

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи



Титова Дарья Евгеньевна

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ
ГИРОСКОПАХ И ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ**

Специальность 2.2.14. Антенны, СВЧ устройства и их технологии

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель –
доктор технических наук, профессор
Юханов Юрий Владимирович

ТАГАНРОГ 2023

Я хотела бы выразить признательность и почтение моему первому учителю, научному руководителю, доктору технических наук, профессору Борису Михайловичу Петрову, который ушел из жизни в марте 2021 года. Петров Б.М. внес крупный вклад в развитие теоретической и прикладной электродинамики, в том числе в построение строгой теории преобразования спектра электромагнитного поля во вращающихся системах отсчета. Именно Борис Михайлович познакомил меня с интересным миром электродинамики вращающихся объектов, будучи моим наставником и соавтором работ в этой области. Полученные в диссертации результаты состоялись во многом благодаря ему и являются продолжением разработанной им теории «Прикладная электродинамика при вращении».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. УСТРОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ В РАДИОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ	23
1.1 Решение задач электродинамики во вращающихся системах отсчета	23
1.2 Измерение частоты вращения в радиочастотном диапазоне	27
1.3 Выводы	30
2 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ	32
2.1 Постановка общей задачи.....	32
2.2 Решение общей задачи.....	35
2.3 Частное решение задачи возбуждения волновода с идеально проводящими стенками	39
2.4 Частное решение граничной задачи с импедансными граничными условиями	40
2.4.1 Импедансные граничные условия. E -поле	41
2.4.2 Импедансные граничные условия. H -поле	42
2.5 Анализ полученного решения. Эффект расщепления частот	44
2.6 Численные результаты.....	47
2.6.1 Возбуждение вращающегося волновода элементарным электрическим вибратором	47
2.6.2 Частотная характеристика вращающегося цилиндрического волновода.....	48
2.6.3 Критические частоты вращающегося цилиндрического волновода.....	50
2.7 Выводы.....	55
3 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ.....	57
3.1 Постановка и решение общей задачи.....	57
3.2 Частное решение задачи возбуждения резонатора с идеально проводящими стенками	59
3.3 Анализ полученного решения. Эффект расщепления частот	61
3.4 Численные результаты.....	64
3.4.1 Частотная характеристика вращающегося цилиндрического резонатора.....	64
3.4.2 Численные результаты при $\Omega = 0$. Проверка решения	65
3.4.3 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Эффект расщепления частот	67
3.4.4 Измерение частоты вращения. Параметры гироскопов	76
3.5 Выводы.....	78

4 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ	80
4.1 Постановка и решение общей задачи.....	80
4.1.1 Постановка общей задачи.....	80
4.1.2 Решение общей задачи.....	83
4.2 Частное решение задачи возбуждения резонатора с идеально проводящими стенками	86
4.3 Частное решение граничной задачи с импедансными граничными условиями	87
4.3.1 Импедансные граничные условия	87
4.3.2 Решение граничной задачи с импедансными граничными условиями.....	90
4.4 Анализ полученного решения. Измерение частоты вращения.....	91
4.5 Численные результаты.....	93
4.5.1 Возбуждение вращающегося резонатора элементарным электрическим вибратором	93
4.5.2 Частотная характеристика вращающегося сферического резонатора	94
4.5.3 Численные результаты при $\Omega = 0$. Проверка решения	95
4.5.4 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Эффект расщепления частот	97
4.5.5 Измерение частоты вращения. Параметры гироскопов	108
4.6 Численные результаты при сверхпроводящих стенках резонатора.....	111
4.6.1 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Измерение частоты вращения	114
4.7 Выводы.....	117
5 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ПРОСТРАНСТВОМ МЕЖДУ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ШАРОМ И СФЕРОЙ.....	119
5.1 Постановка и общее решение задачи	119
5.2 Частное решение задачи возбуждения концентрического сферического резонатора с идеально проводящими стенками	121
5.2.1 Граничные условия на идеально проводящих стенках полости.....	122
5.2.2 Решение граничной задачи.....	122
5.3 Частное решение граничной задачи с импедансными граничными условиями	123
5.3.1 Импедансные граничные условия на стенках полости	123
5.3.2 Решение граничной задачи с импедансными граничными условиями.....	125
5.4 Собственные значения. Резонансные частоты	127
5.5 Численные результаты.....	128
5.5.1 Возбуждение вращающегося концентрического сферического резонатора элементарным электрическим вибратором	128

5.5.2	Частотные характеристики и добротности вращающегося концентрического сферического резонатора	129
5.5.3	Численные результаты при $\Omega = 0$. Проверка решения	129
5.5.4	Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Эффект расщепления частот	131
5.5.5	Измерение частоты вращения. Параметры гироскопов	140
5.6	Выводы	142
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		144
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ		148
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		149
ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРАМИ И ГИРОСКОПАМИ		167
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. УСТРОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ		172
Б.1	МЭМС-устройства измерения частоты вращения	172
Б.2	Оптические устройства измерения частоты вращения	177
Б.2.1	Воконно-оптические гироскопы	177
Б.2.2	Кольцевые лазерные гироскопы	181
Б.2.3	Оптоэлектронные гироскопы	186
Б.3	Новые методы измерения частоты вращения.....	189
ПРИЛОЖЕНИЕ В. АКТЫ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ		191

ВВЕДЕНИЕ

Определение своего положения относительно других объектов в мире, следование выбранному пути и сохранение ориентира несмотря на турбулентности – одна из самых важных и сложных задач как в жизни общества, так и в жизни отдельного человека. В материальном (физическом) мире с этой задачей на разных уровнях нам помогают справляться навигационные системы.

Сегодня навигационные системы находят все более широкое применение в самых различных областях жизни: и в грандиозных исследовательских проектах, и в самых распространенных потребительских устройствах ежедневного пользования. Приборы и оборудование для измерения положения объектов, их скорости и других параметров движения можно встретить на космической станции [1], воздушном или морском транспорте [2], в мобильных телефонах или наручных электронных часах [3]. Появление новых технологий, таких как беспилотные аппараты, устройства дополненной реальности, IoT (Internet of Things) и IoE (Internet of Everything) невозможно вообразить без навигационных устройств [4]. Сложность возможных траекторий и паттернов движения, а также невозможность обеспечения непрерывного доступа к системам GPS и ГЛОНАСС требует от навигационных систем не только определения местоположения объекта и его скорости, но также измерения угловой частоты вращения объектов, на которые они (навигационные устройства) установлены. Поэтому обязательной частью многих навигационных систем являются средства измерения частоты (скорости) вращения и инерциальной навигации – гироскопы.

Гироскопом называется устройство, способное реагировать на изменение углов ориентации тела, на котором оно установлено, относительно инерциальной системы отсчета. Помимо перечисленных выше навигационных целей, они используются в геодезии, сейсмологии [5], экспериментах по проверке постулатов общей теории относительности [6], а в последние десятилетия появились и такие области применения, как робототехника, медицинские инструменты, локальная навигация, навигация при чрезвычайных ситуациях (пожары и иная плохая видимость [7]) и даже творчество (в ручках для графических планшетов). Принципы построения гироскопов настолько же многочисленны и разнообразны, как и области их применения и охватывают такие разделы физики, как оптика, механика, электроника, микрофлюидика, акустика, квантовая физика, электродинамика и др. [8]. Однако во всех этих областях в большинстве случаев изменение в протекающих процессах под влиянием вращения происходит под действием сил Кориолиса и эффекта Саньяка (который часто связывают с эффектом действия сил Кориолиса [9], [10], [11], [12], [13]). Из существующих в настоящее время устройств измерения частоты вращения эффект действия силы Кориолиса используется в

основном в микроэлектромеханических (МЭМС) устройствах [2], [14], которые зачастую отличаются маленькими размерами и невысокой точностью, в то время как оптические гироскопы по определению используют эффект Саньяка [15] и показывают высокое разрешение при сравнительно больших размерах.

Стимулируемые высоким спросом на рынке, исследования все новых методов и разработка новых устройств измерения скорости вращения ведутся постоянно [2], [14], [16], [17], [18], [19], [20]. Легко предположить, что в зависимости от функции использующего гироскоп устройства, требования к точности определения его (устройства) положения и скорости вращения могут отличаться. Так, например, когда речь идет о навигационных системах для широкого потребительского сектора, таких как мобильные устройства и транспортные средства, основными предъявляемыми к гироскопам требованиями являются низкая цена и простота изготовления, в то время как высокий уровень чувствительности, разрешения и стабильности не всегда требуется [19]. Но постоянный контроль положения, навигация и системы управления движением и позиционированием в самолетах и космических кораблях требуют, чтобы гироскопы поддерживали ориентацию в полете в случае любой непредвиденной ситуации. Например, измерение параметров углового движения космического аппарата, в который вложены миллионы долларов, часов, идей и надежд, критически важно для контроля и стабилизации его положения, особенно когда аппарату необходимо лететь со скоростью 55 тысяч км/ч за движущейся кометой размером с небольшой поселок, находящейся за 300 миллионов километров от Земли, и через 12 лет спустить на поверхность этой кометы зонд с исследовательским оборудованием [21]. В подобных случаях основное внимание обращено на точность измерения скорости вращения и чувствительность самого навигационного датчика, и высокие показатели этих параметров должны быть достигнуты любой ценой [17].

Таким образом, разработка новых методов и устройств измерения скорости вращения является актуальной и спрос на инерциальные датчики будет расти.

Среди активных игроков на растущем со скоростью 4,8 % в год рынке гироскопов, объемы которого по прогнозам к 2030 году достигнут 4 миллиардов долларов [20], можно выделить таких гигантов, как Robert Bosch GmbH, Analog Devices Inc, STMicroelectronics, Epson America Inc, Silicon Sensing Systems Limited и др. Наряду с ведущими научными группами, компании-разработчики проводят исследования, направленные на улучшение производительности устройств измерения частоты вращения, которая в данной работе помимо точности и чувствительности будет определяться такими характеристиками, как разрешение ($^{\circ}/ч$), динамический диапазон, дрейф нуля ($^{\circ}/ч$), случайное отклонение угла (angle random walk, ARW, $^{\circ}/\sqrt{ч}$), случайный дрейф (нестабильность дрейфа, в иностранной литературе – bias instability, bias

stability, °/ч) [22], [23], [24], [25], [26]. Немаловажными являются и такие параметры, как диапазон рабочих температур (для возможности навигации пожарных в горящем здании [7]), потребляемая мощность, способность выдерживать ускорения разной степени (например, в условиях турбулентности), массогабаритные показатели.

Следует помнить, что у большого грузового танкера на море и у шустрого ребенка в очках виртуальной реальности на суше скорости вращения могут различаться на порядок – и учитывать это при выборе гироскопа с компромиссным сочетанием динамического диапазона, разрешения, чувствительности, точности, размеров и цены. Сводная диаграмма требуемых значений разрешающей способности гироскопов для различных областей применения и устройств измерения частоты вращения, реализующих данные характеристики [27], [28], приведена ниже (Рисунок 1).

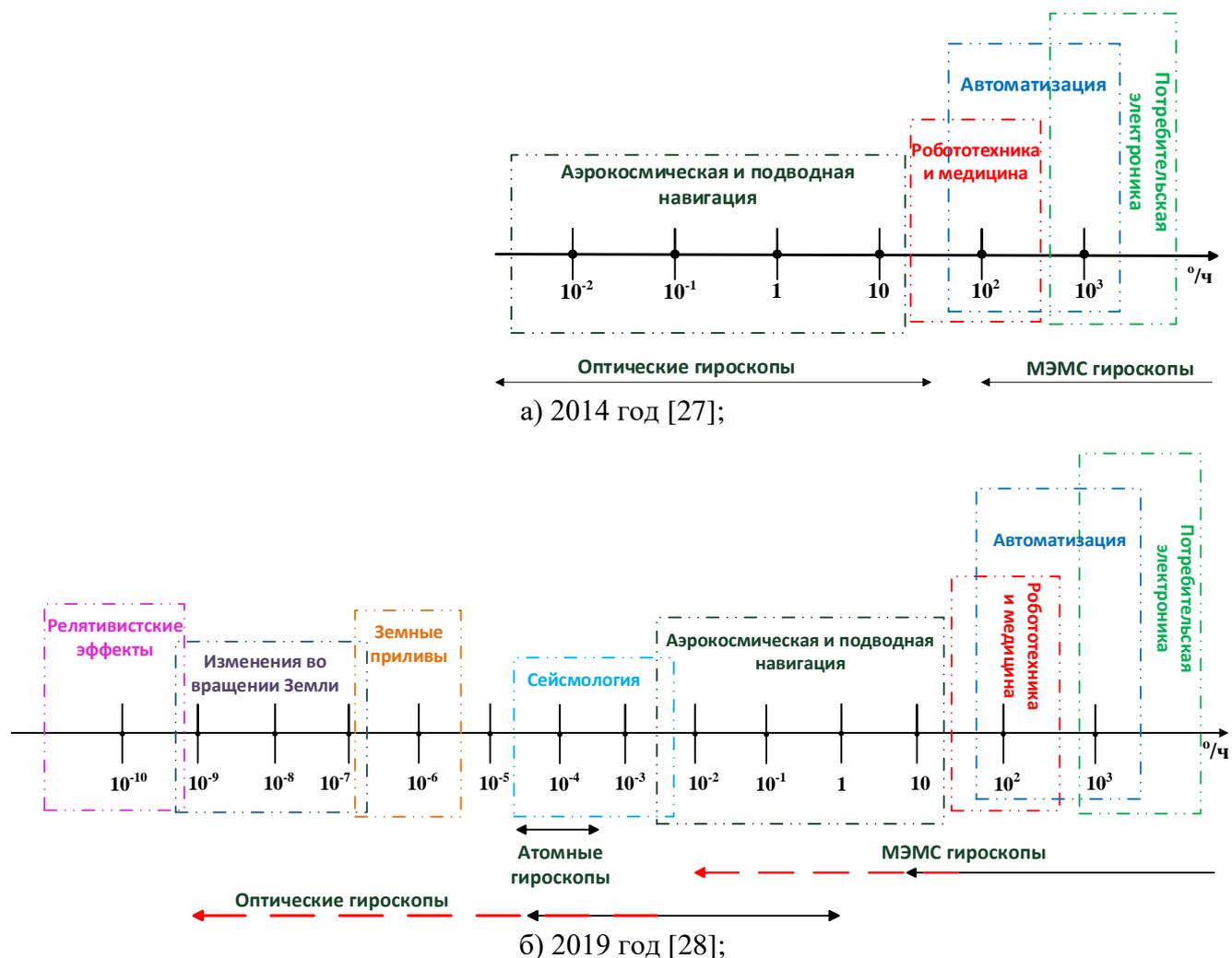


Рисунок 1 – Требуемые разрешения гироскопов в градусах в час (°/ч) для различных областей применения в 2014 году [27], дополненные данными на 2019 год [28]

Уже упомянутые вскользь выше две основные группы устройств измерения частоты вращения – миниатюрные, но не самые точные МЭМС и обладающие высоким разрешением громоздкие оптические гироскопы – всегда соревновались между собой по характеристикам точности и массогабаритным параметрам [29]. И буквально в последние несколько лет благодаря совершенствованию материалов, технологий производства и прогрессу в других смежных областях паритет практически достигнут: МЭМС гироскопы обеспечивают точность (случайный дрейф) до $0,015^\circ/\text{ч}$ [30], [31] (а в теории и до $0,001^\circ/\text{ч}$ [32], [33]), а у оптических гироскопов уже появился прототип размером 2 мм^2 [34], [35]. Рассмотрим ниже основные виды гироскопов и реализуемые ими характеристики.

Как видно из Рисунка 1, появившиеся более полувека назад в связи с повсеместным внедрением интегральных схем МЭМС устройства измерения частоты вращения традиционно доминируют на рынке массового использования гироскопов как обеспечивающие требуемые массогабаритные характеристики, низкий уровень потребляемой энергии и оптимальную стоимость производства [8], [19]. Непрерывный прогресс в различных областях науки, появление новых методов обработки сигналов [36], [37], технологий изготовления МЭМС датчиков [38], [39], новых материалов, новых подходов в проектировании и производстве [39], [40], а также интеграция искусственного интеллекта [41], [42] позволили резко повысить производительность МЭМС гироскопов в последние несколько лет и дали возможность совершать скачки в инновациях, опережающие по скорости закон Мура для полупроводников [43], и постоянно предлагать совершенно новые варианты МЭМС конструкций [44]. Все вышперечисленное позволило интегрировать последние достижения науки и техники в одном устройстве, значительно улучшить технические характеристики вибрационных [45], полусферических [33], дисковых [39] и иных МЭМС датчиков вращения (Приложение Б) до теоретически достижимой величины случайного дрейфа в $0,001^\circ/\text{ч}$ [33] и ARW (случайное отклонение угла) до $0,00016^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ [46] для различных устройств, постепенно переходя от МЭМС к НЭМС [45] технологиям (нанoeлектромеханические системы). Такое распространение МЭМС гироскопов вызвало революцию в играх (в очках виртуальной и дополненной реальности), мобильных телефонах [47] и навигации, устройствах для анализа кинематики движений в спорте [48] и активности людей в повседневной жизни [49]. В свою очередь развитие Интернета вещей в его различных направлениях от умного дома до безопасности передвижения в беспилотных автомобилях в настоящее время требует разработки датчиков скорости вращения новых поколений с улучшенными характеристиками: все меньшими размерами и затратами на производство при высокой чувствительности и разрешении [50]. В связи с этим данный класс устройств измерения частоты вращения будет еще долго востребован в миниатюрных сенсорах и потребительских устройствах в мире автопилота, 6G и IoT. Упомянутый прогресс сделал

возможным и появление новых конструкции МЭМС гироскопов, разрабатываемых для таких сверхтребовательных областей применения, как навигация [51] и определение частоты вращения Земли [32], [33], которые в эпоху микроминиатюризации способны конкурировать с другими устройствами по массогабаритным показателям и стоимости. Однако ученым все еще приходится концентрировать усилия на уменьшении ошибок измерения и шумов в выходном сигнале МЭМС сенсоров вращения различными математическими методами [52], [53] и конструктивными ухищрениями [31], [54], уменьшать демпфирование колебаний вибрирующих масс [55], искать новые пути и способы изготовления разработанных конструкций [39], [56], а также способы увеличения надежности и долгосрочности стабильной работы МЭМС датчиков.

Вторая крупная группа датчиков скорости вращения включает в себя более точные и стабильные оптические устройства на эффекте Саньяка, заключающемся в изменении разности фаз или частот лучей, распространяющихся по часовой стрелке и против часовой стрелки по вращающемуся контуру, ввиду углового смещения самого контура [15], [57], [58] (Рисунок 2).

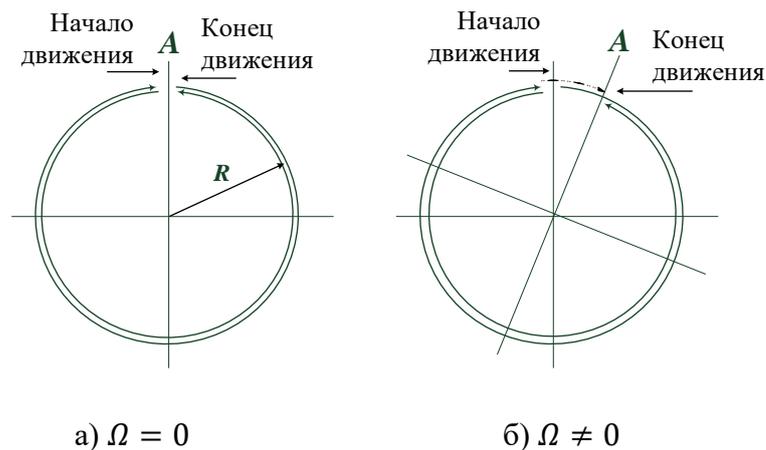


Рисунок 2 – К пояснению эффекта Саньяка

Таким образом, информация о частоте вращения Ω извлекается из фазовых характеристик ЭМ поля, распространяющегося во вращающихся установках [1], [17], [59], [60], где разность фаз $\delta\phi$ распространяющихся в противоположных направлениях лучей связана с частотой вращения контура Ω как:

$$\delta\phi = \frac{8\pi\Omega S}{\lambda v}, \quad (1)$$

где S – площадь, охватываемая лучами, λ – длина волны света, v – скорость несмещенного светового луча [15]. В устройствах с высокой чувствительностью, например, на основе лазеров, возможно прямое измерение разности частот лучей (Приложение А).

В основе беспрецедентной точности и чувствительности современных оптических гироскопов и интерферометров лежит высокая точность лазерных технологий, позволяющая разрешить частоту вращения и наклон Земли [61], наблюдать гравитационные волны [62] и измерять скорость света с точностью до семнадцати знаков после запятой [63] и выше [64]. В зависимости от режимов работы [65] и среды распространения света оптические гироскопы можно разделить на две большие группы: пассивные волоконно-оптические (ВОГ) и, как правило, активные кольцевые лазерные гироскопы (КЛГ), включающие в свою конструкцию источник света - лазер.

Использование нескольких витков оптического волокна в ВОГ позволяет обеспечивать большую точность измерения скорости вращения за счет увеличения длины пути волны света по замкнутому контуру и, соответственно, охватываемой им площади (величина которой во многом определяет разрешающую способность (1)), а само волокно как направляющая среда может обеспечить высокую прочность и надежность приборов за счет способности противостоять электромагнитным помехам, высокой чувствительности, устойчивости к высоким давлениям, а также простоте интеграции в другие устройства [66], [67], [68]. Традиционно громоздкие за счет сотен метров оптоволоконна и сопутствующего возбуждающего / измерительного оборудования конструкции ВОГ [1] в последние несколько лет при помощи схем с разомкнутым контуром [69], [70], с использованием кольцевого рециркуляционного волоконного резонатора [71], [72] или уменьшенным / измененным источником света [73], [74] позволили сократить размеры датчиков до нескольких сантиметров [75], [76], а использование модифицированных скрученных [71] или полых волокон [77] с фотонной запрещенной зоной помогло уменьшить паразитные оптические эффекты, в том числе рэлеевское рассеяние, эффекты Керра, Фарадея, Шупе и др. [78], [79]. Точность данных датчиков частоты вращения отвечает на запросы коммерческих навигационных и иных прикладных целей [68]. Превосходя другие типы оптических гироскопов с точки зрения надежности и стоимости, ВОГ широко используются в метрологии, в авиационной [80] и аэрокосмической [17] промышленности, навигации [74] и других областях, таких как геологоразведка и бурение скважин [81], [82], мониторинг землетрясений [83], [84] и сейсмология [5].

КЛГ — это высокопроизводительные оптические устройства измерения частоты вращения, способные обеспечить разрешение менее $1^\circ/\text{ч}$ и случайный дрейф менее $0,1^\circ/\text{ч}$ [85], [86]. Целый ряд преимуществ, таких как отсутствие подверженных износу и чувствительных к демпфированию вибрирующих частей, отсутствие волокна – и потерь в нем, чувствительность к большому интервалу частот вращения (до шести порядков), высокое разрешение и малый случайный дрейф делают лазерные гироскопы (чаще всего He-Ne [87]) наиболее

чувствительными к изменению скорости вращения устройствами [65], не только подходящими для использования в навигации, геофизике, геодезии и сейсмологии, но и являющиеся единственной реализованной в настоящее время технологией точного наблюдения за скоростью вращения Земли, ее малейшими колебаниями и наклоном ее оси [88], [89], [90]. Несмотря на свои превосходные тактико-технические характеристики и способность обеспечивать случайный дрейф до 10^{-6} °/ч [85], коммерческие лазерные датчики частоты вращения, работающие на эффекте Саньяка, зачастую все еще являются громоздкими и дорогими в производстве [91] за счет использования сверхточных лазеров и все того же увеличения площади, охватываемой лучами света (1). Однако бюджет и размеры не являются сдерживающими факторами, когда речь заходит о грандиозных международных научных проектах по сверхточному измерению показателей вращения нашей планеты, наклона ее оси и полного вектора скорости ее вращения [90], отклонение которой от постоянного значения на не более чем 2 нанорадиана в секунду удалось измерить с помощью совершенного пирамидального подземного КЛГ ROMY [92] (международный проект по измерению параметров движения Земли, Германия, Приложение Б). Ожидается, что этот и другой крупный эксперимент – КЛГ GINGERino (датчик вращения Земли, Италия, Приложение Б) [93] – смогут использоваться для различения движения литосферных плит, продолжительности дня и наземного наблюдения эффектов Лензе-Тирринга и де Ситтера [94]. Эксперименты же с вращающимися резонаторами и гироскопами меньших размеров способны подтвердить другое утверждение общей теории относительности (ОТО) – изотропию скорости света – с точностью до восемнадцати порядков [64], [95], [96]!

В то время, как КЛГ и ВОГ все еще являются сравнительно дорогими и массивными датчиками, чьи вес, размер и энергопотребление часто не отвечают требованиям новых прикладных применений, например, для управления ориентацией и орбитой микро- и наноспутников [68], а разрешения и стабильности МЭМС гироскопов недостаточно для многих навигационных целей, компромиссной конкурирующей технологией становятся недорогие оптоэлектронные гироскопы на чипе с разрешением 10^0 /ч и менее [68]. Благодаря успехам в смежных областях и преодолении технологических ограничений в области миниатюризации электронных компонентов и устройств, в настоящее время стало возможным изготавливать активные оптоэлектронные гироскопы на полупроводниковом кольцевом лазере (ПЛГ, [97]), на основе высокодобротных кремниевых резонаторов «оксид кремния на кремнии» (резонансные микро-оптические гироскопы), на чипе (на кристалле фосфида индия – InP, Indium phosphide) [98], на кольцевом резонаторе с Брэгговской решеткой, на основе фотонного кристалла [27] или на основе двойных квантовых ям на GaAs/AlGaAs [99] или InGaAs-GaAs-AlGaAs [100] и т.д., что теоретически позволяет сократить размер оптического резонатора до 1 мм [99]. Прорывом в уменьшении размеров оптических резонаторов стал прототип лазерно-оптического гироскопа

размером с рисовое зернышко, что примерно в 500 раз меньше среднего размера коммерческих оптических гироскопов [34], [35], применяемых в навигации. Однако при площади датчика в 2 мм^2 , полностью интегрированный нанофотонный оптический гироскоп (НОГ) в лабораторных условиях показал значения случайного отклонения угла (ARW) $650^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ при случайном дрейфе в один оборот в минуту ($21600^\circ/\text{ч}$) [34], [35] (Рисунок 1). Таким образом, в целом, согласно теоретически достижимым и потенциально реализуемым оптоэлектронными гироскопами характеристикам, этот вид датчиков вращения имеет большие перспективы и с точки зрения высокой точности, и с точки зрения малых размеров и низкопрофильности (что важно в многослойных конструкциях пользовательских и иных устройств) и со временем может стать вполне конкурентоспособными на постоянно растущем рынке инерциальных сенсоров.

В связи с большим спросом на гироскопы во всех подвижных устройствах с навигацией (IoE, IoT, Industry 4.0) и в свете ограничений по размерам и/или точности, демонстрируемых рассмотренными выше методами и устройствами измерения скорости вращения, постоянно ведется поиск новых принципов для измерения частоты вращения и разработка устройств на их основе. Для этих целей ученые обратились к самым чувствительным к вращению устройствам, способным наблюдать атомный спин, которые включают в себя сверхточные атомные часы [101], [102]; анализатор магнитных резонансов, использующий феномен магнитного резонанса атомных спинов, широко использующийся в высокоточных измерительных приборах [103], [104]; атомный интерференционный гироскоп [16] и атомный спиновый гироскоп [105], которому отводится большая роль в развитии технологий измерения скорости вращения с возможностью размещения всего датчика на одном чипе [106]. Большие усилия (и большие надежды) сконцентрированы вокруг попыток использовать для измерения частоты вращения интерференцию холодных атомов, в которой, подобно оптическому интерферометру, атомный интерферометр разделяет по двум встречным путям и затем соединяет волны де Бройля [107]. Согласно теоретическим расчетам, это может стать основной технологией для точных измерений с высоким разрешением, применимой как в прикладных, так и в фундаментальных научных целях [108], [109]. Таким образом, возможность получения высокоточных результатов измерений и возможность изготовления миниатюрных устройств, используя принципы атомной и ядерной интерферометрии, делает эту область одной из самых привлекательных и быстроразвивающихся областей в сфере устройств и методов измерения параметров вращательного движения. Однако к настоящему времени разработано всего несколько лабораторных образцов таких датчиков [110], [111], [112], [113], [114], способных в лучшем случае реализовать случайный дрейф в $3 \cdot 10^{-10}$ рад/с ($206,3^\circ/\text{ч}$) [112] и разрешение 1,8 нанорadian в течение 640 секунд [111], что дает основания полагать, что «интерферометры будущего» [115] будут оставаться таковыми еще некоторое время.

Обзор современных устройств измерения скорости вращения показывает (Приложение А, Б), что оптические датчики, работающие на эффекте Саньяка, имеют очень широкое применение в различных областях и способны реализовать точность и разрешение, достаточные для наблюдения релятивистских эффектов, колебаний пространства-времени или изменения в скорости вращения и оси наклона Земли. Учеными постоянно ведется работа по повышению производительности гироскопов и вращающихся интерферометров, измеряющих разность хода встречных лучей, направленная на усовершенствование измерительной установки как таковой: увеличение мощности испускаемого пучка света, заполнение резонатора определенным газом, уменьшение уровня обратного отражения, модификации оптических кабелей и волноводов, улучшение отражающих свойств зеркал во вращающихся цилиндрических резонаторах и интерферометрах и т.д. В части увеличения точности крупных измерительных установок основные усилия сконцентрированы на преодолении барьера, связанного с соотношением неопределенности Гейзенберга (преодолении шумов, вызванных нулевыми колебаниями), посредством использования сжатого света [116].

Помимо непрерывной разработки новых устройств измерения частоты вращения и совершенствования существующих, ученые вносят корректировки и в саму формулу Саньяка по расчету разности хода встречных лучей (1): выведенная при использовании приближений [11], [117] эта формула на протяжении века не давала поводов усомниться в ее применимости, но, когда речь идет о таком высоком порядке чувствительности датчика (разрешение 10^{-14} °/ч и выше, Рисунок 1), любые ее уточнения могут сказаться на конечном результате измерений [6], [118]. Например, в [118] в попытке учесть отклонение луча света за счет сил инерции, которым пренебрегается, по словам автора статьи, в классической формуле Саньяка (1), выводится формула с множителем в виде степенного ряда из отношений частоты вращения к скорости света. В [119] эффект Саньяка описывают в контексте ОТО как разницу во времени прохождения двух фотонов, движущихся по одному и тому же пути в противоположных направлениях, что приводит к общему выражению для этой разницы во времени в произвольном пространстве-времени для произвольных путей. В [120] исследована разница во времени пробега встречных вращающихся световых волн в поле центрального массивного и вращающегося тела – внесены поправки к формуле Саньяка в специальной теории относительности. В [6] для расчетов параметров вращения Земли с помощью КЛГ GINGER в формулу Саньяка добавлены слагаемые, учитывающие релятивистские поправки.

В настоящее время эффект Саньяка, как и другие эффекты при вращении, используют в спутниковой связи, синхронизации, измерении параметров вращения Земли, детектировании гравитационных волн (нулевой эффект Саньяка – LIGO [121]) и проверки постулатов ОТО [122].

Не утихает интерес и к показанному Р. Пенроузом [123], и описанному выдающимся отечественным ученым Я.Б. Зельдовичем [124], [125] эффекту усиления отраженных от вращающихся объектов волн, вновь обсуждаемому на страницах Nature [126]. Поэтому на рубеже веков [127] и в начале XXI [128] века вопрос корректной трактовки эффекта Саньяка и проблемы строгой постановки и решения задач релятивистской электродинамики в ускоренных (вращающихся) системах отсчета (СО) вновь приобретают интерес при изучении вопросов интерференции в искривленном пространстве-времени, влияющем на распространение сигнала между антеннами [129] или для научных экспериментов в космосе [120], [130] и проверки гипотез ОТО [131].

Таким образом, расчеты радиоэлектронных и оптических гироскопов основаны на приближенных представлениях о поведении ЭМ полей во вращающихся СО. Для возможности более точного измерения скорости вращения и описания и учета влияния вращения на ЭМ поле во вращающихся конструкциях необходимо иметь строгое представление о возбуждаемом ЭМ поле во вращающихся резонаторах и волноводах, которыми по сути являются интерферометры и гироскопы. Для этого необходимо формулировать и решать задачи о возбуждении ЭМ волн во вращающихся интерферометрах и гироскопах, которые в строгом виде в перечисленных в обзоре работах по разработке устройств измерения частоты вращения не рассматривались. В связи с этим нередко высказывается идея о важности дальнейшего теоретического и экспериментального исследования и необходимости использования ковариантной формы уравнений Максвелла и тензорного анализа при выводе уравнений электродинамики во вращающихся СО.

Сложность постановки и решения граничных задач о возможности распространения направляемых ЭМ волн во вращающихся волноводах и резонаторах связана с тем, что вращающаяся СО является неинерциальной, а пространство, ей соответствующее, из-за наличия центробежных сил и сил Кориолиса, является искривленным. Ввиду такого неинерциального характера вращательного движения возникновение эффекта Саньяка часто связывают именно с влиянием на поведение ЭМ поля в полости эквивалентных сил гравитации - кориолисовой и центробежной сил [10], [11], [12], [13], [132], [133], [134], [135]. Несмотря на предпринятые в работах [15], [132], [136], [137], [138], [139], [140] попытки релятивистской интерпретации эффекта Саньяка и исследования собственных частот во вращающихся полостях с помощью тензорного исчисления в четырехмерном римановом пространстве [15], во всех случаях либо использовалась нековариантная формулировка уравнений Максвелла, либо делались упрощающие допущения в материальных уравнениях, поэтому были получены лишь приближенные представления об ЭМ поле во вращающихся полостях и / или описывающие частные случаи. Подобные оговорки, в свою очередь, нередко приводили к расхождениям между

расчетными ожидаемыми и получаемыми в реальности экспериментальными данными, что вызывало трудности в трактовке.

Строгая постановка и решение задач электродинамики во вращающихся системах отсчета, учитывающие влияние эквивалентного гравитационного поля на ЭМ поле в присутствии вращения, приведены в работах Б.М. Петрова [141], [142]. В монографиях [141], [142] с использованием отождествления ЭМ поля с тензорными объектами и тензорными плотностями [143] и неметрической ковариантной формы уравнений Максвелла [15], [132], [138], [139], Б.М. Петров выводит выражения для векторов ЭМ поля во вращающихся СО. Поставленные граничные задачи о возможности существования ЭМ колебаний и волн впервые решены строго на основе электродинамики общей теории относительности (ОТО), и показано, что параметры ЭМ поля в инерциальной и неинерциальной системах отсчета различны [142]. Полученное строгое решение электродинамических задач в присутствии вращения дало возможность установить новые эффекты зависимости параметров ЭМ поля от частоты вращения и использовать их для измерения частоты вращения [144], [145], [146]. Так, например, эффект изменения спектра сигнала, отраженного от вращающегося объекта [146], был использован для разработки представленного в свое время на ВДНХ (Выставка достижений народного хозяйства) радиолокационного измерителя скорости вращения [146], [147]. При решении же внутренних задач электродинамики было показано, что во вращающихся СО критические частоты волновода в покое ω_0 расщепляются на две новых частоты $\omega_n = \omega_0 \pm n\Omega$ волновода при вращении, где n – порядок распространяющейся в волноводе моды (что позволило получить строгое электродинамическое обоснование эффекта Саньяка [9]). А на основе строгого решения задачи о существовании ЭМ колебаний во вращающихся полостях было получено выражение для расщепления собственной частоты во вращающемся сферическом резонаторе, показывающее появление новых собственных частот $\omega_m = \omega_0 \pm m\Omega$, где $|m| \leq n$ (что также было показано приближенными методами в [136], [137] и совпадает с результатами экспериментов [148], [149], [150], [151] и др.), и появление новых собственных частот ω_n во вращающемся цилиндрическом резонаторе $\omega_n = \omega_0 \pm n\Omega$. Сам эффект влияния на ЭМ поле эквивалентного гравитационного поля сравнивается с явлениями Штарка и Зеемана [142], [152].

Выявленные зависимости параметров ЭМ поля от скорости вращения позволяют использовать ЭМ поле для измерения скорости вращения [144], [145], а также дают возможность миниатюризации линейных размеров датчиков вращения за счет малых размеров резонаторов (в противовес зависимости разрешения в устройствах на эффекте Саньяка от охватываемой лучами света площади (1)) и с одновременным увеличением точности измерения частоты вращения за счет использования разных резонансных свойств ЭМ поля в одной и той же вращающейся и

«покоящейся» полости [144], [145]. Так, например, эффект расщепления критической частоты вращающегося волновода может использоваться для определения частоты вращения последнего как разности между критической частотой ω_n вращающегося волновода на выбранном типе n ЭМ волны и критической частотой покоящегося волновода ω_0 на том же типе n ЭМ волны, деленной (разности) на выбранное число n : $(\omega_n - \omega_0)/n$ – одноволновый способ измерения частоты вращения интерферометра [145] (математической моделью которого является волновод). В свою очередь эффект расщепления собственных частот вращающихся резонаторов позволяет рассматривать резонансный способ измерения частоты вращения объекта, которая для сферического резонатора определяется разностью между собственной частотой вращающейся полости ω_m на выбранном типе ЭМ колебания n , и собственной частотой ω_0 полости в покое на том же типе ЭМ колебания n , деленной на постоянное целое число m , определяемое выбранным значением n , $|m| \leq n$: $(\omega_m - \omega_0)/m$ [144]. Направление вращения в обоих способах измерения частоты вращения [144], [145] определяется знаком разности собственных частот вращающихся и покоящихся волноводов и резонаторов. Однако численные исследования радиочастотных методов измерения скорости вращения не проводились, а для исследования их предельно достижимых параметров необходимо ставить и решать в строгом виде более близкие к реальности задачи возбуждения ЭМ полей в резонаторах и волноводах сторонними источниками токов и зарядов. Таким образом, для **исследования возможности реализации новых радиочастотных способов измерения скорости вращения, определения их предельно достижимых характеристик и поиска путей миниатюризации гироскопов и повышения их разрешающей способности необходимо учитывать источник колебаний и параметры материалов, из которых изготовлены полости, что приводит к необходимости постановки и решения задач возбуждения ЭМ поля во вращающихся интерферометрах и гироскопах.**

ЦЕЛЬЮ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ является поиск путей повышения разрешающей способности измерения частоты вращения радиочастотными методами; исследование возможности уменьшения размеров измерительных устройств частоты вращения, использующих резонансные радиочастотные способы; определение предельно достижимых параметров радиочастотного резонансного метода измерения частоты вращения.

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ включают

строгую постановку и решение задачи возбуждения вращающегося цилиндрического волновода сторонними источниками токов и зарядов;

строгую постановку и решение задачи возбуждения вращающейся цилиндрической полости сторонними источниками токов и зарядов;

строгую постановку и решение граничной задачи возбуждения сторонними источниками токов и зарядов сферической полости с импедансными стенками и диэлектрическим заполнением;

строгую постановку и решение задачи возбуждения сторонними источниками токов и зарядов вращающейся полости, образованной концентрическими сферой и шаром с импедансными стенками и диэлектрическим заполнением;

численные исследования влияния параметров материалов стенок и заполнения вращающихся полостей на добротность последних и на величину предельно достижимых параметров радиочастотных методов измерения частоты вращения;

численные исследования способов увеличения добротности вращающейся сферической полости путем применения сверхпроводящих материалов с целью повышения разрешения резонансного метода измерения частоты вращения;

исследование возможности миниатюризации датчика частоты вращения, использующего резонансный метод, применительно к концентрическому сферическому резонатору;

физическую интерпретацию полученных результатов.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ заключается в том, что получены новые знания в области возбуждения вращающихся интерферометров и гироскопов сторонними источниками токов и зарядов. Впервые сформулированы и решены в строгом виде граничные задачи возбуждения сторонними источниками токов и зарядов ЭМ поля во вращающихся интерферометрах и гироскопах. Получено строгое аналитическое представление для векторов напряженностей ЭМ поля, возбужденного во вращающихся полостях, с учетом влияния эквивалентного гравитационного поля, что в настоящий момент невозможно смоделировать в широко используемых САПР, не учитывающих релятивистские поправки и неинерциальные системы отсчета. Проведен численный анализ параметров резонансного радиочастотного метода измерения скорости вращения. Исследована возможность увеличения добротности вращающейся сферической полости путем применения сверхпроводящих материалов. Исследована возможность уменьшения размеров вращающегося сферического резонатора внесением в него концентрического шара.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ состоит в том, что в работе исследованы радиочастотные способы измерения частоты (скорости) вращения и установлены технические параметры вращающихся гироскопов и интерферометров их реализующих. Выработаны рекомендации по использованию резонансного радиочастотного метода для измерения частоты (скорости) вращения полости в зависимости от параметров используемых материалов и конструкции полости. Показано, что при определенных условиях исследованные резонансные

методы измерения частоты вращения могут обеспечить размеры измерителей частоты вращения до нескольких миллиметров при навигационном разрешении, что делает данный способ потенциально конкурентным на современном рынке датчиков вращения.

В международном масштабе результаты исследования и выводы, сделанные на их основе, могут найти практическое применение в различных крупных экспериментах и исследованиях с интерферометрами и гироскопами.

Результаты исследований были получены в том числе при выполнении НИОКТР № 122022200226-3 «Прорывные поисковые лаборатории "Системы связи"» в рамках реализации государственной программы поддержки университетов «Приоритет 2030».

ДОСТОВЕРНОСТЬ полученных результатов подтверждается корректным выбором записи уравнений электродинамики во вращающихся системах отсчета, полученных из уравнений Максвелла в ковариантной форме в приближении ОТО без применения некорректных предположений о скорости света; совпадением полученных аналитических результатов в частных случаях с известными из литературы экспериментальными и теоретическими результатами; совпадением аналитических и численных результатов для частного случая отсутствия вращения с известными результатами классической теории электродинамики.

СООТВЕТСТВИЕ ПАСПОРТУ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 2.2.14. «Антенны, СВЧ-устройства и их технологии» диссертации отражается в решении внутренних задач электродинамики для анализа и синтеза высокоэффективных СВЧ устройств, определения их предельно-достижимых характеристик, возможных путей построения, что соответствует п. 1 паспорта научной специальности.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД АВТОРА заключается в самостоятельном получении основных результатов и выводов в диссертационной работе: соискателем решены поставленные в работе задачи; проведены численные исследования, выполнен анализ и сравнение полученных результатов с известными в литературе частными случаями; исследовано влияние материалов полостей на параметры радиочастотных способов измерения частоты вращения и определены предельно достижимые параметры; разработаны рекомендации по применению резонансных способов измерения частоты вращения полостей.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных конференциях: ММЕТ2016, IEEE 16th International Conference “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory”, Украина; 7th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL-2016), Украина; II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2016, Украина; 2017

IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2017 ElConRus), Россия; 2017 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW-2017), Россия; 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus 2018), Россия; 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus 2019), Россия; 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW-2019), Россия; 2021 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW-2021), Россия; 2023 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW-2023), Россия; International Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory" (PIRT-2023), Moscow, Russian Federation, 2023.

ПУБЛИКАЦИИ по теме диссертационной работы включают 14 работ, написанных самостоятельно и в соавторстве, опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК и индексируемых Scopus и Web of Science:

1. Petrov B.M., Titova D.E., Influence of the dielectric loss in a dielectric filled rotating spherical resonator on the precision of the rotation rate measurement // ММЕТ2016, IEEE 16th International Conference "Mathematical Methods in Electromagnetic Theory". – Lviv, Ukraine, July 5-7, 2016. – P. 318-321. – DOI: 10.1109/ММЕТ.2016.7544055
2. Петров Б.М., Титова Д.Е. Влияние тепловых потерь в диэлектрике на частотную характеристику сферического резонатора и на возможность измерения частоты вращения // Известия ЮФУ. Технические науки (Izvestiya SFedU. Engineering Sciences). – 2016. – №5 (178). – С. 113-125
3. Petrov B.M., Titova D.E., Dependence of the Q-factor of a rotating cavity on the heat losses in the metal // 2016 2nd International Conference on Humanity and Social Science (ICHSS2016). – Phuket, Thailand, August 28-29, 2016. – P. 210-214. – WOS:000390840600039
4. Petrov B.M., Titova D.E., Excitation of a Rotating Metal Wall Dielectric Resonator and its Rotation Rate Measurement // CAOL2016 «7th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers». – Odessa, Ukraine, September 12-15, 2016. – P. 249-251. – DOI: 10.1109/CAOL.2016.7851445
5. Petrov B.M., Titova D.E., Excitation of Electromagnetic Field in a Rotating Coaxial Spherical Resonator // II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2016. – Kharkiv, Ukraine, October 10-14, 2016. – P. 46-49. – DOI: 10.1109/YSF.2016.7753797
6. Petrov B.M., Titova D.E., Influence of the parameters of the dielectric on the Q-factor of a rotating coaxial resonator // 2017 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and

Electronic Engineering. – Moscow and St. Petersburg, Russia, February 01-03, 2017. – P. 1278-1281. – DOI: 10.1109/EIConRus.2017.7910799

7. Petrov B.M., Titova D.E., Q-factor of a rotating spherical resonator filled with dielectric // 2017 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). – Divnomorskoe, Russia, 26-30 June 2017. – P. 96-99. – DOI: 10.1109/RSEMW.2017.8103575

8. Petrov B.M., Titova D.E., Impedance Boundary Problem for Rotating Spherical Cavity // Proceedings of the 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2018. – Moscow and St. Petersburg, Russia, 29 January 2018 - 01 February 2018. – P. 480-484. – DOI: 10.1109/EIConRus.2018.8317138

9. Petrov B.M., Titova D.E., Electromagnetic Waves in Rotating Spherical Cavities. E-field // 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). – Divnomorskoe, Russia, 24-28 June 2019. – P. 8-11. – DOI 10.1109/RSEMW.2019.8792690

10. Petrov B.M., Titova D.E., Electromagnetic Waves in Rotating Spherical Cavities. H-field // 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). – Divnomorskoe, Russia, 24-28 June 2019. – P. 12-15. – DOI: 10.1109/RSEMW.2019.8792713

11. Титова Д.Е. Краевая задача возбуждения вращающегося цилиндрического волновода с импедансными стенками // Известия ЮФУ. Технические науки (Izvestiya SFedU. Engineering Sciences). – 2023. – №3. – С. 240-251

12. Titova D.E., Excited Electromagnetic Field in Rotating Cylindrical Waveguide // 2023 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). – Divnomorskoe, Russia, 26-30 June 2023. – P. 44-47. – DOI: 10.1109/RSEMW58451.2023.10202024

13. Titova D.E., Spectrum of a Rotating Cylindrical Cavity Resonator // 2023 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). – Divnomorskoe, Russia, 26-30 June 2023. – P. 48-51. – DOI: 10.1109/RSEMW58451.2023.10202075

14. Titova D.E. Excitation of Electromagnetic Field inside Rotating Spherical Cavity // IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques. – 2023. Vol.9 – P. 1-9. – DOI: 10.1109/JMMCT.2023.3321123.

ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов основного текста и заключения. Работа содержит 194 с., в том числе 147 с. основного текста, 41 рисунок и 9 таблиц, список литературы из 310 наименований на 18 с. и 3 приложения.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Впервые полученное строгое решение на основе ковариантных уравнений Максвелла и импедансных граничных условий внутренних задач электродинамики о возбуждении электромагнитного поля во вращающихся волноводах, резонаторах и концентрических резонаторах, являющихся математическими моделями интерферометров и гироскопов, позволяющее учесть влияние эквивалентного гравитационного поля (силы Кориолиса и центробежной силы) на электромагнитное поле в неинерциальных (вращающихся) системах отсчета, выявить и численно исследовать обусловленные этому влиянию релятивистские эффекты.

2. Результаты исследования релятивистского эффекта расщепления критических и собственных частот вращающихся волноводов, резонаторов и концентрических резонаторов при возбуждении в них электромагнитного поля, позволившие выполнить анализ основанных на данном эффекте радиочастотных методов измерения частоты вращения, исследовать возможность синтеза высокоэффективных устройств измерения частоты вращения на основе вращающихся полостей, определить предельно достижимые характеристики этих методов.

3. Определены степень и характер влияния на разрешающую способность и точность радиочастотных методов измерения частоты вращения формы, материалов и добротности полостей.

4. Результаты численного исследования путей увеличения разрешающей способности радиочастотных резонансных методов измерения частоты вращения при использовании сверхпроводящих материалов стенок вращающихся полостей, показавшие возможность разработки радиочастотного устройства измерения частоты вращения, которое при сравнительно небольших линейных и электрических размерах способно обеспечивать разрешение, достаточное для навигационных целей.

