. Отметим, что в работе ¹⁰ постулируется существование решения не только усредненной задачи—это традиционное требование в теории метода усреднения, но и существование решения значительно более сложной возмущенной задачи. Кроме того, большие слагаемые в работе ¹⁰ не рассматривались. Результаты диссертационной работы, как и результаты ⁹, опираются на классическую теорему о неявной функции в банаховом пространстве. Этот подход в теории метода усреднения впервые применил, по-видимому, И.Б.Симоненко⁸ при обосновании этого метода для абстрактных параболических уравнений в случае задачи Коши и задачи о периодических по времени решениях. В работе ¹⁰, в отличие от этого, используется классическая лемма Гронуолла. Отметим еще, что изучение усреднения систем с высокочастотными слагаемыми, пропорциональными определенным положительным степеням частоты осцилляций ω , ранее проводилось в работах В.И. Юдовича в случае задачи Коши, т.е. для одноточечной задачи ¹¹.

Цель работы. Цель работы состоит в обосновании метода усреднения в случае двухточечных и многоточечных краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми, среди которых могут быть большие - пропорциональные определенным положительным степеням частоты осцилляции. Под обоснованием понимается установление разрешимости возмущенной задачи и доказательство асимптотической близости решений возмущенной и усредненной задач в пространстве Гельдера вектор-функций, определенных на конечном отрезке.

Области исследований. Диссертация соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

⁹Левенштам, В. Б. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями / В. Б. Левенштам, П. Е. Шубин // Матем. заметки. — 2016. — Том 100, выпуск 1. — С. 94—108.

¹⁰Константинов, М. М. О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам / М. М. Константинов, Д. Д. Байнов // BULL.MATH.de la Soc.Sci.Math. de la R.S.de la Roumanie. — 1974. — Том 18(66), номер 3/4. — С. 307—310.

¹¹Юдович, В. И. Вибродинамика систем со связями / В. И. Юдович // Докл. РАН. — 1997. — Т. 354, № 5. — С. 622—624.

1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

6. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

10. Теория дифференциально-операторных уравнений.

12. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

Методы исследования. В данной диссертационной работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и классической теории метода усреднения.

Научная новизна и основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие новые результаты для нелинейных дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми:

- 1) обоснован метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями (краевые задачи) и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями;
- 2) метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций;
- 3) обоснован метод усреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с многоточечными (число точек не менее двух) краевыми условиями и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями;
- 4) метод усреднения обоснован для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций;
- 5) обоснован метод усреднения для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными степени $\frac{3}{4}$ частоты.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в данной диссертационной работе, носят, прежде всего, теоретический

характер. Однако они имеют и практическое значение, поскольку могут быть использованы при решении конкретных задач для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными и многоточечными краевыми условиями и с большими слагаемыми. Два иллюстративных примера решены непосредственно в диссертации.

Степень достоверности и апробация результатов. В диссертации применялись математически обоснованные методы теории дифференциальных уравнений. Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

- 1) XXXI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2020) по спектральным и эволюционным задачам.
- 2) Международная Воронежская весенняя математическая школа (ВВМШ-2021) «Современные методы теории краевых задач», посвященная памяти профессора Александра Дмитриевича Баева.
- 3) Международная научная конференция «Современные проблемы математики и физики», посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б.Сабитова.
- 4) Объединенный научный семинар по анализу и дифференциальным уравнениям Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ (мехмат)

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 7 научных публикациях [1–7]. Статьи [1, 2, 3, 4] входят в перечень научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций, защищаемых в диссертационном совете ЮФУ 801.01.02. Статьи [3, 4] опубликованы в журналах, индексируемых в базе данных Scopus. Публикации [5, 6, 7] содержатся в других сборниках научных трудов. Работы [2, 3, 4, 5, 7] выполнены совместно с научным руководителем В. Б. Левенштамом. В них ему принадлежат постановки задач и общее руководство работой. Д. Бигириндави совместно с В. Б. Левенштамом принадлежит выбор методик исследований. Д. Бигириндави принадлежит реализация методик.