5. Предложения по возможным путям уменьшения размеров устройства, реализующего радиочастотный резонансный метод измерения частоты вращения, при использовании концентрической сферической полости, показавшие, что внесение концентрической полости во вращающуюся сферическую полость позволяет сократить объем резонатора, необходимый для возбуждения в нем колебаний основного типа, уменьшая тем самым размер резонатора в устройстве измерения частоты вращения.

6. Рекомендации по выбору гироскопов на основе вращающихся полостей в зависимости от требуемых характеристик разрешения и линейных размеров устройства измерения частоты вращения, основанные на рассчитанных предельно достижимых значениях и указанных ограничениях и особенностях применения радиочастотных резонансных методов измерения частоты вращения.

1 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. УСТРОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ В РАДИОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ

В данном разделе дано описание разработанных Б.М. Петровым радиочастотных методов измерения частоты вращения [144], [145], на исследование которых направлена данная работа, и теории, на которой они базируются [141], [142].

1.1 Решение задач электродинамики во вращающихся системах отсчета

Сложность постановки и решения граничных задач о возможности существования ЭМ волн и колебаний во вращающихся волноводах и резонаторах связана с тем, что вращающаяся СО является неинерциальной, а пространство, ей соответствующее, из-за наличия центробежных сил и сил Кориолиса является искривленным. Эти силы влияют на распространяющееся ЭМ поле ввиду того, что последнее обладает инертной массой [141]. Как результат, параметры ЭМ поля в инерциальной и неинерциальной СО отличаются [142]. О необходимости решать задачи электродинамики в неинерциальных СО для объяснения эффекта Саньяка и исследования поведения ЭМ поля при вращении в разное время писали П. Ланжевэн [10], М. Лауэ [11], М.А. Тонелла [153], А. Зоммерфельд [13] и др., а решения различных подходов и приближений изложены в работах И.Г. Поста [15], Хира [136], Т. Шиозавы [137], Л.И. Шиффа [12] и др. Однако к настоящему времени эффект Саньяка все еще часто не считается полностью объясненным в строгой форме с точки зрения теории электромагнетизма [127], [154], а попытки записать уравнения Максвелла в полностью ковариантной форме продолжают до сих пор [155]. Таким образом, задача об исследовании поведения ЭМ поля во вращающихся волноводах и резонаторах имеет принципиальное значение не только для расчета оптических датчиков вращения, но и для обоснования утверждений ОТО.

В работах [15], [136], [137], [138], [139], [132], [140] были предприняты попытки изучения резонансных частот во вращающихся полостях и релятивистской интерпретации эффекта Саньяка с использованием тензорного исчисления в четырехмерном римановом пространстве [15]. При таком подходе в уравнениях Максвелла и материальных уравнениях часто появлялись дополнительные слагаемые, связанные с вращением. Решение задач электродинамики во вращающейся полости с использованием этих уравнений указывало на появление в этих полостях новых резонансных частот в связи с вращением. Например, в работах [136], [137] при рассмотрении ЭМ поля во вращающейся полости с точки зрения ОТО авторы приходят к выводам о расщеплении собственных частот покоящейся полости ω_0 на новые собственные частоты ω_m

вращающейся полости, отстоящие от ω_0 на интервал, равный целому числу скоростей вращения Ω :

$$\omega_m = \omega_0 \pm m\Omega, \quad (1.1)$$

что совпадало с результатами экспериментов [148], [149], [150], [151] (m – порядок моды в полости). Полученный в [136] результат (1.1) автор Хир объясняет тем, что при вращении даже вакуум приобретает свойства анизотропной среды и не происходит вырождения мод ЭМ поля, распространяющихся по и против часовой стрелки, что приводит к возникновению между этими модами частоты биения $2m\Omega$ (1.1), несущей информацию о частоте вращения Ω . Для объяснения полученных результатов автор [136] вводит понятие об эффекте Кориолиса-Зеемана – явления, возникающего, когда ЭМ полость в переменном гравитационном поле, например, создаваемом вращением, испытывает сдвиги или расщепление мод бегущей волны [136] (подобно расщеплению спектральных линий атома под действием магнитного поля в эффекте Зеемана). Считается, что работа Хира носит *ad hoc* характер, т.к. материальные уравнения записаны для частного случая вращения среды вместе с резонатором, который рассматривает автор, а использованные упрощения делают решение справедливым только для малых скоростей вращения – т.е. решение не является строгим и инвариантным по сути. Также в работе отмечено, что реально реализуемые для ЭМ резонаторов скорости вращения настолько малы, что для разрешения частоты биения между встречно распространяющимися модами $\Delta\omega = 2m\Omega$ необходимо использовать резонаторы с добротность порядка 10^9 и выше, что возможно обеспечить только с помощью сверхпроводящих материалов. Численного исследования полученных результатов в работе [136] не приводится.

Во всех последующих работах [12], [15], [118], [132], [136], [137], [138], [139], [140], [148], [156], [157], [158] при решении задач электродинамики во вращающихся системах отсчета используется или нековариантная формулировка уравнений, либо вводятся допущения, не позволяющие получить строгое решение задачи, охватывающее все возможные случаи вращательного движения среды и объекта относительно друг друга, поэтому были получены лишь приближенные представления об ЭМ поле во вращающихся полостях и / или описывающие частные случаи и ограниченные в своей применимости малыми скоростями вращения.

Попытку расширить полученные Хиром решения [136] на все возможные случаи вращения предприняли Пост, Йилдиз и Тан – РYТ (Post, Yildiz, Tang – по заглавным буквам фамилий авторов [140]). В своих часто цитируемых [34] работах по исследованию собственных частот вращающихся полостей с помощью ковариантных уравнений электродинамики [15], [132], [138], [139] они предлагают использовать метод естественной инвариантности (natural invariance method), который заключается в разделении уравнений электродинамики на уравнения ЭМ поля

и материальные уравнения, и представление первых в ковариантной, независимой от метрического тензора форме, что обеспечивает независимость инвариантности от среды (от метрики). Далее, исходя из того, что \vec{E} и \vec{B} - силовые векторы, а D и H – электрические и магнитные свойства среды, последние представлены не как тензоры, а как тензорные плотности веса +1 (вместо тензоров, как это было сделано в [140], [148]), что позволяет разрешить парадокс Зоммерфельда [132] и действительно соответствует истинной физической природе рассматриваемых величин [132], а уравнения Максвелла удовлетворяют теории размерностей физических величин и тензорных объектов [143]. Записывая данные положения сначала в [139], а затем в [15], [132] авторы ссылаются на работы Картана [159], Вейля [160], Ван Данцига [161] и Схоутена [143].

Для описания свойств среды РУТ вводят материальный тензор, который представляет собой материальные уравнения и несет в себе информацию обо всех линейных феноменах, включая скорость вращения: при определенной его (тензора) трансформации проявляется эффект Саньяка. Авторы разделяют материальный тензор на части, отдельно описывающие материальную среду и свободное пространство, приводя таблицы значений материальных тензоров, связывающих векторы электромагнитного поля в разных СО (вращающихся и инерциальных) и показывают, что метрический подход Хира [136] является частным случаем их неметрического подхода, позволяющего получить решения для всех возможных сочетаний взаимного вращения полости, свободного пространства и среды [132], [138].

Однако предложенный РУТ метод ограничен малыми угловыми скоростями, так как большие скорости разрушают решение по заявлению самих авторов. А по заявлению авторов [140], метод разделения материального тензора на вакуумную и материальную части различными способами является специальной и нековариантной процедурой (требующей измерения параметров среды в разных СО), и можно показать, что он приводит к несоответствиям, в связи с чем также является частным, применимым только в данном случае методом, и как следствие – не ковариантным. Более того, сам метод РУТ не приводит к показанному многим экспериментами значению сдвига, пропорциональному целому числу частот вращения полости $\Delta\omega = N\Omega$.

Следует отметить, что результаты, сравнимые с (1.1) и соответствующие результатам экспериментов, были получены и без применения тензорного исчисления в неинерциальных СО. Так работа [137] интересна тем, что в ней предпринимается попытка феноменологического и теоретического толкования электродинамики вращающегося объекта. В первом случае автор выводит уравнения электродинамики во вращающихся СО, используя трехмерную запись уравнений Максвелла-Минковского в инерциальной СО и формулы перехода между покоящейся и вращающейся системами отсчета для векторов напряженностей и зарядов и материальные

уравнения с добавочными членами, пропорциональными частоте вращения. Во втором случае, применяя классическую теорию электрона и рассматривая среду как совокупность положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов и учитывая ЭМ эффекты как взаимодействие ЭМ поля с этими свободными зарядами, автор выводит схожие по форме материальные уравнения во вращающейся СО. Как было показано в других работах, свойства среды и материальные уравнения их описывающие, обогащенные зависящими от частоты вращения слагаемыми, указывают на то, что при решении задач электродинамики при вращении в дополнение к основному резонансу для среды в покое ω возникают еще два ω'' , сдвинутые относительно первого на частоту вращения во вращающейся среде:

$$\omega'' = \omega - n\Omega_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

Однако такая приближенная формулировка и решение задачи не дают возможность учитывать и рассматривать в строгой форме релятивистские эффекты во вращающихся полостях в неинерциальных СО.

Строгая постановка и решение задач электродинамики во вращающихся СО, учитывающие влияние эквивалентного гравитационного поля на ЭМ поле в присутствии вращения, приведены в работах Б.М. Петрова [141], [142]. В [141], [142] опытные результаты Саньяка сравниваются с результатами строгой электродинамической теории и получают физическую интерпретацию на основе положений ОТО. Теоретические результаты, полученные Петровым, основаны на работах А. Эйнштейна, И.Дж. Поста [15], [139] и Дж.А. Схоутена [143]. При решении задач используется метод «естественной инвариантности» РУТ [15], [132], [138], [139]. При преобразовании электромагнитных полей из инерциальной системы отсчета в инерциальную же систему использовались формулы из работ Ландау и Лившица [162] и Зоммерфельда [13].

С помощью отождествлений векторов ЭМ поля с тензорами и тензорными плотностями, опираясь на результаты РУТ, Схоутена [143] и Ландау [162], из полученных ковариантных уравнений Максвелла и материальных уравнений Б.М. Петров [142] выводит выражения для векторов ЭМ поля во вращающейся СО. При этом автор записывает и использует материальные уравнения для вращающихся СО в строгой форме, которые при определенных упрощениях превращаются в материальные уравнения, полученные с помощью приближенных методов решения ранее и использованные для решения задач электродинамики при вращении в [137], [136], [163]. Полученное в [142] строгое решение граничных задач электродинамики о возможности существования ЭМ полей электрических и магнитных колебаний во вращающихся СО на основе электродинамики ОТО дало возможность установить новые эффекты зависимости

параметров ЭМ поля от частоты вращения и использовать их для измерения частоты вращения [144], [145].

Например, при решении задачи о возможности существования ЭМ волн во вращающемся волноводе были рассчитаны фазовая и групповая скорости и длина волны парциальных волн, распространяющихся в продольном направлении во вращающемся цилиндрическом волноводе, и показана зависимость данных параметров от частоты вращения волновода: азимутальные гармоники, распространяющиеся по направлению вращения и против него, имеют разные длины волн, фазовые и групповые скорости в волноводе [142]. Это привело к тому, что критические частоты волновода в покое ω_0 расщепляются на две новых частоты $\omega_n = \omega_0 \pm n\Omega$ во вращающемся волноводе, где n – порядок распространяющейся в волноводе моды. Полученное решение позволило получить строгое электродинамическое обоснование эффекта Саньяка [9] и может быть использовано для измерения частоты вращения [145].

Также на основе выведенной в [141] теории Б.М. Петровым в [142] поставлена и решена в строгом виде задача о существовании ЭМ колебаний во вращающемся сферическом резонаторе и вращающемся цилиндрическом резонаторе при идеально проводящих стенках и идеальном диэлектрическом заполнении. На основе этого строгого решения было получено выражение для расщепления собственной частоты ω_0 цилиндрического резонатора при вращении на новые собственные частоты $\omega_n = \omega_0 \pm n\Omega$, где n – выбранный тип колебания, и выражение для расщепления собственной частоты сферического резонатора при его вращении, показывающее появление новых собственных частот $\omega_m = \omega_0 \pm m\Omega$ как в (1.1), $|m| \leq n$. Сам эффект влияния на ЭМ поле эквивалентного гравитационного поля и расщепления собственных частот полостей сравнивается с явлениями Штарка и Зеемана, и, как и у Хира [136], говорится об анизотропных свойствах среды во вращающихся системах отсчета. Выявленные зависимости параметров ЭМ поля от скорости вращения позволяют использовать ЭМ поле для измерения скорости вращения полостей [144], [145].

1.2 Измерение частоты вращения в радиочастотном диапазоне

Описанные Б.М. Петровым эффекты расщепления собственных частот вращающихся волноводов и резонаторов могут быть использованы при измерении частоты вращения последних разработанными одноволновым [145] и резонансным [144] способами измерения частоты вращения.

Одноволновый способ измерения частоты вращения интерферометра [145], заключающийся в определении разности собственных частот волновода при вращении ω_n и в

покое ω_0 , деленной на выбранный тип n распространяющейся при этом в волноводе ЭМ волны, отличается от известных многоволновых способов (к которым относится эффект Саньяка, использующий распространяющиеся в противоположных направлениях ЭМ волны) тем, что измеряется только изменение критической частоты волновода при вращении последнего.

Одна из возможных реализаций способа, предложенная в [145], заключается в следующем (Рисунок 1.1). Предполагается, что заполненный магнитоэлектриком интерферометр (1) (его математическая модель – волновод) с одного конца имеет источник ЭМ поля перестраиваемой частоты (2) (генератор), связанный индуктивно зондом (3) с объемом интерферометра, а с другого конца – так же индуктивно (6) связанный с объемом волновода измеритель малой мощности поглотительного типа (5), а согласованная нагрузка (7) поглощает падающую волну. Для наблюдения критической частоты (разрушения режима бегущей волны) в покоящемся волноводе ($\Omega = 0$), генератор (2) настроен на частоту ω_0 , являющуюся критической частотой волновода (1) в покое.

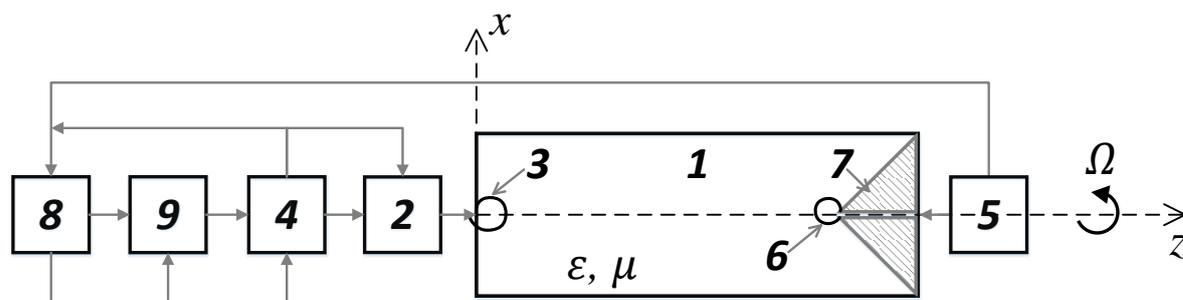


Рисунок 1.1 – К пояснению одноволнового способа измерения частоты вращения [145]. 1 – интерферометр, 2 – генератор, 3 – зонд-возбудитель, 4 – устройство перестройки частоты генератора, 5 – измеритель ЭМ поля, 6 – зонд индуктивной связи измерителя (5) с ЭМ полем, 7 – согласованная поглощающая нагрузка, 8 – решающее устройство, 9 – частотомер

При вращении настроенной на ω_0 установки с частотой $\Omega \neq 0$ в волноводе (1) появляется бегущая волна, информация о частоте которой поступает от измерителя мощности (5) на решающее устройство (8), а от него – на устройство перестройки частоты генератора (4). Последнее перестраивает частоту генератора (2) до некоторого значения ω_n таким образом, чтобы добиться разрушения режима бегущей волны во вращающемся волноводе (1) (когда ЭМ поле в волноводе становится чисто реактивным). Определяя разность между вычисленными частотами ω_n и ω_0 , решающее устройство (8) выдает информацию о частоте вращения волновода $\Omega = (\omega_n - \omega_0)/n$, где n – порядок распространяющейся в волноводе моды.

Резонансный способ измерения частоты вращения объекта [144] определяет последнюю как разность между собственными частотами вращающейся ω_m и покоящейся ω_0 полости на

выбранном типе ЭМ колебания n , деленную на постоянное целое число m , $|m| \leq n$ [144]. В отличие от методов измерения частоты вращения, основанных на формуле Саньяка, требующей больших соотношений площади измерительного устройства к длине ЭМ волны, S/λ , (1) для достижения высокой разрешающей способности, в данном резонансном методе линейный размер полости в гироскопе может совпадать с длиной волны, что позволяет сократить размеры измерительного устройства [144].

Возможная реализация измерительного устройства частоты вращения резонансным способом описана в [144]. При отсутствии вращения автогенератор (2) возбуждает в резонаторе (1) ЭМ поле на частоте ω_0 с помощью зонда (4). При вращении резонатора его резонансная частота изменится до значения ω_m и будет отличаться от частоты автогенератора ω_0 . В таком случае детектор ЭМ поля (5) передаст на решающее устройство (6) близкое к нулю значение напряжения, свидетельствующее об отсутствии резонанса. Решающее устройство (6) подаст соответствующий сигнал на устройство перестройки частоты (3) автогенератора (2) для перестройки частоты последнего до достижения максимального значения на детекторе (5) (ЭМ резонанс). Достигнутое при этом значение частоты автогенератора ω_m измеряется частотомером (7) и передается на решающее устройство (6), которое вычисляет частоту вращения резонатора как отношение разности частот ω_n и ω_0 к определенному выбранном типом колебания n значению m , $|m| \leq n$.

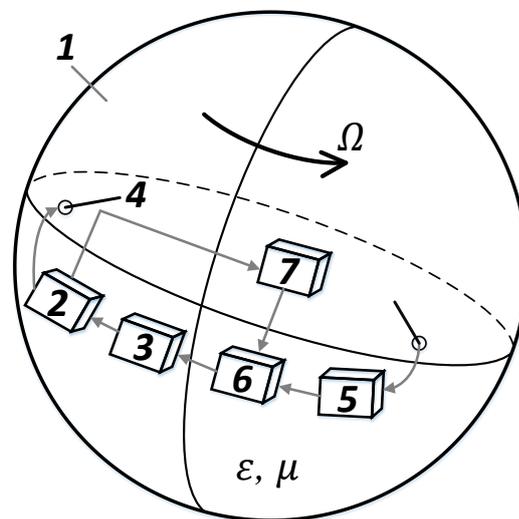


Рисунок 1.2 – К пояснению резонансного способа измерения частоты вращения [144]. 1 – резонатор, 2 – монохроматический автогенератор перестраиваемой частоты, 3 – устройство перестройки частоты автогенератора, 4 – зонд-возбудитель, 5 – детектор ЭМ поля, 6 – решающее устройство, 7 – частотомер

Технически полученный в [141], [142] результат строгой теории изменения ЭМ поля во вращающихся системах отсчета состоит в исследовании «возможности миниатюризации

линейных размеров вращающейся полости с одновременным увеличением точности измерения частоты вращения за счет использования разных резонансных свойств ЭМ поля в одной и той же вращающейся и покоящейся полости» [144]. При этом точность измерения частоты вращения определяется хорошо разработанными радиотехническими методами измерения частоты, способ измерения является прямым [144], [145], а конструкция самого сенсора не подразумевает вибрирующих масс и пружин, из чего можно сделать предположение о слабой подверженности разрабатываемых на данных принципах датчиков механическому износу.

Для реализации и исследования предельно достижимых характеристик радиочастотных способов измерения скорости вращения [144], [145] необходимо учитывать наличие источника, что требует постановки и решения задачи возбуждения ЭМ поля во вращающихся волноводах и резонаторах сторонними источниками токов и зарядов. Ранее данные задачи не ставились, численные исследования предельно достижимых параметров радиочастотных методов измерения частоты вращения и определение границ и условий применимости данных методов не проводились и влияние на них параметров материалов, из которых изготовлены волноводы и резонаторы, не исследовалось.

Для исследования возможностей повышения разрешающей способности, уменьшения размеров и определения предельно достижимых параметров указанных радиочастотных методов измерения частоты вращения полостей необходимо формулировать и решать в строгой форме задачи возбуждения ЭМ поля во вращающихся волноводах и резонаторах.

Стоит отметить, что возможны иные реализации устройств определения частоты вращения, основанные на описанных эффектах расщепления собственных частот волноводов и резонаторов при вращении, использующие, например, методы спектрального анализа сигналов [164], [165]. В данной работе такие методы не рассматриваются.

1.3 Выводы

Одними из перспективных способов измерения скорости вращения являются описанные в [145], [144] радиочастотные методы, основанные на изменениях параметров ЭМ поля в полостях при вращении, выявленных при строгом решении задач электродинамики о возможности существования ЭМ колебаний и волн в полостях во вращающихся СО [142], [141]. Задача возбуждения ЭМ поля сторонними источниками во вращающихся волноводах и резонаторах в строгом виде не ставилась и не решалась. Численно описанные в [145], [144] методы измерения частоты вращения и их ограничения не исследовались.

Ожидается, что миниатюризации и мобильности устройств измерения угловой скорости радиочастотными способами можно добиться переходом от измерения разности фаз, пропорциональной отношению размеров датчика к длине волны в эффекте Саньяка (1), к измерению смещения собственных частот (расщепления частот) вращающихся волноводов и резонаторов, при котором размер датчика может быть сравним с длиной волны в полости.

Для непосредственной реализации новых радиочастотных способов измерения частоты вращения, их численного исследования и определения их предельно достижимых параметров необходимо учитывать источник колебаний и параметры материалов, из которых изготовлены полости, что приводит к необходимости постановки и решения задач возбуждения волн и колебаний во вращающихся интерферометрах и гироскопах.

2 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В данной главе для исследования одноволнового метода измерения частоты вращения [145] впервые поставлена и решена в строгом виде с использованием уравнений Максвелла в ковариантной форме задача о возбуждении ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе с идеально проводящими стенками и с импедансными стенками при заполнении волновода диэлектриком с тепловыми потерями [166], [167]. Приведены численные результаты, рассчитаны частотные характеристики вращающихся цилиндрических волноводов. Подтвержден эффект расщепления критической частоты вращающегося волновода на две новые частоты, равных разности критической частоты волновода в покое и частоты вращения волновода, умноженной на порядок моды возбужденного ЭМ поля. Численно исследован одноволновый метод измерения частоты вращения [145], даны рекомендации. Полученное строгое решение может быть использовано при проведении экспериментов по определению частоты (скорости) вращения, основанных на применении эффекта Саньяка или для реализации одноволнового способа измерения частоты вращения [145] (Рисунок 1.1).

2.1 Постановка общей задачи

Для пояснения постановки и решения задачи ниже используются уравнения электродинамики вращающихся тел [141], [142].

Введем в свободное пространство инерциальную (декартову) систему отсчета (СО) $K'(x', y', z', iv_{\phi}t) = K'(r', \varphi', z', iv_{\phi}t) = K'(x^{j'})$, где i – мнимая единица, t – время, v_{ϕ} – скорость света в неограниченном пространстве, $v_{\phi} = c/\sqrt{\varepsilon'_r \mu_r}$, c – скорость света в вакууме, $x^{j'} = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^0)$, $x^{\alpha'} = (r', \varphi', z')$ – цилиндрические координаты, $\alpha' = (1', 2', 3')$, $j' = (1', 2', 3', 0')$, и покоящуюся в ней точку наблюдения $P'(x^{j'}, iv_{\phi}t)$. Волновод, образованный металлической цилиндрической оболочкой радиуса a и проводимости σ_1 , пространство внутри которого заполнено изотропной однородной линейной средой без гистерезиса с диэлектрической $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon_0(\varepsilon'_r - i\varepsilon''_r)$ и магнитной $\mu = \mu_0 \mu_r$ проницаемостями, где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, $\mu_r = 1$, вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z' , которая совпадает с осью волновода. Введем жесткую вращающуюся с угловой скоростью Ω СО $K(r, \varphi, z, t) = K(x^{\alpha}, t)$, $\alpha = (1, 2, 3)$ так, что волновод находится в ней в покое. Оси z и z' совестим между собой и с осью вращения волновода и направим вдоль оси волновода. При этом $r' = r$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, $z' = z$. Параметры σ_1 , ε , μ и a считаем измеренными в СО K [141] (Рисунок 2.1).

Такая форма записи СО K и K' обусловлена тем, что соотношения для мирового времени t и координатного (собственного) времени τ в СО K' и K выражаются как $\tau = t\sqrt{-g_{00}}/v_\phi$, где g_{00} – временная компонента метрического тензора g_{ik} , связывающего координаты в неинерциальных СО как $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, представлена в СО K как $g_{00} = -c^2(1 - (\Omega R)^2/c^2) = -c^2(1 - \beta^2)$, где $\beta = \Omega R/v_\phi$, а в инерциальной СО K' – как $g_{00} = 1$ [9], [142], [162]. Здесь ds^2 – квадрат расстояния в метрическом пространстве (интервала между событиями), $dx^i dx^k$ – производные по координатам. Таким образом, преобразования Лоренца, и, в частности, замедление времени, описываются метрическим тензором [153].

Обозначим через V_j область сторонних источников токов и зарядов, расположенных в объеме волновода, неподвижных в СО K и возбуждающих ЭМ поле на частоте ω_0 , измеренной в мировом времени t (λ_0 – длина волны) (Рисунок 2.1). Зависимость сторонних токов и зарядов от времени t принимаем в виде $\exp(i\omega_0 t)$. Считаем, что линейные скорости Ωa всех точек области V_j меньше скорости света, что дает возможность измерять сторонние токи и заряды [141], [162]. В случае, когда $\Omega a > c$ величина g_{00} становится отрицательной, что недопустимо, так как скорость вращения на больших расстояниях ($a > c/\Omega$) сделалась бы больше скорости света – такая система не может быть осуществлена реальными телами [162].

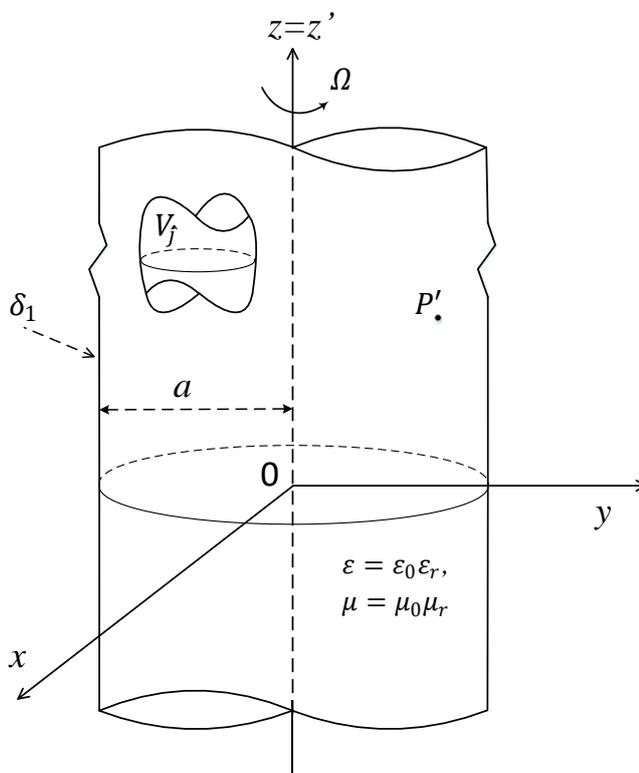


Рисунок 2.1 - К постановке задачи. Вращающийся цилиндрический волновод

Согласно [141], [142], в трехмерном пространстве, соответствующем пространству внутри цилиндра, где векторные операции тождественны операциям в R_3 , уравнения Максвелла для ЭМ поля внутри волновода могут быть записаны в трехмерной форме для трехмерных объектов [141], [143]:

$\bar{E} = E_\alpha = (E_1, E_2, E_3) = (E_r, rE_\varphi, E_z)$ – ковариантный вектор напряженности электрического поля,

$\hat{H} = \hat{H}^{\alpha\beta} = (\hat{H}^{23}, -\hat{H}^{13}, \hat{H}^{12}) = (H_r, rH_\varphi, H_z)$ – контравариантная бивекторная плотность веса +1 для напряженности магнитного поля,

$\hat{D} = \hat{D}^\alpha = (\hat{D}^1, \hat{D}^2, \hat{D}^3) = (r\hat{D}^r, \hat{D}^\varphi, r\hat{D}^z)$ – контравариантная векторная плотность веса +1 для электрической индукции,

$\bar{B} = B_{\alpha\beta} = (B_{23}, -B_{13}, B_{12}) = (rB_{r\varphi}, B_{Rz}, rB_{\varphi z})$ – ковариантный бивектор для магнитной индукции,

$$\text{rot}\hat{H} = \frac{\partial\hat{D}}{\partial t} + \hat{j}^E, \text{rot}\bar{E} = \frac{-\partial\bar{B}}{\partial t} - \bar{j}^H, \text{div}\hat{D} = \hat{\rho}^E, \text{div}\bar{B} = \rho^H, \quad (2.1)$$

где $\hat{j}^E = j^{E,\alpha} = (r\hat{j}^{E,r}, \hat{j}^{E,\varphi}, r\hat{j}^{E,z})$ – контравариантная векторная плотность объемного стороннего электрического тока, $\hat{\rho}^E$ – скалярная плотность стороннего объемного электрического заряда, $\bar{j}^H = j_{\alpha\beta}^H = (r\hat{j}^{H,r}, \hat{j}^{H,\varphi}, r\hat{j}^{H,z})$ – бивектор плотности объемного стороннего магнитного тока, ρ^H – простая скаляр-плотность объемного магнитного заряда [142]. Такое отождествление векторов ЭМ поля с тензорами и тензорными плотностями удовлетворяет теории размерностей физических величин и тензорных объектов [15], [141], [143]. Описание ЭМ поля с помощью уравнений (2.1) необходимо считать математической моделью, так как магнитных токов и зарядов в природе не существует. Индекс E соответствует ЭМ полю E -типа (TM -полю), индекс H – ЭМ полю H -типа (TE -полю).

В [141], [142] в СО K ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям (2.1), с помощью материальных уравнений [141]

$$\hat{D} = \varepsilon(\eta^2 \bar{E}_\perp + \bar{E}_\parallel + W\eta^2[\hat{H}\beta]), \quad (2.2)$$

$$\bar{B} = \mu(\eta^2 \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel + W^{-1}\eta^2[\beta\bar{E}]),$$

где $\eta = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, символы \parallel и \perp означают компоненты векторов напряженностей ЭМ поля, совпадающие и не совпадающие по индексу с соответствующими компонентами $\bar{v} = [\bar{\Omega}\bar{r}]$, $\bar{\beta} = \bar{v}c^{-1}$, $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – характеристическое сопротивление пространства, разделяется в цилиндрической системе координат с помощью электрического V^E и магнитного V^H потенциалов Дебая [168] на ЭМ поле электрического типа (E -типа), когда продольная составляющая бивектора

магнитной индукции $B_{r\varphi} = 0$, и на ЭМ поле магнитного типа (H -типа), когда продольная составляющая векторной плотности электрической индукции $\widehat{D}^z = 0$. Вспомогательные функции V^E и V^H в СО K удовлетворяют записанному в [141], [142] волновому уравнению [141]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V^{E,H}}{\partial r} + \frac{1-\beta^2}{r^2} \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial \varphi^2} + \frac{2\beta}{v_\phi r} \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial \varphi \partial t} + \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3)$$

где $\beta = \Omega r / v_\phi$, $v_\phi = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – фазовая скорость в среде. В результате разделения ЭМ поля с помощью потенциалов Дебая получаются [141], [142] составляющие компонент напряженностей ЭМ поля электрического \bar{E}^E , \widehat{H}^E и магнитного \bar{E}^H , \widehat{H}^H типов [141]:

$$\begin{aligned} E_r^E &= \frac{\partial^2 V^E}{\partial r \partial z}, & E_r^H &= -\frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 V^H}{\partial \varphi \partial t} - W \frac{\partial}{\partial r} \beta \frac{\partial V^H}{\partial r}, \\ E_\varphi^E &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V^E}{\partial \varphi \partial z}, & E_\varphi^H &= \mu \frac{\partial^2 V^H}{\partial t \partial r} - \frac{\beta W}{r} \frac{\partial^2 V^H}{\partial \varphi \partial r}, \\ E_z^E &= \frac{1-\beta^2}{\varepsilon} \widehat{D}^z - \beta W H_r^E, & E_z^H &= -\beta W H_r^H, \\ H_r^E &= \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial^2 V^E}{\partial \varphi \partial t} + W^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \beta \frac{\partial V^{E,H}}{\partial r} \quad (2.4) & H_r^H &= \frac{\partial^2 V^H}{\partial r \partial z}, \\ H_\varphi^E &= -\varepsilon \frac{\partial^2 V^E}{\partial t \partial r} + \frac{\beta W^{-1}}{r} \frac{\partial^2 V^E}{\partial \varphi \partial r}, & H_\varphi^H &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V^H}{\partial \varphi \partial z}, \\ H_z^E &= W^{-1} \beta E_r^E, & H_z^H &= \frac{1-\beta^2}{\mu} B_{r\varphi} + W^{-1} \beta E_r^H, \\ \widehat{D}^z &= -\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V^E}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{r^2} \frac{\partial^2 V^E}{\partial \varphi^2}; & B_{r\varphi} &= -\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V^H}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 V^H}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для решения общей задачи возбуждения вращающегося цилиндрического волновода источниками сторонних токов и зарядов необходимо определить выражения для функций $V^{E,H}$.

2.2 Решение общей задачи

Во вращающейся СО в случае наличия сторонних источников токов и зарядов, ЭМ поле во вращающемся цилиндрическом волноводе будем искать как сумму первичного ЭМ поля $\bar{E}^{E,H,P}$, $\bar{H}^{E,H,P}$, возбуждаемого сторонними источниками токов и зарядов, и вторичного ЭМ поля $\bar{E}^{E,H,S}$, $\bar{H}^{E,H,S}$, возбуждаемого эквивалентными поверхностными токами и зарядами на границе раздела сред при $r = a$ [166], [167]. В таком случае выражение для полного ЭМ поля в волноводе $\bar{E}^{E,H}$, $\bar{H}^{E,H}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}^E &= \bar{E}^{E,P} + \bar{E}^{E,S}, & \bar{H}^E &= \bar{H}^{E,P} + \bar{H}^{E,S}, \\ \bar{E}^H &= \bar{E}^{H,P} + \bar{E}^{H,S}, & \bar{H}^H &= \bar{H}^{H,P} + \bar{H}^{H,S}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При решении задачи возбуждения ЭМ поля в пространстве с метрикой, обусловленной вращением в [141] и [142] возбужденное поле представлено в двух формах. Первая форма показывает, что ЭМ поле в V_3 состоит из бесконечного пространственного спектра неоднородных цилиндрических волн, распространяющихся в продольном направлении, а во второй форме ЭМ поле представлено в виде бесконечного спектра цилиндрических волн, распространяющихся в радиальном направлении. Ниже для решения задачи выберем первую форму представления ЭМ полей. Задача существования ЭМ волн во вращающемся волноводе с идеально проводящими стенками с использованием второго представления решена в [142].

Потенциалы Дебая полного ЭМ поля (2.6), (2.4), (2.5) при наличии сторонних источников токов и зарядов записываются в форме [141], [142]

$$V^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} U_n^E d\alpha, \quad V^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} U_n^H d\alpha, \quad (2.7)$$

где для задачи возбуждения ЭМ поля в волноводе линейная комбинация цилиндрических функций $U_n^{E,H}$ полного поля (2.6) будет выражаться как сумма функций первичного $U_n^{E,H,P}$ и вторичного $U_n^{E,H,S}$ ЭМ полей (2.6):

$$U_n^{E,H} = U_n^{E,H,P} + U_n^{E,H,S}. \quad (2.8)$$

При наличии сторонних источников токов и зарядов в случае, когда граница раздела сред отсутствует, форма представления первичных полей $\bar{E}^{E,H,P}$, $\bar{H}^{E,H,P}$, т.е. $U_n^{E,H,P}$ известна [141]. Они определяются в [141] распределениями сторонних токов и зарядов в области V_j и для удовлетворения условий периодичности ЭМ поля записываются в общей форме [141]:

$$U_n^{E,H,P} = e^{-in\varphi} e^{\pm\sqrt{\alpha^2 - k_n^2} z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}} \begin{cases} H_n^{(2)}(\alpha r) F_n^{(2)E,H}(\alpha), & r > \rho, \\ J_n(\alpha r) F_n^{(1)E,H}(\alpha), & r < \rho, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $H_n^{(2)}(x)$, $J_n(x)$ – цилиндрические функции Ганкеля и Бесселя соответственно, $k_n = k_0 + n\Omega/v_\phi$, $k_0 = \omega_0/v_\phi$, $F_n^{(s),E,H}$ – коэффициенты, определяемые сторонними токами и зарядами [141]:

$$\begin{aligned} F_n^{(s)E} = \frac{1}{8\pi} \int_{V_j} dV \cdot e^{in\psi - \pm\sqrt{\alpha^2 - k_n^2} \zeta} & \left[\hat{j}^{E,r} W \frac{\pm i\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}}{k_n} \frac{\partial R_n^S(\alpha\rho)}{\partial\rho} - \right. \\ & \left. - (\hat{j}^{E,\varphi} + \Omega\rho\hat{\rho}^E) W \frac{\pm n\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}}{k_n\rho} R_n^S(\alpha\rho) - \right. \\ & \left. - \hat{j}^{E,z} W \frac{i\alpha^2}{k_n} R_n^S(\alpha\rho) - \hat{j}^{H,r} \frac{in}{\rho} R_n^S(\alpha\rho) + (\hat{j}^{H,\varphi} + \Omega\rho\hat{\rho}^H) \frac{\partial R_n^S(\alpha\rho)}{\partial\rho} \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$F_n^{(s)H} = \frac{1}{8\pi} \int_{V_j} dV \cdot e^{in\psi - \pm \sqrt{\alpha^2 - k_n^2} \zeta} \left[j^{E,r} \frac{in}{\rho} R_n^S(\alpha\rho) - (j^{E,\varphi} + \Omega\rho\hat{\rho}^E) \frac{\partial R_n^S(\alpha\rho)}{\partial \rho} - \right. \\ \left. - j^{H,r} W^{-1} \frac{\pm i \sqrt{\alpha^2 - k_n^2}}{k_n} \frac{\partial R_n^S(\alpha\rho)}{\partial \rho} - (j^{H,\varphi} + \Omega\rho\hat{\rho}^H) \frac{\pm n \sqrt{\alpha^2 - k_n^2}}{k_n \rho} R_n^S(\alpha\rho) - j^{H,z} W^{-1} \frac{i\alpha^2}{k_n} R_n^S(\alpha\rho) \right], \quad (2.11)$$

где $dV = \rho d\rho d\psi d\zeta$, ρ , ψ , ζ – переменные интегрирования по области сторонних источников V , $R_n^1(\alpha\rho) = H_n^{(2)}(\alpha\rho)$, $R_n^2(\alpha\rho) = J_n(\alpha\rho)$, верхний знак берется при $z - \zeta < 0$, а нижний – при $z - \zeta > 0$. Волновое число

$$k_n = \frac{\omega_n}{v_\phi} = \frac{\omega_0 + n\Omega}{v_\phi} = k_0 + \frac{n\Omega}{v_\phi} \quad (2.12)$$

в данной форме, отличающееся от такового для случая отсутствия вращения [169], получается в [141] при решении волнового уравнения (2.3) для потенциалов Дебая в форме (2.7), (2.9) при наложении на последние условия периодичности по азимутальной координате $U_n^{E,H}(r, \varphi, z) = U_n^{E,H}(r, \varphi + 2\pi, z)$ и условия излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ [141]. Более подробное объяснение можно найти в [141], [142].

Важно отметить, что коэффициенты $F_n^{(s)E}$, определяемые сторонними токами и зарядами для ЭМ поля E -типа (2.10) определяются в том числе радиальной $j^{H,r}$ и азимутальной $j^{H,\varphi}$ составляющими эквивалентных магнитных токов и объемной плотностью $\hat{\rho}^H$ магнитного заряда, вносящей вклад в значение величины $F_n^{(s)E}$ только при $\Omega \neq 0$ (2.10). Таким образом, можно говорить о наличии конвекционных токов и зарядов, обязанных переносом объемной плотности зарядов $\hat{\rho}^H$ при вращении. Аналогичное справедливо и для коэффициента $F_n^{(s)H}$ для ЭМ поля H -типа (2.11), определяемого в том числе азимутальными $j^{E,\varphi}$ и радиальными $j^{E,r}$ составляющими электрических токов и объемной плотностью электрического заряда $\hat{\rho}^E$.

Для записи выражений $U_n^{E,H,S}$ для вторичного ЭМ поля учтем, что составляющие векторов напряженностей ЭМ поля должны иметь конечные величины на оси волновода при $r = 0$ [170]. Тогда в выражениях для компонент векторов вторичного ЭМ поля $\bar{E}^{E,H,S}$, $\bar{H}^{E,H,S}$, определяемых так же по (2.3), (2.4), представим потенциал Дебая вторичного поля как $V^{E,H}$ (2.7), где цилиндрические функции $U_n^{E,H,S}$ в (2.8) записаны как

$$U_n^{E,S} = e^{-in\varphi} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - k_n^2} z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}} a_n^E J_n(\alpha r), \quad 0 \leq r \leq a, \\ U_n^{H,S} = e^{-in\varphi} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - k_n^2} z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}} a_n^H J_n(\alpha r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (2.13)$$

где $a_n^{E,H}$ - коэффициенты, определяемые из граничных условий и содержащие информацию о токах, наведенных на стенках волновода сторонними источниками токов и зарядов.

Линейная комбинация цилиндрических функций полного ЭМ поля (2.8), (2.9), (2.13) выражается как

$$U_n^{E,H} = e^{-in\varphi} e^{\pm\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}z} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \left\{ \begin{array}{l} H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)E,H}(\varkappa) \\ J_n(\varkappa r) F_n^{(1)E,H}(\varkappa) \end{array} + a_n^{E,H} J_n(\varkappa r) \right\}, \quad \begin{array}{l} r > \rho \\ r < \rho \end{array}. \quad (2.14)$$

Подстановка в (2.4) и (2.5) выражений для $V^{E,H}$ (2.7) с учетом (2.14) приводит к следующим выражениям для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля для волн электрического типа [141], [142]:

$$\begin{aligned} E_r^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{rn}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2 U_n^E(\varkappa)}{\partial r \partial z} d\varkappa, \\ E_\varphi^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\varphi n}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 r} \frac{\partial^2 U_n^E(\varkappa)}{\partial \varphi \partial z} d\varkappa, \\ E_z^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{zn}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa^2 - K_n k_n}{\varkappa^2} U_n^E(\varkappa) d\varkappa, \\ H_r^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{rn}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \varepsilon}{\varkappa^2 r} \frac{\partial U_n^E(\varkappa)}{\partial \varphi} + W^{-1} \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \beta \frac{\partial U_n^E(\varkappa)}{\partial r} \right) d\varkappa, \\ H_\varphi^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\varphi n}^E = -e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \varepsilon}{\varkappa^2} \frac{\partial U_n^E(\varkappa)}{\partial r} - \frac{W^{-1} \beta}{\varkappa^2 r} \frac{\partial^2 U_n^E(\varkappa)}{\partial \varphi \partial r} \right) d\varkappa, \\ H_z^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{zn}^E = W^{-1} \beta E_r^E, \end{aligned} \quad (2.15)$$

и для волн магнитного типа:

$$\begin{aligned} E_r^H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{rn}^H = -e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \mu}{\varkappa^2 r} \frac{\partial U_n^H(\varkappa)}{\partial \varphi} + W \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \beta \frac{\partial U_n^H(\varkappa)}{\partial r} \right) d\varkappa, \\ E_\varphi^H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\varphi n}^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \mu}{\varkappa^2} \frac{\partial U_n^H(\varkappa)}{\partial r} - \frac{W \beta}{\varkappa^2 r} \frac{\partial^2 U_n^H(\varkappa)}{\partial \varphi \partial r} \right) d\varkappa, \\ E_z^H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{zn}^H = -\beta W H_r^H, \\ H_r^H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{rn}^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2 U_n^H(\varkappa)}{\partial r \partial z} d\varkappa, \\ H_\varphi^H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\varphi n}^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 r} \frac{\partial^2 U_n^H(\varkappa)}{\partial \varphi \partial z} d\varkappa, \\ H_z^H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{zn}^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa^2 - K_n k_n}{\varkappa^2} U_n^H(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выражения представляют собой первую форму общего решения задачи возбуждения пространства V_3 сторонними токами и зарядами, записанную в [141] для задачи о существовании ЭМ волн во вращающемся волноводе. Эти выражения показывают, что ЭМ поле в пространстве V_3 состоит из бесконечного спектра неоднородных цилиндрических волн, распространяющихся от плоскости $z' = \zeta$ [141]. Согласно (2.9), (2.14), при $\varkappa < k_n$ ЭМ волны являются распространяющимися, а при $\varkappa > k_n$ - экспоненциально затухающими (2.14). При этом все

составляющие ЭМ поля зависят от частоты вращения Ω через коэффициент $\beta = \Omega r/v_\phi$ и волновое число $k_n = k_0 + n\Omega/v_\phi$ (2.12).

Выражения (2.10), (2.11), (2.14), (2.15), (2.16) представляют собой общее решение задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе сторонними источниками токов и зарядов. Для определения частного решения граничных задач, необходимо определять коэффициенты $a_n^{E,H}$ в выражении для вторичного поля (2.14) из граничных условий на стенках волновода.

2.3 Частное решение задачи возбуждения волновода с идеально проводящими стенками

В случае, когда стенки цилиндрического волновода выполнены из идеально проводящего материала (ПЕС – perfect electric conductor, $\sigma_1 \rightarrow \infty$), на них должны выполняться граничные условия (ГУ) для составляющих поля E_z^E и H_z^H :

$$E_z^E(r, \varphi, z) = 0, \quad \frac{\partial H_z^H(r, \varphi, z)}{\partial r} = 0, \quad r = a. \quad (2.17)$$

Подставляем в выражение для продольных составляющих E_z^E и H_z^H выражения H_r^E и \hat{D}^z из (2.15) и выражения для E_r^H и $B_{r\varphi}$ из (2.16) соответственно и получаем:

$$E_z^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{zn}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa^2 - K_n k_n}{\varkappa^2} U_n^E(\varkappa) d\varkappa, \quad (2.18)$$

$$H_z^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa^2 - K_n k_n}{\varkappa^2} U_n^H(\varkappa) d\varkappa.$$

Числитель дроби $\varkappa^2 - K_n k_n$, где $K_n = n\Omega$, не равен нулю при $r = a$, значит для выполнения ГУ (2.17) с учетом (2.18) и (2.14), необходимо потребовать выполнения следующих равенств:

$$U_n^E = e^{-in\varphi} e^{\pm\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2} z} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} (H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)E}(\varkappa) + a_n^E J_n(\varkappa r)) = 0, \quad \text{при } r = a,$$

$$\frac{\partial U_n^H}{\partial r} = e^{-in\varphi} e^{\pm\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2} z} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \left(\frac{\partial H_n^{(2)}(\varkappa r)}{\partial r} F_n^{(2)H} + a_n^H \frac{\partial J_n(\varkappa r)}{\partial r} \right) = 0, \quad r = a.$$

Из полученных уравнений выражаем коэффициенты a_n^E и a_n^H :

$$a_n^E = -\frac{H_n^{(2)}(\varkappa a)}{J_n(\varkappa a)} F_n^{(2)E}, \quad a_n^H = -\frac{(H_n^{(2)}(\varkappa a))'}{(J_n(\varkappa a))'} F_n^{(2)H} \quad \text{при } r = a, \quad (2.19)$$

где штрих над скобкой означает производную по r при $r = a$.

Тогда в общем виде цилиндрические функции $U_n^{E,H}$ (2.8) запишутся как

$$U_n^E = e^{-in\varphi} e^{\pm\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}} \begin{cases} \left\{ H_n^{(2)}(\alpha r) - \frac{H_n^{(2)}(\alpha a)}{J_n(\alpha a)} J_n(\alpha r) \right\} F_n^{(2)E}, & r > \rho, \\ J_n(\alpha r) \left\{ F_n^{(1)E} - \frac{H_n^{(2)}(\alpha a)}{J_n(\alpha a)} F_n^{(2)E} \right\}, & r < \rho; \end{cases} \quad (2.20)$$

$$U_n^H = e^{-in\varphi} e^{\pm\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}} \begin{cases} \left\{ H_n^{(2)}(\alpha r) - \frac{(H_n^{(2)}(\alpha a))'}{(J_n(\alpha a))'} J_n(\alpha r) \right\} F_n^{(2)H}, & r > \rho, \\ J_n(\alpha r) \left\{ F_n^{(1)H} - \frac{(H_n^{(2)}(\alpha a))'}{(J_n(\alpha a))'} F_n^{(2)H} \right\}, & r < \rho. \end{cases} \quad (2.21)$$

Выражения (2.10), (2.11), (2.15), (2.16) совместно с (2.20) и (2.21) определяют ЭМ поле, возбужденное сторонними источниками токов и зарядов внутри вращающегося цилиндрического волновода с идеально проводящей стенкой. Выражения составляющих векторов напряженностей ЭМ полей во вращающемся волноводе удовлетворяют уравнениям Максвелла во вращающейся СО (2.1), граничным условиям электродинамики (2.17), значит они единственны.

2.4 Частное решение граничной задачи с импедансными граничными условиями

В реальности волноводы выполнены из материалов с конечной проводимостью. Для учета потерь на нагревание металлических стенок волновода необходимо сформулировать и решить граничную задачу с импедансными граничными условиями и определить коэффициенты a_n^E и a_n^H из выражения для функции $U_n^{E,H}$ вторичного ЭМ поля (2.14) из импедансных ГУ (ИГУ) на внутренней поверхности вращающегося волновода [166], [167]. В [171] показано, что на поверхностях покоящихся во вращающихся СО тел для касательных компонент напряженностей ЭМ поля выполняются те же граничные условия, что и на поверхности тела, покоящегося в инерциальной СО. Тогда ИГУ на поверхности вращающегося волновода в общем виде имеют форму [142], [141]:

$$E_z^E = -(1 - \beta^2)^{-1/2} Z_2^\omega(\varphi, z) H_\varphi^E, \quad E_\varphi^E = (1 - \beta^2)^{1/2} Z_1^\omega(\varphi, z) H_z^E, \quad \text{при } r = a, \quad (2.22)$$

где $Z_{1,2}^\omega(\varphi, z)$ – поверхностное сопротивление металла на частоте ω_0 . Стенки резонатора считаем выполненными из однородного металла. Тогда поверхностные сопротивления Z_1^ω и Z_2^ω не зависят от z и φ . Множители $(1 - \beta^2)^{\pm 1/2}$ при $\beta \ll 1$ мало зависят от z и φ . Поэтому считаем, что

$$(1 - \beta^2)^{1/2} Z_2^\omega(\varphi, z) \approx (1 - \beta^2)^{-1/2} Z_1^\omega(\varphi, z) = Z^\omega = R^\omega + iX^\omega,$$

где R^ω и X^ω – активная и реактивная составляющие поверхностного импеданса металлических стенок волновода, соответственно. В предположении, что ЭМ поле проникает в металлические стенки только на глубину проникновения δ , имеем $Z^\omega = W^\omega$, где $W^\omega \approx (\omega_0 \mu_1 / \sigma_1)^{1/2} \exp(i\pi/4)$

– характеристическое сопротивление среды, являющейся проводником. Поэтому $R^\omega \approx X^\omega \approx (\omega_0 \mu_1 / 2\sigma_1)^{1/2}$. Комплексное поверхностное сопротивление стенок в волноводе является индуктивным [169].

Таким образом, ИГУ для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе в соответствии с (2.22) в отмеченном приближении имеют вид:

$$E_z = -Z^\omega H_\varphi, \quad E_\varphi = Z^\omega H_z, \quad \text{при } r = a. \quad (2.23)$$

Подставляя

$$E_z = E_z^E + E_z^H, \quad H_z = H_z^E + H_z^H, \quad E_\varphi = E_\varphi^E + E_\varphi^H \quad \text{и} \quad H_\varphi = H_\varphi^E + H_\varphi^H$$

из (2.15), (2.16) в (2.23), находим, что ИГУ удовлетворяются, если компоненты пространственного спектра удовлетворяют условиям

$$E_{z,n}^E = -Z^\omega H_{\varphi,n}^E, \quad E_{\varphi,n}^E = Z^\omega H_{z,n}^E, \quad \text{при } r = a, \quad (2.24)$$

$$E_{z,n}^H = -Z^\omega H_{\varphi,n}^H, \quad E_{\varphi,n}^H = Z^\omega H_{z,n}^H, \quad \text{при } r = a, \quad (2.25)$$

где $E_{z,\varphi}^{E,H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{z,\varphi,n}^{E,H}$, $H_{z,\varphi}^{E,H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{z,\varphi,n}^{E,H}$, т.е. ЭМ поле имеет гармонический спектр частот.

Как было отмечено выше, ИГУ в форме (2.24), (2.25) получены для случая $\beta = \Omega r / v_\phi \ll 1$ и при больших Ω будут включать в себя множители, обязанные вращению (2.22).

2.4.1 Импедансные граничные условия. E -поле

Рассмотрим ИГУ (2.24) для ЭМ поля E -типа. Используя выражения для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля $E_{z,n}^E$ и $H_{\varphi,n}^E$ (2.15), перепишем первое ИГУ в (2.24) в следующей форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varpi^2 - K_n k_n}{\varpi^2} U_n^E(\varpi) d\varpi = Z^\omega \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i k_n}{\varpi^2 W} \frac{\partial U_n^E(\varpi)}{\partial r} \right) d\varpi, \quad \text{при } r = a,$$

учитывая (2.14), $\sqrt{\varpi^2 - k_n^2} = i\sqrt{k_n^2 - \varpi^2}$, умножим последнее выражение на $e^{(im\psi - i\chi\zeta)}$, где m – целое число, χ – фиксированное число и проинтегрируем результат по ψ от 0 до 2π , а по переменной ζ – от $-\infty$ до $+\infty$ и учтем свойства δ -функции, сокращая общие множители, получим:

$$(\varpi^2 - K_n k_n) U_n^E(\varpi) = i Z_0^\omega k_n \frac{\partial U_n^E(\varpi)}{\partial r} \quad \text{при } r = a, \quad (2.26)$$

где $Z_0^\omega = Z^\omega/W$ – нормированное значение импеданса стенок полости. Подставляя в (2.26) выражение для пространственных гармоник цилиндрических функций полного поля $U_n^{E,H}$ (2.14) при $r = a$ ($r > \rho$), выразим из полученных выражений a_n^E (2.14) как:

$$a_n^E = - \frac{(\alpha^2 - K_n k_n) H_n^{(2)}(\alpha r) - Z_0^\omega i k_n \frac{\partial}{\partial r} (H_n^{(2)}(\alpha r))}{(\alpha^2 - K_n k_n) J_n(\alpha r) - Z_0^\omega i k_n \frac{\partial}{\partial r} (J_n(\alpha r))} F_n^{(2)E,H}(\alpha) \quad \text{при } r = a.$$

Если положить $Z_0^\omega = 0$, то получаем значение a_n^E для идеально проводящих стенок волновода (2.19):

$$a_n^E = - \frac{H_n^{(2)}(\alpha a)}{J_n(\alpha a)} F_n^{(2)E}.$$

При этом в общем виде цилиндрические функции U_n^E запишутся как

$$U_n^E = e^{-in\varphi} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - k_n^2} z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_n^2}} \times \begin{cases} \left\{ H_n^{(2)}(\alpha r) - \frac{(\alpha^2 - K_n k_n) H_n^{(2)}(\alpha r) - Z_0^\omega i k_n \frac{\partial}{\partial r} (H_n^{(2)}(\alpha r))}{(\alpha^2 - K_n k_n) J_n(\alpha r) - Z_0^\omega i k_n \frac{\partial}{\partial r} (J_n(\alpha r))} J_n(\alpha r) \right\} F_n^{(2)E}, & r > \rho \\ J_n(\alpha r) \left\{ F_n^{(1)E} - \frac{(\alpha^2 - K_n k_n) H_n^{(2)}(\alpha r) - Z_0^\omega i k_n \frac{\partial}{\partial r} (H_n^{(2)}(\alpha r))}{(\alpha^2 - K_n k_n) J_n(\alpha r) - Z_0^\omega i k_n \frac{\partial}{\partial r} (J_n(\alpha r))} F_n^{(2)E} \right\}, & r < \rho \end{cases} \quad (2.27)$$

Решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе с импедансными стенками сторонними источниками токов и зарядов для ЭМ поля E -типа определяется выражениями (2.15) и (2.27).

2.4.2 Импедансные граничные условия. H -поле

Рассмотрим ИГУ (2.25) для ЭМ поля H -типа. Используя выражения для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля $H_{z,n}^H$ и $E_{\varphi,n}^H$ (2.16), перепишем второе ИГУ (2.25) в следующей форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \mu}{\alpha^2} \frac{\partial U_n^H(\alpha)}{\partial r} - \frac{W\beta}{\alpha^2 r} \frac{\partial^2 U_n^H(\alpha)}{\partial \varphi \partial r} \right) d\alpha = Z^\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 - K_n k_n}{\alpha^2} U_n^H(\alpha) d\alpha \quad \text{при } r = a.$$

Учтем, что $\frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-in\varphi} = -ine^{-in\varphi}$, а $W/(\mu\nu_\phi) = 1$ в левой части равенства, умножим последнее выражение на $e^{(im\psi - i\chi\zeta)}$, где m – целое число, χ – фиксированное число и проинтегрируем результат по ψ от 0 до 2π , а по переменной ζ – от $-\infty$ до $+\infty$ и учтем свойства δ -функции, сокращая общие множители, получим, что ИГУ для $H_{z,nt}^H$ и $E_{\varphi,nt}^H$ выполняются при $r = a$:

$$ik_n \frac{\partial U_n^H(\varpi)}{\partial r} = Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) U_n^H(\varpi) \quad \text{при } r = a. \quad (2.28)$$

Таким образом, для магнитной функций U_{nm}^H получили ИГУ:

$$ik_n \frac{\partial U_n^H(\varpi)}{\partial r} = Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) U_n^H(\varpi) \quad \text{при } r = a. \quad (2.29)$$

Разделяя (2.29) на Z_0^ω , обозначая через $Y_0 = Z_0^{-1}$ поверхностную проводимость, получаем ИГУ для ЭМ поля H -типа

$$(\varpi^2 - K_n k_n) U_n^H(\varpi) = iY_0 k_n \frac{\partial U_n^H(\varpi)}{\partial r} \quad \text{при } r = a,$$

симметричное ИГУ для ЭМ поля E -типа (2.26).

Для определения коэффициента a_n^H в (2.14) из ИГУ (2.28) подставим выражения пространственных гармоник функций $U_n^H(\varpi)$ ЭМ поля из (2.14) в (2.29). Получаем:

$$a_n^H = - \frac{ik_n \frac{\partial}{\partial r} (H_n^{(2)}(\varpi r)) - Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) H_n^{(2)}(\varpi r)}{ik_n \frac{\partial}{\partial r} (J_n(\varpi r)) - Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) J_n(\varpi r)} F_n^{(2)H}(\varpi) \quad \text{при } r = a.$$

Если в полученном выражении положить $Z^\omega = 0$, то получаем значение a_n^H для идеально проводящих стенок волновода (2.19):

$$a_n^H = - \frac{(H_n^{(2)}(\varpi r))'}{(J_n(\varpi r))'} F_n^{(2)H}.$$

При этом в общем виде цилиндрические функции U_n^H запишутся как

$$U_n^H = e^{-in\varphi} e^{\pm \sqrt{\varpi^2 - k_n^2} z} \frac{\varpi}{\sqrt{\varpi^2 - k_n^2}} \times \begin{cases} \left\{ H_n^{(2)}(\varpi r) - \frac{ik_n \frac{\partial}{\partial r} (H_n^{(2)}(\varpi r)) - Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) H_n^{(2)}(\varpi r)}{ik_n \frac{\partial}{\partial r} (J_n(\varpi r)) - Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) J_n(\varpi r)} J_n(\varpi r) \right\} F_n^{(2)H}, & r > \rho, \\ J_n(\varpi r) \left\{ F_n^{(1)H} - \frac{ik_n \frac{\partial}{\partial r} (H_n^{(2)}(\varpi r)) - Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) H_n^{(2)}(\varpi r)}{ik_n \frac{\partial}{\partial r} (J_n(\varpi r)) - Z_0^\omega (\varpi^2 - K_n k_n) J_n(\varpi r)} F_n^{(2)H} \right\}, & r < \rho. \end{cases} \quad (2.30)$$

Решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе с импедансными стенками сторонними источниками токов и зарядов для ЭМ поля H -типа определяется выражениями (2.16) и (2.30).

2.5 Анализ полученного решения. Эффект расщепления частот

Рассмотрим ЭМ поле E -типа (2.15), (2.20). В (2.27) и (2.30) \varkappa – поперечный коэффициент распространения азимутальной гармоники ЭМ поля, а $\chi_n = \sqrt{k_n^2 - \varkappa^2}$ – продольный коэффициент распространения, где $k_n = (\omega_0 + n\Omega)/v_\phi$ (2.12). Анализ полученных выражений (2.15), (2.20) показывает, что ЭМ поле в волноводе представляет из себя набор пространственных гармоник с коэффициентами распространения χ_n , зависящими от частоты вращения Ω и номера гармоники n через волновое число $k_n = k_0 + n\Omega/v_\phi$ (2.12):

$$\chi_n = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + n\Omega}{v_\phi}\right)^2 - \varkappa^2}. \quad (2.31)$$

Как было показано в [142], в таком случае критическое значение волнового числа будет определяться как $k_{n,кр} = \varkappa = u_{np}^E/a$, а критическая частота волновода $\omega_{0,кр}$ и критическая длина волны $\lambda_{0,кр}$ для моды порядка n будут равны

$$\omega_{0,кр} = \frac{u_{np}^E v_\phi}{a} - n\Omega, \quad \lambda_{0,кр} = \frac{2\pi a}{u_{np}^E - an\Omega/v_\phi}, \quad (2.32)$$

где $u_{np}^E = \varkappa a$ – корни порядка $p = 1, 2, 3 \dots$ дисперсионного уравнения $J_n(\varkappa a) = 0$ для ЭМ поля E -типа (2.20) [142].

Тогда каждой паре значений n и p будет соответствовать ЭМ волна E_{np}^E , распространяющаяся во вращающемся цилиндрическом волноводе. Полное ЭМ поле E -волн во вращающемся волноводе состоит из наложения ЭМ полей E_{np}^E -волн:

$$\begin{aligned} E_z^E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} E_{zn1}^E + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} E_{zn2}^E + \dots \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} E_{znp}^E = \\ &= E_{z01}^E + E_{z02}^E + E_{z03}^E + \dots \\ &\dots + e^{-in\varphi} (E_{z11}^E + E_{z12}^E + E_{z13}^E + \dots) + e^{in\varphi} (E_{z-11}^E + E_{z-12}^E + E_{z-13}^E + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Как было показано в [142] для задачи существования ЭМ волн во вращающемся волноводе, в (2.20), (2.33) продольный коэффициент распространения E_{np}^E -волны (2.31) с положительным индексом $n = 0, 1, 2, \dots$ отличается от коэффициента распространения с отрицательным индексом $n = -1, -2, -3, \dots$. Поэтому во вращающемся волноводе E_{np}^E -волна распадается на сумму двух волн – положительной E_{np}^E -волны с коэффициентом распространения [142]

$$\chi_{np}^+ = \chi_{|n|p}^+ = \sqrt{k_{|n|}^2 - \left(\frac{u_{np}^E}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + |n|\Omega}{v_p}\right)^2 - \left(\frac{u_{np}^E}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 + n\Omega}{v_p}\right)^2 - \left(\frac{u_{np}^E}{a}\right)^2}, \quad (2.34)$$

и отрицательной $E_{-|n|p}^-$ -волны с коэффициентом распространения

$$\chi_{-|n|p}^- = \sqrt{k_{-|n|}^2 - \left(\frac{u_{np}^E}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 - |n|\Omega}{v_p}\right)^2 - \left(\frac{u_{np}^E}{a}\right)^2}. \quad (2.35)$$

При этом, как было показано для задачи существования ЭМ волн во вращающемся волноводе в [142], критическая частота $\omega_{n,\text{кр}}$ и критическая длина $\lambda_{0,\text{кр}}$ волны вращающегося волновода (2.32) для ЭМ поля E_{np} будут определяться частотой вращения волновода Ω и отличаться для различных значений $n = 1, 2, 3 \dots$ и $n = -1, -2, -3 \dots$, т.е. для вращающихся по и против часовой стрелки парциальных гармоник E_{np} ЭМ поля:

$$\begin{aligned} \lambda_{0,\text{кр}}^+ &= \frac{2\pi a}{u_{np}^E - a|n|\Omega/v_\phi}, & \lambda_{0,\text{кр}}^- &= \frac{2\pi a}{u_{np}^E + a|n|\Omega/v_\phi}, \\ \omega_{0,np}^{+\text{кр}} &= \frac{u_{np}^E v_\phi}{a} - n\Omega, & \omega_{0,np}^{-\text{кр}} &= \frac{u_{np}^E v_\phi}{a} + n\Omega. \end{aligned} \quad (2.36)$$

То есть, критическая частота волновода расщепляется при вращении [142]. Таким образом, каждой критической частоте $\omega_{0,np}^{\text{кр},0}$ волновода в покое для гармоник порядка n соответствует две новых критических частоты $\omega_{0,np}^{\pm\text{кр}}$, которые появляются при вращении волновода с частотой Ω и отстают от критической частоты волновода в покое на величину, равную произведению частоты вращения Ω и номера гармоники n , $\omega_{0,np}^{\text{кр},0} \pm n\Omega$.

Согласно (2.36), если $n = 0$, $\Omega \neq 0$, в волноводе возбуждается мода E_{0p} с критической частотой $\omega_0 = u_{0p}^E v_\phi / a$, которая не несет в себе информации о вращении. Если волновод радиуса $a = u_{np}^E v_\phi / \omega_0$ вращается с угловой частотой Ω и в нем возбуждается ЭМ поле при $n \geq 1$, то в нем могут распространяться типы волн с критическими частотами $\omega_{0,np}^{\pm\text{кр}} = \frac{u_{np}^E v_\phi}{a} \mp n\Omega$ (2.36), что было использовано для определения частоты вращения волновода [145], [142] как $\Omega = |\omega_{0,np}^{\text{кр},0} - \omega_{0,np}^{+\text{кр}}| / n$, где $\omega_{0,np}^{\text{кр},0}$ – известная критическая частота покоящегося волновода при $\Omega = 0$. Однако при любом выбранном $N = n \geq 1$ во вращающемся волноводе будут распространяться моды порядка $n < N$ (в случае $N = 1$ – мода порядка $n = 0$), которые для определения $\omega_{0,Np}^{+\text{кр}}$ необходимо будет отфильтровать.

Волну с наименьшей критической частотой вращения $\omega_{0,11}^{+\text{кр}}$ при $n = p = 1$ будем считать основной [142]. Значение $\frac{u_{11}^E v_\phi}{a}$ определяет критическую частоту неподвижного волновода при $\Omega = 0$ (2.36). Обозначим ее как $\omega_{0,11}^{\text{кр},0} = \frac{u_{11}^E v_\phi}{a}$ и определим размер радиуса волновода, необходимый для распространения E_{11}^0 -волны в неподвижном волноводе как $a_{11} = \frac{u_{11}^E v_\phi}{\omega_{0,11}^{\text{кр},0}}$ (что совпадает с выражением для критических частот волновода в покое [169]). В таком случае, из

(2.36) видно, что если в волноводе возбуждается ЭМ поле на частоте $\omega_{\text{в0з}}$, то можно записать следующее:

- если в **неподвижном** волноводе частота $\omega_{\text{в0з}} > \omega_{0,11}^{\text{кр},0}$, то в нем распространяется E_{01} -волна и E_{11}^0 -волна;
- если во **вращающемся** волноводе частота $\omega_{\text{в0з}} > \omega_{0,11}^{+\text{кр}} = \omega_{0,11}^{\text{кр},0} - \Omega$ и $\omega_{\text{в0з}} < \omega_{0,11}^{-\text{кр}} = \omega_{0,11}^{\text{кр},0} + \Omega$, то в нем распространяется E_{11}^+ -волна (2.33);
- если во **вращающемся** волноводе частота $\omega_{\text{в0з}} > \omega_{0,11}^{-\text{кр}} = \omega_{0,11}^{\text{кр},0} + \Omega$, то в нем распространяются E_{11}^- -волна и E_{11}^+ -волна.

Стоит отметить, что при любом фиксированном значении $N = n \geq 1$ в волноводе будут существовать и другие типы волн, для которых $n \leq N$. В случае $N = 1$ – моды порядка $n \leq 1$, т.е. $n = 0$ [172]. Таким образом, если выбрать корень дисперсионного уравнения u_{0p}^E для $p = 0$, то u_{01}^E , то $u_{01}^E < u_{11}^E$, то есть в волноводе радиуса $a_{11} = \frac{u_{11}^E v_\phi}{\omega_{\text{кр},0}^E}$ может распространяться и волна $\omega_{0,01}^{\text{кр},0}$, которая является критической частотой волновода в случае волн E -типа, но информации о вращении не несет, так как при $n = 0$ получаем, что $k_n = k_0 + 0 \cdot \Omega/v_\phi = k_0$ (2.12). Данную частоту можно вычислить и отфильтровать.

В случае, если частота вращения Ω так велика, что

$$\omega_{0,01}^{\text{кр},0} = \frac{u_{01}^E v_\phi}{a_{11}} > \omega_{0,11}^{+\text{кр}} = \frac{u_{11}^E v_\phi}{a} - \Omega, \quad (2.37)$$

то первой в волноводе в случае ЭМ поля E -типа начинает распространяться волна с критической частотой $\frac{u_{11}^E v_\phi}{a} - \Omega$. В данном случае фильтрация не требуется, что упрощает измерение (очень большой) частоты вращения.

При учете (2.34), (2.35), как было показано в [9], [142] для задачи существования ЭМ волн во вращающемся цилиндрическом волноводе, разность фаз двух пространственных гармоник, распространяющихся в противоположных направлениях относительно орта 1_ϕ при условии $a \gg \lambda_0$, $\lambda_0 \ll \lambda_{0,n,\text{кр}}$, т.е. $\varepsilon \ll k_n$ и $\Omega a/v_\phi \ll 1$ получим [142], [141]:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{np}^E &= (\sqrt{k_n^2 - \varepsilon^2} - \sqrt{k_n^2 - \varepsilon^2})L = \left[k_n \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{k_n} \right)^2 \right] - k_n \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{k_n} \right)^2 \right] \right] L = \\ &= \frac{\omega_0}{v_\phi} 2 \frac{\Omega a}{v_\phi} L = \frac{4\pi a \Omega}{\lambda_0 v_\phi} L, \end{aligned} \quad (2.38)$$

что совпадает с формулой эффекта Саньяка (1) [15].

Общий анализ полученных выражений для поля E -типа. При $\Omega = 0$, т.е. при неподвижном волноводе, выражения (2.15), (2.16) превращаются в известные выражения [168]. При $\Omega \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$ во-первых, критическая частота волновода расщепляется на две новых критических частоты, зависящие от Ω , а во-вторых, существенно изменяются радиальная и азимутальная составляющие вектора \vec{H} , а появление продольной составляющей этого вектора целиком обязано только вращению волновода (2.15). При $\omega_0 = 0$, а $\Omega \neq 0$ волновое число $k_n = n\Omega/v_\phi \neq 0$ и возбуждаются все три составляющие вектора \vec{E} и остаются все три составляющих вектора \vec{H} , но последние пропорциональны частоте вращения через коэффициент β и обязаны конвекционным токам, возникающим при вращении полости (2.9), (2.10). Это значит, что в статическом ЭМ поле ($\omega_0 = 0$) могут существовать электрические и магнитные поля, связанные частотой вращения. Таким образом, как было показано в [141], [142], при отсутствии сторонних токов и при не равенстве сторонних зарядов нулю, в общем случае во вращающейся полости будут возбуждаться все компоненты ЭМ поля. Можно говорить о появлении статического магнитного поля во вращающемся проводнике, описываемом эффектом Барнетта [173].

Анализ решения для ЭМ полей H -типа можно выполнить аналогичным образом.

2.6 Численные результаты

Для проведения расчетов с целью анализа способа измерения частоты вращения по возбужденному во вращающемся цилиндрическом волноводе ЭМ полю будем использовать полученное аналитическое решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе с импедансными стенками (2.15), (2.16), (2.27), (2.30) для частного случая, когда сторонним источником токов и зарядов является элементарный электрический вибратор (ЭЭВ).

2.6.1 Возбуждение вращающегося волновода элементарным электрическим вибратором

В случае, когда ЭМ поле возбуждается продольным ЭЭВ при $\Omega/\omega_0 \ll 1$, имеем

$$\hat{j}^{E,z} = e^{i\omega_0 t} \hat{I}^E L \hat{\delta}(z - z_0) \hat{\delta}(r - r_0) \frac{\hat{\delta}(\varphi - \varphi_0)}{r}, \quad (2.39)$$

$$\hat{j}^{E,r} = \hat{j}^{E,\varphi} \equiv 0; \quad \hat{j}_{\alpha,\beta}^{H,M} = 0, \quad \rho^H = 0,$$

где координаты $0 < r_0 < a$, z_0 , φ_0 определяют положение ЭЭВ в волноводе, L – длина ЭЭВ, \hat{I}^E – плотность линейного тока, $\hat{\delta}$ – скалярная плотность веса +1 согласно обычному определению дельта-функции, принятому в теории тяготения [141], [174].

Для плотности конвекционного электрического тока $\hat{\rho}^E$, входящего в выражения для коэффициентов $F_n^{(s)E}$ и $F_n^{(s)H}$, (2.10) и (2.11) соответственно, из закона сохранения электрического заряда [162] имеем

$$\hat{\rho}^E = -\frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial j^{E,R}}{\partial r} = \frac{iE_L}{i\omega_0 r_0} \delta(z - z_0) \delta'(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (2.40)$$

где $\delta'(r - r_0)$ – производная δ -функции.

Подставляя (2.39) и (2.40) в (2.10) и (2.11), используя основное свойство δ -функции при интегрировании и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными отношению Ω/ω_0 , получаем

$$\begin{aligned} F_n^{(1)E} &\approx -\frac{i\alpha^2 W I^{E_L}}{8\pi k_n} e^{in\varphi_0} e^{\mp \sqrt{\alpha^2 - k_n^2} z_0} H_n^{(2)}(\alpha r_0), \\ F_n^{(2)E} &\approx -\frac{i\alpha^2 W I^{E_L}}{8\pi k_n} e^{in\varphi_0} e^{\mp \sqrt{\alpha^2 - k_n^2} z_0} J_n(\alpha r_0), \\ F_n^{(s)H} &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Таким образом, в приближении $\Omega/\omega_0 \ll 1$, $U_n^H \approx 0$ и ЭМ поля H -типа в волноводе не возбуждаются. В данном случае очень важно отметить, что выражения (2.41) получены из условия малости скорости вращения Ω по сравнению с частотой возбуждаемого во вращающейся полости ЭМ поля ω_0 , $\Omega/\omega_0 \ll 1$. С увеличением же частоты вращения Ω в выражениях (2.9), (2.10) слагаемыми, пропорциональными Ω/ω_0 , нельзя будет пренебречь. Следовательно, при возбуждении ЭМ поля E -типа получим, что $F_{nm}^{(s)H} \neq 0$ за счет конвекционных токов $\hat{\rho}^E$ в выражении (2.9), а вместе с этим и $U_{nm}^H \neq 0$, то есть, согласно записанным выше выводам, во вращающейся полости будет возбуждаться и поле магнитного типа.

Выражения (2.15), (2.27), (2.41) дают возможность рассчитать ЭМ поля E -типа по (2.15) и построить частотную характеристику ЭМ поля внутри вращающегося волновода.

2.6.2 Частотная характеристика вращающегося цилиндрического волновода

Частотные характеристики (ЧХ) возбужденного в волноводе ЭМ поля, которые показывают критические частоты $\omega_{0,np}^{\text{кр},0}$ волновода в состоянии покоя (при $\Omega = 0$) и расщепленные критические частоты $\omega_{0,np}^{\pm \text{кр}} = \omega_{0,np}^{\text{кр},0} \pm n\Omega$ вращающегося волновода, для E_N -поля при выбранном значении $n = N$ будем рассчитывать как

$$G_N(f) = |\hat{D}_N^z(f)|^2 / |\hat{D}_N^z(f)|_{\max}^2, \quad (2.42)$$

где $f = \omega/2\pi$, $\widehat{D}_N^z = e^{i\omega_0 t} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} U_N^E d\xi$ – электрическая индукция возбужденного во вращающемся цилиндрическом волноводе ЭМ поля E_N -типа, вычисленная по (2.4), (2.20), (2.41).

В работе все представленные ЧХ рассчитаны для следующего случая: ЭЭВ возбуждает во вращающемся цилиндрическом волноводе ЭМ поле на частоте $f_0 = 10$ ГГц, волновод заполнен кварцем с параметрами $\varepsilon_r' = 3,8$, $\tan\delta = 10^{-4}$, материал стенок волновода – серебро, $\sigma_1 = 6,139 \cdot 10^7$ См/м, частота вращения равна $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ рад/с. ЭЭВ расположен в точке с координатами $(0,9a, 30^\circ, 0)$, а точка наблюдения имеет координаты $(0,9a, 30^\circ, 5a)$. Для учета тепловых потерь на нагревание диэлектрика, заполняющего волновод, используется следующее выражение для k_n (2.12):

$$k_n = \beta_n - i\alpha_n \approx \omega_n \sqrt{\varepsilon' \mu} - i \frac{\omega_n}{2\omega_0} \sigma W, \quad (2.43)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon_r'$ – диэлектрическая проницаемость, σ – удельная проводимость (См/м). Радиус волновода $a_{11} = 9,4$ мм выбран из условия существования основного типа волн $a_{11} = u_{11}^E v_\phi / \omega_0$ при $n = N = 1$, $p = 1$ ((2.36) при $\Omega = 0$) и $a_{31} = 15,6$ мм при $n = N = 3$, $p = 1$. Ниже (Рисунок 2.2) приведены соответствующие ЧХ, построенные по (2.42), на которых отображен сдвиг ЧХ вращающегося волновода по сравнению с ЧХ волновода в покое на величину, пропорциональную частоте вращения Ω за счет появления новой (меньшей) критической частоты $\omega_{0,np}^{+кр}$ (2.36), обязанной вращению.

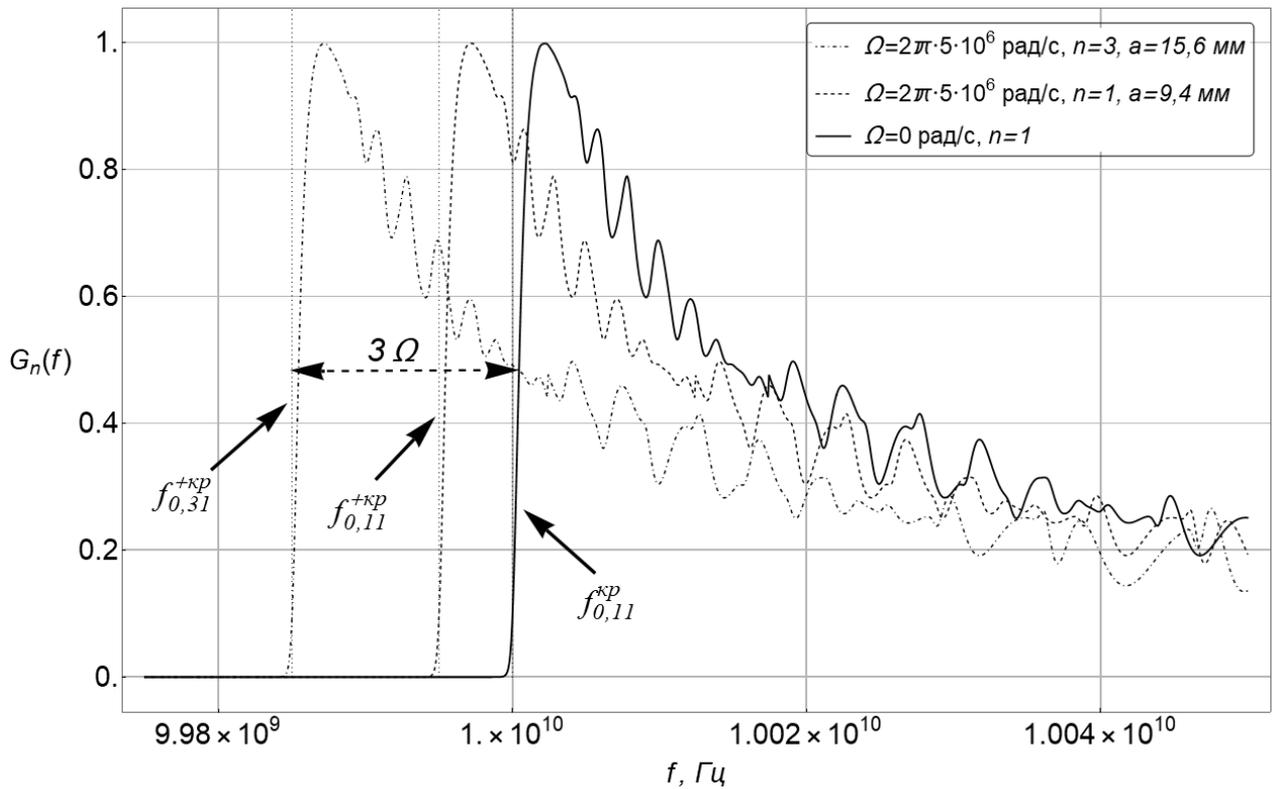


Рисунок 2.2 – Нормированные ЧХ (2.42) при $N = 1$, $N = 3$. Вертикальными пунктирными линиями отмечены $f_{0,11}^{кр,0} = \omega_{0,11}^{кр,0}/2\pi$ – критическая частота волновода в покое, $f_{0,11}^{+кр} = (\omega_{0,11}^{кр,0} - n\Omega)/2\pi$ – критическая частота вращающегося волновода (2.36) [167]

2.6.3 Критические частоты вращающегося цилиндрического волновода

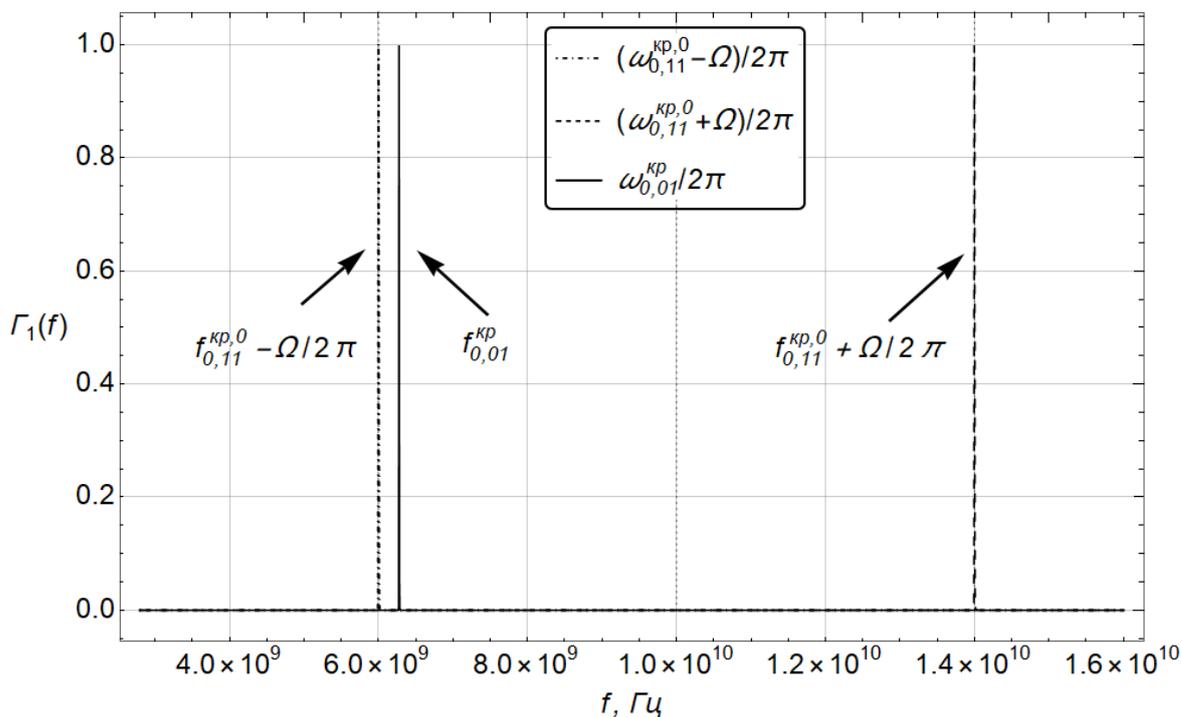
Для наблюдения эффекта расщепления критических частот вращающегося цилиндрического волновода построим ЧХ для пространственных составляющих цилиндрических функций U_n^E (2.27) с учетом (2.41):

$$\Gamma_N(f) = |U_N^E(f)|^2 / |U_N^E(f)|_{max}^2 \quad (2.44)$$

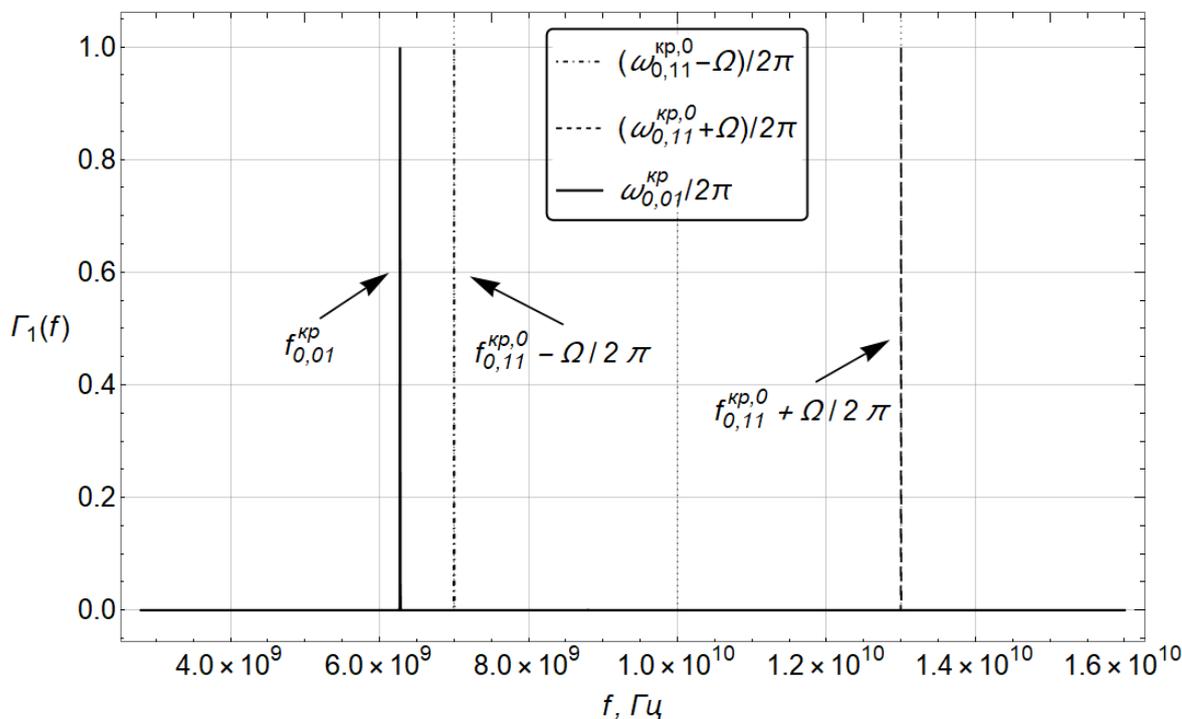
для случая, когда цилиндрический волновод радиуса $a_{11} = 18,3$ мм возбуждается источником поля – ЭЭВ на частоте $f_0 = 10$ ГГц, $N = 1$, стенки изготовлены из материала бесконечной проводимости (РЕС), материал заполнения – кварц ($\epsilon_r' = 3,8$, $\tan\delta = 10^{-4}$). Радиус волновода a выбран из условия существования основного типа волн $a_{11} = u_{11}^E v_\phi / \omega_0$ при $n = N = 1$, $p = 1$ в (2.36) для $\Omega = 0$ (Рисунок 2.3).

Из приведенных нормированных ЧХ (Рисунок 2.3) видно, что при вращении при $N = n = 1$ критическая частота покоя $\omega_{0,11}^{кр,0}$ распадается на 2 новых критических частоты вращения $\omega_{0,11}^{кр,0} \pm N\Omega$, каждая из которых отстоит от критической частоты волновода в покое на величину,

равную $|N|\Omega$, что численно подтверждает описанный ранее эффект расщепления критической частоты волновода при вращении.



а) $\Omega = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^9$ рад/с;



б) $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ рад/с;

Рисунок 2.3 – Нормированные ЧХ (2.44)

При этом можно наблюдать, что в случае, когда частота вращения Ω мала (Рисунок 2.3 б), первой во вращающемся волноводе радиуса a_{11} появится волна на частоте $\omega_{01}^{\text{кр},0}$. То есть, без дополнительной фильтрации новая критическая частота вращения $\omega_{0,11} - N\Omega = \omega_{0,11} - \Omega$ не будет заметна (Рисунок 2.3 б). В случае же, когда Ω так велика, что, согласно (2.37)

$$\omega_{01}^{\text{кр},0} = \frac{u_{01}^E v_\phi}{a_{11}} > \frac{u_{11}^E v_\phi}{a_{11}} - \Omega,$$

то первой в волноводе будет возбуждаться волна на частоте равной $\frac{u_{11}^E v_\phi}{a} - \Omega$, которую можно наблюдать без фильтрации частоты $\omega_{01}^{\text{кр},0}$ (Рисунок 2.3 а). Для наблюдения такого эффекта для случая ЭМ поля E -типа необходимо, чтобы частота вращения волновода Ω и частота возбуждаемого в нем ЭМ поля ω_0 были связаны следующими соотношениями:

$$\Omega > \frac{u_{11}^E - u_{01}^E}{a_{11}} v_\phi. \quad (2.45)$$

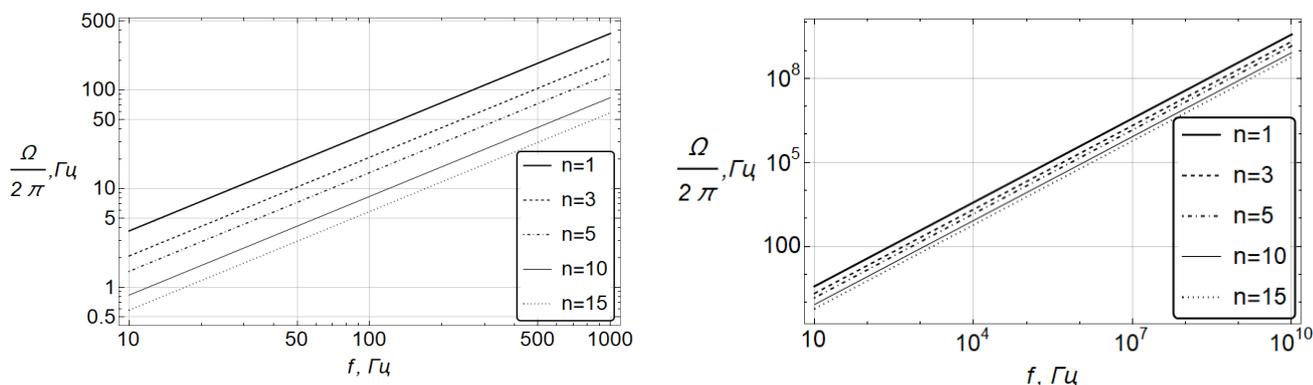
Таким образом, при малых значениях частоты вращения $\Omega < \frac{u_{11}^E - u_{01}^E}{a_{11}} v_\phi$ основная критическая частота вращающегося волновода радиуса $a_{11} = u_{11}^E v_\phi / \omega_0$ определяется значением $\omega_{0,01}^{\text{кр},0} = \frac{u_{01}^E v_\phi}{a_{11}}$ (2.37). В случае же, когда частота Ω удовлетворяет условию (2.45), критическая частота вращающегося волновода определяется величиной $\omega_{0,11}^{+\text{кр}} = \omega_0 - \Omega = \frac{u_{11}^E v_\phi}{a_{11}} - \Omega$. При этом частота вращения волновода может быть измерена как (2.36):

$$\Omega = \frac{u_{11}^E v_\phi}{a} - \omega_{0,11}^{+\text{кр}}. \quad (2.46)$$

Для общего случая случайного значения $n = N$ можно записать выражение:

$$\Omega > \frac{\omega_0}{N} \left(1 - \frac{u_{01}^E}{u_{N1}^E}\right). \quad (2.47)$$

Из (2.47) видно, что с ростом N частота вращения Ω , которую возможно измерить данным способом, изменяется незначительно (Рисунок 2.4): изменение значения N с 1 до 15 дает уменьшение минимальной измеряемой частоты вращения (увеличение разрешения метода измерения) меньше, чем на порядок. Однако при этом все волны меньших порядков следует отфильтровать, а размер (радиус) волновода увеличится.



$$\text{а) } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \leq 10^3 \text{ Гц;}$$

$$\text{б) } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \leq 10^{10} \text{ Гц;}$$

Рисунок 2.4 – Зависимость минимальной измеряемой частоты вращения Ω от частоты возбуждения волновода ω_0 и выбранного порядка возбуждаемой моды n (2.47), 1 Гц = 60 грм (оборотов в минуту)

Как было показано при анализе полученных при решении выражений, расщепление критической частоты волновода при вращении происходит для каждого значения n порядка возбуждаемой во вращающемся волноводе моды (2.36). Ниже приведены соответствующие ЧХ для различных значений $n = N > 1$ для случая, когда цилиндрический волновод возбуждается ЭЭВ на частоте $f_0 = 10$ ГГц, стенки изготовлены из РЕС материала, волновод заполнен кварцем ($\varepsilon_r' = 3,8$, $\tan\delta = 10^{-4}$). Радиус волновода a_{N1} выбран из условия существования основного типа волн $a_{N1} = u_{N1}^E v_\phi / \omega_0$ при $N = 1, 3, 5$, $p = 1$ в (2.36) для $\Omega = 0$ (Рисунок 2.5).

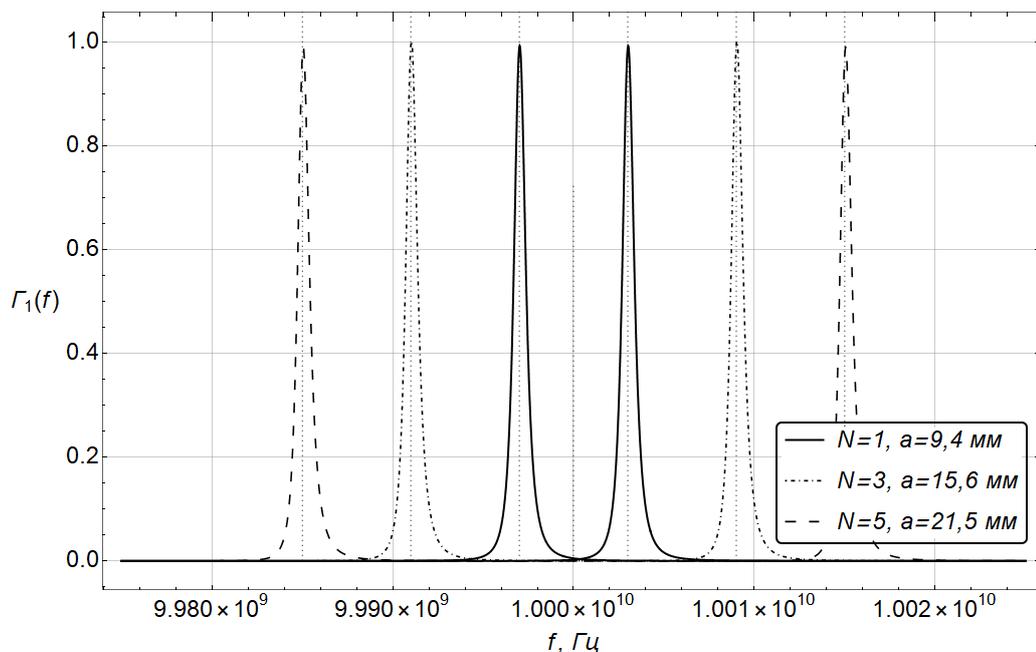


Рисунок 2.5 – Нормированные ЧХ (2.42). Вертикальными пунктирными линиями отмечены критическая частота волновода в покое $\omega_{0,N1}^{\text{кр},0}$ и критические частоты вращающегося волновода $\omega_{0,N1}^{\pm\text{кр}} = \omega_{0,N1}^{\text{кр},0} \mp N\Omega$, $N = 1, 3, 5$, $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с

Из ЧХ для расщепленных частот (Рисунок 2.5), как и из ЧХ для полного ЭМ поля вращающегося волновода (Рисунок 2.2) видно, что, согласно (2.36), с ростом N смещение ЧХ становится заметнее ($\omega_{0,11}^{+кр} = \omega_0 - N\Omega$), что говорит о возможности измерять меньшие Ω с ростом N . Однако это повлечет за собой увеличение радиуса волновода (увеличение размеров измерительного устройства) и потребует фильтрации всех волн меньших порядков.