Благодарности. Прежде всего, я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя доктора физико-математических наук В.Б.Левенштама за доверие, которое он оказал мне, согласившись руководить этой диссертационной

работой, за его многочисленные советы и за все время, которое он посвятил руководству этим исследованием.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, заключения и библиографии, содержащей 66 наименований. Объем диссертационной работы - 132 страниц.

Содержание работы

Во **введении** излагается общая характеристика работы и приводятся основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена обоснованию метода уреднения для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с краевыми условиями (двухточечная краевая задача).

В **первом параграфе** рассмотрена задача отыскания решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $0 \leq t \leq T$, в которой (в отличие от задачи Коши) дополнительные условия на решение задаются в двух точках: $t = 0$ и $t = T$. Сформируем полученный результат.

Пусть $\Gamma = \{(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]\}$ и $\Pi = \{(x, t, \tau), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], \tau \in [0, \infty)\}$. На отрезке $t \in [0, T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, t) + \varphi(x, t, \omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь A и B – квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $F(x, t)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ вектор-функции, определенные на множествах Γ и Π соответственно, со значениями в $\mathbb{R}^n$ и для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяющие следующим условиям.

1. Вектор-функции $F(x, t)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ вместе с их производными по x непрерывны на множествах $\Omega \times [0, T]$ и $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}_+$ соответственно.
2. Вектор-функция $\varphi(x, t, \tau)$ имеет нулевое среднее по τ , то есть равномерно относительно $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ выполняется предельное равенство

$$\langle \varphi(x, t, \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x, t, \tau) d\tau = 0.$$

3. Вектор-функция $\varphi(x, t, \tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}_+$.
4. Матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x , то есть существует такая постоянная L , что при всех $x, y \in \Omega$, $t \in [0, T]$ и $\tau \in [0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(y, t) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right\| \leq L|y - x|,$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y, t, \tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) \right\| \leq L|y - x|.$$

Здесь и ниже символами $|x|$ и $\|A\|$ обозначены нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и квадратной матрицы A порядка n , удовлетворяющие условию согласования: $|Ax| \leq \|A\||x|$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Можно, например, далее считать, что $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, где x_i и a_{ij} – компоненты вектора x и элементы матрицы A соответственно.

5. Вектор-функции $\varphi(x, t, \tau)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$ на множестве $G = \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}_+$ удовлетворяют равномерному условию Гельдера по t , то есть существуют такие положительные константы $L, \mu \in (0, 1)$, что для любых $(x, t_1, \tau), (x, t_2, \tau) \in G$

$$|\varphi(x, t_1, \tau) - \varphi(x, t_2, \tau)| \leq L|t_1 - t_2|^\mu,$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t_1, \tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t_2, \tau) \right\| \leq L|t_1 - t_2|^\mu.$$

6. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(y, t) \\ Ay(0) + By(T) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем предполагать, что задача (2) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$ при $t \in [0, T]$, которое вместе с некоторой $\rho(> 0)$ – окрестностью лежит в Ω , то есть при каждом $t \in [0, T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ .

7. Введем обозначение : $L(t) = F'_y(\overset{\circ}{y}(t), t)$ и пусть $\Phi(t)$ –матрицант ¹² системы

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x. \quad (3)$$

Будем предполагать, что имеет место соотношение :

$$\Delta = \det [A + B\Phi(T)] \neq 0. \quad (4)$$

В данной диссертационной работе нам понадобится известное банахово пространство $C_\mu([0, T])$, $\mu \in (0, 1)$, то есть пространство непрерывных вектор-функций $w : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($w \in C([0, T])$), удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ :

$$\|w\|_{C_\mu([0, T])} = \max_{0 \leq t \leq T} |w(t)| + \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{|w(t_2) - w(t_1)|}{(t_2 - t_1)^\mu} < \infty.$$

Теорема 1 При $\mu \in (0, 1)$ существует $\omega_0 > 0$ такое, что в некоторой $C_\mu([0, T])$ –окрестности вектор-функции $\overset{\circ}{y}(t)$ задача (1) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)\|_{C_\mu([0, T])} = 0.$$

Заметим, что краевые задачи вида (1) без связи с методом усреднения исследовались, например, в ¹³.