Стоит отметить, что разрешение рассматриваемого одноволнового радиочастотного способа измерения частоты вращения будет определяться не только используемыми материалами и порядком возбужденной моды, но и возможностью измерительной аппаратуры обнаружить малейшие изменения критических частот волноводов, т.е. разрешением используемых при измерении анализаторов спектров. Современные коммерчески доступные анализаторы спектра в усовершенствованных своих конфигурациях способны обеспечивать разрешение до одной сотой Герца [175], что на данный момент ограничивает возможности измерения частоты вращения указанными радиочастотными способами до 0,6 оборотов в минуту или 13 градусов в час.

При анализе полученного решения [142] было сказано о зависимости параметров возбужденного во вращающемся волноводе ЭМ поля от частоты вращения, а именно – о частотной дисперсии для критических частот, критических длин волн, групповой и фазовой скоростей и коэффициентов распространения.

Рассмотрим зависимость продольного коэффициента распространения ЭМ волн во вращающемся волноводе от частоты вращения (2.31):

$$\chi_{np} = \sqrt{k_n^2 - \alpha^2}. \quad (2.48)$$

Для выбранного основного типа волны $n = p = 1$ для случая, когда цилиндрический волновод возбуждается ЭЭВ на частоте $f_0 = 10$ ГГц, стенки изготовлены из РЕС материала, материал заполнения – кварц ($\epsilon_r' = 3,8$, $\tan\delta = 10^{-4}$), радиус волновода $a = 18,3$ мм выбран из условия существования основного типа волн $a = u_{11}^E v_\phi / \omega_0$, построим график убывания амплитуды в зависимости от частоты вращения (Рисунок 2.6). Из рисунка видно значительное увеличение коэффициента затухания с ростом частоты вращения, которое сильнее всего заметно при частотах вращения, сравнимых с частотой возбуждаемого поля.

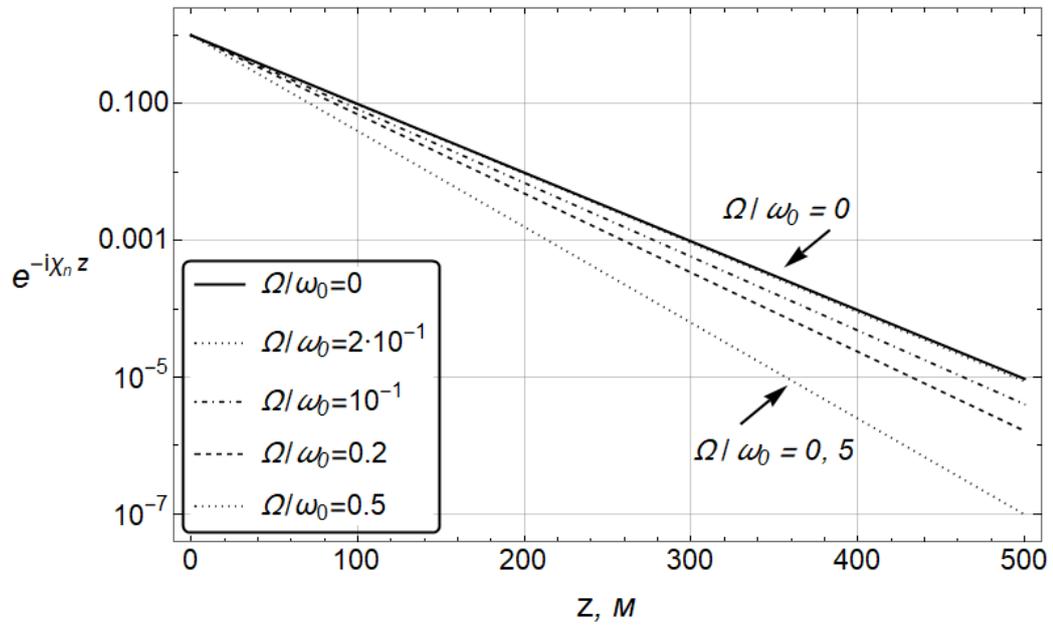


Рисунок 2.6 – Коэффициент затухания (2.48) вращающегося волновода

2.7 Выводы

При постановке и решении в строгом виде задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе с использованием ковариантной формы уравнений Максвелла проанализированы параметры возбуждаемого во вращающемся волноводе ЭМ поля, численно исследован способ измерения частоты вращения цилиндрического волновода по его ЧХ и указаны особенности применения радиочастотного способа измерения частоты вращения [145]. Из полученных в главе результатов можно сделать следующие выводы:

- полученное строгое решение позволяет численно исследовать устройства измерения частоты вращения и вращающиеся интерферометры при учете релятивистских эффектов и эффектов при вращении (и является единственной возможностью сделать это ввиду отсутствия учитывающих подобные эффекты САПР);
- расчетами подтверждено и численно исследовано явление расщепления критических частот ЭМ поля в волноводе при вращении, применимое для измерения частоты вращения по внутреннему ЭМ полю, возбужденному в волноводе; основной волной при этом является мода порядка $n = 1$;
- при измерении частоты вращения при условии возбуждения во вращающемся волноводе мод порядка $N = n > 1$ необходимо использовать фильтры для отсеки мод порядка $n < N$ при измерении малых частот вращения при $\Omega/\omega_0 \ll 1$;

- при измерении больших частот вращения, $\Omega/\omega_0 \sim 1$, при возбуждении в волноводе моды порядка $N = n > 1$, фильтрация мод порядка $n < N$ не требуется, однако с ростом частоты вращения по сравнению с частотой генератора будет происходить рост затухания распространяющихся в волноводе волн;
- при возбуждении во вращающемся волноводе мод высших порядков $N = n > 1$ можно измерять меньшие значения частоты вращения, однако это повлечет за собой увеличение радиуса волновода (увеличение размеров измерительного устройства) и потребует фильтрации всех волн меньших порядков;
- в случае измерения частоты вращения одноволновым радиочастотным способом [145] разрешающая способность метода будет во многом определяться способностью измерительных приборов (анализаторов спектра) определить с высокой точностью критические частоты волновода и, соответственно, их смещение при вращении.

Таким образом, полученное строгое аналитическое решение позволяет при расчетах учесть связь электрического и магнитного полей во вращающейся полости за счет эквивалентных гравитационных сил и может быть использовано для численного исследования эффектов при возбуждении ЭМ поля во вращающихся полостях и интерферометрах, а также для расчетов и конструирования устройств измерения частоты вращения на их основе [145].

3 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

В [142] поставлена и решена задача о существовании ЭМ колебаний во вращающемся цилиндрическом резонаторе и показано расщепление собственной частоты резонатора в покое на две новых собственных частоты резонатора при вращении, что возможно использовать для измерения частоты вращения резонансным способом [144]. Однако в самом устройстве измерения частоты вращения [144] присутствует источник ЭМ поля (Рисунок 1.1, Рисунок 1.2), и на практике часто встречаются задачи с наличием во вращающемся резонаторе источника колебаний [95], [96], когда необходимо ставить и решать задачу возбуждения ЭМ поля в резонаторе сторонними источниками токов и зарядов. Например, в [64] рассмотрена конструкция из двух перпендикулярно расположенных криогенных цилиндрических сапфировых резонаторов, которые совместно представляют установку Майкельсона-Морли [176] за счет распространяющихся в одинаковых, расположенных взаимно перпендикулярно резонаторах мод (Рисунок Б.10) с обусловленной вращением частотой биения между ними в две частоты вращения. Данная установка позволила наблюдать постоянство скорости света с точностью до 10^{-18} (до восемнадцати знаков после запятой).

Ниже впервые приведена строгая постановка и решение задачи возбуждения сторонними источниками ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе [177] с использованием уравнений Максвелла в ковариантной форме [142]. Решение может быть использовано при проведении экспериментов по определению частоты вращения с использованием вращающихся полостей и для численного исследования резонансного метода измерения частоты вращения [144].

3.1 Постановка и решение общей задачи

Математическая модель задачи о возбуждении ЭМ поля во вращающемся резонаторе отличается от таковой для волновода, изложенной во втором разделе, наличием граничных условий на торцах в поперечных сечениях при $z = 0, l$. В связи с этим для решения задачи возбуждения вращающегося цилиндрического резонатора необходимо определить выражения для функций $V^{E,H}$ (2.7) при распространении ЭМ поля в ограниченном объеме, то есть при учете граничных условий не только на стенках полости (2.17), но и на торцах (Рисунок 3.1).

Как и для задачи возбуждения вращающегося волновода (раздел 2), во вращающейся системе отсчета в случае наличия сторонних источников токов и зарядов, полное ЭМ поле $\vec{E}^{E,H}$ и $\vec{H}^{E,H}$ во вращающемся цилиндрическом резонаторе представляется как сумма первичного поля

$\bar{E}^{E,H,P}$, $\bar{H}^{E,H,P}$, возбужденного источниками сторонних токов и зарядов V_j (Рисунок 3.1), и вторичного поля, отраженного от границы раздела сред при $r = a$ и $z = 0, l$:

$$\begin{aligned}\bar{E}^E &= \bar{E}^{E,P} + \bar{E}^{E,S}, & \bar{E}^H &= \bar{E}^{H,P} + \bar{E}^{H,S}, \\ \bar{H}^E &= \bar{H}^{E,P} + \bar{H}^{E,S}, & \bar{H}^H &= \bar{H}^{H,P} + \bar{H}^{H,S}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

При этом возбуждаемое во вращающемся цилиндрическом резонаторе ЭМ поле может быть записано с помощью уравнений Максвелла (2.1) и материальных уравнений (2.2), где векторы ЭМ поля \bar{E} и \bar{B} отождествляются с тензорами, а векторы \hat{D} и \hat{H} – с тензорными плотностями (2.1) [141], [143].

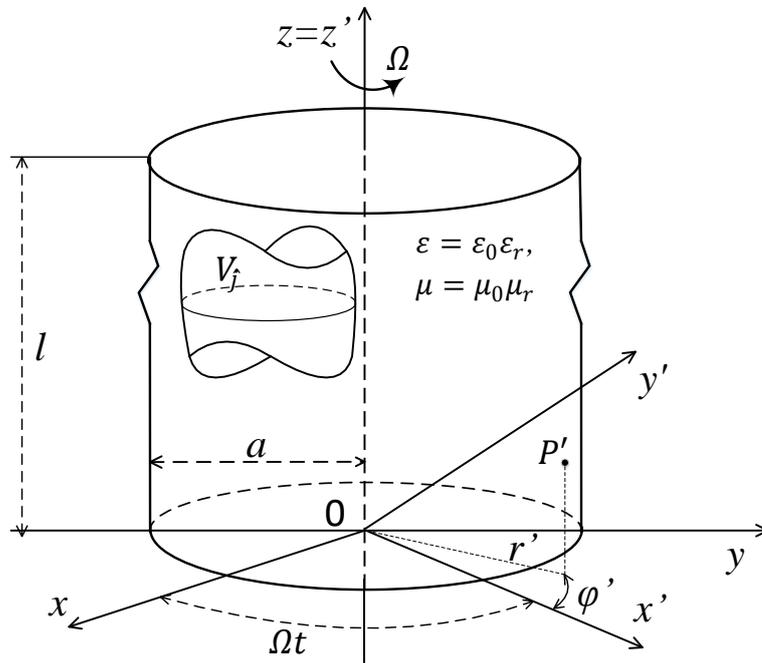


Рисунок 3.1 - К постановке задачи. Вращающийся цилиндрический резонатор

Для удовлетворения волновому уравнению (2.3) и разделения ЭМ полей на поля электрического и магнитного типов, используются выражения для электрического V^E и магнитного V^H потенциалов Дебая в виде (2.7), что приводит к записи выражений для компонент векторов ЭМ поля E -типа и H -типа в форме (2.4) и (2.5), соответственно.

Каждая азимутальная гармоника потенциала Дебая (2.7) для вращающегося резонатора [142] должна удовлетворять волновому уравнению во вращающейся СО K (2.3) и ГУ на стенках и на торцах резонатора и, согласно (3.1), (2.4), (2.5), (2.7) должна быть представлена в виде линейной комбинации цилиндрических функций полного ЭМ поля как суммы функций первичного $U_n^{E,H,P}$ и вторичного $U_n^{E,H,S}$ ЭМ полей:

$$U_n^{E,H} = U_n^{E,H,P} + U_n^{E,H,S}. \quad (3.2)$$

В случае, когда граница раздела сред отсутствует, функции $U_n^{E,H}$ известны [141], [142] и определяются распределениями сторонних токов и зарядов в области V_j (2.9):

$$U_n^{E,H,P} = e^{-in\varphi} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \begin{cases} H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)E,H}(\varkappa) Z_n^E(z), & r > \rho, \\ J_n(\varkappa r) F_n^{(1)E,H}(\varkappa) Z_n^E(z), & r < \rho. \end{cases} \quad (3.3)$$

Вторичное ЭМ поле при учете конечности значений напряженности ЭМ поля на оси цилиндрического резонатора $z = z'$ представим через цилиндрические функции $U_n^{E,H}$ (3.2) как:

$$U_n^{E,H,S} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} a_n^{E,H} e^{-in\varphi} J_n(\varkappa r) Z_n^E(z), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (3.4)$$

где $a_n^{E,H}$ – коэффициенты, определяемые из граничных условий на стенках резонатора при $r = a$, n – порядок корня функции Бесселя, $Z_n^E(z)$ – функция, удовлетворяющая граничным условиям на торцах резонатора при $z = 0, l$, $F_n^{(2)E,H}$ и $F_n^{(1)E,H}$ – коэффициенты, определяемые сторонними токами и зарядами (2.10), (2.11), выражение для волнового числа $k_n = (\omega_0 + n\Omega)/v_\phi = k_0 + n\Omega/v_\phi$ определяется по (2.12).

Тогда (3.2) запишется как

$$U_n^{E,H} = e^{-in\varphi} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \begin{cases} H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)E,H}(\varkappa) Z_n^E(z) + e^{-in\varphi} a_n^{E,H} J_n(\varkappa r) Z_n^E(z), & r > \rho, \\ J_n(\varkappa r) F_n^{(1)E,H}(\varkappa) Z_n^E(z) & r < \rho, \end{cases} \quad (3.5)$$

Подстановка в (2.4) и (2.5) выражений для $V^{E,H}$ (2.7) с учетом (3.5) приводит к выражениям для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля для волн ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе в форме, аналогичной (2.15), (2.16) и отличающейся выражениями для потенциалов Дебая и цилиндрических функций полного ЭМ поля (3.5). При этом все составляющие векторов ЭМ поля зависят от частоты вращения Ω через коэффициент $\beta = \Omega r/v_\phi$ и аргументы $k_n = k_0 + n\Omega/v_\phi$.

Для получения частного решения задачи необходимо определить выражения для функций $U_n^{E,H}$ потенциалов Дебая $V^{E,H}$ (2.7), а именно – выражения для коэффициентов $Z_n^{E,H}(z)$ (3.3).

3.2 Частное решение задачи возбуждения резонатора с идеально проводящими стенками

Для частного решения задачи о возбуждении ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе определим значения коэффициентов $a_n^{E,H}$ и $Z_n^{E,H}(z)$ в (3.3), учитывая следующие ГУ

для идеально проводящих стенок и торцов цилиндрического резонатора для составляющих векторов ЭМ поля E_z^E и H_z^H

$$\begin{aligned} E_z^E(r, \varphi, z) = 0, \quad \frac{\partial H_z^H(r, \varphi, z)}{\partial r} = 0, \quad r = a, \\ \frac{\partial E_z^E(r, \varphi, z)}{\partial z} = 0, \quad H_z^H(r, \varphi, z) = 0, \quad z = 0, l. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подстановка в первую пару ГУ (3.6) выражений для продольных составляющих E_z^E и H_z^H с учетом выражений H_r^E и \widehat{D}^z из (2.15), (2.16), выражений для E_r^H и $B_{r\varphi}$ из (2.15), (2.16) и (3.5) приведет к следующим выражениям для коэффициентов a_n^E и a_n^H , полученным ранее для вращающегося цилиндрического волновода:

$$a_n^E = -\frac{H_n^{(2)}(\varkappa a)}{J_n(\varkappa a)} F_n^{(2)E}, \quad a_n^H = -\frac{(H_n^{(2)}(\varkappa a))'}{(J_n(\varkappa a))'} F_n^{(2)H}, \quad r = a. \quad (3.7)$$

А подстановка во вторую пару ГУ (3.6) выражений для E_z^E и H_z^H (2.15), (2.16) с учетом (3.5) и уравнения Бесселя приведет к обыкновенным дифференциальным уравнениям [178] относительно $Z_n^{E,H}(z)$, решения которых при последовательном использовании формулы Эйлера при $z = 0$ и $z = l$ запишутся как

$$Z_n^E(z) = g_{1n} 2 \cos\left(\frac{q\pi}{l} z\right), \quad Z_n^H(z) = -i 2 g_{1n} \sin\left(\frac{q\pi}{l} z\right), \quad (3.8)$$

где g_{1n} – постоянные множители, $q\pi/l$ – бесконечное множество корней уравнения $\sin(\sqrt{k_n^2 - \varkappa^2} l) = 0$, $q = 0, 1, 2, \dots$

Решение граничной задачи для пространственных гармоник потенциала Дебая $U_n^{E,H}$ запишется как

$$U_n^E = e^{-in\varphi} g_{1n} 2 \cos\left(\frac{q\pi}{l} z\right) \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \begin{cases} H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)E}(\varkappa) + a_n^E J_n(\varkappa r), & r > \rho, \\ J_n(\varkappa r) F_n^{(1)E}(\varkappa) & r < \rho, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$U_n^H = e^{-in\varphi} g_{1n} 2 \sin\left(\frac{q\pi}{l} z\right) \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \begin{cases} H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)H}(\varkappa) + a_n^H J_n(\varkappa r), & r > \rho, \\ J_n(\varkappa r) F_n^{(1)H}(\varkappa) & r < \rho, \end{cases} \quad (3.10)$$

где g_{1n} – постоянные множители.

Выражения (2.15), (2.16) совместно с (3.9), (3.10) определяют ЭМ поле, возбужденное сторонними источниками токов и зарядов внутри вращающегося цилиндрического резонатора с идеально проводящими стенками в случае ЭМ поля E -типа и H -типа.

Граничная задача возбуждения вращающегося цилиндрического резонатора с импедансными стенками в данной работе не ставилась и не решалась.

3.3 Анализ полученного решения. Эффект расщепления частот

Вращение цилиндрического резонатора приводит к зависимости каждой пространственной гармоники возбужденного в нем ЭМ поля (3.9), (3.10) от частоты вращения Ω через волновое число $k_n = k_0 + n\Omega/v_\phi$ (2.12), которое, в свою очередь, зависит от частоты генератора ω_0 , порядка возбуждаемой моды n , частоты вращения Ω и параметров ε , μ заполняющего полость материала.

Рассмотрим выражение для пространственной гармоники потенциала Дебая U_n^E (3.9). Полное ЭМ поле, возбужденное во вращающемся резонаторе, состоит из спектра пространственных гармоник возбужденного поля (3.9), определяемых для выбранного порядка цилиндрических функций n , выбранного порядка p корня $\varkappa a = u_{np}$ трансцендентного дисперсионного уравнения $J_n(\varkappa a) = 0$ (3.7) и q – выбранного порядка корня в (3.8) из бесконечного числа корней. В таком случае выражение (3.9) для каждого набора целых значений n , p и q можно переписать как:

$$U_{npq}^E = e^{-in\varphi} g_{1n} 2 \cos\left(\frac{q\pi}{l} z\right) \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_n^2}} \times \quad (3.11)$$

$$\times \begin{cases} H_n^{(2)}(\varkappa r) F_n^{(2)E}(\varkappa) - \frac{H_n^{(2)}(\varkappa a)}{J_n(\varkappa a)} F_n^{(2)E} J_n(\varkappa r) \Big\}, & r > \rho, \\ J_n(\varkappa r) F_n^{(1)E}(\varkappa) \Big\}, & r < \rho. \end{cases}$$

Тогда выражения для составляющих векторов напряженностей полного ЭМ поля согласно (3.11), (2.15), (2.16) можно переписать в виде суперпозиции пространственных гармоник U_{npq}^E для волн электрического типа:

$$E_r^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{r,npq}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2 U_{npq}^E(\varkappa)}{\partial r \partial z} d\varkappa,$$

$$E_\varphi^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{\varphi,npq}^E = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 r} \frac{\partial^2 U_{npq}^E(\varkappa)}{\partial \varphi \partial z} d\varkappa,$$

$$E_z^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{z,npq}^E = \frac{1-\beta^2}{\varepsilon} \hat{D}^z - \beta W H_r^E,$$

$$H_r^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{r,npq}^E = \quad (3.12)$$

$$= e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \varepsilon}{\varkappa^2 r} \frac{\partial U_{npq}^E(\varkappa)}{\partial \varphi} + W^{-1} \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \beta \frac{\partial U_{npq}^E(\varkappa)}{\partial r} \right) d\varkappa,$$

$$H_\varphi^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{\varphi,npq}^E =$$

$$= -e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \varepsilon}{\varkappa^2} \frac{\partial U_{npq}^E(\varkappa)}{\partial r} - \frac{W^{-1} \beta}{\varkappa^2 r} \frac{\partial^2 U_{npq}^E(\varkappa)}{\partial \varphi \partial r} \right) d\varkappa,$$

$$H_Z^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{Z,npq}^E = W^{-1} \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{r,npq}^E,$$

$$\hat{D}^Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \hat{D}_{npq}^Z = e^{i\omega_0 t} \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{npq}^E d\mathfrak{a};$$

и U_{npq}^H – для волн магнитного типа

$$E_r^H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{r,npq}^H =$$

$$= -e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \mu}{\mathfrak{a}^2 r} \frac{\partial U_{npq}^H(\mathfrak{a})}{\partial \varphi} + W \frac{1}{\mathfrak{a}^2} \frac{\partial}{\partial r} \beta \frac{\partial U_{npq}^H(\mathfrak{a})}{\partial r} \right) d\mathfrak{a},$$

$$E_\varphi^H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{\varphi,npq}^H =$$

$$= e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega_0 \mu}{\mathfrak{a}^2} \frac{\partial U_{npq}^H(\mathfrak{a})}{\partial r} - \frac{W\beta}{\mathfrak{a}^2 r} \frac{\partial^2 U_{npq}^H(\mathfrak{a})}{\partial \varphi \partial r} \right) d\mathfrak{a},$$

$$E_Z^H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} E_{Z,npq}^H = -\beta W \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{r,npq}^H, \quad (3.13)$$

$$H_r^H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{r,npq}^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{a}^2} \frac{\partial^2 U_{npq}^H(\mathfrak{a})}{\partial r \partial z} d\mathfrak{a},$$

$$H_\varphi^H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{\varphi,npq}^H = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{a}^2 r} \frac{\partial^2 U_n^H(\mathfrak{a})}{\partial \varphi \partial z} d\mathfrak{a},$$

$$H_Z^H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{Z,npq}^H = \frac{1-\beta^2}{\mu} B_{r\varphi} + W^{-1} \beta E_r^H,$$

$$B_{r\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} B_{r\varphi,npq} = e^{i\omega_0 t} \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{npq}^H d\mathfrak{a}.$$

Анализ выражений (3.12), (3.13) для случая возбуждения ЭМ поля E -типа будет совпадать по сути с приведенным в [142] и записанным выше для случая вращающегося цилиндрического волновода: за счет вращения полости наблюдается значительное изменение составляющих векторов ЭМ поля за счет пропорциональных частоте вращения слагаемых. При $\omega_0 = 0, \Omega \neq 0$ волновое число $k_n = n\Omega/v_\phi \neq 0$, то есть при наличии сторонних зарядов будут возбуждаться все три составляющие вектора \vec{E} и вектора \vec{H} , но последние полностью обязаны вращению и пропорциональны частоте вращения через коэффициент β^1 . Это может говорить о том, статическое электрическое поле во вращающейся полости за счет эквивалентных гравитационных сил порождает, тоже статическое, магнитное поле ($\omega_0 = 0$).

¹ Полученные результаты в части работы электромагнитного (радиочастотного) гироскопа можно трактовать по аналогии с работой МЭМС гироскопов на основе двух ортогональных колебаний, управляющего и считывающего (Приложение Б), когда при вращении происходит изменение первого колебания и появление второго, несущего информацию о параметрах вращения. Только в данном случае в роли таких колебаний выступают электрические и магнитные колебания (поля): вращение полости, в которой возбуждаются «управляющие» колебания электрического типа приводит к изменению поля таким образом, что это сказывается на изменении «считывающих» магнитных колебаний, амплитуда которых определяется частотой вращения полости через коэффициент β (3.12).

Таким образом, для существования ЭМ колебаний в резонаторе необходимо для удовлетворения волнового уравнения (2.3), чтобы соотношение коэффициентов α , $\frac{q\pi}{l}$ и k_n в (3.11) удовлетворяло условию

$$U^E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[k_n^2 - \alpha^2 - \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2 \right] U_{npq}^E = 0,$$

откуда

$$k_n^2 - \alpha^2 - \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2 = 0, \quad k_n^2 = \alpha^2 + \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2,$$

или, учитывая, что $k_n = \frac{\omega_0 + n\Omega}{v_\phi}$ (2.12), где ω_0 в данном случае – собственная частота резонатора:

$$\frac{\omega_0 + n\Omega}{v_\phi} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2}, \quad \omega_0 = v_\phi \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2} - n\Omega. \quad (3.14)$$

При этом радиус цилиндрической полости a , при котором возможен резонанс на частоте ω_0 (3.14), при произвольно выбранной длине резонатора l вычисляется согласно (3.9), (3.8) и (3.7) как

$$a = u_{np}^E / \sqrt{k_n^2 - \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2}. \quad (3.15)$$

При $\Omega = 0$ из (3.14) получаем выражение для собственной частоты ω_0 как в [169]. Если $n = 0$, т.е. возбуждается колебание E_{0pq} , то резонатор имеет собственную частоту такую же, как и в неподвижной полости [169]:

$$\omega_0 = v_\phi \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2}. \quad (3.16)$$

Если же $n \geq 1$, то значения ω_0 по (3.16) при $\Omega = 0$ определяют собственную частоту резонатора в покое. Если же резонатор радиуса a (3.15) вращается с угловой частотой $\Omega \neq 0$ и в нем возбуждается ЭМ поле на частоте ω , то в нем, согласно (3.14), могут существовать гармоники при $n \geq 1$ и $n \leq -1$. Собственные частоты таких колебаний можно записать в виде:

$$\omega_0^+ = v_\phi \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2} - n\Omega, \quad \omega_0^- = v_\phi \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2} + n\Omega. \quad (3.17)$$

Таким образом, при возбуждении во вращающемся цилиндрическом резонаторе ЭМ поля подтверждается эффект расщепления собственных частот резонатора: собственная частота ω_0 резонатора в покое расщепляется на две новых собственных частоты $\omega_0 \pm n\Omega$, отстающих от ω_0 на величину $\pm n\Omega$, кратную частоте вращения резонатора. Можно утверждать, что, в отличие от неподвижного резонатора, во вращающемся резонаторе имеются три резонансных частоты, т.е. ЭМ поле E_{npq}^0 -колебаний (H_{npq}^0 -колебаний) «расщепляется» на ЭМ поля E_{npq}^+ -колебаний (H_{npq}^+ -

колебаний) при воздействии частоты источника ω_0^+ и E_{npq}^- -колебаний (H_{npq}^- -колебаний) при воздействии частоты источника ω_0^- (3.12), (3.13), (3.17). При этом, поскольку при $n = 0$ изменения собственной частоты при вращении резонатора по сравнению с собственной частотой покоя ω_0 не происходит (3.16), для случая $\Omega \neq 0$ принято считать основным колебание при $n = 1$ [142], когда эффект вращения начинает сказываться на параметрах возбужденного в резонаторе ЭМ поля. Такая зависимость собственной частоты резонатора от параметров вращения позволяет измерять Ω по параметрам возбужденного ЭМ поля [142]. Так разность между собственными частотами (3.17) составит

$$\Delta\omega = \omega_0^- - \omega_0^+ = 2n\Omega, \quad (3.18)$$

что совпадает со значениями разности частот гармоник, возбужденных во вращающихся резонаторах в [136], [137], [149], [148], [150], [151], [179].

3.4 Численные результаты

Для проведения численного анализа параметров вращающегося цилиндрического резонатора и возможности измерения частоты вращения резонансным способом [144] по расщепленным собственным частотам полости (3.18) будем использовать полученное аналитическое решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе (3.11), (3.12), (3.13) для частного случая, когда сторонним источником токов и зарядов является ЭЭВ (2.41).

3.4.1 Частотная характеристика вращающегося цилиндрического резонатора

Полученное строгое решение граничной задачи возбуждения вращающегося цилиндрического резонатора позволяет рассчитать ЧХ ЭМ поля внутри резонатора, по которым определяется добротность резонатора в состоянии покоя (при $\Omega = 0$), и определить ЧХ и добротности на расщепленных резонансных частотах $\omega_0 \pm n\Omega$ вращающегося резонатора. По ЧХ при $n = 0$ определяется добротность резонатора как отношение собственной частоты резонатора ω_0 к ширине резонансной кривой $\Delta\omega_0$ по уровню половинной мощности: $Q = \omega_0/\Delta\omega_0$, которое можно сравнить с известными значениями для цилиндрических резонаторов в покое для проверки полученного аналитического решения. ЧХ ЭМ поля E_{NPQ} -типа (3.12) при выбранных значениях $n = N, p = P, q = Q$ (3.12), надо считать выражение

$$G_{NPQ}(f) = |\widehat{D}_{NPQ}^z(f)|^2 / |\widehat{D}_{NPQ}^z(f)|_{max}^2, \quad (3.19)$$

где $\widehat{D}_{NPQ}^z = e^{i\omega_0 t} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} U_{NPQ}^E d\alpha$ - электрическая индукция возбужденного во вращающемся цилиндрическом волноводе ЭМ поля E_{NPQ} -типа (3.12), (3.11).

ЧХ для полного ЭМ поля, возбужденного в резонаторе, можно в таком случае записать как:

$$G_N(f) = |\widehat{D}_N^z(f)|^2 / |\widehat{D}_N^z(f)|_{max}^2, \quad (3.20)$$

где $\widehat{D}_N^z = e^{i\omega_0 t} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} U_N^E d\alpha$ - электрическая индукция возбужденного во вращающемся цилиндрическом резонаторе ЭМ поля E_N -типа, вычисленная по (3.12), (3.11).

В работе все представленные ЧХ рассчитаны для следующего случая: ЭЭВ возбуждает во вращающемся цилиндрическом резонаторе ЭМ поле на частоте $f_0 = 10$ ГГц, резонатор заполнен диэлектриком с параметрами ε_r' и $\tan\delta$ из Таблицы 3.1, материал стенок резонатора имеет бесконечную проводимость, $\sigma_1 \rightarrow \infty$ (PEC). Для учета тепловых потерь на нагревание диэлектрика, заполняющего резонатор, для k_n используется выражение (2.43). Радиусы a резонатора выбирались из условия существования основного типа колебаний при $n = p = q = 1$ (3.15), а длина $l = 5a$. Радиальный ЭЭВ расположен в точке с координатами $(a, 30^\circ, 0,1a)$, а точка наблюдения имеет координаты $(a, 60^\circ, 0,9a)$.

Таблица 3.1 – Параметры материалов заполнения резонатора на частоте 10 ГГц, $n = p = q = 1$

Диэлектрик	Обозначение	ε_r'	$\tan\delta$	Радиус a , мм
Вакуум	Вакуум	1,0	0,0	18,5
Тефлон	C_2F_4	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	12,8
Оксид алюминия	Al_2O_3	9,2	$3 \cdot 10^{-4}$	6,1
Оксид бериллия	BeO	6,5	$3 \cdot 10^{-4}$	7,3
Плавленый кварц	Si_2O_3 плав	3,6	$2 \cdot 10^{-4}$	9,8
Кристаллический кварц	Si_2O_3 крист	3,8	$1 \cdot 10^{-4}$	9,5

3.4.2 Численные результаты при $\Omega = 0$. Проверка решения

Ввиду того, что известные автору существующие САПР для моделирования устройств СВЧ и расчета ЭМ полей разработаны на основе уравнений Максвелла, не учитывающих описанные в данной работе обязательные вращению добавочные слагаемые в выражениях для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля (3.12), (3.13) и (2.12), для проверки

полученного аналитического решения исследуем частный случай равенства частоты вращения Ω резонатора нулю. В случае, когда $\Omega = 0$, волновое число выражается как $k_n^{E,H} a = k_{0,npq}^{E,H} a = \omega_{0,npq}^{E,H} \sqrt{\varepsilon' \mu a}$ (2.43), а построенные по (3.19) ЧХ позволяют рассчитать добротность Q и собственные частоты резонаторов ω_0 в покое.

Примеры ЧХ для расчета Q по полученному в главе аналитическому решению при $\Omega = 0$ приведены на рисунке (Рисунок 3.2).

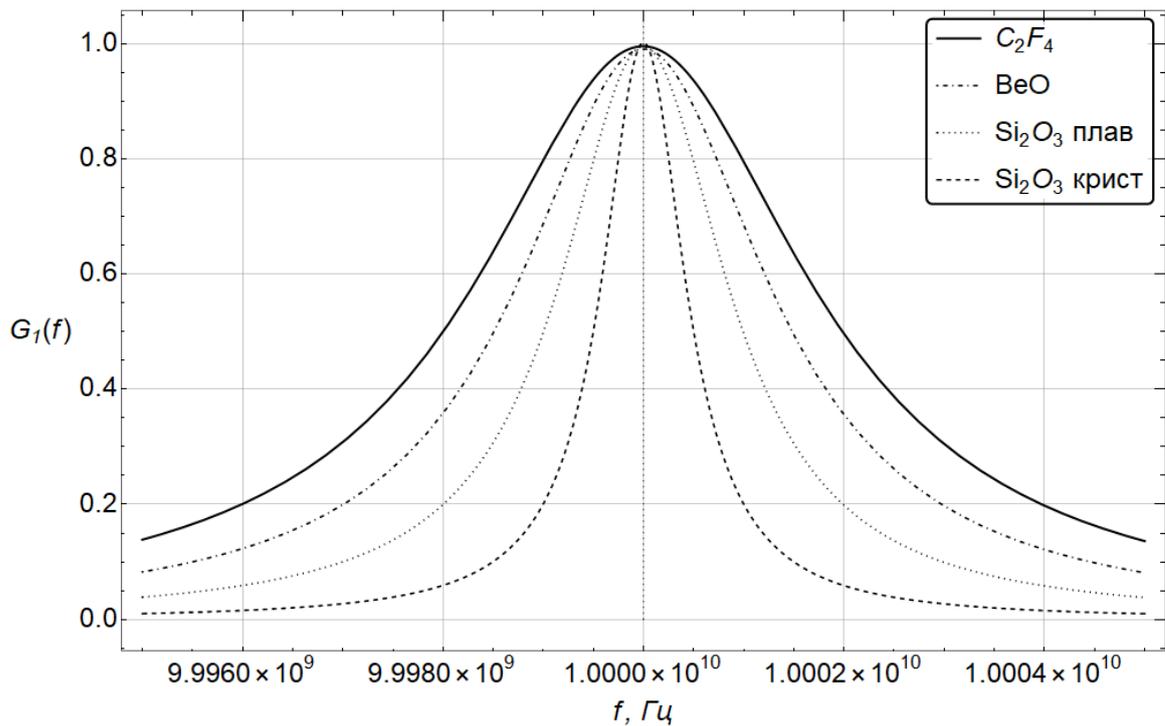


Рисунок 3.2 - Нормированные ЧХ резонатора в покое, $\Omega = 0$ (3.19)

В таблице ниже (Таблица 3.2) рассчитанные по ЧХ (Рисунок 3.2) значения Q сравниваются со значениями, полученными при моделировании аналогичных задач в пакете программного обеспечения (ПО) CST Studio Suite. Расчеты выполнены для выбранной собственной частоты покоя резонатора $f_0 = 10$ ГГц и значений $n = p = q = 1$ при рассчитанных по (3.15) размеров резонатора с учетом соотношения радиуса и длины резонатора $l/a = 5$ для резонатора с PEC стенками и различным диэлектрическим заполнением (Таблица 3.1). Из данных в таблице (Таблица 3.2) очевидно совпадение полученных двумя способами расчета значений с точностью до долей процента (что может определяться заданной точностью решения в САПРах).

Таблица 3.2 – Добротности Q и собственные частоты f_0 резонатора, $\Omega = 0$, $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с, $n = p = q = 1$

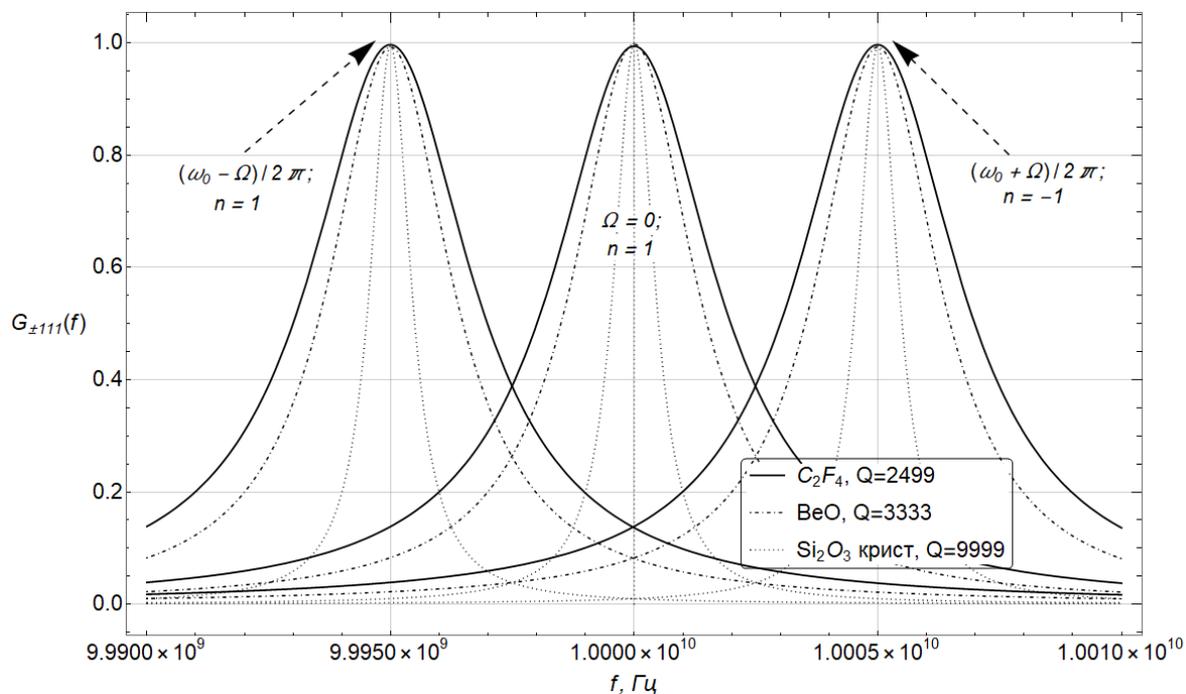
Диэлектрик	ε_r'	$\tan\delta$	a , мм	f_0 , ГГц	Рис. 3.2	CST Studio Suite	Рис. 3.3
					Q , $\Omega = 0$	Q , $\Omega = 0$	Q , $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с
Вакуум	1,0	0,0	18,5	10	-	-	-
C_2F_4	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	12,8	10	2499,9	2496,5	2499,7
Al_2O_3	9,2	$3 \cdot 10^{-4}$	6,1	10	3333,3	3328,1	3332,9
BeO	6,5	$3 \cdot 10^{-4}$	7,3	10	3333,3	3328,1	3332,9
Si_2O_3 плав	3,6	$2 \cdot 10^{-4}$	9,8	10	4999,9	4992,1	4999,5
Si_2O_3 крист	3,8	$1 \cdot 10^{-4}$	9,5	10	9999,9	9989,9	9998,9

3.4.3 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Эффект расщепления частот

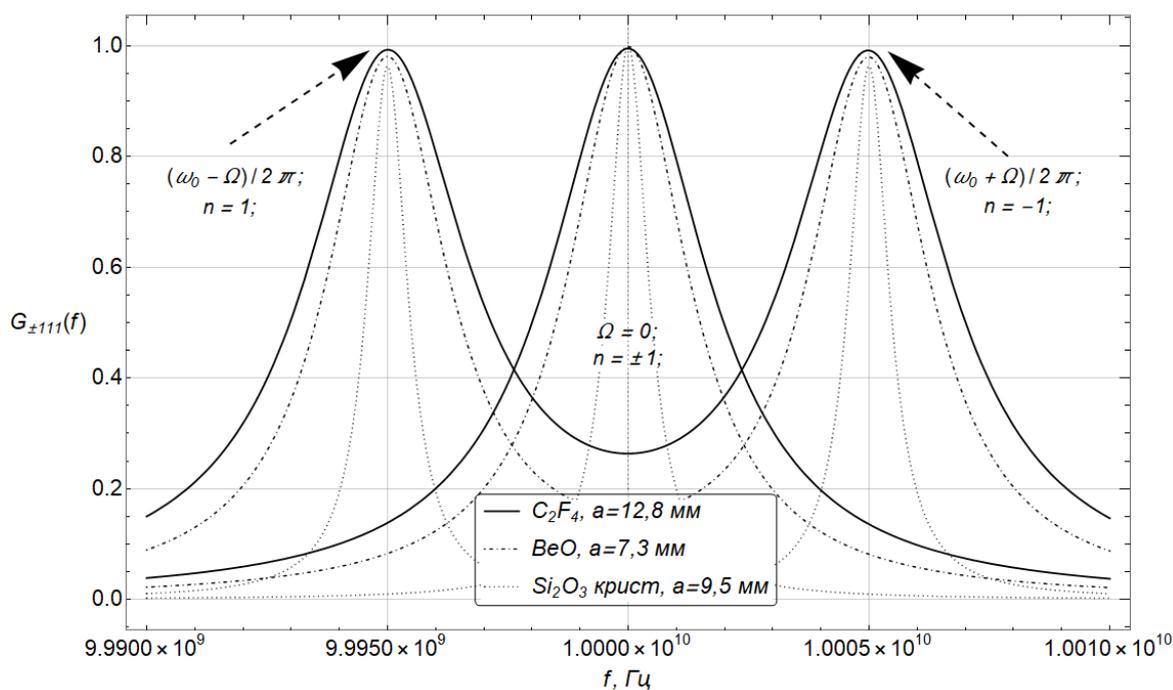
ЧХ при вращении резонатора с частотой $\Omega \neq 0$ приведены на Рисунке 3.3 для следующего случая: $f_0 = 10$ ГГц, $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ рад/с и $\Omega = 0$ рад/с, $n = \pm 1$, $p = q = 1$, стенки изготовлены из РЕС материала, материалы заполнения: тефлон, оксид бериллия и кварц (Таблица 3.1), радиус резонатора a и длина $l = 5a$ выбраны из условия существования основного типа колебаний при $n = 1$ (3.15) (Таблица 3.2), возбуждающий ЭМ поле на частоте ω_0 ЭЭВ расположен в точке с координатами $(a, 30^\circ, 0,1a)$, точка наблюдения - $(a, 60^\circ, 0,9a)$ [177].

На Рисунке 3.36 видно, что для тефлона, оксида бериллия и кварца при отсутствии вращения ($\Omega = 0$) ЧХ имеют максимальные значения на собственных частотах ω_0 (3.16). При $\Omega \neq 0$ на ЧХ появляются новые максимумы при частотах $\omega_0^\mp = \omega_0 \pm n\Omega$ (3.17) благодаря вращению, т.е. собственная частота ω_0 при вращении, как было показано выше, распадается на две новых собственных частоты согласно (3.17) благодаря воздействию эквивалентного гравитационного поля. Форма ЧХ при $\Omega \neq 0$ (Рисунок 3.3) дает возможность измерить скорость Ω вращения резонатора как отношение частотного интервала между двумя соседними резонансными частотами типов колебаний E_{-npq} (или H_{-npq}) и E_{+npq} (или H_{+npq}) к $2N$ ($n = N$ – выбранный тип колебания, при котором образуется 2 новых собственных частоты вращающегося резонатора, $\omega_0^\mp = \omega_0 \pm n\Omega$, или как разность между известной из параметров покоящегося резонатора частотой ω_0 (3.16) и собственной частотой $\omega_0^+ = \omega_0 - n\Omega$ (3.17) [144]. При этом разрешающая способность резонансного способа измерения частоты вращения определяется точностью измерения максимумов ЧХ и степенью разрешения новых собственных частот, т.е. добротностью резонатора. В Таблице 3.2 приведены добротности, рассчитанные для расщепленных ($\Omega = 2\pi \cdot$

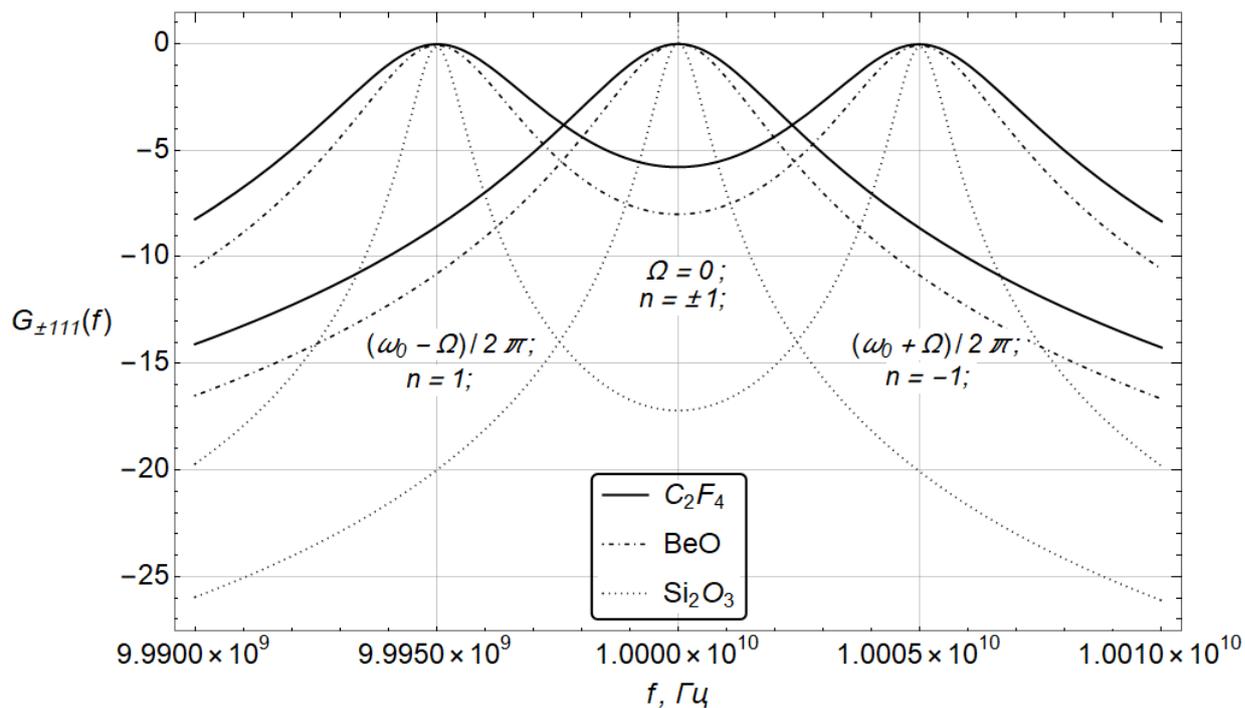
$5 \cdot 10^6$ рад/с) и не расщепленных ($\Omega = 0$ рад/с) собственных колебаний полости, ЧХ которых представлены на Рисунке 3.4. Можно также увидеть, насколько уменьшаются размеры резонаторов при диэлектрическом заполнении (что может быть использовано для уменьшения размеров резонансных радиочастотных датчиков частоты вращения [144]).



а) ЧХ на расщепленных ($\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ рад/с) и не расщепленных ($\Omega = 0$ рад/с) собственных колебаниях полости (3.19);



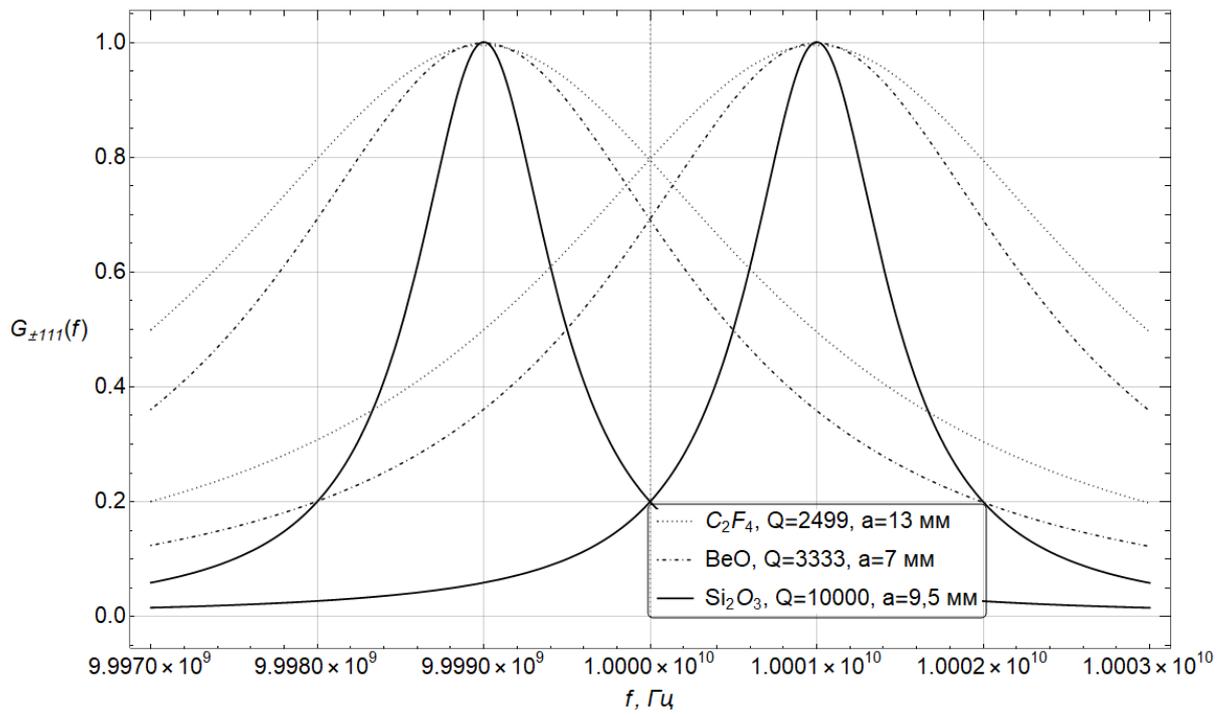
б) ЧХ полного ЭМ поля в полости при $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ рад/с и $\Omega = 0$ (3.20);



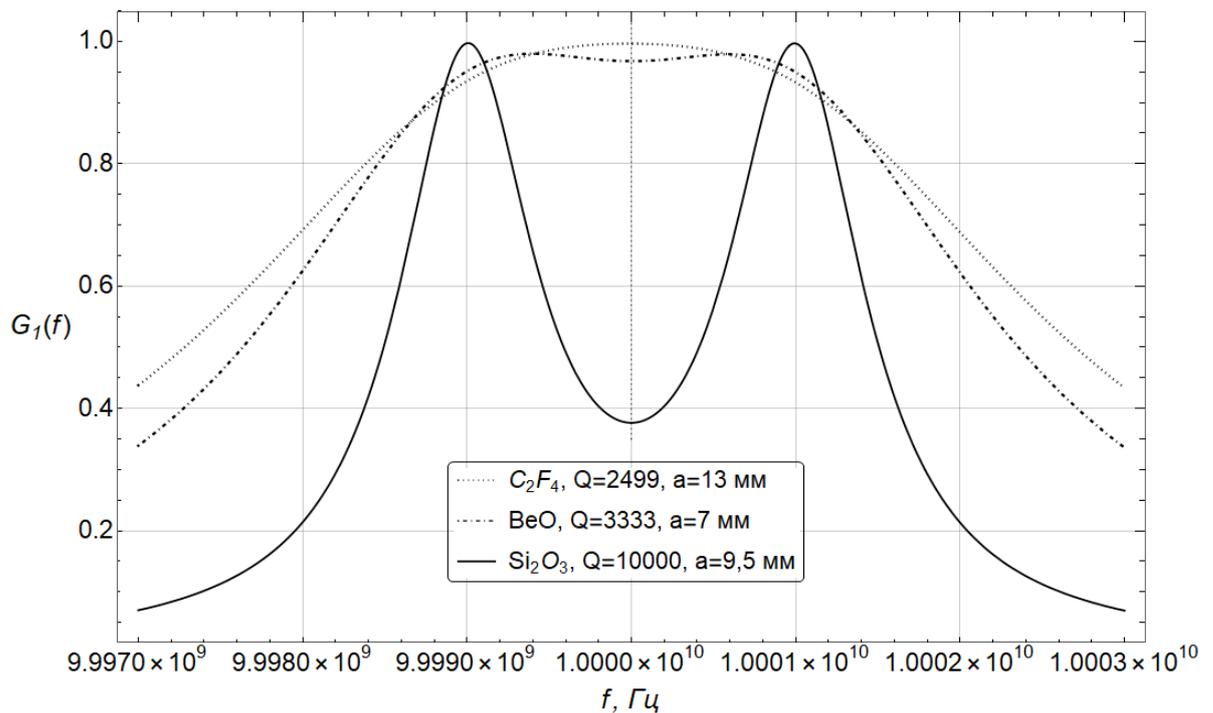
в) ЧХ полного поля (dB) в полости при $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ рад/с и $\Omega = 0$ (3.20);

Рисунок 3.3 – Нормированные ЧХ ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе

Для исследования разрешающей способности резонансного метода измерения частоты вращения [144] при использовании цилиндрического резонатора рассмотрим ЧХ (Рисунок 3.4) при вращении резонатора с меньшей частотой, когда $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с при $f_0 = 10$ ГГц, $n = \pm 1$, $p = q = 1$, для РЕС материала стенок при заполнении резонатора тефлоном, оксидом бериллия и кварцем (Таблица 3.1); радиус резонатора a и длина $l = 5a$ выбраны из условия существования основного типа колебаний при $n = 1$ (3.15), возбуждающий ЭМ поле на частоте ω_0 ЭЭВ расположен в точке с координатами $(a, 30^\circ, 0,1a)$, а точка наблюдения имеет координаты $(a, 60^\circ, 0,9a)$.



а) ЧХ на расщепленных ($\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с) собственных колебаниях полости (3.19);



б) ЧХ полного ЭМ поля в полости при $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с (3.20);

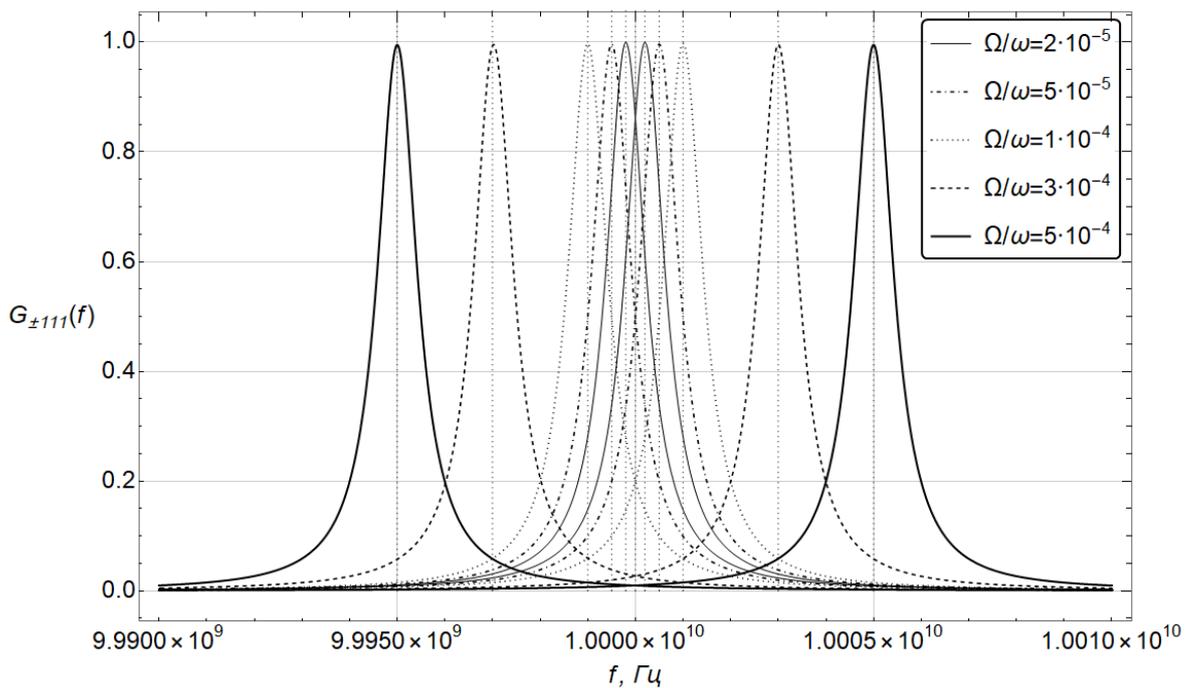
Рисунок 3.4 – Нормированные ЧХ ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе

Согласно [144], для измерения частоты вращения необходимо определить резонансную частоту ω_0^{\mp} вращающегося цилиндрического резонатора (3.17) и вычесть ее из известной

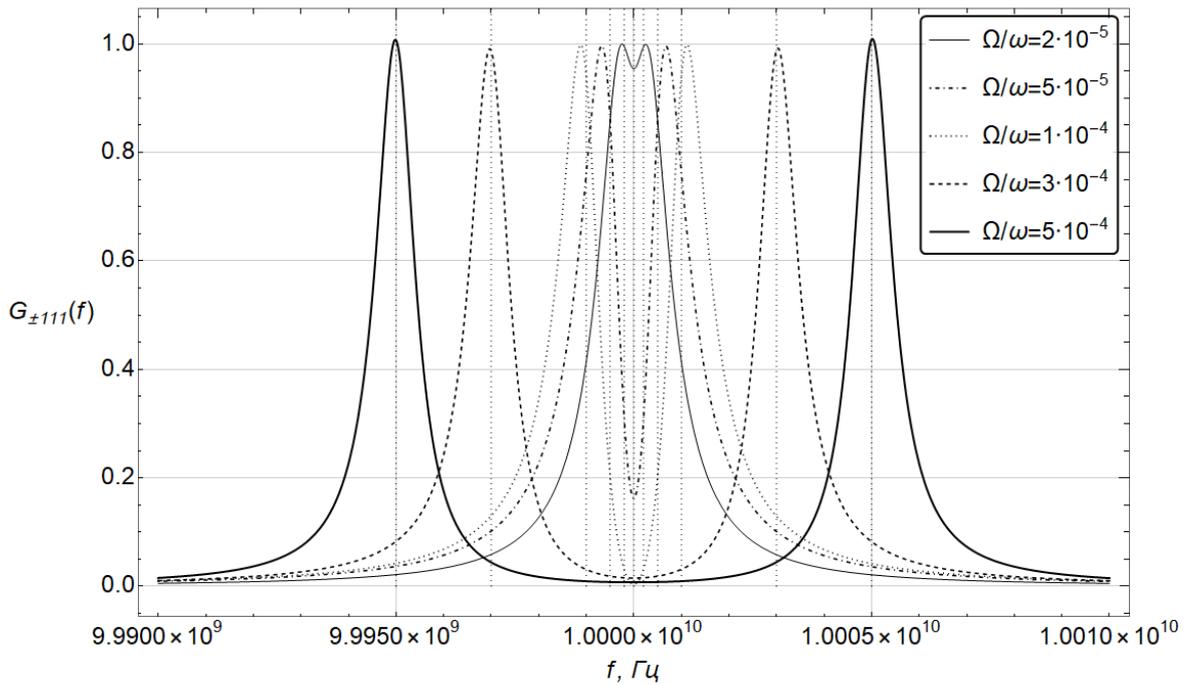
собственной частоты этого резонатора в покое ω_0 , а знак полученной разности укажет на направление вращения. Следовательно, для измерения частоты вращения необходимо измерить с высокой точностью частоты ω_0^- и/или ω_0^+ , то есть обеспечить их разделение в спектре за счет высокой добротности резонатора. В работе будем считать, что для обеспечения измеримого разделения спектра вращающегося резонатора на собственные частоты ω_0^- и ω_0^+ необходимо добиться равенства интервала между этими частотами на ЧХ ширине резонансной кривой по половинной мощности: $\Delta f_0 = \Delta\omega_0/2\pi$. В случае с цилиндрическим резонатором этот интервал равен удвоенной частоте вращения полости: $\Delta\omega_0 = 2\Omega$ (Рисунок 3.4). Таким образом, мерой разрешения, т.е. минимальной частотой вращения Ω_{min} , которую можно измерить с помощью резонансного способа [144] на основе цилиндрического резонатора, можно выбрать значение ширины ЧХ по уровню половинной мощности, разделенное на два: $\Omega_{min} = \Delta\omega_0/2$. Эта величина является достаточной для разделения соседних резонансных частот, обязанных вращению, $\omega_0^\mp = \omega_0 \pm n\Omega$ (Рисунок 3.4а) и определяется величиной потерь в материале, которым заполнен и из которого выполнен резонатор (его добротностью). Так, например, при выбранных условиях расчетов в случае заполнения резонатора тефлоном или оксидом бериллия ЧХ полного ЭМ поля (Рисунок 3.4 б) сливаются для собственных частот $\omega_0^\mp = \omega_0 \pm n\Omega$ из-за низкой добротности ввиду потерь в материале, т.е. малая добротность резонатора не позволяет измерять частоты $\omega_0^\mp = \omega_0 \pm n\Omega$, а следовательно, и выбранную для этого случая частоту вращения Ω . В случае же с кварцевым заполнением резонатора тепловые потери (определяемые $\tan\delta$) меньше (Рисунок 3.4 б), а данных значений добротности достаточно, чтобы различить в спектре собственные частоты $\omega_0^\mp = \omega_0 \pm n\Omega$, что дает возможность измерять выбранную частоту вращения $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с. Для измерения меньших частот вращения необходимо увеличивать добротности полостей для большего разрешения в спектре собственных частот вращающегося резонатора. Можно говорить о том, что разрешение такого резонансного метода измерения частоты вращения [144] будет улучшаться с ростом Q полости, что говорит в пользу выбора заполняющих полость диэлектриков с наименьшими тепловыми потерями (Рисунок 3.3 б, Рисунок 3.4 б). При этом из выражения для расчета добротности резонатора $Q = \omega_0/\Delta\omega_0$ видно, что при одном и том же значении добротности для различных собственных частот ω_0 резонатора можно получить различные разрешения. Например, при добротности $Q = 10^{10}$ при частоте возбуждения $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^{10}$ рад/с ширина резонанса (равная удвоенной минимальной измеряемой частоте вращения, как было принято выше) составит $\Delta\omega_0 = 2\pi$ рад/с при разрешении метода измерения частоты вращения $\Omega_{min} = \pi$ рад/с, а при частоте возбуждения $f_0 = 10^8$ Гц – уже $\Omega_{min} = \pi \cdot 10^{-2}$ рад/с. Однако, во втором случае ($f_0 = 10^8$ Гц) размер резонатора, согласно (3.15), будет больше.

Стоит отметить, что разрешение рассматриваемых в работе одноволнового и резонансного радиочастотных методов измерения частоты вращения будет определяться не только добротностью и используемыми материалами для изготовления полостей, но и возможностью измерительной аппаратуры обнаружить соседние спектральные компоненты, т.е. разрешением анализаторов спектров. Современные коммерчески доступные анализаторы спектра в наиболее усовершенствованных своих конфигурациях способны обеспечивать разрешение до одной сотой Герца [175], что на данный момент ограничивает возможности измерения частоты вращения указанными радиочастотными способами до 0,6 оборотов в минуту или 13 градусов в час.

Для исследования разрешающей способности резонансного метода измерения частоты вращения, рассмотрим ЧХ для заполненного кварцем вращающегося цилиндрического резонатора для меньших частот вращения (остальные данные для расчетов совпадают с использованными в Рисунке 3.3). Из приведенных ЧХ видно (Рисунок 3.5 б), что наилучшего разрешения новых, связанных с вращением частот ω_0^\mp , можно достичь при значении отношения частоты вращения Ω к частоте возбуждения резонатора ω_0 порядка $5 \cdot 10^{-5}$ и выше, что достигается при добротности резонатора порядка 10^4 (Таблица 3.2).



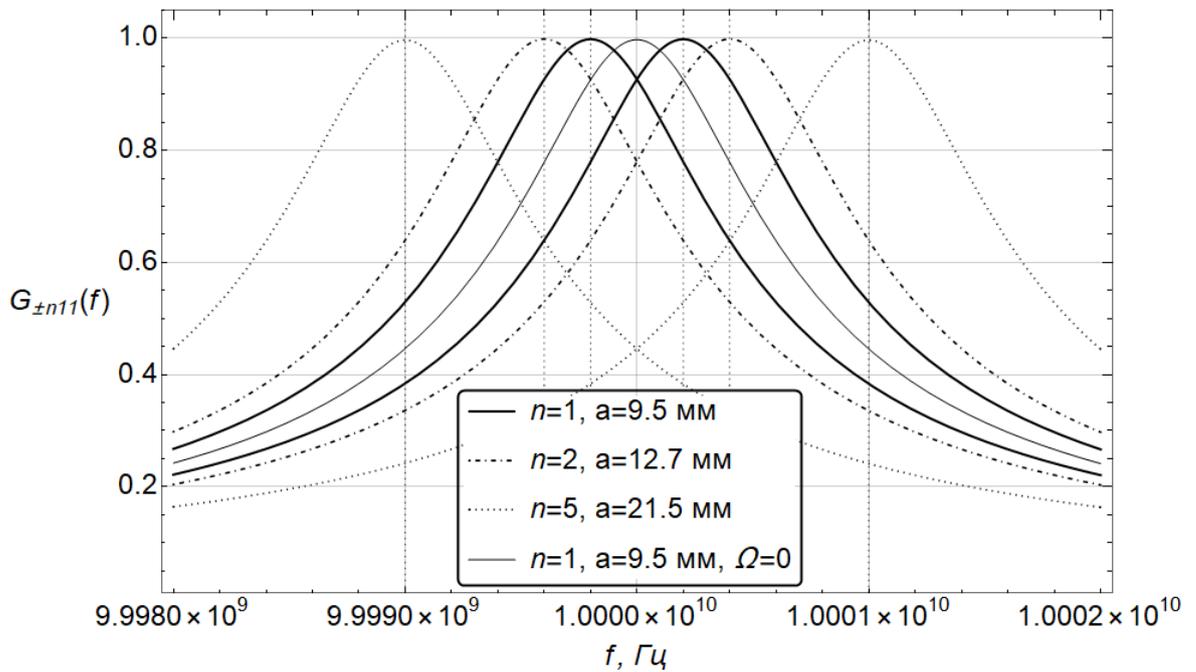
а) ЧХ на расщепленных собственных колебаниях полости (3.19);



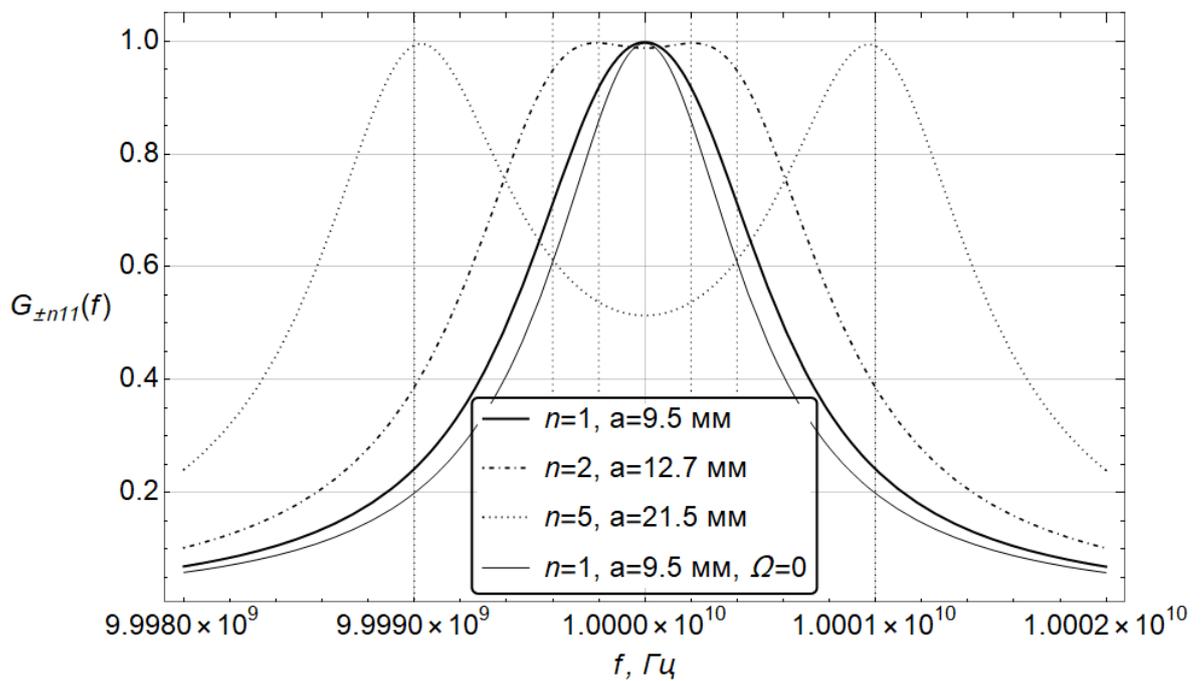
б) ЧХ полости (3.20);

Рисунок 3.5 – Нормированные ЧХ для различных значений частоты вращения резонатора при $n = N = 1$ (при различных значениях Ω/ω_0). Вертикальными пунктирными линиями отмечены собственная частота резонатора в покое ω_0 и собственные частоты вращающегося резонатора $(\omega_0 \pm N\Omega)/2\pi$

Увеличить разрешение новых собственных частот $\omega_0^{\mp} = \omega_0 \pm n\Omega$, обязанных вращению (уменьшить Ω_{min}), возможно выбором более высокого порядка колебаний n согласно (3.18), так как $\Omega = (\omega_0^- - \omega_0^+)/2n = (\omega_0 - \omega_0^{\mp})/n$. Рисунок 3.6 иллюстрирует ЧХ вращающегося цилиндрического резонатора при условии возбуждения в нем мод порядков $n > 1$ (3.19), (3.20) (остальные данные для расчетов совпадают с использованными в Рисунке 3.3). Результаты соответствуют описанному выше расщеплению каждой возбужденной во вращающемся цилиндрическом резонаторе моды на 2 новых собственных частоты (3.17). При этом новые собственные частоты цилиндрического резонатора ω_n будут удалены от собственной частоты резонатора в покое ω_0 на большее расстояние $n\Omega$, $n > 1$ (Рисунок 3.6 б), что позволит измерять более низкие частоты вращения согласно $\Omega = (\omega_0^- - \omega_0^+)/2n$ (увеличит разрешение резонансного способа измерения частоты вращения). Однако вместе с этим увеличится и размер полости согласно (3.15) (за счет больших значений корней u_{np}^E дисперсионных уравнений с ростом n при прочих равных), а с ним – и размер конечного датчика скорости вращения на нем основанного [144].



а) ЧХ на расщепленных собственных колебаниях полости (3.19);



б) ЧХ полости (3.20);

Рисунок 3.6 – Нормированные ЧХ вращающегося цилиндрического резонатора. Вертикальными пунктирными линиями отмечены резонансные частоты при вращении $\omega_0 \pm n\Omega$, $\Omega = 2\pi \cdot 10^5$ рад/с

Например, при $n = 5$ для случая на Рисунке 3.6 при $f_0 = 10$ ГГц и $Q = 10^4$ для кварцевого заполнения (Таблица 3.2) при измерении частоты вращения $\Omega_{min} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^5$ рад/с радиус

резонатора будет в два раза больше, чем при измерении частоты вращения по возбужденной моде порядка $n = 1$. Однако при меньших частотах вращения при $n = 1, n = 2$ частоты ω_0^- и ω_0^+ при заданном значении добротности не различаются (Рисунок 3.6 б), в то время как при больших значениях n (при больших радиусах резонатора при той же частоте генератора $f_0 = 10$ ГГц) будет возможно измерение частоты вращения.

Форма приведенных выше ЧХ (Рисунок 3.3, Рисунок 3.4, Рисунок 3.5, Рисунок 3.6) определяется параметрами заполняющего резонатор диэлектрика: с увеличением $\tan\delta$ (потерь энергии ЭМ поля в диэлектрике) ширина ЧХ $\Delta\omega_0$ по уровню половинной мощности увеличивается и разделение собственных резонансных частот $\omega_0 + n\Omega$ и $\omega_0 - n\Omega$ затрудняется при неизменной частоте стороннего источника. Таким образом, основной параметр, влияющий на разрешение собственных частот вращающегося резонатора – его добротность, которая определяется материалами, из которых изготовлен и которыми заполнен резонатор. На Рисунке 3.7 проиллюстрирована зависимость добротности вращающегося цилиндрического резонатора с РЕС стенками и различным диэлектрическим заполнением от величины тангенса угла диэлектрических потерь в заполняющем резонатор диэлектрике ($\tan\delta$).

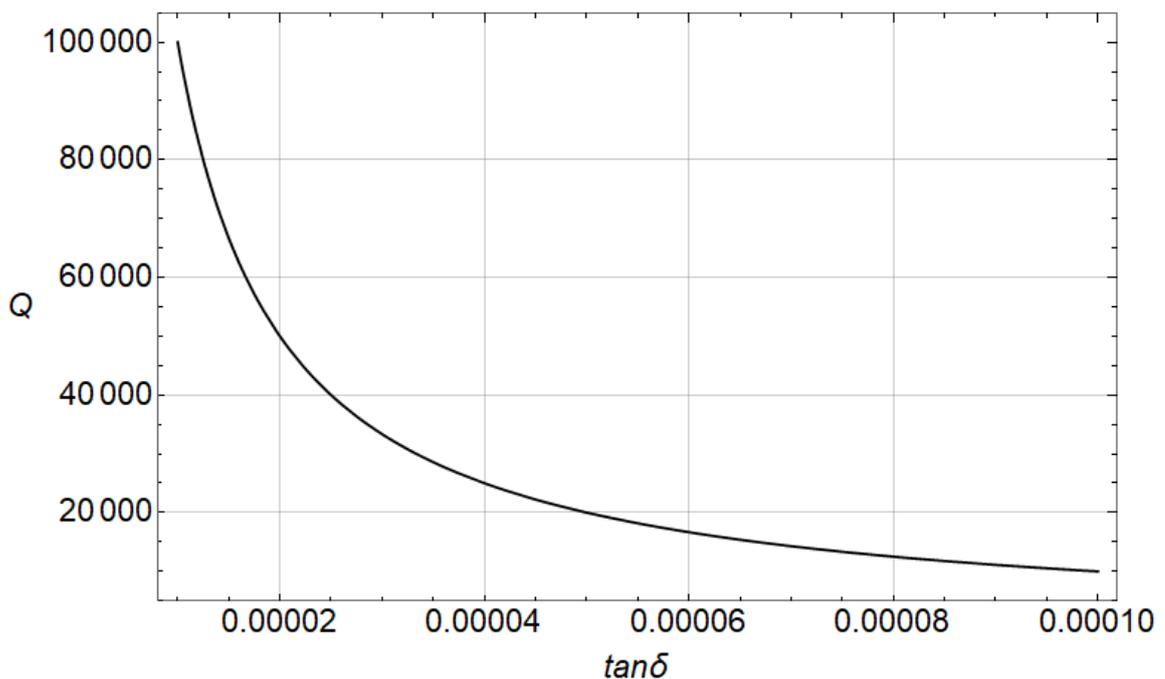


Рисунок 3.7 – Зависимость добротности вращающегося цилиндрического резонатора от тангенса угла диэлектрических потерь $\tan\delta$ в диэлектрическом заполнении полости резонатора. Относительная диэлектрическая проницаемость при расчетах равна $\epsilon_r' = 1,0$

При идеально проводящих стенках резонатора его добротность, а с ней – и разрешение резонансного радиочастотного гироскопа, определяется тепловыми потерями диэлектрика и

уменьшается с ростом $\tan\delta$ (Рисунок 3.7). Так, например, для обеспечения сравнительно высокой добротности порядка $Q \geq 5 \times 10^4$ следует заполнять резонатор диэлектриком со значением тангенса угла тепловых потерь $\tan\delta = 2 \times 10^{-5}$ при выбранной собственной частоте резонатора для моды порядка $n = 1$, $f_0 = 10$ ГГц (Рисунок 3.7). Такие низкие значения диэлектрических потерь могут быть достигнуты, например, в сапфировых резонаторах при криогенных температурах [64].

Ввиду того, что в данной работе рассматриваются расчеты только для случая идеальной проводимости стенок резонатора при различном диэлектрическом заполнении, можно говорить, что при вакуумном заполнении резонатора (при отсутствии потерь в диэлектрике, $\tan\delta = 0$) добротность будет бесконечно расти (максимум характеристик (3.9), (3.10) при $J_n(\alpha r) = 0$ и $(J_n(\alpha r))' = 0$ согласно (3.7)), предположительно позволяя измерять расстояния между новыми собственными частотами полости в доли Герц (ограничиваясь только возможностями измерительных приборов). Но при любом реальном диэлектрическом заполнении добротность, а с ней и разрешающая способность резонансного метода измерения скорости вращения ограничивается потерями в материале. Для исследования влияния тепловых потерь в импедансных стенках полости при вакуумном заполнении резонатора необходимо формулировать и решать граничную задачу возбуждения вращающегося цилиндрического резонатора с импедансными стенками сторонними источниками токов и зарядов (*что можно сделать одной из задач последующий исследований*).

3.4.4 Измерение частоты вращения. Параметры гироскопов

Как было отмечено выше, минимальная частота вращения Ω_{min} , которую можно измерить с помощью резонансного способа [144], определяется половиной ширины ЧХ по половинной мощности $\Delta\omega_0/2$ (добротностью резонатора: $\Delta\omega_0 = \omega_0/Q$), которая определяет степень разделения соседних резонансных частот вращающейся полости $\omega_0 \pm n\Omega$ (Рисунок 3.3) и зависит от потерь в материале, которым заполнен и из которого выполнен резонатор (Рисунок 3.7). С ростом Q для выбранного типа колебания n и частоты возбуждения резонатора ω_0 будет расти и разрешающая способность резонансного способа измерения частоты вращения, т.е. данным способом можно будет измерить как можно меньшую частоту вращения Ω_{min} .

Для выбора требуемого значения минимальной разрешаемой частоты вращения Ω_{min} при допустимом размере резонатора и достижимых значениях добротности ниже приведен график зависимости добротности резонатора Q от возбуждаемой частоты $f_0 = \omega_0/2\pi$ для различной ширины ЧХ по половинной мощности (Рисунок 3.8 а). Задавшись требуемыми значениями Ω_{min}

и допустимым в данном случае размером резонатора a (Рисунок 3.8 в) можно выяснить, при какой добротности и частоте возбуждения ω_0 можно достичь заданных параметров измерителя частоты вращения. Требуемые при этом параметры материалов резонатора можно определить из графиков добротностей (Рисунок 3.8 б).

Например, при необходимости обеспечить разрешение гироскопа, равное $3 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm) необходимо обеспечить добротность порядка 10^5 при частоте возбуждения резонатора 10^9 Гц, выбрав материал заполнения резонатора с тангенсом диэлектрических потерь $\tan\delta = 1 \cdot 10^{-5}$ и меньше, а радиус резонатора при этом будет составлять в среднем 10 см в зависимости от значения относительной диэлектрической проницаемости выбранного диэлектрического заполнения (Рисунок 3.8).

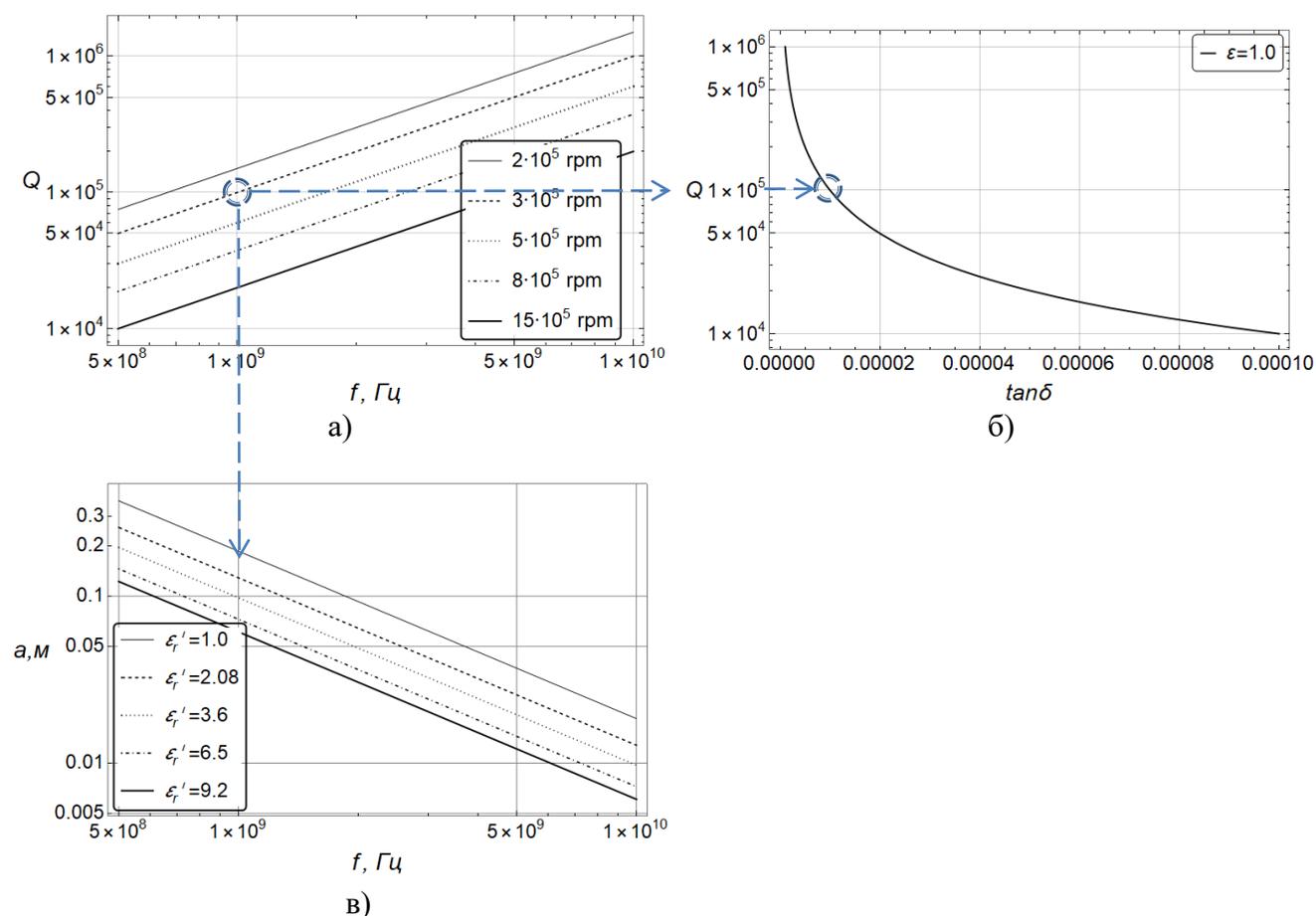


Рисунок 3.8 – Зависимость добротности вращающегося цилиндрического резонатора с PEC стенками от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (а) и тангенса угла диэлектрических потерь в заполняющем диэлектрике (б); Зависимость радиуса резонатора от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (в). Значение длины резонатора l принято равным $l = 5a$, где a – радиус резонатора

Для реальных материалов при нормальных условиях (комнатная температура, атмосферное давление) наилучшее достижимое разрешение при частотах возбуждения резонатора от $5 \cdot 10^8$ Гц до 10^{10} Гц и достижимых добротностях порядка 10^5 будет определяться в интервале частот вращения от $2 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm) до $15 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm). Для улучшения разрешения (уменьшения Ω_{min}) при тех же ω_0 необходимо значительно увеличивать добротность резонатора. Для обеспечения измерения меньших частот вращения необходимо исследовать вопрос увеличения добротности резонатора за счет вакуумного заполнения ($\tan\delta = 0$) и выполнения стенок резонатора из материала с высокой проводимостью (для уменьшения тепловых потерь в стенках полости).

Указанный диапазон измеряемых значений Ω_{min} справедлив для описанного в первом разделе резонансного способа измерения частоты вращения и устройства, его реализующего согласно [144]. Можно рассмотреть возможность использования методов спектрального анализа сигналов [164], [165] для уменьшения измеряемой Ω_{min} (при прочих равных значениях) и извлечения информации о частоте вращения из ЧХ при отсутствии четкого разрешения новых расщепленных собственных частот вращающегося резонатора ($\Omega_{min} < \Delta\omega_0/2$). В данной работе этот вопрос не рассматривался и представляет собой постановку проблемы для последующих исследований.

3.5 Выводы

В главе при решении граничной задачи возбуждения сторонними источниками токов и зарядов ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом резонаторе с использованием строгой теории ЭМ поля во вращающихся СО [142] проанализированы выражения для векторов ЭМ поля, построены ЧХ вращающегося цилиндрического резонатора. Исследован способ измерения частоты вращения резонатора по его ЧХ и возможные ограничения рассматриваемого резонансного способа измерения [144]. Из полученных в главе результатов можно сделать следующие выводы:

- полученное строгое аналитическое решение позволяет численно исследовать возбужденные во вращающемся цилиндрическом резонаторе ЭМ поля с учетом релятивистских эффектов и эффектов при вращении (и является единственной возможностью это сделать ввиду отсутствия учитывающих подобные эффекты САПР);
- расчетами подтверждено существование в электромагнетизме явления расщепления собственных частот ЭМ поля в резонаторе при вращении последнего и возможность использования данного явления для измерения частоты вращения по внутреннему ЭМ

полю, возбужденному во вращающемся резонаторе; основной волной при этом является мода порядка $n = 1$;

- размер (радиус a) цилиндрического резонатора для устройства измерения частоты вращения определяется частотой и порядком возбуждаемой в нем моды и может быть сокращен до нескольких миллиметров; а разрешающая способность резонансного метода измерения частоты вращения определяется добротностью Q полости и зависит от параметров материалов, из которых резонатор изготовлен;
- при использовании для материалов стенок металлов с идеальной проводимостью разрешение резонансного метода измерения частоты вращения, определяемое добротностью полости, ограничивается потерями в заполняющем резонатор диэлектрике и для нормальных условий может составлять до $\Omega_{min} = 10^5$ оборотов в минуту и меньше в зависимости от частоты f_0 и выбранного порядка n возбуждаемой моды;
- увеличения разрешающей способности резонансного метода измерения частоты вращения с помощью цилиндрического резонатора (уменьшения Ω_{min}) можно добиться выбором высшего порядка возбуждаемой моды. Однако это повлечет за собой увеличение размеров резонатора, а, следовательно, и устройства измерения частоты вращения;
- в нормальных условиях резонансным методом измерения частоты вращения на основе цилиндрического резонатора с идеально проводящими стенками и кварцевым заполнением возможно обеспечить измерение частоты вращения Ω_{min} при соотношении $\Omega_{min}/\omega_0 \sim 5 \cdot 10^{-5}$ и больше. При соотношении $\Omega_{min}/\omega_0 \gg 5 \cdot 10^{-5}$ в нормальных условиях возможно измерять либо очень высокие частоты вращения Ω_{min} при малых размерах полости (например, при частоте возбуждения $f_0 = 10$ ГГц – $\Omega_{min} \geq 5 \cdot 10^5$ рад/с, $a \approx 12$ мм); либо размер полости будет расти с уменьшением Ω_{min} , т.е. будет увеличиваться размер устройства измерения частоты вращения.

Необходимо проведение дальнейших исследований, постановки и решения граничных задач возбуждения вращающегося цилиндрического резонатора с импедансными стенками с целью поиска возможных путей улучшения разрешения резонансного метода измерения частоты вращения применительно к последнему, увеличения его добротности и разработки возможных конструкций устройства и расчета генерируемых в них помех для определения таких характеристик точности, как случайный дрейф и ARW.

4 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

В данной главе ставится и в строгом виде решается на основе ковариантных уравнений электродинамики, полученных в [141], [142], граничная задача возбуждения вращающегося сферического резонатора, являющегося математической моделью гироскопа [144], сторонними источниками токов и зарядов [180]. Анализируется резонансный радиочастотный способ измерения частоты вращения резонатора [144] (Рисунок 1.2) и его предельно достижимые характеристики.

4.1 Постановка и решение общей задачи

Для пояснения постановки и решения задач ниже используются уравнения электродинамики во вращающихся системах отсчета [141], [142].

4.1.1 Постановка общей задачи

Введем в свободное пространство инерциальную СО $K'(x', y', z', iv_\phi t) = K'(R', \theta', \varphi', iv_\phi t) = K'(x^{j'})$, где $v_\phi = 1\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость света в неограниченном пространстве, $x^{j'} = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^0)$, $x^{\alpha'} = (R', \theta', \varphi')$ – сферические координаты, $\alpha' = (1', 2', 3')$, $j' = (1', 2', 3', 0')$, и покоящуюся в ней точку наблюдения $P'(x^{\alpha'}, iv_\phi t)$. Резонатор, образованный сферической оболочкой радиуса a и проводимостью σ_1 , пространство внутри которой заполнено изотропной однородной линейной средой без гистерезиса с диэлектрической $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon_0(\varepsilon'_r - i\varepsilon''_r)$ и магнитной $\mu = \mu_0\mu_r$ проницаемостями, вращается относительно точки P' с постоянной угловой частотой Ω . Введем жесткую вращающуюся СО $K(R, \theta, \varphi, t) = K(x^\alpha, t)$, $\alpha = (1, 2, 3)$. Начала сферических систем координат поместим в центре шара, а полярную ось ($\theta = \theta' = 0$) направим вдоль оси вращения. Обозначим через $P(p^\alpha, t)$, где $p^\alpha = (x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, \varphi)$, покоящуюся в СО K точку наблюдения. При этом $R' = R$, $\theta' = \theta$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$. Параметры ε , μ , σ_1 и a считаем измеренными в СО K [142].

В данном случае для сферических СО K и K' соотношения для мирового времени t и координатного (собственного) времени τ в СО K' и K выражается как $\tau = t\sqrt{-g_{00}}/v_\phi$, где g_{00} , временная компонента метрического тензора, представлена в СО K как $g_{00} = -c^2(1 - (\Omega R \sin\theta)^2/c^2) = -c^2(1 - \beta^2)$, где $\beta = \Omega R \sin\theta/v_\phi$, а в инерциальной СО K' – как $g_{00} = 1$ [9], [142], [162].

Обозначим через V_j область сторонних источников, расположенных в объеме резонатора, находящихся в покое в СО K и возбуждающих ЭМ поле на частоте ω_0 , измеренной в мировом времени t . Зависимость сторонних токов и зарядов от времени t принимаем в виде $\exp(i\omega_0 t)$. Считаем, что линейные скорости Ωa всех точек области V_j меньше скорости света [141], [162].

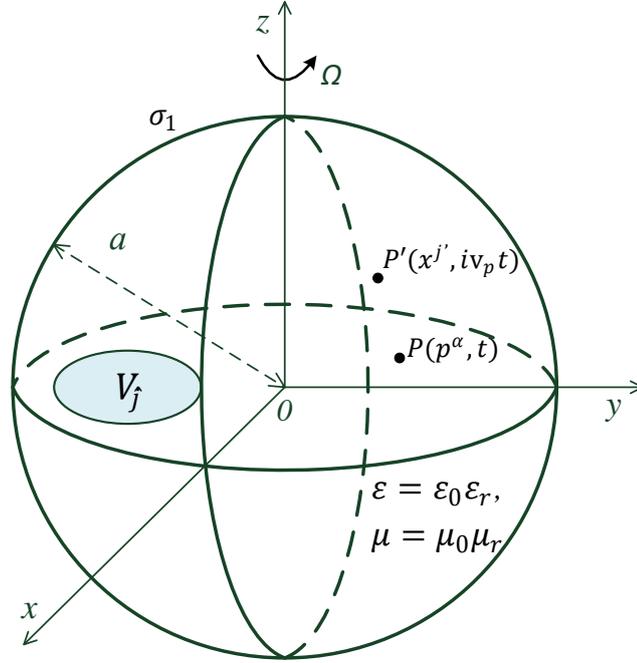


Рисунок 4.1 - К постановке задачи. Вращающийся сферический резонатор

Согласно [141], в трехмерном пространстве, соответствующем пространству внутри сферы, тензор кривизны отличен от нуля, поэтому пространство является римановым V_3 -пространством. Следовательно, уравнения Максвелла для ЭМ поля внутри сферы могут быть записаны в трехмерной форме для трехмерных объектов [142], удовлетворяющей теории размерностей физических величин и тензорных объектов [15], [141], [143]:

$\bar{E} = E_\alpha = (E_1, E_2, E_3) = (E_R, RE_\theta, R \sin\theta E_\varphi)$ – ковариантный вектор напряженности электрического поля,

$\hat{H} = \hat{H}^{\alpha\beta} = (\hat{H}^{23}, -\hat{H}^{13}, \hat{H}^{12}) = (\hat{H}_R, R\hat{H}_\theta, R \sin\theta \hat{H}_\varphi)$ – контравариантная бивекторная плотность веса +1 для напряженности магнитного поля,

$\hat{D} = \hat{D}^\alpha = (\hat{D}^1, \hat{D}^2, \hat{D}^3) = (R^2 \sin\theta \hat{D}^R, R \sin\theta \hat{D}^\theta, R \hat{D}^\varphi)$ – контравариантная векторная плотность веса +1 для электрической индукции,

$\bar{B} = B_{\alpha\beta} = (B_{23}, -B_{13}, B_{12}) = (R^2 \sin\theta B_{\theta\varphi}, -R \sin\theta B_{R\varphi}, R B_{R\theta})$ – ковариантный бивектор для магнитной индукции:

$$\operatorname{rot} \widehat{H} = \frac{\partial \widehat{D}}{\partial t} + \widehat{j}^E, \quad \operatorname{rot} \bar{E} = \frac{-\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{j}^H, \quad \operatorname{div} \widehat{D} = \widehat{\rho}^E, \quad \operatorname{div} \bar{B} = \rho^H, \quad (4.1)$$

где $\widehat{j}^E = j^{E,\alpha} = (R^2 \sin\theta j^{E,R}, R \sin\theta j^{E,\theta}, R j^{E,\varphi})$ – контравариантная векторная плотность объемного стороннего электрического тока, $\widehat{\rho}^E$ – скалярная плотность стороннего объемного электрического заряда, $\bar{j}^H = j_{\alpha\beta}^H = (R^2 \sin\theta j_{\theta\varphi}^H, -R \sin\theta j_{R\varphi}^H, R j_{R\theta}^H)$ – бивектор плотности объемного стороннего магнитного тока, ρ^H – простая скаляр-плотность объемного магнитного заряда [141].