Во втором параграфе первой главы осуществлено обоснование метода усреднения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций и двухточечными краевыми условиями. В этом параграфе рассмотрен случай, когда большое слагаемое финитно по быстрой переменной τ (простейший случай).

В третьем параграфе первой главы сформулирована следующая теорема об усреднении высокочастотных систем ОДУ с большими слагаемыми (основной случай) . Она является частным случаем теоремы, доказанной во втором параграфе главы 2.

¹²Напомним, что матрицантом системы (3) называется её фундаментальная система решения $\Phi(t)$, нормированная в точке $t = 0$, то есть $\Phi(0) = E$.

¹³Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений/ Ю. Н. Бибииков. — Москва: Высшая школа, Учеб.пособие для университетов, 1991. — 303 с.

Пусть Ω -ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in [0, T]\}$ и $Q = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in D, \tau \in [0, \infty)\}$. Рассмотрим краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \varphi(x, t, \omega t), t \in [0, T] \\ Ax(0) + Bx(T) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь A и B – квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами. Вектор-функции $f(x, t, \tau)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ определены на множестве Q , принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x, t, \tau)$, $\varphi(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t, \tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$ определены и непрерывны на множестве Q .
2. Вектор-функция $\varphi(x, t, \tau)$ – 2π -периодична по τ с нулевым средним, то есть справедливо равенство

$$\langle \varphi(x, t, \tau) \rangle_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x, t, \tau) d\tau = 0.$$

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x, t, \tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) \left[\int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds \right\rangle_\tau \right],$$

которая в силу условий 1,2 вместе с производной $\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, t, \tau)$ определена и непрерывна на множестве Q .

Для любых точек (x, t_1, τ) и $(x, t_2, \tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|z(x, t_2, \tau) - z(x, t_1, \tau)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$, а $\gamma(r)$, $r \geq 0$, –непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

4. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на множестве Q .

5. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x , то есть существует такая постоянная L , что при всех $x, y \in \Omega$, $t \in [0, T]$ и $\tau \in [0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\|z(y, t, \tau) - z(x, t, \tau)\| \leq L|y - x|,$$

где $z = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

6. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ имеет равномерное среднее по τ , а потому существует вектор-функция $\Psi(x, t)$, определенная на D , со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x, t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x, t, \tau) + \chi(x, t, \tau)) d\tau = \Psi(x, t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x , мы получим также равномерное относительно $(x, t) \in D$ предельное равенство.

7. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi, t), t \in [0, T] \\ A\xi(0) + B\xi(T) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Будем считать, что задача (6) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0, T]$, и существует¹⁴ такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω , что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0, T]$.

8. Справедливо соотношение:

$$\Delta = \det [A + B\Phi(T)] \neq 0$$

где $\Phi(t)$ – матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\overset{o}{\xi}, t) \right] x.$$

¹⁴Достаточно предполагать лишь, что решение лежит в Ω , Предположение о существовании указанной подобласти Ω_0 не является принципиальным, а принято лишь для упрощения доказательства.

Теорема 2 Для любого $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (5) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0, T])$ -окрестности вектор-функции $\overset{o}{\xi}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)\|_{C_\mu([0, T])} = 0$.

Во второй главе метод усреднения обоснован для нормальных систем нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми и многоточечными краевыми условиями (для любого числа точек m , не меньшего 2) на конечном отрезке.

В первом параграфе большие слагаемые не рассматриваются. Сформируем полученный результат.