В [141] в СО K ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям (1), с помощью материальных уравнений (2.2), где $\beta = \Omega R \sin\theta / v_\phi$ для сферической системы координат [141], разделено с помощью электрического V^E и магнитного V^H потенциалов Дебая [141], [168] на ЭМ поле электрического типа (E -типа, TM -типа), когда радиальная компонента бивектора магнитной индукции $B_{\theta\varphi} = 0$, и на ЭМ поле магнитного типа (H -типа, TE -типа), когда радиальная компонента векторной плотности электрической индукции $\widehat{D}^R = 0$. Вспомогательные функции V^E и V^H в СО K выбраны таким образом, что удовлетворяют волновому уравнению во вращающейся СО как [141]:

$$\frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial V^{E,H}}{\partial R} + \frac{1-\beta^2}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial V^{E,H}}{\partial \theta} + \frac{2\beta}{v_\phi R \sin\theta} \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial \varphi \partial t} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 V^{E,H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

В результате разделения ЭМ полей с помощью потенциалов Дебая в [141] получены составляющие компонент напряженностей электрического \bar{E}^E, \widehat{H}^E и магнитного \bar{E}^H, \widehat{H}^H типов [141], [181], [182]:

$$\begin{aligned} E_\theta^E &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RV^E)}{\partial \theta \partial R}, & E_\theta^H &= -\frac{i\omega_0 \mu}{R \sin\theta} \frac{\partial (RV^H)}{\partial \varphi} - \frac{W}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \beta \frac{\partial (RV^H)}{\partial \theta}, \\ E_\varphi^E &= \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial^2 (RV^E)}{\partial \varphi \partial R}, & E_\varphi^H &= \frac{i\omega_0 \mu}{R} \frac{\partial (RV^H)}{\partial \theta} - \frac{W\beta}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 (RV^H)}{\partial \varphi \partial \theta}, \\ H_\theta^E &= \frac{i\omega_0 \varepsilon}{R \sin\theta} \frac{\partial (RV^E)}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon W}{\mu R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \beta \frac{\partial (RV^E)}{\partial \theta}, & H_\theta^H &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RV^H)}{\partial \theta \partial R}, \\ H_\varphi^E &= -\frac{i\omega_0 \varepsilon}{R} \frac{\partial (RV^E)}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon W \beta}{\mu R^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 (RV^E)}{\partial \varphi \partial \theta}, & H_\varphi^H &= \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial^2 (RV^H)}{\partial \varphi \partial R}, \\ E_R^E &= \frac{1-\beta^2}{\varepsilon} \widehat{D}^R - \beta W H_\theta^E, & E_R^H &= -\beta W H_\theta^H, \\ H_R^E &= W^{-1} \beta E_\theta^E, & H_R^H &= \frac{1-\beta^2}{\mu} B_{\theta\varphi} + W^{-1} \beta E_\theta^H, \\ \widehat{D}^R &= -\frac{\varepsilon}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial (RV^E)}{\partial \theta} - & B_{\theta\varphi} &= -\frac{\mu}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial (RV^H)}{\partial \theta} - \\ & \frac{\varepsilon}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 (RV^E)}{\partial \varphi^2}, & & \frac{\mu}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 R(RV^H)}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (4.3) \quad (4.4)$$

Необходимо определить выражения для потенциалов Дебая V^E и V^H при условии наличия сторонних источников токов и зарядов во вращающейся сферической полости.

4.1.2 Решение общей задачи

В [141], чтобы удовлетворять волновому уравнению (4.2) и естественному условию периодичности полей в пространстве V_3 по θ и φ , потенциалы Дебая V^E и V^H разлагаются по системе сферических функций [141]:

$$V^E = e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{nm}^E, \quad V^H = e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{nm}^H, \quad (4.5)$$

где U_{nm}^E , U_{nm}^H – функции, определенные для пространства V_3 [141], представлены в виде произведения сферических функций:

$$V^{E,H} = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{nm}^{E,H} = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{nm}^{E,H} e^{-im\varphi} P_n^m(\cos\theta) z_n(k_m R), \quad (4.6)$$

где $d_{nm}^{E,H}$ – постоянные коэффициенты, $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, $z_n(k_m R)$ – сферические функции Бесселя или Ганкеля. Выражение для волнового числа

$$k_m = \frac{\omega_m}{v_\phi} = \frac{\omega_0 + m\Omega}{v_\phi} = k_0 + \frac{m\Omega}{v_\phi}, \quad (4.7)$$

где $m \leq n$, а n – порядок возбужденного в резонаторе колебания, отличающееся от такового для случая отсутствия вращения [169], было получено при решении волнового уравнения (4.2) во вращающихся СО при представлении решения в форме (4.6) при условии периодичности ЭМ полей в пространстве V_3 по φ и θ : $U_{nm}^{E,H}(R, \varphi, \theta) = U_{nm}^{E,H}(R, \varphi, \theta + 2\pi)$, $U_{nm}^{E,H}(R, \varphi, \theta) = U_{nm}^{E,H}(R, \varphi + 2\pi, \theta)$. Более подробное объяснение можно найти в [141], [142].

Необходимо записать выражения для $U_{nm}^{E,H}$ для случая наличия сторонних источников токов и зарядов во вращающемся сферическом резонаторе.

Как и в случае с цилиндрическим резонатором, будем искать ЭМ поле, возбуждаемое во вращающейся сферической полости, как сумму первичного поля $\vec{E}^{E,P}$, $\widehat{H}^{E,P}$, возбуждаемого сторонними источниками токов и зарядов в условиях отсутствия границы раздела сред, и вторичного поля $\vec{E}^{E,S}$, $\widehat{H}^{E,S}$, возбуждаемого токами и зарядами, наведенными на стенках сферической полости (отраженного от этих стенок ЭМ поля) [183], [184]. Тогда, с учетом (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) сферические функции $U_{nm}^{E,H}$ полных ЭМ полей E -типа и H -типа запишем как:

$$U_{nm}^E = U_{nm}^{E,P} + U_{nm}^{E,S}, \quad U_{nm}^H = U_{nm}^{H,P} + U_{nm}^{H,S}, \quad (4.8)$$

где $U_{nm}^{E,H,P}$ и $U_{nm}^{E,H,S}$ – сферические функции первичного и вторичного ЭМ полей соответственно.

В случае, когда граница раздела сред отсутствует, функции $U_{nm}^{E,H,P}$ известны [141], [142] и определяются распределениями сторонних токов и зарядов в области V_j :

$$U_{nm}^{E,H,P} = P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi} \begin{cases} h_n^{(2)}(k_m R) F_{nm}^{(2)E,H}, & R > \rho, \\ j_n(k_m R) F_{nm}^{(1)E,H}, & R < \rho, \end{cases} \quad (4.9)$$

где $h_n^{(2)}(x)$, $j_n(x)$ – сферические функции Ганкеля и Бесселя соответственно, $F_{nm}^{(s)E,H}$ – коэффициенты, определяемые сторонними токами и зарядами [141]:

$$\begin{aligned} F_{nm}^{(s)E} = & -\frac{\varepsilon c_{nm} k_m}{n(n+1)4\pi} \int_{V_j} dV \cdot e^{im\psi} \left[W \cdot j_{R,\theta}^{E,R} \frac{n(n+1)}{k_m \rho} P_n^m(\cos\vartheta) R_n^S(k_m \rho) + \right. \\ & + W \cdot j_{R,\theta}^{E,\theta} \frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \frac{1}{k_m \rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot R_n^S(k_m \rho)) + \\ & + W (j_{R,\varphi}^{E,\varphi} + \Omega \rho \sin\vartheta \hat{\rho}^E) im \frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \frac{1}{k_m \rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot R_n^S(k_m \rho)) - \\ & \left. - \hat{j}_{R,\varphi}^H m \frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} R_n^S(k_m \rho) + i (\hat{j}_{R,\theta}^H + \Omega \rho \sin\vartheta \hat{\rho}^H) \frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta} R_n^S(k_m \rho) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} F_{nm}^{(s)H} = & -\frac{\mu c_{nm} k_m}{n(n+1)4\pi} \int_{V_j} dV \cdot e^{im\psi} \left[W^{-1} \cdot \hat{j}_{R,\varphi}^H \frac{n(n+1)}{k_m \rho} P_n^m(\cos\vartheta) R_n^S(k_m \rho) - \right. \\ & - W^{-1} \cdot \hat{j}_{R,\varphi}^H \frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \frac{1}{k_m \rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot R_n^S(k_m \rho)) + \\ & + W^{-1} (\hat{j}_{R,\theta}^H + \Omega \rho \sin\vartheta \hat{\rho}^H) im \frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \frac{1}{k_m \rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \cdot R_n^S(k_m \rho)) - \\ & \left. - \hat{j}_{R,\theta}^{E,\theta} m \frac{P_n^m(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} R_n^S(k_m \rho) - i (j_{R,\varphi}^{E,\varphi} + \Omega \rho \sin\vartheta \hat{\rho}^E) \frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta} R_n^S(k_m \rho) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $c_{nm} = (2n+1)(n-m)!/(n+m)!$, $dV = \rho^2 \sin\vartheta d\rho d\psi$, ρ , ϑ , ψ – переменные интегрирования по области сторонних источников V_j , $R_n^1(x) = h_n^{(2)}(x)$, $R_n^2(x) = j_n(x)$.

Как отмечено в [141], [142], определяемые сторонними токами и зарядами коэффициенты $F_n^{(s)E}$ (4.10) для ЭМ поля E -типа определяются в том числе угломестной $\hat{j}_{R,\varphi}^H$ и азимутальной $\hat{j}_{R,\theta}^H$ составляющими эквивалентных магнитных токов и объемной плотностью $\hat{\rho}^H$ магнитного заряда, вносящей вклад в значение величины $F_n^{(s)E}$ только при $\Omega \neq 0$ (2.10). Таким образом, можно говорить о наличии конвекционных токов и зарядов, обязанных переносом объемной плотности зарядов $\hat{\rho}^H$ при вращении. Аналогичное справедливо и для коэффициента $F_n^{(s)H}$ (4.11) для ЭМ поля H -типа, определяемого в том числе составляющими $\hat{j}^{E,\varphi}$ и $\hat{j}^{E,\theta}$ электрических токов и объемной плотностью электрического заряда $\hat{\rho}^E$.

Сферические функции $U_{nm}^{E,H,S}$ вторичных ЭМ полей, учитывая, что ЭМ поле должно быть конечным при $R = a$ и при $R = 0$, запишем как [184]

$$U_{nm}^{E,S} = a_{nm} P_n^m(\cos\theta) j_n(k_m R) e^{-im\varphi}, \quad 0 \leq R \leq a, \quad (4.12)$$

$$U_{nm}^{H,S} = b_{nm} P_n^m(\cos\theta) j_n(k_m R) e^{-im\varphi}, \quad 0 \leq R \leq a, \quad (4.13)$$

где a_{nm} , b_{nm} – коэффициенты, определяемые из ГУ на стенках полости при $R = a$.

В результате подстановки сферических функций $U_{nm}^{E,H}$ для полного ЭМ поля (4.8) в (4.3) - (4.4), получаем составляющие компонент векторов напряженностей электрического типа \bar{E}^E , \widehat{H}^E и продольные составляющие индукций [184]:

$$\begin{aligned} E_\theta^E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\theta,nm}^E = e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\varepsilon R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^E)}{\partial\theta\partial R}, \\ E_\varphi^E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\varphi,nm}^E = e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\varepsilon R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^E)}{\partial\varphi\partial R}, \\ E_R^E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{R,nm}^E = \frac{1-\beta^2}{\varepsilon} \widehat{D}^R - \beta W H_\theta^E, \\ H_\theta^E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{\theta,nm}^E = \\ &= e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{i\omega_0}{R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (RU_{nm}^E)}{\partial\varphi} + \frac{W}{\mu R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial}{\partial\theta} \beta \frac{\partial (RU_{nm}^E)}{\partial\theta} \right\}, \\ H_\varphi^E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{\varphi,nm}^E = \\ &= -e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{i\omega_0}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (RU_{nm}^E)}{\partial\theta} - \frac{W\beta}{\mu R^2 \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^E)}{\partial\varphi\partial\theta} \right\}, \\ H_R^E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{R,nm}^E = W^{-1} \beta E_\theta^E, \\ \widehat{D}^R &= -e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{1}{R^2 \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial (RU_{nm}^E)}{\partial\theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^E)}{\partial\varphi^2} \right\}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

и компонент векторов напряженностей магнитного типа \bar{E}^H , \widehat{H}^H :

$$\begin{aligned} E_\theta^H &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\theta,nm}^H = \\ &= -e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{i\omega_0}{R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (RU_{nm}^H)}{\partial\varphi} + \frac{W}{\mu R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial}{\partial\theta} \beta \frac{\partial (RU_{nm}^H)}{\partial\theta} \right\}, \\ E_\varphi^H &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\varphi,nm}^H = \\ &= e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{i\omega_0}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (RU_{nm}^H)}{\partial\theta} - \frac{W\beta}{\mu R^2 \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^H)}{\partial\varphi\partial\theta} \right\}, \\ E_R^H &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{R,nm}^H = -\beta W H_\theta^H, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$H_{\theta}^H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{\theta,nm}^H = e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\mu R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^H)}{\partial \theta \partial R},$$

$$H_{\varphi}^H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{\varphi,nm}^H = e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\mu R \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (RU_{nm}^H)}{\partial \varphi \partial R},$$

$$H_R^H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{R,nm}^H = \frac{1-\beta^2}{\mu} B_{\theta\varphi} + W^{-1} \beta E_{\theta}^H,$$

$$B_{\theta\varphi} = -e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{1}{R^2 \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial (RU_{nm}^H)}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 R (RU_{nm}^H)}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Как и в [141], [142], [181], [182] для задачи существования ЭМ колебаний во вращающейся сферической полости, в (4.14), (4.15) все составляющие ЭМ поля зависят от частоты вращения Ω через коэффициент β и аргументы k_m (4.7). Такими образом, выражения (4.9) – (4.15) представляют собой решение общей задачи возбуждения ЭМ поля во вращающейся сферической полости. Для получения частного решения необходимо определить значение коэффициентов a_{nm} , b_{nm} в выражениях для вторичного поля (4.12), (4.13), используя ГУ на стенках сферы.

4.2 Частное решение задачи возбуждения резонатора с идеально проводящими стенками

В случае, когда стенки сферической полости выполнены из идеально проводящего металла ($\sigma_1 \rightarrow \infty$, PEC), на них должны выполняться нулевые ГУ для составляющих векторов ЭМ поля $E_{\theta}^{E,H}$ и $E_{\varphi}^{E,H}$ [169], [185]:

$$E_{\theta}^{E,H}(R, \theta, \varphi) = E_{\varphi}^{E,H}(R, \theta, \varphi) = 0 \quad \text{при } R = a. \quad (4.16)$$

Из (4.14), (4.15) видно, что ГУ (4.16) удовлетворяются для колебаний электрического типа, если

$$\partial(U_{nm}^E)/\partial R = 0 \quad \text{при } R = a, \quad (4.17)$$

т.е. имеем граничную задачу Неймана (граничную задачу второго рода). А для колебаний магнитного типа – при условии

$$U_{nm}^H = 0 \quad \text{при } R = a, \quad (4.18)$$

т.е. имеем граничную задачу Дирихле (граничную задачу первого рода).

Подставляя функции U_{nm}^E и U_{nm}^H из (4.8) в ГУ (4.17) и (4.18) соответственно, с учетом (4.9), (4.12) и (4.13) находим коэффициенты a_m и b_m [185]

$$a_m = - \frac{[a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]'}{[a \cdot j_n(k_m a)]'} F_{nm}^{(2)E}, \quad (4.19)$$

$$b_m = -\frac{h_n^{(2)}(k_m a)}{j_n(k_m a)} F_{nm}^{(2)H}, \quad (4.20)$$

где штрих над скобкой обозначает производную по R при $R = a$.

Таким образом, системы сферических функций $U_{nm}^{E,H}$ для вращающегося сферического резонатора с идеально проводящими стенками можно записать как [185], [184]:

$$U_{nm}^E = P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi} \times \begin{cases} \left[\frac{[a \cdot j_n(k_m a)]' h_n^{(2)}(k_m R) - [a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]' j_n(k_m R)}{[a \cdot j_n(k_m a)]'} \right] F_{nm}^{(2)E}, & R > \rho, \\ \left[F_{nm}^{(1)E} - \frac{[a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]'}{[a \cdot j_n(k_m a)]'} F_{nm}^{(2)E} \right] j_n(k_m R), & R < \rho; \end{cases} \quad (4.21)$$

$$U_{nm}^H = P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi} \times \begin{cases} F_{nm}^{(2)H} \frac{j_n(k_m a) h_n^{(2)}(k_m R) - h_n^{(2)}(k_m a) j_n(k_m R)}{j_n(k_m a)}, & R > \rho, \\ \left[F_{nm}^{(1)H} - \frac{h_n^{(2)}(k_m a)}{j_n(k_m a)} F_{nm}^{(2)H} \right] j_n(k_m R), & R < \rho, \end{cases} \quad (4.22)$$

а общее решение граничной задачи возбуждения вращающегося сферического резонатора со стенками идеальной проводимости будет определяться выражениями (4.14), (4.15), (4.21), (4.22).

4.3 Частное решение граничной задачи с импедансными граничными условиями

В реальности стенки резонатора выполнены из металла конечной проводимости. Следовательно, для учета джоулевых потерь в металле, из которого изготовлен резонатор, необходимо сформулировать и решить граничные задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся сферическом резонаторе с импедансными стенками, чтобы определить коэффициенты a_{nm} и b_{nm} в выражениях (4.12) и (4.13) [186], [187].

4.3.1 Импедансные граничные условия

В [171] показано, что на поверхностях покоящихся во вращающихся СО тел для касательных компонент напряженностей ЭМ поля выполняются те же граничные условия, что и на поверхности тела, покоящегося в инерциальной СО. Тогда ИГУ на поверхности вращающегося шара имеют форму [141], [142]:

$$E_\theta = (1 - \beta^2)^{1/2} Z_1^\omega(\theta, \varphi) \hat{H}^{R,\theta}, \quad E_\varphi = (1 - \beta^2)^{-1/2} Z_2^\omega(\theta, \varphi) \hat{H}^{R,\varphi} \quad \text{при } R = a,$$

где $Z_{1,2}^\omega(\theta, \varphi)$ – поверхностное сопротивление металла на частоте ω_0 и, в соответствии с отождествлением тензорных компонент (4.1) [141], E_θ , E_φ – измеряемые угломестная и азимутальная составляющие вектора \vec{E} , а $\hat{H}^{R,\theta} = H_\varphi$, $\hat{H}^{R,\varphi} = -H_\theta$, где H_θ , H_φ – измеряемые азимутальная и угломестная составляющие вектора \hat{H} . При этом на внутренней поверхности стенки сферы имеем:

$$E_\theta = (1 - \beta^2)^{1/2} Z_1^\omega(\theta, \varphi) H_\varphi, \quad E_\varphi = -(1 - \beta^2)^{-1/2} Z_2^\omega(\theta, \varphi) H_\theta \quad \text{при } R = a. \quad (4.23)$$

При условии однородности металла стенок резонатора Z_1^ω и Z_2^ω по координатам θ и φ и малости скорости вращения по сравнению с частотой возбуждения резонатора, т.е. $\beta \ll 1$, считаем, что

$$(1 - \beta^2)^{1/2} Z^\omega(\theta, \varphi) \approx (1 - \beta^2)^{-1/2} Z^\omega(\theta, \varphi) = Z^\omega = R^\omega + iX^\omega, \quad (4.24)$$

где R^ω и X^ω – активная и реактивная составляющие поверхностного импеданса металлических стенок резонатора, $W^\omega \approx (\omega_0 \mu_1 / \sigma_1)^{1/2} \exp(i\pi/4)$ – характеристическое сопротивление среды, являющейся проводником, δ – глубина проникновения ЭМ поля в металлические стенки. Поэтому $R^\omega \approx X^\omega \approx (\omega_0 \mu_1 / 2\sigma_1)^{1/2}$.

Таким образом, ИГУ для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля во вращающейся сферической полости в соответствии с (4.23) в отмеченном приближении имеют вид:

$$E_\theta = Z^\omega H_\varphi, \quad E_\varphi = -Z^\omega H_\theta \quad \text{при } R = a. \quad (4.25)$$

Как было отмечено выше, ИГУ в форме (4.25) получены для случая $\beta = \Omega R \sin\theta / v_\phi \ll 1$, и при больших значениях Ω будут включать в себя множители, обязанные вращению (4.23).

Подставляя $E_\theta = E_\theta^E + E_\theta^H$, $H_\theta = H_\theta^E + H_\theta^H$, $E_\varphi = E_\varphi^E + E_\varphi^H$ и $H_\varphi = H_\varphi^E + H_\varphi^H$ из (4.14), (4.15) в (4.25), находим, что ИГУ удовлетворяются, если компоненты пространственного спектра удовлетворяют условиям [186]

$$E_{\theta, nm}^E = Z^\omega H_{\varphi, nm}^E, \quad E_{\varphi, nm}^E = -Z^\omega H_{\theta, nm}^E \quad \text{при } R = a, \quad (4.26)$$

$$E_{\theta, nm}^H = Z^\omega H_{\varphi, nm}^H, \quad E_{\varphi, nm}^H = -Z^\omega H_{\theta, nm}^H \quad \text{при } R = a. \quad (4.27)$$

Сформулируем ИГУ для составляющих $E_{\theta, nm}^E$ и $H_{\varphi, nm}^E$, подставив их значения из (4.14) в (4.26). Учитывая, что $\omega_0 \varepsilon = k_0 / W$, $\frac{\varepsilon W \beta}{\mu R^2} = \Omega / (WRv_\phi)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-im\varphi} = -ime^{-im\varphi}$, $Z_0^\omega = Z^\omega / W$ – нормированное значение импеданса, получим, что первое ИГУ в (4.26) удовлетворяется, если

$$\frac{\partial(k_m R U_{nm}^E)}{\partial k_m R} = -i Z_0^\omega k_m R U_{nm}^E, \quad R = a. \quad (4.28)$$

Рассмотрим составляющие $E_{\varphi, nm}^E$ и $H_{\theta, nm}^E$. Используя в выражении для $H_{\theta, nm}^E$ выражение для \widehat{D}_{nm}^R из (4.14) с учетом, что $W/(\mu v_\phi) = 1$, и подставляя полученное выражение и $E_{\varphi, nm}^E$ из (4.14) в (4.26), получаем:

$$\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial^2(R U_{nm}^E)}{\partial \varphi \partial R} \approx -Z_0^\omega \left[\frac{i k_m}{R \sin \theta} \frac{\partial(R U_{nm}^E)}{\partial \varphi} - \beta \frac{1}{\varepsilon} \widehat{D}_{nm}^R \right].$$

Если пренебречь значением слагаемого $Z_0^\omega \beta \frac{1}{\varepsilon} \widehat{D}_{nm}^R$ в правой части равенства при $\Omega/\omega_0 \ll 1$, то второе ИГУ (4.26) выполняется, если:

$$\frac{\partial(k_m R U_{nm}^E)}{\partial k_m R} \approx -i Z_N^\omega k_m R U_{nm}^E, \quad R = a, \quad (4.29)$$

т. е. для составляющих пространственного спектра функции U_{nm}^E имеем одинаковые ИГУ (4.28) и (4.29).

Сформулируем ИГУ для $E_{\varphi, nm}^H$ и $H_{\theta, nm}^H$ (4.27). Для этого подставим значения этих составляющих из (4.15) в (4.27) и выполняя дифференцирование по координате φ , нормируя импеданс, получим, что второе ИГУ в (4.27) выполняется, если

$$i k_m R U_{nm}^H + Z_0^\omega \frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial k_m R} = 0, \quad R = a. \quad (4.30)$$

Для записи ИГУ для составляющих векторов $E_{\theta, nm}^H$ и $H_{\varphi, nm}^H$ пространственного спектра подставим эти составляющие из (4.15) в (4.27), используем выражение для $B_{\theta, nm}$ из (4.15) и учтем, что $\frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-im\varphi} = -im e^{-im\varphi}$, $\omega_0 \mu = \omega_0 W/v_\phi$, $\omega_0 + m\Omega = \omega_m$, а $\omega_m/v_\phi = k_m$, $Z_0^\omega = Z^\omega/W$. Тогда, объединяя слагаемые в полученном выражении, запишем

$$\frac{1}{R \sin \theta} \left[i k_m R U_{nm}^H + Z_0^\omega \frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial k_m R} \right] = \beta \frac{1}{\mu} B_{\theta, nm}, \quad \text{при } R = a.$$

Пренебрегая значением правой части равенства при $\beta \ll 1$, имеем ИГУ

$$i k_m R U_{nm}^H + Z_0^\omega \frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial k_m R} \approx 0, \quad \text{при } R = a, \quad (4.31)$$

которое совпадает с (4.30).

Таким образом, для функций $U_{nm}^{E,H}$ (4.8) получили два ИГУ [186], [187]:

$$\frac{\partial(k_m R U_{nm}^E)}{\partial(k_m R)} + i Z_0^\omega (k_m R U_{nm}^E) = 0, \quad R = a, \quad (4.32)$$

$$i(k_m R)U_{nm}^H + Z_0^\omega \frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial(k_m R)} = 0, \quad R = a.$$

Разделяя второе из равенств (4.32) на Z_0^ω , обозначая через $Y_0 = Z_0^{-1}$ поверхностную проводимость, получаем граничное условие для ЭМ поля H -типа

$$\frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial(k_m R)} + iY_0(k_m R U_{nm}^H) = 0 \quad \text{при } R = a,$$

симметричное граничному условию для ЭМ поля E -типа.

4.3.2 Решение граничной задачи с импедансными граничными условиями

Для определения коэффициентов a_{nm} и b_{nm} в (4.12) и (4.13) из ИГУ (4.32) подставим выражения пространственных гармоник функций $U_{nm}^{E,H}$ (4.8) ЭМ поля с учетом (4.9), (4.12) и (4.13) в (4.32). Получаем при $R = a$ [186]:

$$a_{nm} = - \frac{[(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a)]' + iZ_0^\omega(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a)}{[(k_m a)j_n(k_m a)]' + iZ_0^\omega(k_m a)j_n(k_m a)} F_{nm}^{(2)E} \quad \text{при } R = a,$$

$$b_{nm} = - \frac{i(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a) + Z_0^\omega[(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a)]'}{i(k_m a)j_n(k_m a) + Z_0^\omega[(k_m a)j_n(k_m a)]'} F_{nm}^{(2)H} \quad \text{при } R = a,$$

где штрих над скобкой означает производную по аргументу $(k_m R)$ при $R = a$.

Таким образом, все пространственные гармоники составляющих векторов напряженностей ЭМ поля E_{nm} -типа определяются по (4.14) найденными пространственными гармониками U_{nm}^E [186], [187]

$$U_{nm}^E = U_{nm}^{E,P} + U_{nm}^{E,S} = P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi} \times$$

$$\times \begin{cases} h_n^{(2)}(k_m R)F_{nm}^{(2)E} & R > \rho, \\ j_n(k_m R)F_{nm}^{(1)E} - \frac{[(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a)]' + iZ_0^\omega(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a)}{[(k_m a)j_n(k_m a)]' + iZ_0^\omega(k_m a)j_n(k_m a)} j_n(k_m R)F_{nm}^{(2)E} & R < \rho, \end{cases} \quad (4.33)$$

а все пространственные гармоники составляющих векторов напряженностей полного ЭМ поля H_{nm} -типа определяются по (4.15) найденными пространственными гармониками U_{nm}^H [186], [187]

$$U_{nm}^H = U_{nm}^{H,P} + U_{nm}^{H,S} = P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi} \times$$

$$\times \begin{cases} h_n^{(2)}(k_m R)F_{nm}^{(2)H} & R > \rho, \\ j_n(k_m R)F_{nm}^{(1)H} - \frac{i(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a) + Z_0^\omega[(k_m a)h_n^{(2)}(k_m a)]'}{i(k_m a)j_n(k_m a) + Z_0^\omega[(k_m a)j_n(k_m a)]'} j_n(k_m R)F_{nm}^{(2)H} & R < \rho. \end{cases} \quad (4.34)$$

Выражения (4.33), (4.34) совместно с (4.14), (4.15) определяют в импедансном приближении общее решение поставленной граничной задачи возбуждения распределением

плотностей сторонних электрических (4.10) и магнитных (4.11) токов и зарядов вращающейся с постоянной скоростью Ω сферической полости.

4.4 Анализ полученного решения. Измерение частоты вращения

Из выражений (4.21), (4.22) следует, что собственными значениями $k_m^E a$ сферического резонатора при выбранном E -колебании будут являться корни u_{nmq}^E дисперсионного уравнения $[a \cdot j_n(k_m a)]' = 0$ (n – порядок функции Бесселя, $|m| \leq n$, q – порядок выбранного корня u_{nmq}^E дисперсионного уравнения), а собственными значениями сферы $k_m^H a$ в случае H -колебаний будут являться корни u_{nmq}^H дисперсионного уравнения $j_n(k_m a) = 0$, где $q = 1, 2, 3, \dots$. Каждому значению q соответствуют корни $k_m^{E,H} a = u_{nmq}^{E,H}$. Т.е., согласно (4.7)

$$\frac{\omega_{0,nmq}^{E,H} - m\Omega}{v_\phi} a = u_{nmq}^H, \quad \omega_{0,nmq}^{E,H} = \frac{v_\phi}{a} u_{nmq}^H + m\Omega, \quad (4.35)$$

где $\omega_{0,nmq}^{E,H}$ – собственная частота полости при вращении ее со скоростью Ω . При условии $|m| \leq n$ можно говорить о появлении во вращающемся сферическом резонаторе новых обязанных вращению собственных частот для различных значений m . При этом все собственные частоты вращающейся полости выбранного радиуса $a = u_{nmq}^{E,H} / k_0^{E,H}$ можно записать как [181], [182]:

$$\omega_{0,nmq}^{-E,H} = \frac{v_\phi}{a} u_{nmq}^H + m\Omega, \quad \omega_{0,nmq}^{+E,H} = \frac{v_\phi}{a} u_{nmq}^H - m\Omega, \quad \omega_{0,nmq}^{E,H} = \frac{v_\phi}{a} u_{nmq}^H. \quad (4.36)$$

Из полученных выражений (4.36) видно, что для измерения частоты вращения с помощью резонансного метода, использующего эффект появления новых собственных частот полости, обусловленных вращением [144], необходимо, возбуждать во вращающемся резонаторе колебание типа не ниже $n = 1$. В противном случае при $n = 0$ коэффициенты $m = \pm n = 0$, $\omega_{0,00q}^{E,H} = \frac{v_\phi}{a} u_{nmq}^H$ и колебание информации о вращении не несет (4.36). **В связи с этим в случае вращения колебание порядка $n = 1$ принято считать основным [142].**

При учете тепловых потерь на нагревание диэлектрика, заполняющего резонатор, будем использовать следующее выражение для аргументов сферических функций $U_{nm}^{E,H}$ (4.7) [169], [188]:

$$k_m^{E,H} a = (\beta_m - i\alpha_m) a \approx \left[\omega_m \sqrt{\varepsilon' \mu} - i \frac{\omega_m}{2\omega_0} \sigma W \right] a = \omega_m \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[1 - i \frac{1}{2} \tan \delta \right] a, \quad (4.37)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon'_r$, $\varepsilon'' = \varepsilon_0 \varepsilon''_r = \sigma / \omega_0$, $\varepsilon'_r = \sigma / \varepsilon_0 \omega_0$, $\omega_0 > 0$, $\Omega > 0$, σ – удельная проводимость (См/м), $\sigma = \omega_0 \varepsilon' \tan \delta$, β_m – коэффициент фазы, α_m – коэффициент затухания.

Выберем тип колебаний E_{NMQ} или H_{NMQ} , где N , M , Q – фиксированные значения коэффициентов n , m , q соответственно. При идеальном диэлектрике ($\tan \delta = 0$) все собственные

значения $u_{NQ}^{E,H}$ являются действительными и известны (4.37) [189], а радиус резонатора для существования в нем колебаний с частотой $\omega_0 = \omega_{0,MNQ}^{E,H}$ определяется из соотношения $k_{0,MNQ}^{E,H} a = u_{NQ}^{E,H}$. Тогда при $k_{0,MNQ}^{E,H} = \omega_{0,MNQ}^{E,H} \sqrt{\varepsilon' \mu}$ при вращении полости радиуса

$$a = u_{NQ}^{E,H} / k_{0,MNQ}^{E,H} \quad (4.38)$$

с частотой Ω возможны следующие значения аргументов $k_m^{E,H} a$ в выражениях (4.33), (4.34) при учете (4.36) и $|m| \leq n$:

$$\begin{aligned} k_{|m|}^{E,H} a &\approx (\omega_{0,MNQ}^{E,H} + m\Omega) \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[1 - i \frac{i}{2} \tan \delta \right] \frac{u_{NQ}^{E,H}}{k_{0,MNQ}^{E,H}}, \\ k_{-|m|}^{E,H} a &\approx (\omega_{0,MNQ}^{E,H} - m\Omega) \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[1 - i \frac{i}{2} \tan \delta \right] \frac{u_{NQ}^{E,H}}{k_{0,MNQ}^{E,H}}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$k_0^{E,H} a = \omega_{0,MNQ}^{E,H} \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[1 - i \frac{i}{2} \tan \delta \right] \frac{u_{NQ}^{E,H}}{k_{0,MNQ}^{E,H}}.$$

Как было записано в [142], [181] для задачи существования ЭМ колебаний во вращающейся сферической полости, при $n = N > 0$ ЭМ поле E_N^E -колебания при $N = 1$ имеет во вращающемся резонаторе три резонансных частоты, и можно утверждать, что оно «расщепляется» на ЭМ поле E_{N1Q}^E , E_{N0Q}^E и E_{N-1Q}^E колебаний. Если резонатор неподвижен ($\Omega = 0$), то в нем при воздействии сторонних источников токов и зарядов возбуждается поле E_{N0Q}^E -колебания (4.39). Если же резонатор вращается ($\Omega \neq 0$), то при воздействии сторонних источников с частотой $\omega_{m,MNQ}^E = \omega_{0,MNQ}^E + m\Omega$ в нем возбуждается поле E_{N1Q}^E , а при воздействии источников с частотой $\omega_{m,MNQ}^E = \omega_{0,MNQ}^E - m\Omega$ – поле E_{N-1Q}^E -колебаний (при радиусе $a = \frac{u_{NQ}^{E,H}}{k_{0,MNQ}^{E,H}}$ измеренном в СО К).

Получаем, что для каждого типа колебаний E_{N0Q} (или H_{N0Q}) появляется два новых типа колебания E_{N-mQ} (или H_{N-mQ}) и E_{mNQ} (или H_{mNQ}), ($N > 0$ – выбранный тип колебания, при котором образуется $2N$ новых собственных частот вращающегося резонатора, $\omega_0 - M\Omega$, $m = M$ – порядок выбранной собственной частоты вращающегося резонатора, $Q = q$ – порядок корня дисперсионного уравнения для вычисления собственных значений полости).

Описанное выше согласуется с экспериментально наблюдаемым в [149], [150], [179] эффектом разделения каждой моды вращающегося резонатора на две новых собственных частоты, что авторы работ [179] объясняют эффектом Саньяка, а также согласуется с полученными при приближенном решении задачи выражениями [137], [136]. Приведенное строгое аналитическое решение задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся сферическом резонаторе позволяет исследовать наблюдаемые эффекты более точно для широкого круга задач, что важно с учетом

невозможности проведения соответствующего электродинамического моделирования в существующих САПР (которые не учитывают релятивистские эффекты во вращающихся СО).

Общий анализ полученных выражений для поля E -колебаний по сути совпадает с приведенным в [142] для задачи существования ЭМ колебаний во вращающейся сферической полости. При $\Omega = 0$, т.е. в неподвижном резонаторе, выражения (4.2), (4.14), (4.15) превращаются в известные выражения [168]. При $\Omega \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$, во-первых, появляются две дополнительных резонансных частоты, зависящие от Ω (4.36), а во-вторых, существенно изменяются угломестная и азимутальная составляющие вектора \vec{H} , а появление радиальной составляющей этого вектора целиком обязано только вращению резонатора (4.14). При $\omega_0 = 0$, а $\Omega \neq 0$ остаются все три составляющие вектора \vec{E} и остаются все три составляющих вектора \vec{H} , но последние пропорциональны частоте вращения через коэффициент β и обязаны конвекционным токам ввиду вращения полости (4.10) [181].

Общий анализ полученных выражений для поля H -колебаний. При $\Omega \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$ появляются две дополнительных резонансных частоты резонатора, существенно изменяются угломестная и азимутальная составляющие вектора напряженности электрического поля \vec{E} и появляются радиальная составляющая этого вектора (4.15). При $\omega_0 = 0$, $\Omega \neq 0$ в полости возбуждаются все три составляющих вектора \vec{H} и вектора \vec{E} , все три составляющие которого пропорциональны частоте вращения через коэффициент β (4.15) [182].

4.5 Численные результаты

Для расчетов будем использовать полученное аналитическое решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся сферическом резонаторе с импедансными стенками (4.14), (4.15), (4.33), (4.34) для случая, когда сторонним источником токов и зарядов является ЭЭВ.

4.5.1 Возбуждение вращающегося резонатора элементарным электрическим вибратором

Рассмотрим возбуждение вращающегося сферического резонатора радиальным ЭЭВ при $\Omega/\omega_0 \ll 1$, когда

$$\begin{aligned} j^{E,R} &= e^{i\omega_0 t} \hat{f}^E L \hat{\delta}(R - R_0) \frac{\hat{\delta}(\theta - \theta_0)}{R} \frac{\hat{\delta}(\varphi - \varphi_0)}{R \sin \theta}, \\ j^{E,\theta} = j^{E,\varphi} &\equiv 0; \quad j_{\alpha,\beta}^{H,M} = 0, \quad \rho^H = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где координаты $0 < R_0 < a$, θ_0 , φ_0 определяют положение ЭЭВ в полости, L – длина ЭЭВ, \hat{j}^E – плотность линейного тока.

Из закона сохранения электрического заряда [141], [162] получим выражения для электрического тока $\hat{\rho}^E$ в (4.10), (4.11):

$$\hat{\rho}^E = -\frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial j^{E,R}}{\partial R} = \frac{\hat{j}^E L}{i\omega_0 R_0^2 \sin\theta_0} \delta'(R - R_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (4.41)$$

где $\delta'(R - R_0)$ – производная δ -функции [169].

Подставляя (4.40) и (4.41) в (4.10) и (4.11) и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $\Omega/\omega_0 \ll 1$, получаем

$$F_{nm}^{(1)E} \approx -\frac{\varepsilon c_{nm} W \hat{j}^E L}{4\pi R_0} e^{im\varphi_0} P_n^m(\cos\theta_0) h_n^{(2)}(k_m R_0), \quad (4.42)$$

$$F_{nm}^{(2)E} \approx -\frac{\varepsilon c_{nm} W \hat{j}^E L}{4\pi R_0} e^{im\varphi_0} P_n^m(\cos\theta_0) j_n(k_m R_0), \quad (4.43)$$

$$F_{nm}^{(s)H} \approx 0.$$

Таким образом, в приближении $\Omega/\omega_0 \ll 1$ получим, что $U_{nm}^H \approx 0$ и ЭМ поля колебаний магнитного типа в полости нет. В данном случае очень важно отметить, что выражения (4.42), (4.43) получены из условия малости скорости вращения по сравнению с величиной собственных частот вращающейся полости в покое, $\Omega/\omega_0 \ll 1$. С ростом Ω в выражениях (4.10), (4.11) слагаемыми, пропорциональными Ω/ω_0 , нельзя будет пренебречь. Следовательно, при возбуждении ЭМ поля E -типа $F_{nm}^{(s)H} \neq 0$ за счет конвекционных токов $\hat{\rho}^E$ в выражении (4.11), а вместе с этим и $U_{nm}^H \neq 0$. То есть, согласно полученным выше выводам, во вращающейся полости будет возбуждаться и поле магнитных колебаний. Справедливо и обратное для эквивалентных источников магнитного поля и функций $F_{nm}^{(s)E}$ с аналогичными выводами.

4.5.2 Частотная характеристика вращающегося сферического резонатора

Полученное строгое решение (4.14), (4.15), (4.34), (4.40), (4.41) и (4.42), (4.43) граничной задачи возбуждения вращающегося сферического резонатора позволяет рассчитать ЧХ резонатора, которые определяют добротность последнего в состоянии покоя (при $\Omega = 0$), и определить ЧХ на расщепляемых резонансных частотах $\omega_0 \pm m\Omega$ вращающегося резонатора (4.36). ЧХ E_{Nmq} -колебаний при выбранном значении $n = N$ будем считать выражение

$$G_N(f) = |\widehat{D}_N^R(f)|^2 / |\widehat{D}_N^R(f)|_{max}^2, \quad (4.44)$$

где $\widehat{D}_N^R = N(N+1) \sum_{m=-N}^N U_{Nm}^E$ – электрическая индукция возбужденного во вращающемся сферическом резонаторе ЭМ поля E_N -типа (4.14).

Для расчета радиусов резонаторов, необходимых для возбуждения колебания основного типа ($n = 1$) использованы собственные значения идеальной полости (без тепловых потерь) $u_{nq} = \omega_m \sqrt{\varepsilon' \mu a}$ (4.38).

4.5.3 Численные результаты при $\Omega = 0$. Проверка решения

Ввиду того, что существующие САПР разработаны на основе уравнений Максвелла и представлении векторов напряженности ЭМ поля, не учитывающих описанные в данной работе обязательные вращению добавочные слагаемые в выражениях для составляющих векторов напряженностей ЭМ поля (4.14), (4.15), для проверки полученного аналитического решения исследуем частный случай равенства частоты вращения резонатора нулю. В случае, когда $\Omega = 0$, аргумент сферических функций в (4.33), (4.34) выражается как $k_m^{E,H} a = k_{0,MNQ}^{E,H} a = \omega_{0,MNQ}^{E,H} \sqrt{\varepsilon' \mu a}$ (4.39), а по построенным ЧХ (Рисунок 4.2) определяется Q резонатора.

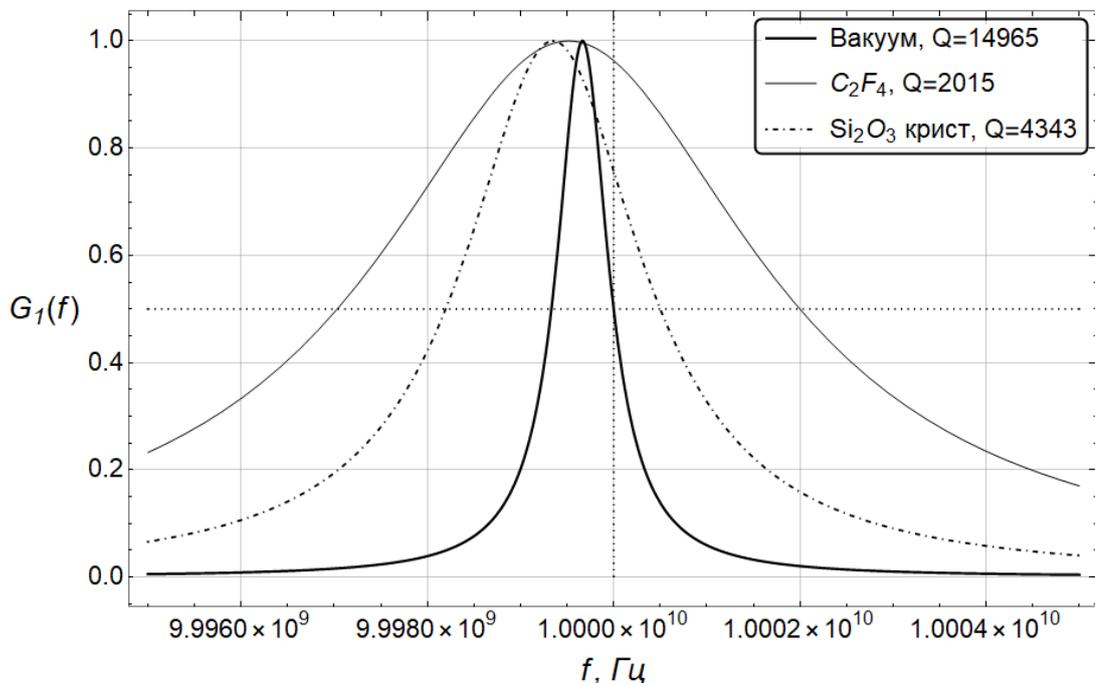


Рисунок 4.2 - Нормированные ЧХ (4.44) резонатора в покое ($\Omega = 0$)

Примеры ЧХ (4.33), (4.34) при $\Omega = 0$ приведенным на рисунке (Рисунок 4.2) для следующего случая: $f_0 = 10$ ГГц, $\Omega = 0$ рад/с, $N = 1$, проводимость стенок $\sigma_1 = 6,14 \cdot 10^7$ См/м,

материалы заполнения выбраны из Таблицы 4.1. Радиус сфер a выбран из условия существования основного типа колебаний при $N = 1$ (4.39), ЭМ поле возбуждается ЭЭВ, который расположен в точке с координатами $(a, 30^\circ, 30^\circ)$, точка наблюдения имеет координаты $(a, 60^\circ, 60^\circ)$. Смещение ЧХ в сторону меньших частот обязано индуктивному характеру импеданса стенок резонатора (4.24).

Таблица 4.1 – Параметры материалов стенок и заполнения резонатора на частоте 10 ГГц

а) параметры заполняющего полость материала

Диэлектрик	Обозначение	ϵ'_r	$\tan\delta$	Радиус a , мм
Вакуум	Вакуум	1,0	0,0	13,09
Тефлон	C_2F_4	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	9,08
Оксид алюминия	Al_2O_3	9,2	$3 \cdot 10^{-4}$	4,32
Оксид бериллия	BeO	6,5	$3 \cdot 10^{-4}$	5,13
Плавленый кварц	Si_2O_3 плав	3,6	$2 \cdot 10^{-4}$	6,89
Кристаллический кварц	Si_2O_3 крист	3,8	$1 \cdot 10^{-4}$	6,72

б) параметры материала стенок полости

Металл	Обозначение	Проводимость, 10^7 См/м
Идеальный проводник	PEC	$\sigma_1 = \infty$
Серебро	Ag	$\sigma_1 = 6,139$
Золото	Cu	$\sigma_1 = 5,95$
Медь	Au	$\sigma_1 = 4,35$
Платина	Pt	$\sigma_1 = 0,935$
Свинец	Pb	$\sigma_1 = 0,476$

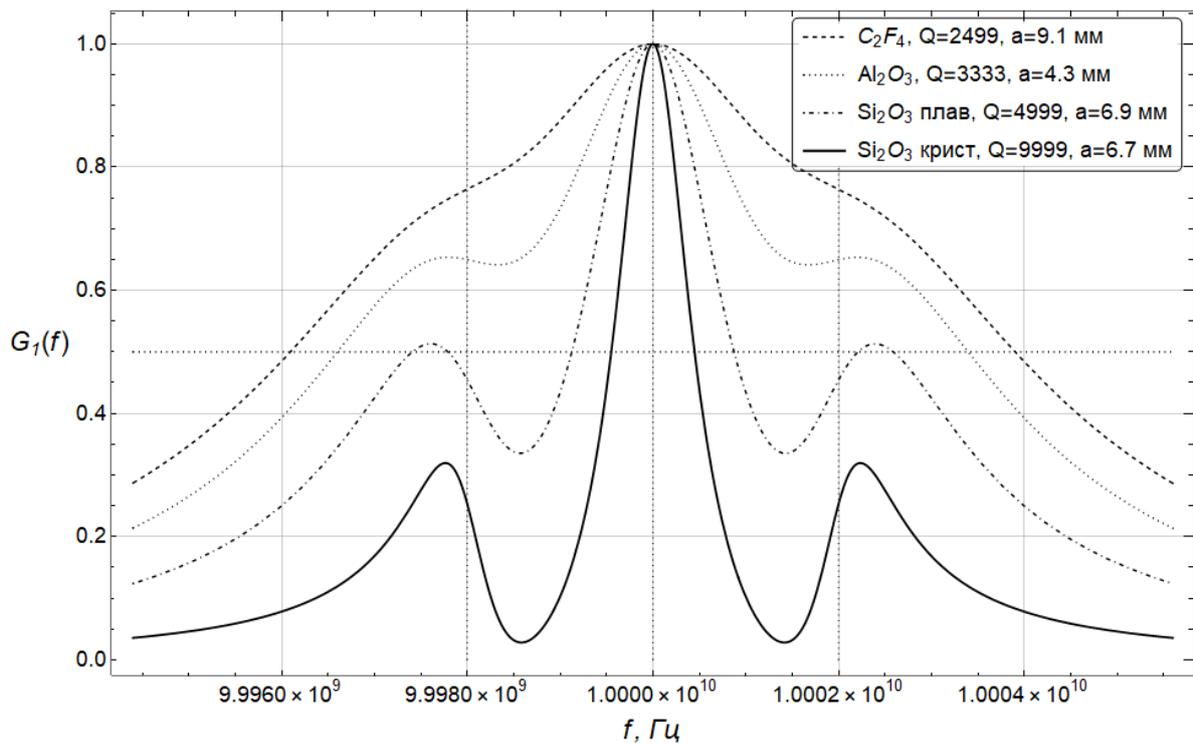
В таблице (Таблица 4.2) рассчитанные по ЧХ значения Q и f_0 сравниваются со значениями, полученными при моделировании аналогичных задач в Ansys HFSS и CST Studio Suite. Как видно из таблицы, полученные двумя способами расчета значения совпадают с точностью до сотых и тысячных долей процента (что может определяться выбранной точностью решения в САПРах).