Пусть Ω -область пространства $\mathbb{R}^n$ ¹⁵, $T > 0$, $\Pi = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in [0, T]\}$ и $Q = \{(x, t, \tau) : x \in \Omega, t \in [0, T], \tau \in [0, \infty)\}$. На множестве Π рассмотрим m -точечную краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) \\ \sum_{k=1}^m A_k(\omega)x(t_k) = a(\omega) \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\omega \gg 1$, $A_k(\omega)$ -постоянные квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \dots < t_k = T$, ($k \in \mathbb{N}$), $a(\omega)$ - постоянный n -мерный вектор с вещественными компонентами. Пусть $f(x, t, \tau)$ вектор-функция, определенная на множестве Q со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая следующим условиям

1. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ вместе с ее первыми частными производными по x непрерывна на множестве Q . Соответствующую матрицу Якоби будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$.
2. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ и матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на Q .
3. Для любых $(x, t_1, \tau), (x, t_2, \tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|f(x, t_2, \tau) - f(x, t_1, \tau)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

¹⁵В качестве Ω может выступать любая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая строго внутри себя решение $\overset{o}{y}(t)$ усредненной задачи (см. условие 9)

$$\left\| \frac{\partial f(x, t_2, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, t_1, \tau)}{\partial x} \right\| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $\gamma(r)$, $r \geq 0$ – непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

4. Существует вектор-функция $F(x, t)$, определенная на множестве Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x, t) \in \Pi$ справедливо предельное равенство:

$$\langle f(x, t, \tau) \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, \tau) d\tau = F(x, t). \quad (8)$$

5. Будем считать, что наряду с равенством (8) справедливо равенство

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau) \right\rangle \equiv \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau) d\tau = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t). \quad (9)$$

6. Существует постоянный n -мерный вектор a_0 , для которого справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |a(\omega) - a_0| = 0.$$

7. Существуют квадратные матрицы B_k , порядка n , для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \|A_k(\omega) - B_k\| = 0.$$

8. Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(y, t) \\ \sum_{k=1}^m B_k y(t_k) = a_0 \end{cases} \quad (10)$$

9. Будем предполагать, что задача (10) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$, $t \in [0, T]$, которое вместе с некоторой $\rho(> 0)$ -окрестностью лежит в Ω , то есть при каждом $t \in [0, T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ .

Символом $\Phi(t)$, $t \in [0, T]$, обозначим матрицант системы в вариациях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(\overset{\circ}{y}(t), t)x. \quad (11)$$

10. Пусть справедливо соотношение:

$$\Delta = \det \left[\sum_{k=1}^m B_k \Phi(t_k) \right] \neq 0.$$

Теорема 3 Для любого $\mu \in (0, 1)$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (7) при $\omega > \omega_0$ в некоторой $C_\mu([0, T])$ -окрестности вектор-функции $\overset{\circ}{y}(t)$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)\|_{C_\mu([0, T])} = 0$.

Во втором параграфе метод усреднения обоснован для нормальных систем дифференциальных уравнений, содержащих большие слагаемые.

Пусть Ω -ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in [0, T]\}$ и $Q = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in D, \tau \in [0, \infty)\}$. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \varphi(x, t, \omega t), t \in [0, T] \\ \sum_{i=1}^m P_i(\omega) x(t_i) = a(\omega). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь m и n натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i = 1, \dots, m$, —квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \dots < t_m = T$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x, t, \tau)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ определены на множестве Q , принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x, t, \tau)$, $\varphi(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t, \tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$ определены и непрерывны на множестве Q .

Здесь $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$ —якобиева матрица, то есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) = \left(\frac{\partial \varphi_i(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau) = \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}(x, t, \tau) \right)_{k,i,j=1}^n \text{—матрица}$$

размера $n \times n^2$, где k —номер строки.

2. Вектор-функция $\varphi(x, t, \tau) - 2\pi$ – периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть выполняется предельное равенство

$$\langle \varphi(x, t, \tau) \rangle_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x, t, \tau) d\tau = 0.$$

3. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x, t, \tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) \left[\int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds \right\rangle_\tau \right],$$

которая в силу условий 1,2 вместе с производной $\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, t, \tau)$ определена и непрерывна на множестве Q .

Пусть для любых двух точек (x, t_1, τ) и $(x, t_2, \tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|z(x, t_2, \tau) - z(x, t_1, \tau)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$, а $\gamma(r)$, $r \geq 0$, – непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

4. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на множестве Q .
5. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x .
6. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ имеет равномерное среднее по τ , а потому существует вектор-функция $\Psi(x, t)$, определенная на D , со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x, t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x, t, \tau) + \chi(x, t, \tau)) d\tau = \Psi(x, t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x , мы получим также равномерное относительно $(x, t) \in D$ предельное равенство.