Таблица 4.2 – Добротности Q и собственные частоты резонатора f_0 (Гц), $\Omega = 0$

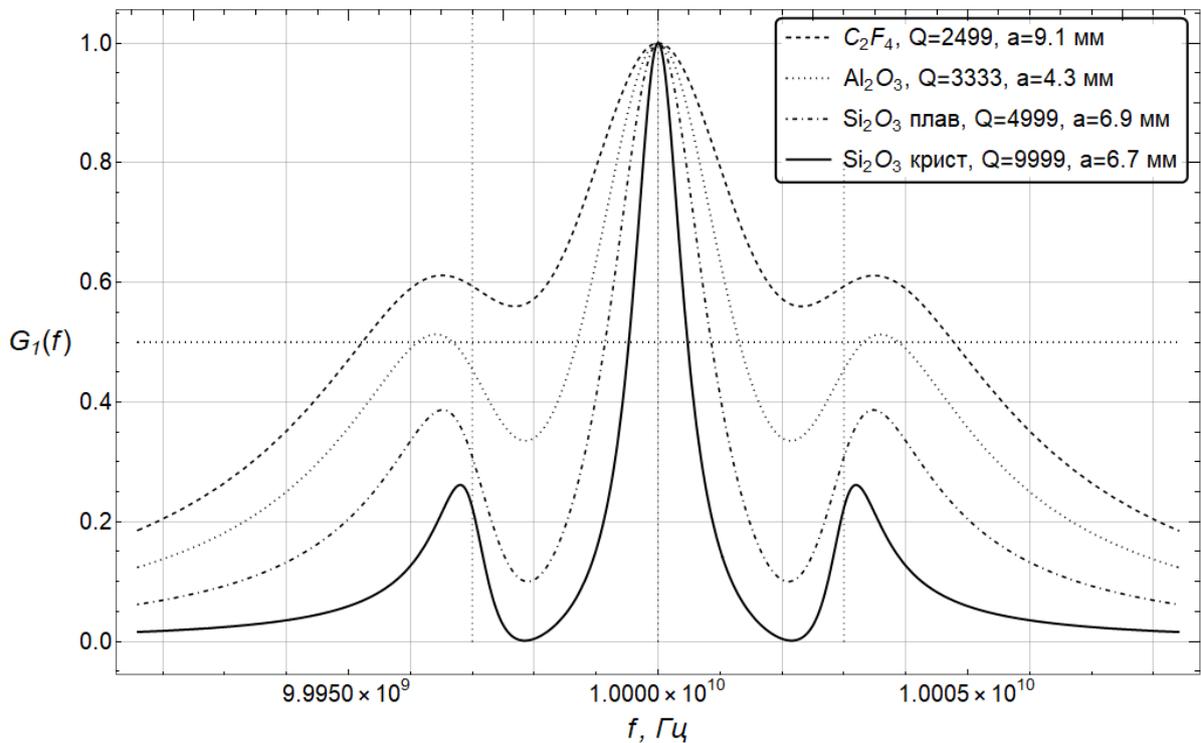
Материал заполнения полости		Материал стенок полости		
		Math	HFSS / CST	Отклонение, % $ Q_{math} - Q_{CST} /Q_{CST}$
		Ag, $\sigma_1 = 6,14 \cdot 10^7$ См/м		
Вакуум	Q	14965,24	14965,21	0,0002
	f_0	9999665880	9999669052	0,00003
C_2F_4	Q	2014,65	2014,57	0,004
	f_0	9999516526	9999523367	0,00007
Si_2O_3 крист	Q	4342,94	4342,81	0,003
	f_0	9999348480	9999352141	0,00004
		Cu, $\sigma_1 = 5,95 \cdot 10^7$ См/м		
Вакуум	Q	14733,07	14732,97	0,0007
	f_0	9999660615	9999677583	0,0002
C_2F_4	Q	2008,51	2008,42	0,004
	f_0	9999508926	9999468313	0,0004
Si_2O_3 крист	Q	4304,56	4304,43	0,003
	f_0	9999338146	9999341875	0,00003
		PEC, $\sigma_1 \rightarrow \infty$		
C_2F_4	Q	2499,9998	2500	0,000008
	f_0	9999993346	9999918198	0,0007
Si_2O_3 крист	Q	9999,9946	10000	0,000054
	f_0	9999999958	9999896879	0,001

4.5.4 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Эффект расщепления частот

ЧХ при вращении резонатора с частотой $\Omega \neq 0$ приведены на Рисунке 4.3, Рисунке 4.4, Рисунке 4.5. Из рисунков видно, что при возбуждении во вращающемся сферическом резонаторе моды порядка $N = 1$ появились две ($2N = 2$) новые собственные частоты ω_0^\pm (4.36), разнесенные на величину Ω от собственной частоты резонатора ω_0 в покое благодаря вращению, т.е. воздействию эквивалентного гравитационного поля.



а) $\Omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6$ рад/с;



б) $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с

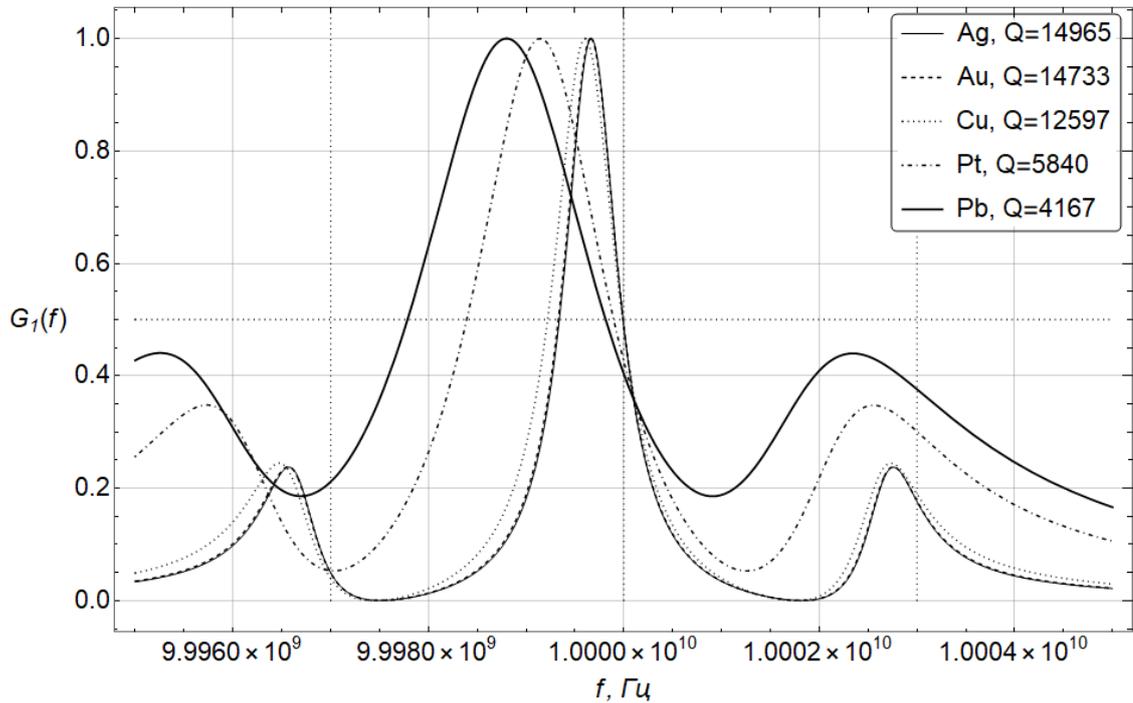
Рисунок 4.3 – Нормированные ЧХ (4.44). Вертикальными пунктирными линиями отмечены основная резонансная частота резонатора в покое ω_0 и резонансные частоты резонатора при вращении $\omega_0 \pm n\Omega$

На Рисунке 4.3 приведены результаты численного исследования вращающейся сферической полости с диэлектрическим заполнением и стенками, выполненными из материала идеальной проводимости (4.21), (4.22) [184], [188] для следующего случая: $f_0 = 10$ ГГц, $\Omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6$ рад/с и $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $N = 1$, материалы заполнения выбраны из Таблицы 4.1. Радиус сфер a выбран для $N = 1$ (4.39), ЭМ поле возбуждается ЭЭВ, который расположен в точке с координатами $(a, 30^\circ, 30^\circ)$, точка наблюдения имеет координаты $(a, 60^\circ, 60^\circ)$.

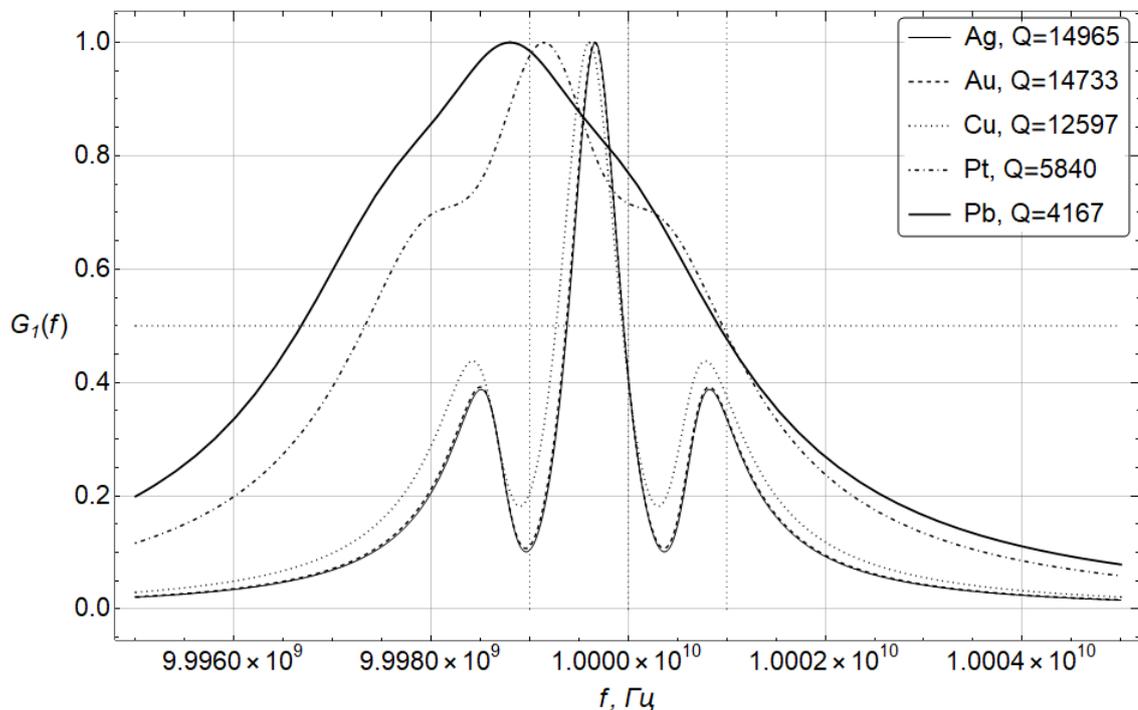
Помимо эффекта расщепления частот (4.36), форма ЧХ (Рисунок 4.3) определяется параметрами заполняющего резонатор диэлектрика: с увеличением $\tan\delta$ (потерь энергии ЭМ поля на нагревание диэлектрика) ширина ЧХ $\Delta\omega_0$ по уровню половинной мощности увеличивается и разделение собственных резонансных частот вращающейся полости ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$ уменьшается при неизменной частоте стороннего источника [184]. Так, например, малые тепловые потери в кварце ($\tan\delta = 10^{-4}$, Таблица 4.1) позволяют наблюдать расщепление частот ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$ (Рисунок 4.3). С ростом потерь при значении $\tan\delta = 4 \cdot 10^{-4}$ (тефлон, Таблица 4.1) возможно только разрешение новых собственных частот вращающегося резонатора при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с (Рисунок 4.3 б). С уменьшением частоты вращения до $\Omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6$ рад/с (Рисунок 4.3 а) разрешение собственных частот ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$ невозможно (Таблица 4.2, Рисунок 4.3). При этом форма расщепленных ЧХ (Рисунок 4.3) указывает на значительное смещение резонансных частот вращающегося резонатора под влиянием диэлектрических потерь в заполнении от рассчитанных значений для идеального диэлектрика $\omega_0 \pm m\Omega$ ($\tan\delta = 0$) ввиду комплексности коэффициента распространения k_m (4.39). Это происходит вследствие тепловых потерь, и величина этого смещения для заданных частот вращения Ω и частоты возбуждаемого сторонним источником ЭМ поля, ω_0 , определяется тангенсом угла тепловых потерь диэлектрика: с увеличением $\tan\delta$ увеличивается величина смещения, и резонансные частоты вращающегося резонатора $\omega_0 \pm m\Omega$ симметрично удаляются от резонансной частоты резонатора в покое ω_0 , что скажется на ошибке первого порядка и может быть учтено и откалибровано при измерении частоты вращения резонансным способом.

На Рисунке 4.4 приведены результаты численного исследования вращающейся сферической полости с вакуумным заполнением и импедансными стенками [187], выполненными из металлов различной проводимости σ_1 (Таблица 4.1) при условиях: $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с (Рисунок 4.4а) и $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с (Рисунок 4.4б), $f_0 = 10$ ГГц, $N = 1$. Радиус сферы $a = 13,1$ мм выбран из условия существования основного типа колебаний при $N = 1$ (4.39), ЭМ поле возбуждается ЭЭВ, который расположен в точке $(a, 30^\circ, 30^\circ)$, точка наблюдения – $(a, 60^\circ, 60^\circ)$. Индуктивный характер импеданса материала стенок резонатора приводит к смещению ЧХ: с уменьшением σ_1 увеличивается величина смещения ЧХ, и резонансные частоты вращающегося

и покоящегося резонатора постепенно смещаются влево (в сторону меньших частот), что может быть учтено и откалибровано при измерении частоты вращения резонансным способом.



а) $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $a = 13.1$ мм;



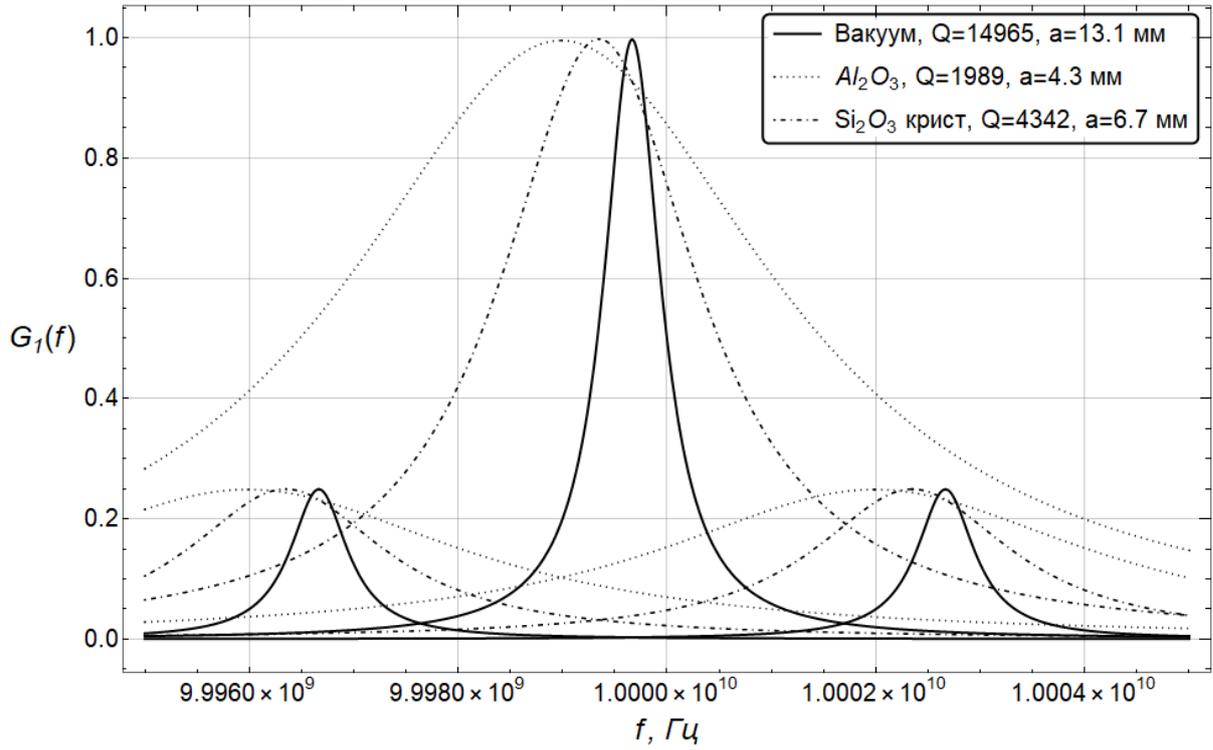
б) $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с, $a = 13.1$ мм;

Рисунок 4.4 – Нормированные ЧХ (4.44). Вертикальными пунктирными линиями отмечены резонансная частота резонатора в покое ω_0 и резонансные частоты резонатора при вращении $\omega_0 \pm m\Omega$

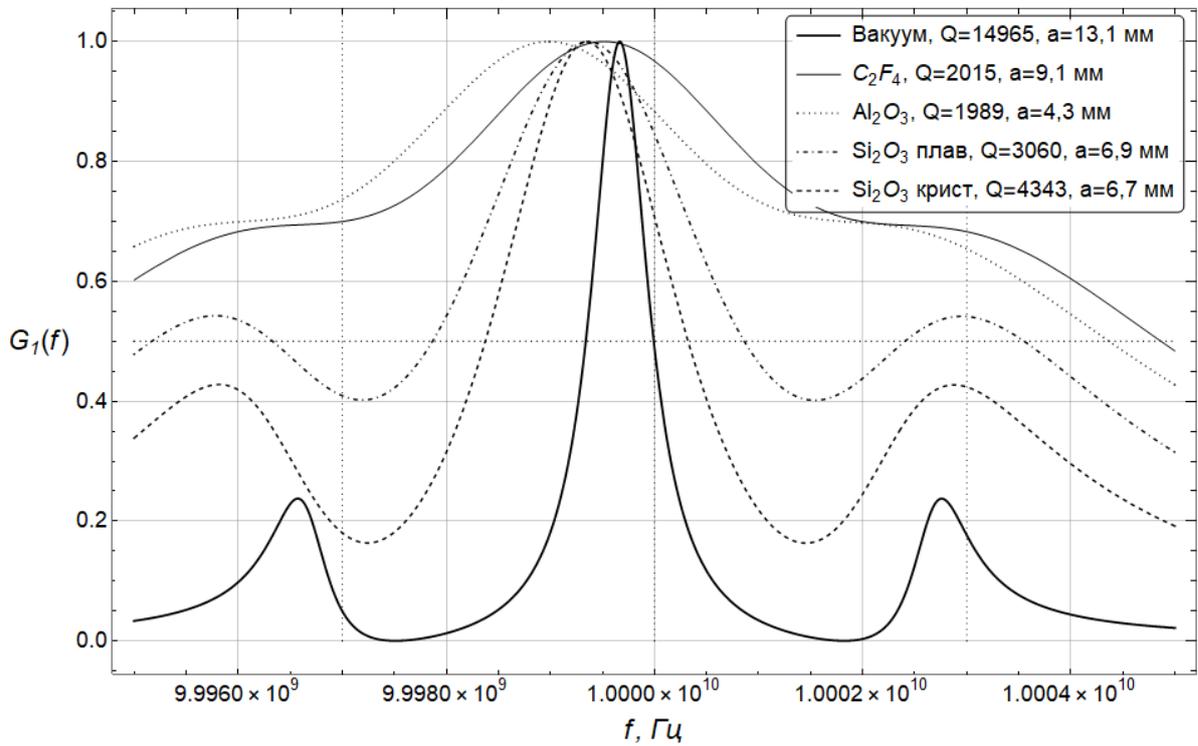
Более того, для точного измерения резонансной частоты необходимо получить высокое значение добротности резонатора, которое в данном случае определяется уменьшением тепловых потерь в металлических стенках, т.е. увеличением σ_1 [187]. Так, например, в случае изготовления стенок резонатора из материала с проводимостью $\sigma_1 = 0,48 \cdot 10^7$ См/м (Рисунок 4.4б для *Pb*) тепловые потери возрастут настолько, что разрешение собственных частот вращающегося резонатора ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$ станет невозможным при равенстве частоты вращения $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с. В таком случае при прочих заданных условиях можно измерять частоты вращения $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с (Рисунок 4.4а для *Pb*) и больше. Потери в серебряных, золотых и медных стенках резонатора настолько малы, что позволяют разрешить собственные частоты вращающегося резонатора и измерить частоту вращения в обоих случаях (Рисунок 4.4 а, б).

На Рисунке 4.5 приведены результаты расчетов для случая, когда стенки сферы выполнены из материала конечной проводимости (которым выбрано серебро) с различным диэлектрическим заполнением [190], $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, а остальные условия совпадают с перечисленными в Рисунке 4.4. Таким образом, учтено влияние на параметры полости тепловых потерь на нагревание металлических стенок и диэлектрических потерь в заполнении, оказывающих влияние на смещение ЧХ, описанные выше, и на добротность полости. Размер устройства при этом будет определяться типом возбужденного в нем колебания n (4.39) и относительной диэлектрической проницаемостью ϵ'_r заполняющего резонатор материала (4.39) (Рисунок 4.5). Использование материалов с высокой ϵ'_r позволяет возбуждать ЭМ колебания заданного типа на частоте ω_0 с меньшим радиусом (Таблица 4.1).

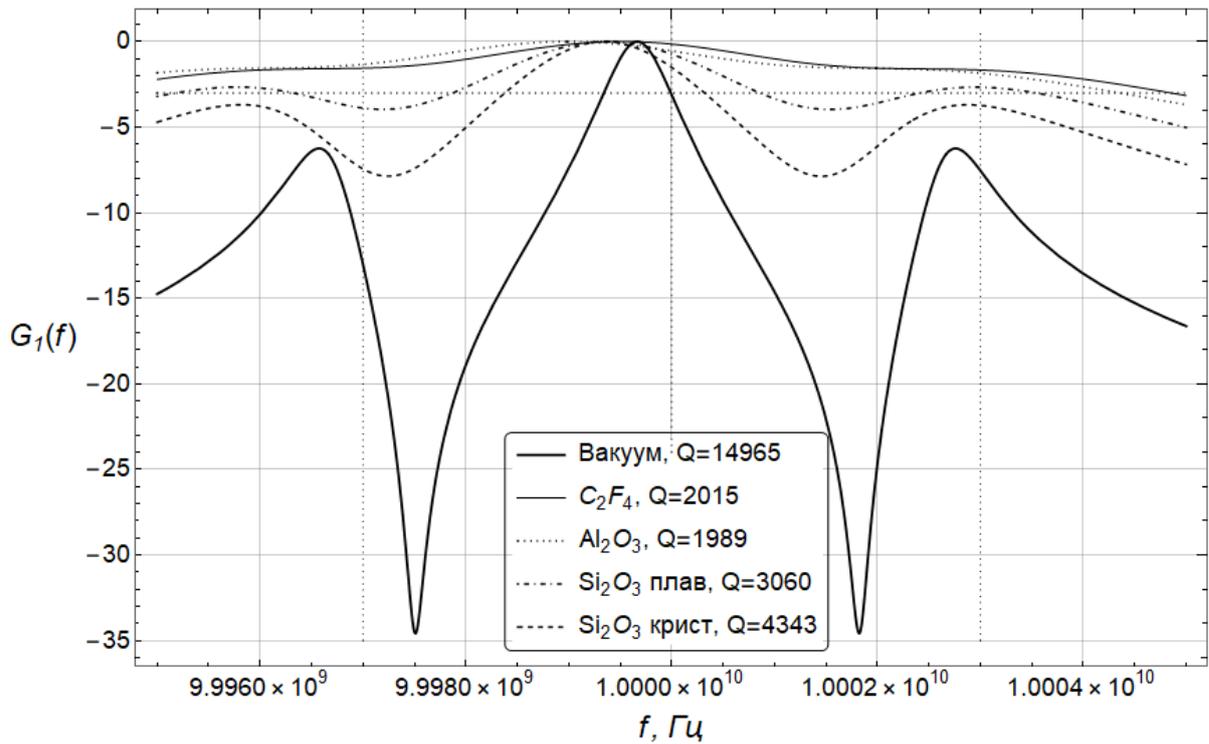
По форме ЧХ (Рисунок 4.5) и степени разрешения собственных частот вращения резонатора $\omega_0 \pm m\Omega$ можно сделать вывод о необходимости для точного определения максимумов по ЧХ и, следовательно, для точного определения расстояния между максимумами сферического резонатора для измерения частоты вращения резонансным способом [144] следует применять материалы с максимальным значением проводимости и сверхпроводящие материалы [187] и заполняющие резонатор диэлектрики с минимальным значением тангенса угла диэлектрических потерь [184], [185] для увеличения добротности резонатора.



а) ЧХ на расщепленных ($\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с) собственных колебаниях полости;



б) ЧХ полости при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с;



в) ЧХ полости при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с в дБ;

Рисунок 4.5 - Нормированные ЧХ (4.44). Вертикальными пунктирными линиями отмечены основная резонансная частота ω_0 в покое и резонансные частоты резонатора при вращении $(\omega_0 \pm m\Omega)/2\pi$

Как и следовало из анализа полученного решения (4.36), форма ЧХ (Рисунок 4.3, Рисунок 4.4, Рисунок 4.5) дает возможность измерить скорость Ω вращения резонатора по его собственным резонансным частотам [144]. Для этого необходимо измерить частотный интервал между двумя соседними резонансными частотами или частотный интервал между резонансными частотами типов колебаний E_{N-mQ} (или H_{N-mQ}) и E_{NmQ} (или H_{NmQ}) и разделить этот интервал на $2N$ ($n = N$ – выбранный тип колебания, $\omega_0 - m\Omega$, $m = M$ – порядок выбранной собственной частоты вращающегося резонатора, Q – порядок корня дисперсионного уравнения (4.39)). При этом точность измерения частоты вращения определяется точностью измерения максимумов ЧХ ω_0^\mp и ω_0 , т.е. добротностью резонатора (Рисунок 4.3, Рисунок 4.4, Рисунок 4.5), а относительная величина смещения собственной резонансной частоты вращающегося резонатора от расчетного максимума $\omega_0 \pm m\Omega$ вносит вклад в погрешность метода измерения (но может быть учтена и откалибрована при известных материалах резонатора).

Как было указано в третьем разделе, для определения частоты вращения резонатора необходимо измерить с высокой точностью резонансную частоту ω_0^\mp вращающегося резонатора (4.36). В работе будем считать, что для обеспечения измеримого разделения спектра

вращающегося резонатора на собственные частоты ω_0^- , ω_0^+ и ω_0 необходимо добиться, чтобы интервал между двумя соседними частотами на ЧХ был равен ширине резонансной кривой по половинной мощности: $\Delta f_0 = \Delta\omega_0/2\pi$. В случае со сферическим резонатором этот интервал равен частоте вращения полости: $\Delta\omega_0 = 2\Omega$. Таким образом, минимальной измеримой частотой вращения Ω_{min} для резонансного способа [144] на основе сферического резонатора выберем значение ширины ЧХ по уровню половинной мощности: $\Omega_{min} = \Delta\omega_0$. Эта величина в свою очередь определяется величиной потерь в материале, которым заполнен и из которого выполнен резонатор, т.е. его добротностью Q .

Значения добротностей вращающегося сферического резонатора, рассчитанные по ЧХ (Рисунок 4.5) для различных материалов стенок и заполнения резонатора приведены в Таблице 4.3. Важно отметить, что в случае идеально проводящих стенок и при наличии определенного диэлектрического заполнения разрешение гироскопа, определяемое добротностью полости, будет полностью ограничено потерями в заполняющей полость диэлектрике. Например, при добротности порядка 10^4 и при частоте возбуждения 10 ГГц в лучшем случае удастся добиться разрешения порядка 10^6 Гц (Таблица 4.3).

Таблица 4.3 – Добротности резонатора при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $f_0 = 10$ ГГц (Рисунок 4.5)

Диэлектрик	Металл					
	РЕС, $\sigma_1 = \infty$	Ag	Cu	Au	Pt	Pb
Вакуум	∞	14965	14733	12597	5840	4167
C_2F_4	2499,9	2015	2009	1944	1546	1340
Al_2O_3	3333	1989	1977	1849	1220	973
BeO	3333	2126	2114	1991	1358	1097
Si_2O_3 плав	4999,7	3060	3042	2852	1905	1526
Si_2O_3 крист	9999,7	4343	4305	3926	2305	1761

На Рисунке 4.6 проиллюстрирована зависимость добротности Q вращающегося сферического резонатора с импедансными стенками и различным диэлектрическим заполнением от величины проводимости стенок σ_1 (относительная диэлектрическая проницаемость во всех случаях равна $\epsilon_r' = 1,0$) для условий, описанных для Рисунка 4.5. Видно, что введение диэлектрического заполнения ($\tan\delta = 0$) значительно (в несколько раз) сказывается на изменении добротности резонатора по сравнению с вакуумным заполнением при тех же значениях σ_1 . Однако, как следует из графика, это происходит только для значений $\tan\delta > 10^{-6}$.

Для $\tan\delta < 10^{-6}$ существенных изменений в значении добротности вращающегося сферического резонатора из-за потерь в диэлектрике не происходит (кривые для $\tan\delta = 10^{-7}$, $\tan\delta = 10^{-8}$ и $\tan\delta = 0,0$ сливаются) и Q определяется только проводимостью стенок полости.

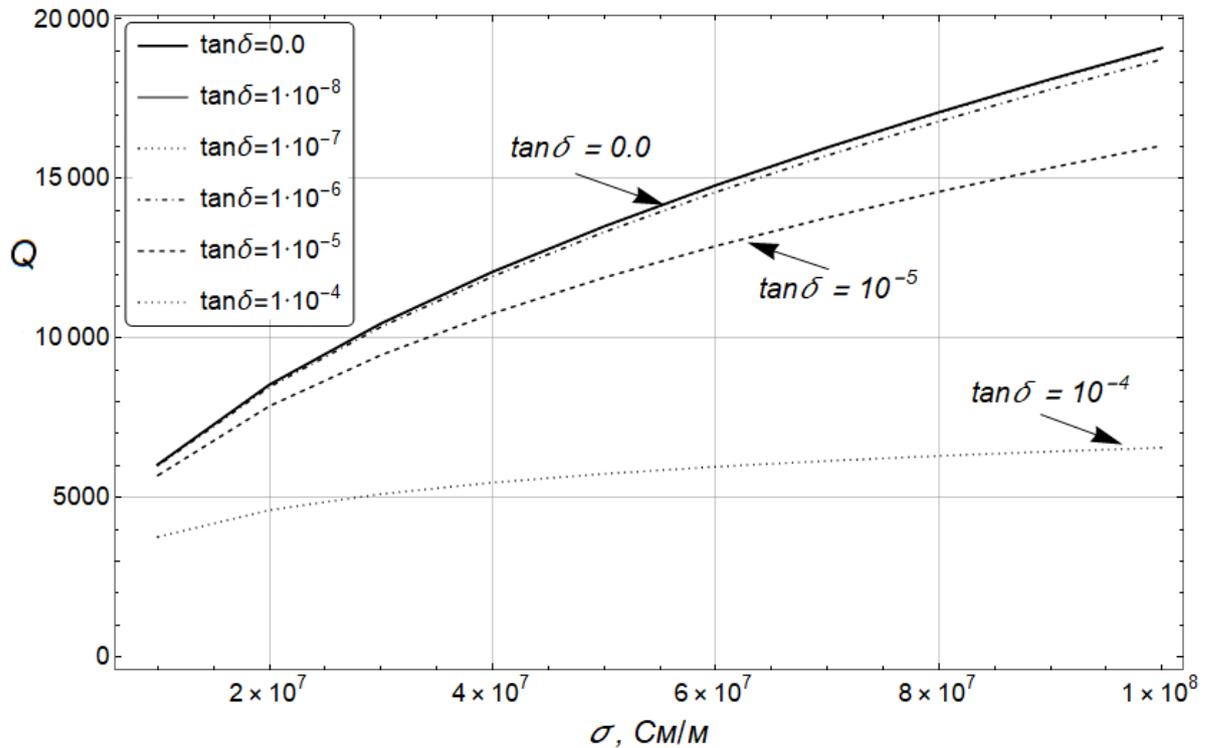


Рисунок 4.6 – Зависимость добротности Q вращающегося сферического резонатора от проводимости материала стенок σ (См/м) для разных значений тангенса угла диэлектрических потерь заполняющего резонатор материала $\tan\delta$. Значение добротности рассчитано по ЧХ для случая на Рисунке 4.5 при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $f_0 = 10$ ГГц, $\varepsilon_r' = 1,0$

Зависимость добротности Q вращающегося сферического резонатора с импедансными стенками от $\tan\delta$ заполняющего резонатор материала проиллюстрирована на Рисунке 4.7 для условий, описанных в Рисунке 4.5. Как следует из графика, при значениях $\tan\delta > 3,5 \cdot 10^{-4}$ добротность резонатора для выбранного значения σ_1 составляет 10^3 и меньше, что соответствует кривым для C_2F_4 , Al_2O_3 и BeO при $\sigma_1 = 6,139 \cdot 10^7$ на Рисунке 4.5, и при заданном значении $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с разделения частот ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$ не происходит – измерение частоты резонансным способом невозможно (Рисунок 4.5). Далее, с уменьшением $\tan\delta$ добротность полости растет и при том же значении Ω становится возможным разрешение собственных частот ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$ (что соответствует кривым для Si_2O_3 на Рисунке 4.5). В целом из рисунка видно, что для исследуемых материалов в нормальных условиях (Таблица 4.1) при заданных параметрах возбуждаемого ЭМ поля (размеров резонатора) для $\tan\delta > 1 \cdot 10^{-4}$ и $\sigma_1 < 10^8$ невозможно получить Q больше 10^4 . Для обеспечения сравнительно высокой добротности порядка $Q \geq 10^4$

следует заполнять резонатор диэлектриком со значением тангенса угла тепловых потерь $\tan\delta = 5 \times 10^{-4}$ при возбуждении в резонаторе ЭМ поля на частоте $f_0 = 10$ ГГц (Рисунок 4.7).

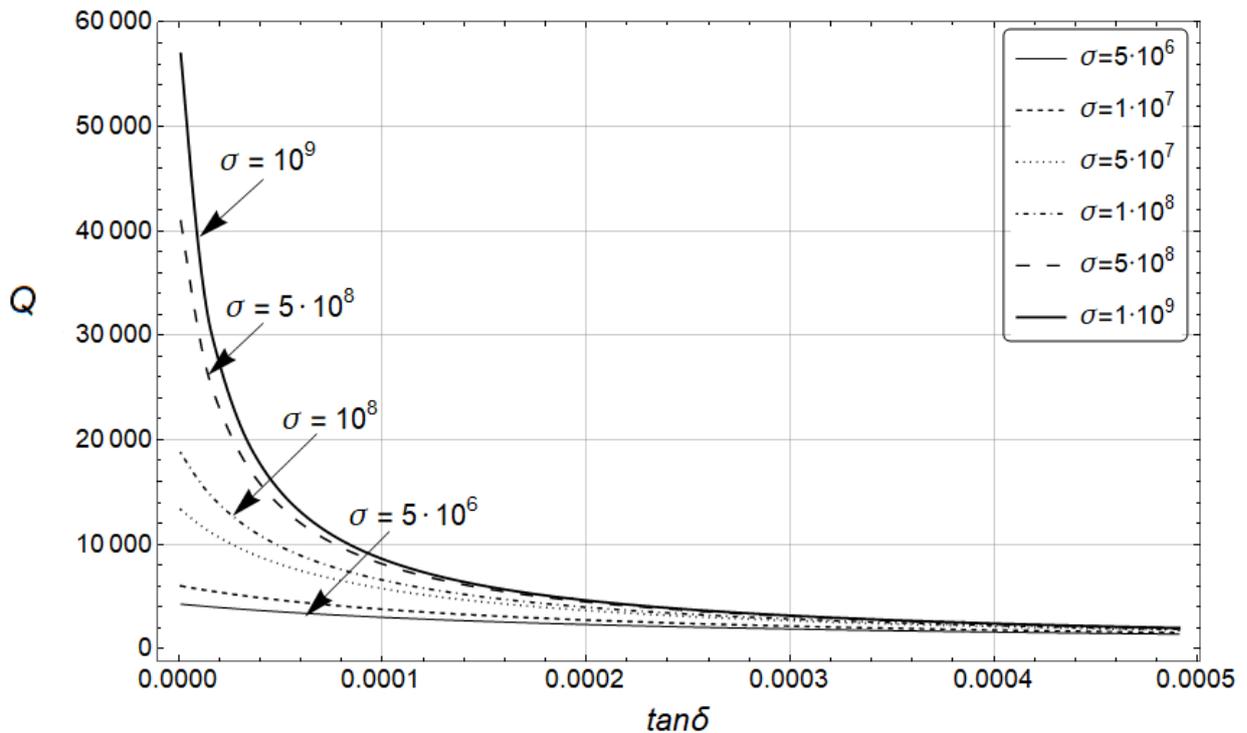
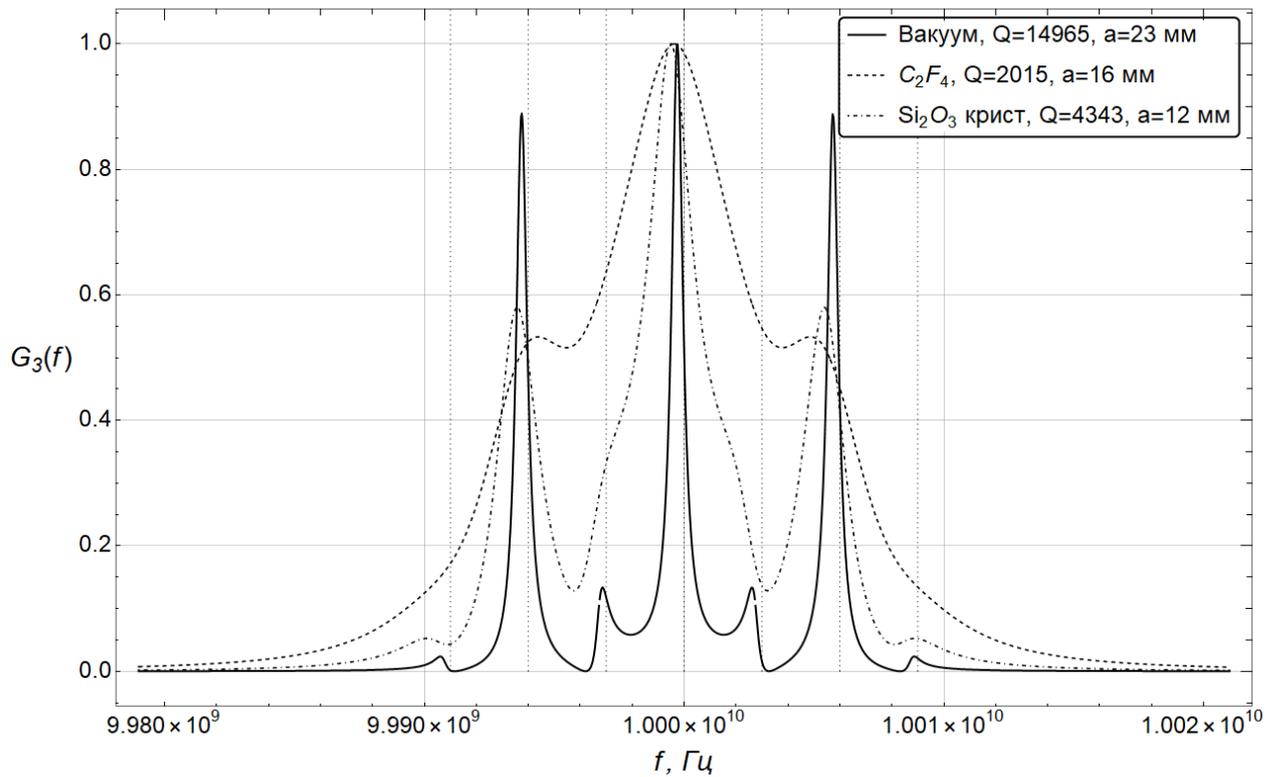
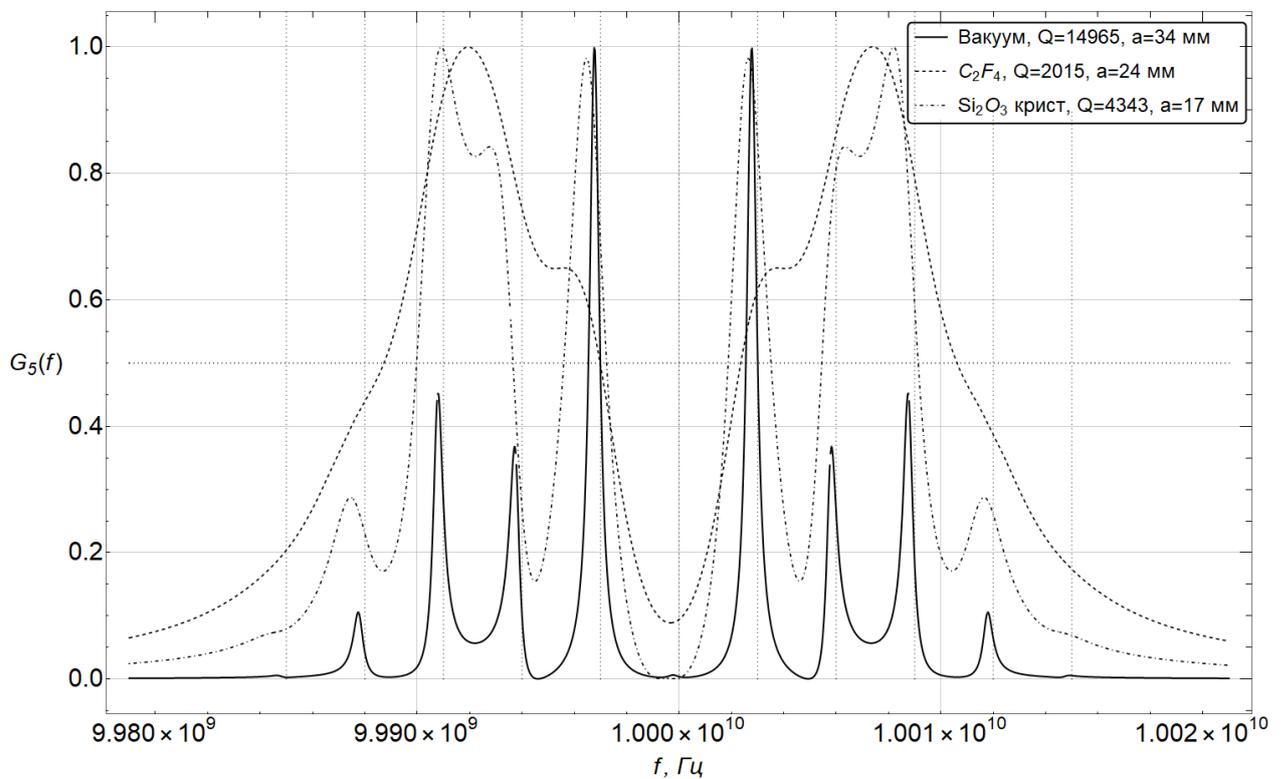


Рисунок 4.7 – Зависимость добротности Q вращающегося сферического резонатора от тангенса угла диэлектрических потерь в заполняющем резонатор материале $\tan\delta$ для разных значений проводимости материала стенок σ (См/м). Значение добротности рассчитано по ЧХ на Рисунке 4.5 при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $f_0 = 10$ ГГц. Относительная диэлектрическая проницаемость во всех случаях принята равной $\epsilon'_r = 1,0$

Согласно (4.38), (4.36) и (4.39), в случае, когда $n > 1$, каждая собственная частота покоя резонатора ω_0 будет распадаться на $2n$ новых собственных частот во вращающейся полости. Рисунок 4.8 иллюстрирует ЧХ вращающегося сферического резонатора при условии возбуждения в нем мод высших порядков ($n > 1$). Результаты соответствуют экспериментально наблюдаемому в [179] расщеплению каждой возбужденной во вращающемся резонаторе моды на $2N$ новых собственных частот. Как видно из рисунков, если добротность полости недостаточно велика для того, чтобы разделились частоты вращения ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$ (в случае с кварцем, Рисунок 4.8 а), то частоты $\omega_0 \pm 2\Omega$ уже различимы, что позволяет измерять частоту вращения. Однако радиус резонатора при этом будет больше (так как будет больше значение $u_{nmq}^{E,H}$ при $q = 1$ в обоих случаях) (4.38).



а) $N = 3$, $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $f_0 = 10$ ГГц;



б) $N = 5$, $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $f_0 = 10$ ГГц;

Рисунок 4.8 - Нормированные ЧХ (4.44) для различных значений $N = n$

4.5.5 Измерение частоты вращения. Параметры гироскопов

Как видно из приведенных выше ЧХ (Рисунок 4.3, Рисунок 4.4, Рисунок 4.5), минимальная частота вращения $\Omega_{min} = \Delta\omega_0 = \omega_0/Q$, которую можно измерить с помощью резонансного способа [144], зависит от потерь в материале, которым заполнен и из которого выполнен резонатор. С ростом добротности Q для выбранного ω_0 будет расти и разрешающая способность резонансного способа измерения частоты вращения, т.е. данным способом можно будет измерить как можно меньшую частоту вращения Ω_{min} .

Из выражения для расчета добротности резонатора $Q = \omega_0/\Delta\omega_0$ видно, что при одном и том же значении добротности для различных частот возбуждения резонатора можно получить различные разрешения. Например, при $Q = 10^{10}$ при частоте возбуждения $f_0 = 10^{10}$ Гц ширина резонанса составит $\Delta\omega_0 = 2\pi$ рад/с, а при частоте возбуждения $f_0 = 10^8$ ГГц – уже $\Omega_{min} = 2\pi \cdot 10^{-2}$ рад/с. Однако, во втором случае радиус резонатора, согласно (4.38), будет больше. Ниже (Рисунок 4.9) приведены ЧХ для резонатора с вакуумным заполнением и серебряными стенками ($\sigma = 6,139 \cdot 10^7$ См/м) для различных значений Ω , из которого видно, что наилучшего разрешения новых, связанных с вращением частот, можно достичь при значениях $\Omega/\omega_0 \geq 10^{-4}$ и выше, что определяется добротностью порядка 10^4 (Таблица 4.3), обеспечиваемой при заданных параметрах материалов резонатора.