7. Для некоторых квадратных матриц S_i , $0 \leq i \leq m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega) - S_i\| \rightarrow 0$, $|a(\omega) - a_0| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi, t), t \in [0, T], \\ \sum_{i=1}^m S_i \xi(t_i) = a_0 \end{cases} \quad (13)$$

8. Будем предполагать, что задача (13) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0, T]$, и существует такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω , что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0, T]$.

9. Справедливо соотношение:

$$\Delta = \det \left[\sum_{i=1}^m S_i \Phi(t_i) \right] \neq 0$$

где $\Phi(t)$ –матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\overset{o}{\xi}, t) \right] x.$$

Теорема 4 Для любого $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (12) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0, T])$ –окрестности вектор-функции $\overset{o}{\xi}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)\|_{C_\mu([0, T])} = 0$.

В третьем параграфе второй главы приведены иллюстративные примеры для двухточечной и многоточечной краевых задач.

В третьей главе метод усреднения обоснован для систем ОДУ при наличии в них слагаемых вида $\omega^\alpha \varphi(x, t, \omega t)$, где $\alpha = \frac{3}{4}$.

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in [0, T]\}$ и $Q = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in D, \tau \in [0, \infty)\}$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) + \omega^{\frac{3}{4}} \varphi(x, t, \omega t), t \in [0, T] \\ \sum_{i=1}^m P_i(\omega) x(t_i) = a(\omega). \end{cases} \quad (14)$$

Здесь m и n натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i = 1, \dots, m$, – квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \dots < t_m = T$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x, t, \tau)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ определены на множестве Q , принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f(x, t, \tau)$, $\varphi(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t, \tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x, t, \tau)$ определены и непрерывны на множестве Q .

Здесь $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$ – якобиева матрица, то есть

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) = \left(\frac{\partial \varphi_i(x, t, \tau)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau) = \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}(x, t, \tau) \right)_{k,i,j=1}^n$ – матрица размера $n \times n^2$, где k – номер строки.

2. Вектор-функция $\varphi(x, t, \tau)$ – 2π – периодична по τ с нулевым средним по периоду, то есть

$$\langle \varphi(x, t, \tau) \rangle_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x, t, \tau) d\tau = 0. \quad (15)$$

3. Будем считать, что наряду с равенством (15) справедливо равенство

$$\left\langle \frac{\partial \varphi(x, t, \tau)}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, t, \tau)}{\partial x} d\tau = 0. \quad (16)$$

4. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x, t, \tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) \left[\int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds \right\rangle_\tau \right].$$

Вектор-функции $\chi(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \chi}{\partial t}(x, t, \tau)$ и матрица-функции ,

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, t, \tau), \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x}(x, t, \tau), \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$$

определены и непрерывны на множестве Q .

5. Будем предполагать, что вектор-функция $\chi(x, t, \tau)$ имеет нулевое среднее, то есть

$$\langle \chi(x, t, \tau) \rangle_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(x, t, \tau) d\tau = 0. \quad (17)$$

6. Будем считать, что наряду с равенством (17) справедливо равенство

$$\left\langle \frac{\partial \chi(x, t, \tau)}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \chi(x, t, \tau)}{\partial x} d\tau = 0. \quad (18)$$

Далее определим вектор-функцию

$$\Theta(x, t, \tau) \equiv \frac{\partial \chi}{\partial x}(x, t, \tau) \left[\int_0^\tau \chi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \chi(x, t, s) ds \right\rangle_\tau \right].$$

7. Пусть для любых точек (x, t_1, τ) и $(x, t_2, \tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|z(x, t_2, \tau) - z(x, t_1, \tau)| \leq \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$, а $\gamma(r)$, $r \geq 0$, —непрерывная в нуле функция, такая что $\gamma(0) = 0$.

8. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на множестве Q .

9. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t}(x, t, \tau)$ и $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(x, t, \tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x .

10. Вектор-функция $f(x, t, \tau)$ имеет равномерное среднее по τ , а потому существует вектор-функция $\Psi(x, t)$, определенная на D , со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x, t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x, t, \tau) + \Theta(x, t, \tau)) d\tau = \Psi(x, t). \quad (19)$$

11. Мы будем считать, что наряду с равенством (19) справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f(x, t, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial \Theta(x, t, \tau)}{\partial x} \right) d\tau = \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}.$$

12. Для некоторых квадратных матриц S_i , $0 \leq i \leq m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega) - S_i\| \rightarrow 0$, $|a(\omega) - a_0| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

13. Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi, t), t \in [0, T], \\ \sum_{i=1}^m S_i \xi(t_i) = a_0 \end{cases} \quad (20)$$

14. Мы будем считать, что задача (20) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0, T]$, и существует такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω , что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0, T]$.

15. Справедливо соотношение:

$$\Delta = \det \left[\sum_{i=1}^m S_i \Phi(t_i) \right] \neq 0$$

где $\Phi(t)$ –матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\overset{o}{\xi}, t) \right] x.$$

Теорема 5 Для любого $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (14) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0, T])$ –окрестности вектор-функции $\overset{o}{\xi}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)\|_{C_\mu([0, T])} = 0$.

В заключении приведены основные результаты работы.

1. Метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями (краевые задачи) и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями.
2. Метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с двухточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций.

3. Метод усреднения обоснован для нелинейных высокочастотных систем ОДУ с многоточечными (число точек не менее двух) условиями и равномерно ограниченными с ростом частоты осцилляций правыми частями.
4. Метод усреднения обоснован для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями и большими слагаемыми, пропорциональными корню квадратному из частоты осцилляций.
5. Метод усреднения обоснован для высокочастотных систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями, содержащих большие слагаемые, пропорциональные степени $\frac{3}{4}$ частоты.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня изданий совета ЮФУ801.01.02 и перечня ВАК, баз Scopus

1. Бигириндавыи, Д. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями / Д. Бигириндавыи // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2022. – № 3. – С. 41-56.
2. Бигириндавыи, Д. Обоснование принципа усреднения для системы быстро осциллирующих ОДУ с краевыми условиями / Д. Бигириндавыи, В. Б. Левенштам // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 1. – С. 31-37.
3. Bigirindavyi, D. Averaging for a high-frequency normal system of ordinary differential equations with multipoint boundary value problems / D. Bigirindavyi, V. B. Levenshtam // Siberian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 64, №3. – P. 737-746. – <https://doi.org/10.1134/S0037446623030229>.
4. Bigirindavyi, D. Justification of the Averaging Method for a System with Multipoint Boundary Value Conditions / D. Bigirindavyi, V. B. Levenshtam // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2021. – Vol. 357. – P. 137-142. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-77493-6_8.

статьи, опубликованные в прочих изданиях

5. Бигириндавыи, Д. Метод усреднения для нормальной системы ОДУ с краевыми условиями / Д. Бигириндавыи, В. Б. Левенштам //

Вестник молодёжной науки России. – 2019.– № 4. – Режим доступа: https://07992ba4-dcc8-4e97-a627-2ff245129607.filesusr.com/ugd/96814c_fe263013d7af4a4bb440c06c2685b856.pdf (дата обращения 24.01.2024)

В сборниках трудов конференций

6. Бигириндавыи, Д. Обоснование принципа усреднения для системы быстро осциллирующих оду с краевыми условиями / Д. Бигириндавыи // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 : XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам : конференция посвящена памяти Николая Дмитриевича Копачевского, Батилиман (Ласпи), Российская Федерация, 19-27 сентября 2020 г. – Симферополь : Полипринт, 2020. – С. 93-94.
7. Бигириндавыи, Д. Усреднение дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями / Д. Бигириндавыи, В. Б. Левенштам // Современные проблемы математики и физики : материалы международной научной конференции (г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021 г. : [в 2 т.]. Т. 1. – УФА : РИЦ БашГУ, 2021. – С. 126-129. – Режим доступа: http://konf.strbsu.ru/files/Tom_1.pdf (дата обращения 24.01.2024)