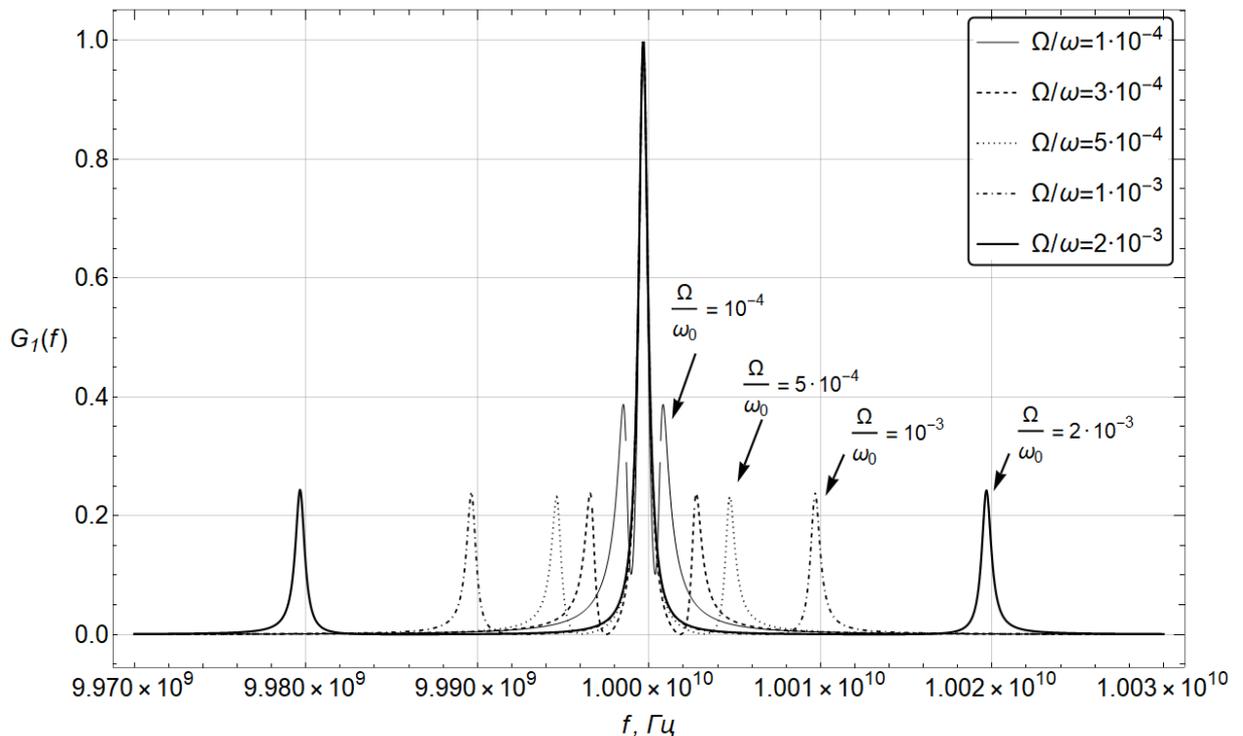


Рисунок 4.9 - Нормированные ЧХ (4.44) для различных Ω при $n = 1$. Заполнение резонатора – вакуум; проводимость материала стенок резонатора – $\sigma = 6,139 \cdot 10^7$ См/м; частота возбуждения резонатора $f_0 = 10^{10}$ Гц

Для выбора требуемого оптимального значения Ω_{min} при допустимом размере резонатора a и достижимых значениях Q ниже приведен график зависимости добротности Q резонатора от возбуждаемой частоты f_0 для различной ширины ЧХ по половинной мощности $\Delta\omega_0$ – различных Ω_{min} (Рисунок 4.10 а). Задавшись требуемыми значениями Ω_{min} (Рисунок 4.10 а) и допустимым в данном конкретном случае размером резонатора (Рисунок 4.10 в) можно определить, при каких Q и f_0 возможно достичь заданных параметров. Какие при этом должны быть параметры материалов резонатора можно определить из графиков добротностей (Рисунок 4.10 б).

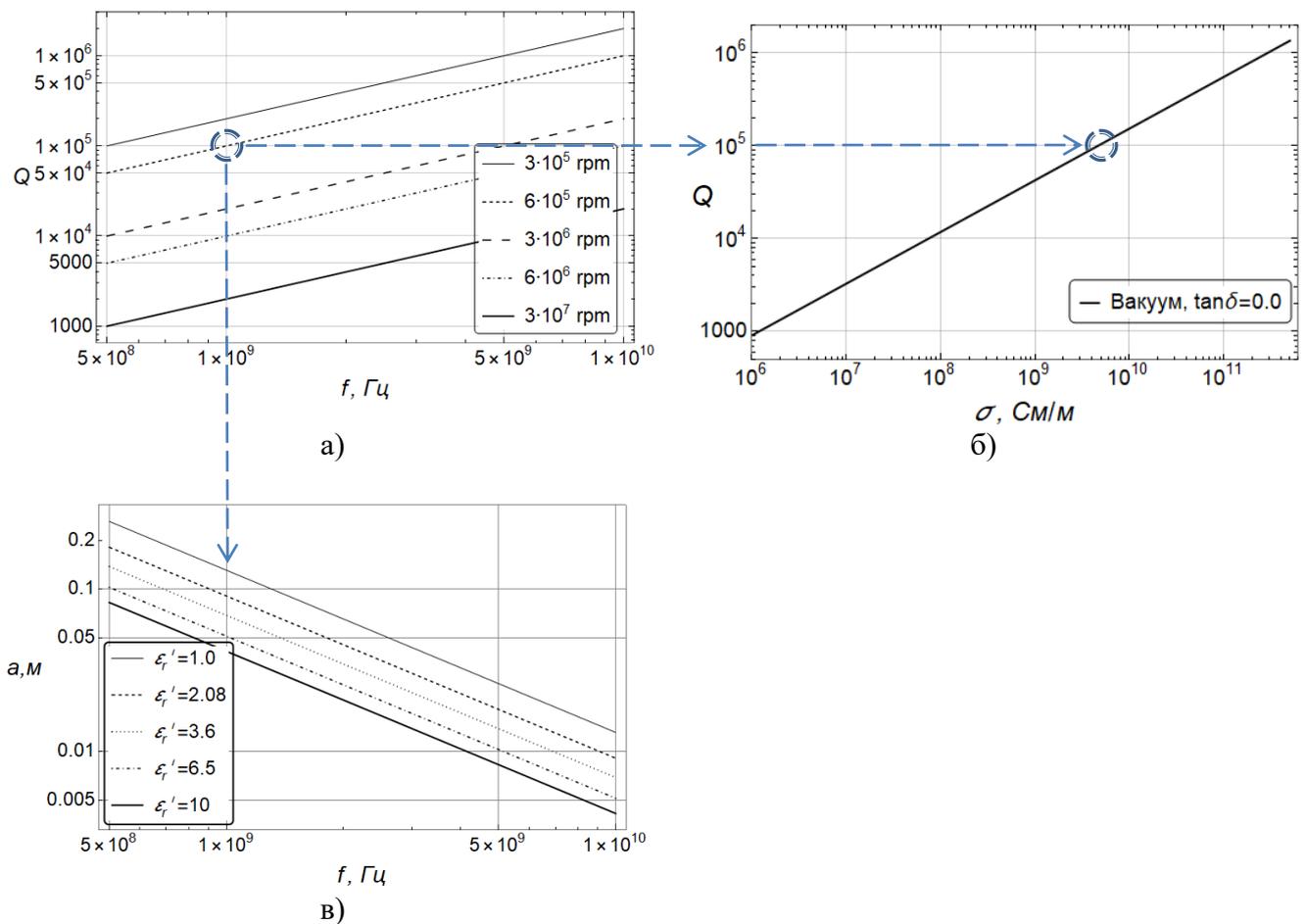


Рисунок 4.10 – Зависимость добротности вращающегося сферического резонатора с металлическими стенками от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (а) и проводимости материала стенок (б); Зависимость радиуса резонатора от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (в)

Например, при необходимости обеспечить разрешение гироскопа, равное $6 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm) необходимо обеспечить добротность 10^5 при частоте возбуждения резонатора 10^9 Гц, выбрав материал стенок резонатора с проводимостью $\sigma_1 = 4,5 \cdot 10^9$ См/м, а радиус резонатора при этом может варьироваться от 4 до 13 сантиметров. Для уменьшения геометрических размеров резонатора до нескольких миллиметров необходимо иметь частоту

возбуждения $5 \cdot 10^9$ Гц при условии возбуждения в нем моды порядка $n = 1$, что для обеспечения разрешения в $6 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm) потребуется увеличить добротность до $5 \cdot 10^6$, что в свою очередь возможно обеспечить при проводимости материала стенок резонатора порядка 10^{11} См/м и выше (Рисунок 4.10).

При нормальных условиях (комнатная температура, атмосферное давление) наилучшее достижимое разрешение при частотах возбуждения резонатора от $5 \cdot 10^8$ Гц до 10^{10} Гц и достижимых добротностях порядка 10^5 – от $3 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm) до $6 \cdot 10^6$ оборотов в минуту (rpm). Для улучшения разрешения (уменьшения Ω_{min}) при тех же частотах возбуждения необходимо значительно увеличивать добротность резонатора. Возможно так же для обеспечения заданной добротности выбрать меньшую собственную частоту покоящегося резонатора f_0 согласно $\Omega_{min} = \omega_0/Q$, однако это повлечет за собой увеличение размеров полости, а, следовательно, и устройства измерения частоты вращения (4.38).

При сравнении характеристик вращающегося цилиндрического резонатора и вращающегося сферического резонатора в части применения их для измерения частоты вращения резонансным способом [144] можно сделать следующие выводы. Ввиду того, что при вращении ЭМ колебание на собственной частоте ω_0 , возбужденное в цилиндрическом резонаторе, распадается на два новых колебания на частотах $\omega_0 \pm n\Omega$ при $n = 1$, а возбужденное в сферическом резонаторе – на три колебания $\omega_0 \pm m\Omega$ при $|m| \leq n, n = 1$, то разрешающая способность в случае цилиндрического резонатора при равных ω_0 и добротностях будет выше в два раза: $\Omega_{min}^{cil} = \Delta\omega_0/2 = \omega_0/2Q$ и $\Omega_{min}^{sph} = \Delta\omega_0 = \omega_0/Q$. Например, в случае идеально проводящих стенок и кварцевого заполнения полостей цилиндрический и сферический резонаторы будут иметь добротность порядка $Q = 10^4$ (Таблица 3.2, Таблица 4.2), что позволяет обеспечить разрешения резонансного метода измерения частоты вращения $\Omega_{min}^{cil} = \pi \cdot 10^6$ рад/с и $\Omega_{min}^{sph} = 2\pi \cdot 10^6$ рад/с соответственно при $f_0 = 10$ ГГц. Однако при этом требуемый для возбуждения моды порядка $n = 1$ радиус сферической полости равен $a = 6,72$ мм при объеме полости $V_{sph} = 1,271 \cdot 10^{-6}$ м³ (Таблица 4.1). В случае цилиндрического резонатора требуемый радиус составит $a = 9,5$ мм при $l = 5a$ и $a = 12,1$ мм при $l = a$ при занимаемом полостью объеме $V_{cil} = 13,467 \cdot 10^{-6}$ мм³ и $V_{cil} = 5,565 \cdot 10^{-6}$ мм³ соответственно, что в несколько раз больше, чем для сферического резонатора V_{sph} . Приведенные графики по выбору параметров резонаторов (Рисунок 3.8 и Рисунок 4.10), в свою очередь, показывают, что для измерения $\Omega_{min}^{cil} = 3 \cdot 10^5$ rpm в случае цилиндрического резонатора со стенками из идеально проводящего материала и с собственной частотой покоящегося резонатора $f_0 = 10^9$ Гц необходима добротность $Q = 10^5$ при радиусе резонатора $a = 18,5$ см, длине $l = 5a$ (3.15) и объеме $0,099$ м³

(заполнение - вакуум) (Рисунок 3.8). Для сферического же резонатора при прочих равных условиях (РЕС, вакуум) для измерения $\Omega_{min}^{sph} = 3 \cdot 10^5$ гртм требуется $Q = 2 \cdot 10^5$ при $a = 13,1$ см (4.38) и общем объеме полости $0,009$ м³ (Рисунок 4.10). При условии выбора сравнимых объемов сферического и цилиндрического резонаторов (РЕС, вакуум), т.е. когда радиус и длина последнего соотносятся как $l = a$ (3.15), для $f_0 = 10^{10}$ Гц, $\Omega = 3 \cdot 10^5$ гртм объем цилиндрического резонатора составит $41,3 \cdot 10^{-6}$ м³ при радиусе $a = 23,6$ мм, а разрешающая способность $\Omega_{min}^{cil} = \Omega_{min}^{sph}/2$ будет в два раза выше, чем у сферического резонатора площадью $9,4 \cdot 10^{-6}$ м³ при радиусе $a = 13,1$ мм. Таким образом, при выборе в пользу цилиндрического резонатора удастся получить в 2 раза лучшее разрешение, но при кратно большем объеме полости – устройства измерения частоты вращения.

4.6 Численные результаты при сверхпроводящих стенках резонатора

Проведенные выше численные эксперименты справедливы для нормальных условий (комнатная температура, атмосферное давление) для широко используемых в производстве материалов. Из полученных результатов видно, что для увеличения добротности резонатора, повышающей разрешающую способность резонансного метода измерения частоты вращения [144], необходимо минимизировать потери в диэлектрическом заполнении резонатора и выбирать материал стенок резонатора с высокой проводимостью. Для численного исследования предельных теоретически достижимых характеристик радиочастотного резонансного способа измерения частоты вращения [144] рассмотрим условия сверхпроводимости.

Применение в качестве материала стенок резонаторов сверхпроводящих металлов и пленок является одним из самых распространенных способов уменьшения тепловых потерь, в том числе в установках для измерения частоты вращения (в криогенных камерах [64], Приложение Б). Трудность заключается в том, что явление сверхпроводимости наблюдается только при очень низких температурах, до 4 К. Для металлов сверхпроводимость впервые была обнаружена у ртути, сопротивление которой в сверхпроводящем состоянии составило около 10^{-25} Ом/м [191]. В настоящее время большинство исследований в данной области направлено на получение эффекта сверхпроводимости при как можно больших температурах: ученые остановились на отметке 250 К (2019, [192]) и 260 К (2019, [193]). Однако в обоих случаях высокая проводимость достигнута при многократном увеличении давления по сравнению с атмосферным.

Сверхпроводящие металлы и сплавы часто используются в СВЧ-технике для увеличения добротности резонаторов. Например, в работе [194] авторы отмечают тенденцию использовать

вместо металлов с высокой проводимостью при комнатной температуре, таких как золото и медь, тонкие высокопроводящие пленки. В [194] рассматривается подобная пленка, выполненная из оксида иттрия-бария-меди, $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (первый высокотемпературный проводник с критической температурой больше 77 К – 93 К, сверхпроводник второго рода [195], [196]), поверхностное сопротивление которой при частоте 10 ГГц при температуре 77 К составляло 1,36 мОм (высокотемпературные сверхпроводники). Несмотря на низкую температуру проявления эффекта сверхпроводимости, полученное сопротивление оксида все равно ниже сопротивления меди, которое в таких же условиях составляет 25,8 мОм. В [197] приводятся другие результаты исследования того же оксида $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ для изготовления сверхпроводящих пленок в микроволновом диапазоне на частоте 10 ГГц: рассматриваются свойства пленки $YBaCuO$ и алюмината лантана $LaAlO_3$ с низкими поверхностными сопротивлениями, равными 0,5-0,75 мОм при температуре 77 К. Отмечается, что глубина проникновения ЭМ поля в материалы $YBa_2Cu_3O_7$ и медь при одинаковых условиях сверхпроводимости практически равна и составляет 0,25 мкм, но при этом поверхностное сопротивление меди намного больше и равно 10 мОм. Ниже приведены достигнутые к настоящему моменту значения сверхпроводимости при различных условиях (Таблица 4.4) [198].

Таблица 4.4 – Некоторые материалы со сверхпроводимостью

№	Материал	Сопротивление/ Проводимость	Критическая температура, T_c	Давление	Год
[191]	Ртуть	10^{-25} Ом/м	4,2 К (4,15 К)	101 КПа (атмосферное / атм.)	1911
	Медь	25,8 мОм	77 К	атм.	-
[199]	Гидрид серы $Im - 3m H_3S$	Очень мало	203 К	155 ГПа	2015
[192]	Кубическая структура Fm3m супергидрида лантана LaH_{10}	zero-resistance ²	250 К	170 ГПа	2019
[193]	Супергидрид лантана $LaH_{10+/-x}$	zero-resistance	260 К	180-200 ГПа	2019
[200]	$Im-3m YH_6$	zero-resistance	220К	183 ГПа	2019
	$P6_3/mmc YH_9$	zero-resistance	243 К	201 ГПа	2019
[194]	Тонкая пленка $YBa_2Cu_3O_{7-x}$	1,36 мОм	77 К	атм.	1993
[197]	Пленки $YBaCuO$ на подложке $LaAlO$	0,5 – 0,75 мОм	77 К	атм.	2004
[201]	$Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$	23 мкОм	4,2 К	атм.	1992
	Аллюминат лантана $LaAlO_3$	150 мкОм	77 К	атм.	

² Точное значение проводимости не было измерено.

[202]	Титан	zero-resistance	21 К	108 - 240 ГПа	2022
[203]	WB_2 - диборид вольфрама	zero-resistance	17 К	57 ГПа	2022
[204]	$Ta-Nb-Hf-Zr-Ti$ HEA	zero-resistance	7,28 К	атм.	2022
[205]	$MnSe$ – сфалерит, цинковая обманка	zero-resistance	2 К	36 ГПа	2022
[206] ³	LK-99	zero-resistance	400 К	атм.	2023

При применении сверхпроводящего материала для стенок резонатора с целью уменьшения геометрических размеров резонаторов с помощью диэлектрика с большим значением относительной диэлектрической проницаемости возникает необходимость выбора диэлектрика с минимальными тепловыми потерями (достижимыми, например, в сапфире при низких температурах [201], [207], [208]). В таких случаях в радиотехнике часто используют сапфировое заполнение [201], [208], так как сапфир при относительной диэлектрической проницаемости $\epsilon'_r = 10$ при температурах 50 ... 300 К имеет тангенс диэлектрических потерь от 10^{-8} до 10^{-5} при частоте 10 ГГц. Например, один из самых точных экспериментов с установкой Майкельсона-Морли по определению инвариантности скорости света с точностью до 10^{-18} представлял собой два ортогонально расположенных в криогенной камере цилиндрических резонатора с полостью из меди, заполненной сапфиром, которые при вращении показывают частоту биения резонансных мод, равную двум частотам вращения установки [64] (Рисунок Б.10). А исследования объемного резонатора, состоящего из сапфирового стержня с ВТСП (высокотемпературная сверхпроводимость) экранирующими поверхностями на основе пленок $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$, показали возможность достижения ненагруженной добротности $Q = 2 \cdot 10^6$ на частоте 5,55 ГГц при 90 К и сопротивлении 0,08 мОм [201], [209]. Ниже приведены параметры диэлектриков с высоким значением ϵ'_r и малым $\tan\delta$ для различных частот (Таблица 4.5).

Таблица 4.5 – Параметры диэлектриков при 4,2 К [210]

Диэлектрик	ϵ'_r	Частота, ГГц	$\tan\delta$
Silicon	11,7	6,8	$1,19 \cdot 10^{-6}$
C-sapphire	11,5	6,85	$8,2 \cdot 10^{-6}$
$Ba(Zn_{1/3}Ta_{2/3})O_3$	29,0	6,91	$8,6 \cdot 10^{-6}$
Тефлон FEP	2,1	11,08	$3,66 \cdot 10^{-6}$

³ На август 2023 года результаты не подтверждены экспериментами других научных групп

4.6.1 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Измерение частоты вращения

Ниже приводятся ЧХ для случая возбуждения вращающегося сферического резонатора с оболочкой, изготовленной из сверхпроводящих материалов (Рисунок 4.11). ЧХ рассчитаны по выражениям (4.44), (4.14), (4.33) и (4.42), (4.43) при проводимости материалов стенок резонатора $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{28}$ См/м, заполненного сапфиром ($\epsilon_r' = 11$, $\tan\delta = 1 \cdot 10^{-6}$, $a = 3,9$ мм, Таблица 4.5) и вакуумом ($\epsilon_r' = 1$, $\tan\delta = 0,0$, $a = 13,1$ мм) при частоте вращения $\Omega = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^4$ рад/с, $f_0 = 10$ ГГц, $N = 1$. ЭМ поле возбуждается ЭЭВ, расположенным в точке $(a, 30^\circ, 30^\circ)$, точка наблюдения – $(a, 60^\circ, 60^\circ)$. Стоит отметить, что при низкой температуре в некоторых случаях сверхпроводимости поверхностный импеданс и проводимость материалов не измерены (zero-resistance в Таблице 4.4), в связи с чем для численных исследований были выбраны параметры металлов и диэлектриков из Таблицы 4.4 и Таблицы 4.5, а при температуре 4 К как референсное выбрано значение σ_1 , соответствующее сопротивлению ртути 10^{-25} Ом/м [191].

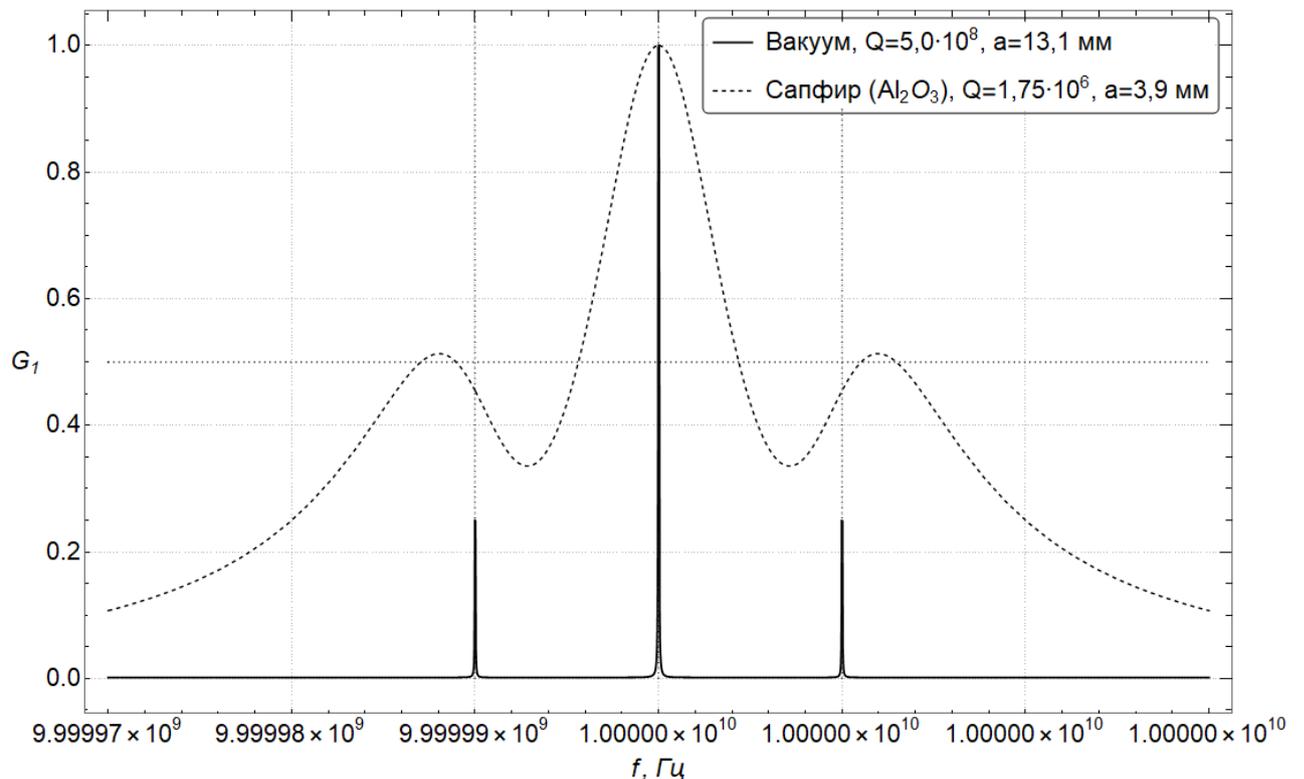


Рисунок 4.11 – Нормированные ЧХ (4.44) при $\Omega = 2\pi \cdot 10^4$ рад/с. Вертикальными пунктирными линиями отмечены резонансная частота резонатора в покое и резонансные частоты при вращении $\omega_0 \pm m\Omega$

Как видно из приведенных ЧХ (Рисунок 4.11), в случае вакуумного заполнения удается добиться предельно высокого разрешения собственных частот резонатора ω_0 и $\omega_0 \pm m\Omega$, что теоретически позволяет измерять меньшие Ω_{min} , чем при использовании обычных металлических стенок [187]. Однако при сапфировом заполнении даже в случае идеальной

проводимости стенок полости при выбранных условиях удастся измерить Ω_{min} не многим менее $\Omega = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^4$ рад/с (при $f_0 = 10$ ГГц).

Значение добротностей при идеально проводящих стенках резонатора и различных диэлектрических заполнениях с учетом тепловых потерь в материале были приведены ранее на Рисунке 4.3. Важно отметить, что в случае идеально проводящих стенок (условия сверхпроводимости) и при наличии определенного диэлектрического заполнения вносимые этим заполнением тепловые потери будут оказывать лимитирующее влияние на добротность, а, следовательно, и на разрешение гироскопа.

Результат применения материала стенок резонатора с проводимостью $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{28}$ См/м при очень низких температурах, порядка 4 К, проиллюстрирован на Рисунке 4.12 для заполненного вакуумом резонатора при частоте вращения $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $f_0 = 1$ ГГц, $N = 1$, $a = 13,1$ см (остальные данные для расчетов такие же, как и для Рисунка 4.11). Как видно из рисунка, при условиях, близких к условиям сверхпроводимости (поверхностный импеданс порядка 10^{-25} и меньше) и при отсутствии потерь в диэлектрическом заполнении резонатора (вакуум, $\tan\delta = 0,0$) можно получить добротность резонатора порядка 10^{14} , что позволит добиться разрешения, обеспечивающего измерение частоты вращения Ω_{min} величиной в доли Герц при выбранных условиях (при условии $\Omega_{min} = \Delta\omega_0 = \omega_0/Q$).

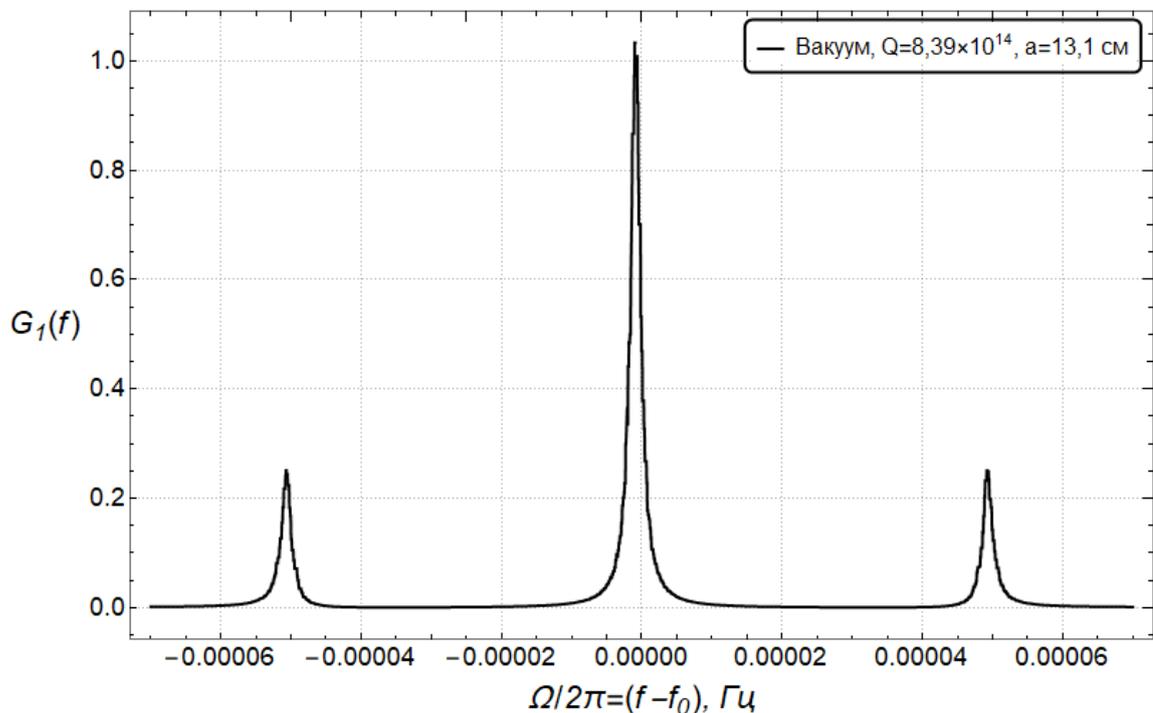


Рисунок 4.12 – Нормированные ЧХ (4.44) при $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-5}$ рад/с. По оси абсцисс отложены значения $(\omega - \omega_0)/2\pi = f - f_0$, т.е. значения частоты вращения $\Omega/2\pi$ в Герцах

Для выбора требуемого в конкретном случае значения Ω_{min} при допустимом размере резонатора a и достижимых значениях Q ниже приведен график зависимости добротности резонатора от возбуждаемой частоты f_0 для различной ширины ЧХ по половинной мощности (различных значений Ω_{min}) (Рисунок 4.13). Задавшись определенными значениями Ω_{min} (Рисунок 4.13 а) и допустимым в данном случае размером резонатора (Рисунок 4.13 в) возможно выяснить, при какой добротности и частоте возбуждения возможно достичь заданных параметров. Какие при этом должны быть параметры материалов резонатора можно определить из графиков (Рисунок 4.13 б, в). Например, для обеспечения разрешения в $6 \cdot 10^{-4}$ оборотов в минуту (rpm) можно выбрать резонатор, возбуждаемый на частоте 10^9 Гц (Рисунок 4.13 а) с радиусом в несколько сантиметров (Рисунок 4.13 в) и добротностью $Q = 10^{14}$, которую можно обеспечить при вакуумном заполнении резонатора и проводимости материала его стенок до 10^{27} См/м (Рисунок 4.13 б). ЧХ для сравнимых значений параметров материалов гироскопа при частоте вращения резонатора $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-5}$ рад/с ($3 \cdot 10^{-3}$ rpm) изображена выше на Рисунке 4.12.

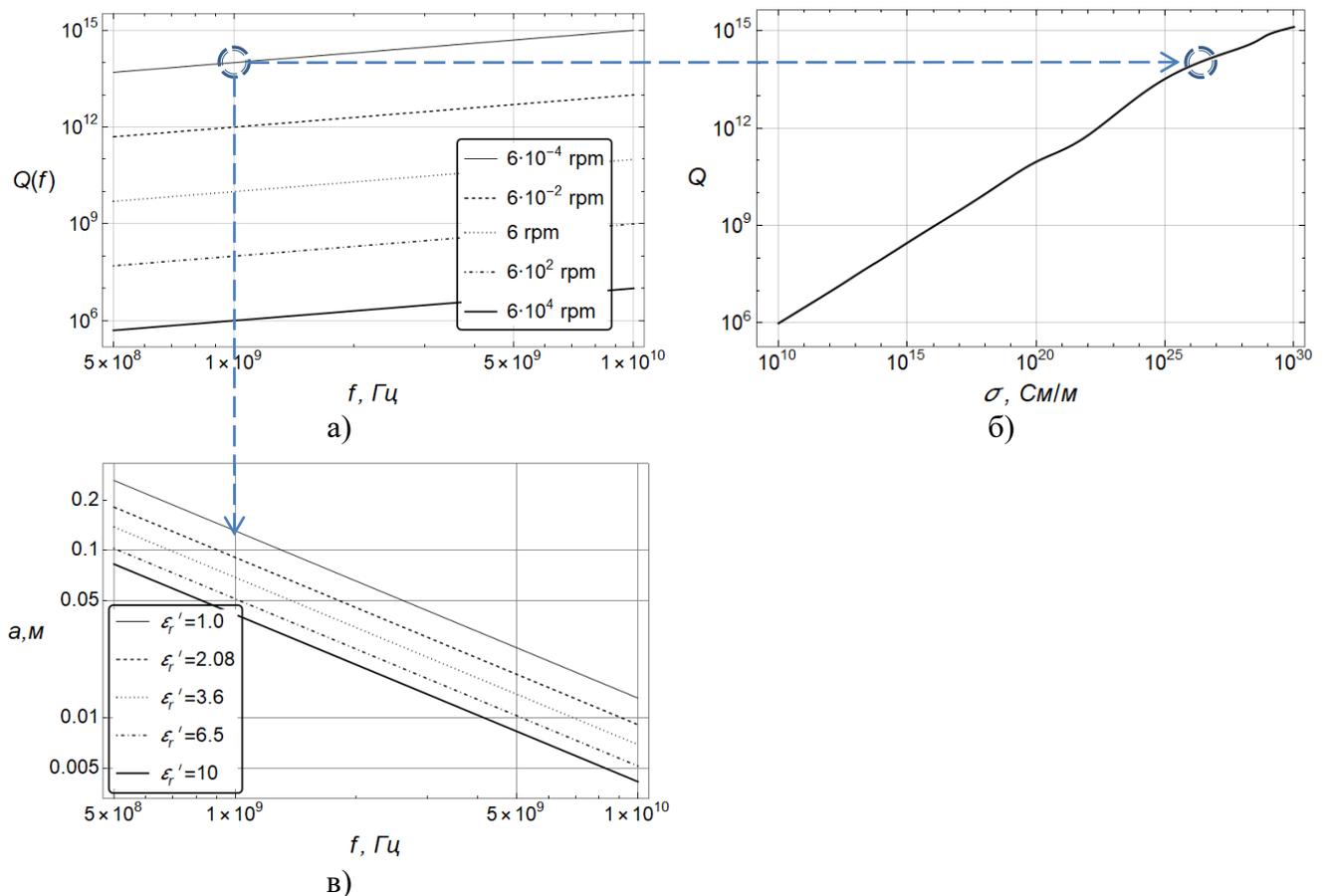


Рисунок 4.13 – Зависимость добротности вращающегося сферического резонатора со стенками из сверхпроводящего материала от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (а) и проводимости материала стенок (б); Зависимость радиуса резонатора от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (в)

Таким образом, необходимо получить добротность вращающегося сферического резонатора не хуже, чем 10^{10} для возможности его применения в высокоточных приборах измерения скорости вращения в навигационных целях для возможности измерения скорости вращения в один оборот в минуту (1 rpm) и менее (это справедливо только для резонатора с выбранной собственной частотой 10 ГГц). Обеспечить заданную добротность можно выбором меньшей собственной частоты f_0 (согласно $\Omega_{min} = \omega_0/Q$), однако размер полости (размер устройства измерения частоты вращения) при этом увеличится (4.38). И как уже было отмечено выше, следует учитывать ограничения доступных в настоящее время анализаторов спектра, обеспечивающих разрешение соседних частот до одной сотой Герца [175], что на данный момент ограничивает возможности измерения частоты вращения указанными радиочастотными способами до 0,6 оборотов в минуту или 13 градусов в час.

4.7 Выводы

Строгое решение граничных задач о возбуждении ЭМ полей во вращающемся сферическом резонаторе позволило численно исследовать резонансный способ измерения частоты вращения [144] применительно к сферической полости и сделать следующие выводы:

- полученное строгое аналитическое решение позволяет численно исследовать возбужденные во вращающемся сферическом резонаторе ЭМ поля с учетом релятивистских эффектов и эффектов при вращении (и является единственной возможностью сделать это ввиду отсутствия учитывающих подобные эффекты САПР);
- расчетами подтверждено существование в электромагнетизме явления расщепления собственных частот ЭМ поля во вращающемся сферическом резонаторе на собственных частотах вращения резонатора, применяемое для измерения частоты вращения по внутреннему ЭМ полю, возбужденному в резонаторе; основной волной при этом является мода порядка $n = 1$;
- размеры устройства измерения частоты вращения определяются размерами сферического резонатора, которые могут быть уменьшены до нескольких миллиметров в зависимости от частоты f_0 , на которой возбуждается колебание в резонаторе, и от порядка выбранной моды n ;
- разрешающая способность резонансного метода измерения частоты вращения во многом определяется добротностью полости, которая в свою очередь зависит от параметров материалов, из которых данная полость изготовлена. Для увеличения

разрешения метода измерения частоты вращения (уменьшения минимальной измеряемой частоты вращения Ω_{min}) необходимо выбирать материалы заполнения полости с наименьшим значением тангенса угла диэлектрических потерь и материалы стенок – с наибольшим значением проводимости;

- в нормальных условиях резонансным методом измерения частоты вращения на основе сферического резонатора с серебряными стенками и вакуумным заполнением возможно обеспечить измерение частоты вращения Ω_{min} при соотношении $\Omega_{min}/\omega_0 \sim 10^{-4}$ и больше; при нормальных условиях, в случае серебряных стенок и вакуумного заполнения резонатора при $f_0 = 10$ ГГц при размерах полости $a = 13$ мм возможно обеспечить $\Omega_{min} \geq 2\pi \cdot 10^6$ рад/с;
- в условиях сверхпроводимости материалов стенок резонатора можно повысить добротность вращающегося резонатора, а, следовательно, и разрешение устройства измерения частоты вращения резонансным способом; использование материалов с высокой проводимостью позволяет в теории получить разрешение в сотые и тысячные доли Герц (единицы и десятки градусов в час, что соответствует десятитысячным долям оборотов в минуту) при радиусе резонатора в несколько миллиметров, что превосходит по миниатюрности многие существующие устройства измерения частоты вращения и соответствует разрешению для навигационных целей.

Стоит отметить, что разрешение навигационного уровня резонансный способ измерения частоты вращения в исследованных случаях обнаруживает только при криогенных температурах (сверхпроводимость), что в настоящий момент не позволяет реализовать данные устройства в сравнительно компактном размере и обеспечить их широкую коммерческую доступность. Более того, при вращении в сверхпроводниках следует учитывать наличие магнитомеханических эффектов, эффектов Мейснера [211], [212], Барнетта [173], [213] и др. Таким образом, параметры точности таких устройств еще предстоит исследовать, равно как и возможные конструкции датчиков, сложность изготовления которых в миниатюрном виде на данный момент ограничена технологическими возможностями уменьшения криогенных камер или получения эффекта сверхпроводимости при нормальных условиях.

Необходимо также проведение дальнейших исследований с целью улучшения разрешения резонансного метода измерения частоты вращения за счет увеличения добротности резонатора в нормальных условиях и анализа возможных конструкций устройства и генерируемых в нем помех для определения таких характеристик точности, как случайный дрейф и ARW.

5 ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ПРОСТРАНСТВОМ МЕЖДУ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ШАРОМ И СФЕРОЙ

В первой главе было отмечено, что одним из важных параметров для гироскопов, особенно для потребительских устройств, является малый размер датчика, в то время как размеры оптических резонаторных гироскопов зачастую увеличиваются за счет измерительного оборудования, расположенного снаружи самого резонатора или оптического волокна. В четвертой главе исследован радиочастотный резонансный способ измерения скорости вращения [144] с помощью вращающейся сферической полости, реализация которого подразумевает расположение измерительного оборудования также снаружи резонатора (Рисунок 1.2).

Ниже исследуется радиочастотный резонансный способ измерения частоты вращения [144] применительно ко вращающемуся концентрическому сферическому резонатору, образованному полостью между концентрическими шаром и сферой (далее – концентрический сферический резонатор), с целью поиска путей миниатюризации устройств измерения частоты вращения. Для этого поставлена и решена в строгой форме задача возбуждения этой полости сторонними источниками токов и зарядов [214] при использовании уравнений электродинамики во вращающейся системе отсчета, полученных в [141], [142]. Численные эксперименты позволяют оценить количественно возможности резонансного способа измерения частоты вращения полости [144].

5.1 Постановка и общее решение задачи

Математическая модель задачи о возбуждении ЭМ поля во вращающемся концентрическом сферическом резонаторе отличается от задачи возбуждения вращающегося сферического резонатора в четвертом разделе тем, что в центр сферической оболочки радиуса радиуса a и проводимости σ_1 внесена сфера радиуса b и проводимости σ_2 , центр которой совпадает с центром сферы радиуса a и которая вращается вместе с этой сферой в СО K' (находится в покое относительно сферы радиуса a в СО K). Полость между сферами при $b < R < a$ заполнена средой без гистерезиса с диэлектрической $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ и магнитной $\mu = \mu_0 \mu_r$ проницаемостями и вращается с постоянной угловой частотой Ω в СО K' . ЭМ поле на частоте ω_0 возбуждается в полости сторонними источниками токов и зарядов, расположенными в объеме V_j , который вращается вместе с полостью в СО K' (находится в покое в СО K). Таким образом, концентрические сферические оболочки, полость между ними и расположенный в полости источник вращаются вокруг общей оси с одинаковой частотой в СО K' (Рисунок 5.1).

Решение построим таким же способом, что и в четвертой главе. Представим ЭМ поле, возбуждаемое во вращающейся полости между вращающимися концентрическими сферой и шаром, как сумму первичного поля $\bar{E}^{E,H,P}$, $\hat{H}^{E,H,P}$, возбуждаемого сторонними источниками токов и зарядов в условиях отсутствия границы раздела сред, и вторичного поля $\bar{E}^{E,H,S}$, $\hat{H}^{E,H,S}$, возбуждаемого токами и зарядами, наведенными на стенках концентрических сферических оболочек при $R = a$ и $R = b$ (отраженного от этих стенок ЭМ поля) (4.8). В случае, когда границы раздела сред $R = a, b$ отсутствуют, функции $U_{nm}^{E,H,P}$ первичного поля известны и записаны в форме (4.9), (4.10), (4.11) [141], [142].

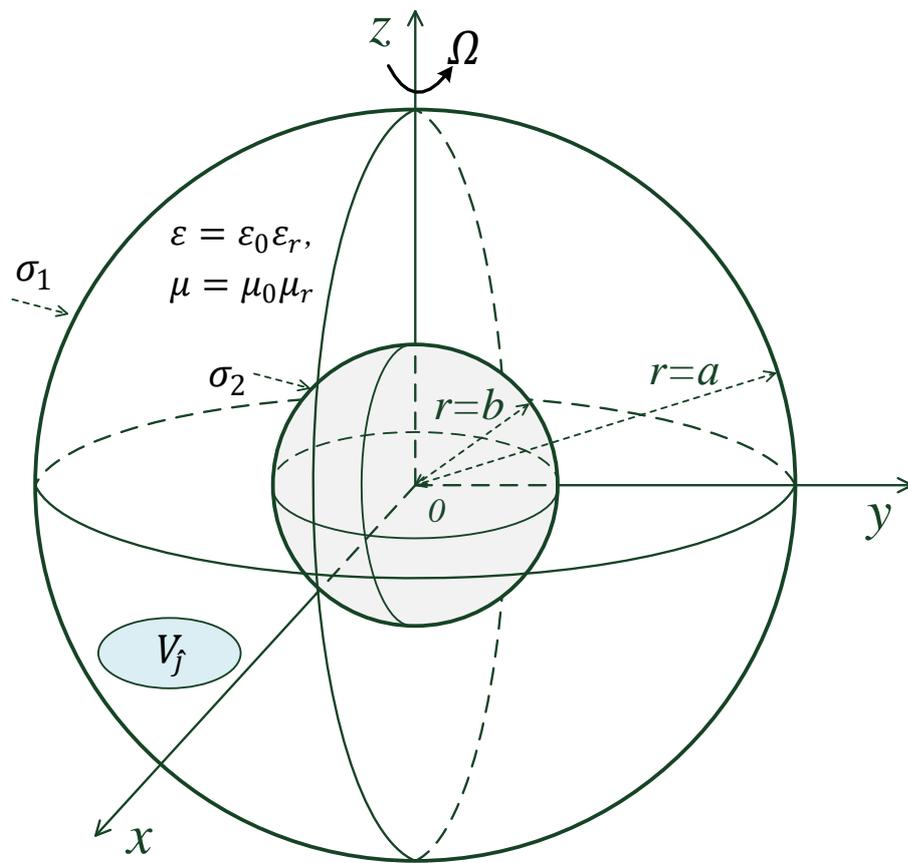


Рисунок 5.1 – К постановке задачи. Вращающийся концентрический сферический резонатор

В [141], [142] показано, что в СО К ЭМ поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла (4.1), разделяется в сферической системе координат с помощью материальных уравнений (2.2) с помощью электрического V^E и магнитного V^H потенциалов Дебая на поля электрического и магнитного типов. Потенциалы V^E и V^H удовлетворяют волновому уравнению (4.2). Тогда составляющие векторов напряженностей ЭМ поля E -типа определяются выражениями (4.3), а H -типа – выражениями (4.4). Потенциалы Дебая V^E и V^H разлагаются по системе сферических функций так же, как в (4.5).

При нахождении вторичного ЭМ поля $\bar{E}^{E,H,S}$, $\bar{H}^{E,H,S}$ необходимо построить решение, которое можно было бы согласовать как на внутренней, так и на внешней границе при $R = a$ и $R = b$. Для этого представим сферические функции ЭМ поля $U_{nm}^{E,H,S}$ как сумму двух независимых сферических функций (любых – важно получить линейную комбинацию двух независимых решений [183]) и учтем, что составляющие векторов напряженностей ЭМ поля должны иметь конечные величины на стенках полости при $R = a$ и $R = b$. Начало координат исключается из рассмотрения, так как ЭМ поле сосредоточено в объеме $a \leq R \leq b$ [170] (Рисунок 5.1), в связи с чем будем использовать решение в форме суммы функций Бесселя и Неймана, не отбрасывая последнюю, как в (4.12), (4.13) [215]. Тогда запишем функции $U_{nm}^{E,H,S}$ вторичного ЭМ поля как [214]

$$U_{nm}^{E,S} = P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}[a_{nm}^E j_n(k_m R) + b_{nm}^E n_n(k_m R)], \quad b \leq R \leq a, \quad (5.1)$$

$$U_{nm}^{H,S} = P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}[a_{nm}^H j_n(k_m R) + b_{nm}^H n_n(k_m R)], \quad b \leq R \leq a, \quad (5.2)$$

где $a_{nm}^{E,H}$, $b_{nm}^{E,H}$ – коэффициенты, определяемые из ГУ, $n_n(k_m R)$ – сферическая функция Неймана. Выражение для волнового числа $k_m = k_0 + m\Omega/v_\phi$ определяется по (4.7).

Подставляя $U_{nm}^{E,H}$ с учетом (4.8), (4.9), (5.1), (5.2) в (4.3) и (4.4), получаем составляющие напряженностей полного ЭМ поля \bar{E}^E , \hat{H}^E и \bar{E}^H , \hat{H}^H аналогичные записанным в (4.14) и (4.15), в которых все составляющие ЭМ поля зависят от частоты вращения Ω через коэффициент $\beta = \Omega r \sin\theta / v_\phi$ и аргументы $k_m R = (k_0 + m\Omega/v_\phi)R$ (4.7).

Таким образом, общее решение граничной задачи возбуждения концентрического сферического резонатора представлено в строгой форме с помощью (4.14) и (4.15), (4.8), (4.9), (5.1), (5.2).

5.2 Частное решение задачи возбуждения концентрического сферического резонатора с идеально проводящими стенками

Для частного решения задачи о возбуждении ЭМ поля во вращающейся полости, образованной пространством между концентрическими сферой и шаром, необходимо определить из ГУ значения коэффициентов $a_{nm}^{E,H}$, $b_{nm}^{E,H}$ в выражениях для вторичного поля (5.1), (5.2) [216].

5.2.1 Граничные условия на идеально проводящих стенках полости

В математической модели считаем проводимости оболочки при $R = a$ и шара при $R = b$ идеальными. На этих поверхностях в случае ЭМ поля E -типа для составляющих векторов E_θ^E и E_φ^E должны выполняться ГУ:

$$E_\theta^E(R, \theta, \varphi) = E_\varphi^E(R, \theta, \varphi) = 0 \quad \text{при } R = a \text{ и } R = b. \quad (5.3)$$

Из (4.14) видно, что ГУ (5.3) удовлетворяются для колебаний E -типа, если наложить ГУ на U_{nm}^E

$$\frac{\partial(RU_{nm}^E)}{\partial R} = 0 \quad \text{при } R = a \text{ и } R = b. \quad (5.4)$$

При этом нормальная к поверхностям составляющая $H_R^E = 0$ при $R = a$ и $R = b$, т.е. удовлетворяются ГУ и для напряженности магнитного поля. Таким образом, для определения ЭМ поля E -типа необходимо решить граничную задачу Неймана.

В случае ЭМ поля H -типа должны обращаться в ноль компоненты E_θ^H и E_φ^H при $R = a$ и $R = b$. Для этого, как видно из (4.15), необходимо наложить граничное условие на U_{nm}^H :

$$U_{nm}^H = 0 \quad \text{при } R = a \text{ и } R = b. \quad (5.5)$$

Это значит, что для определения ЭМ поля H -типа необходимо решить граничную задачу Дирихле. При этом нормальная к поверхностям оболочек шара составляющая $H_R^H = 0$ при $R = a$ и $R = b$, т.е. удовлетворяются ГУ и для напряженности магнитного поля.

5.2.2 Решение граничной задачи

Чтобы определить коэффициенты $a_{nm}^{E,H}$ и $b_{nm}^{E,H}$ в (5.1), (5.2), подставим (4.8) при учете (4.9), (5.1), (5.2) в ГУ (5.4) и (5.5). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(RU_{nm}^{E,P})}{\partial R} &= -\frac{\partial(RU_{nm}^{E,S})}{\partial R}, & \text{при } R = a \text{ и } R = b, \\ U_{nm}^{H,P} &= -U_{nm}^{H,S}, & \text{при } R = a \text{ и } R = b. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя значения $U_{nm}^{E,S}$ из (4.9) и значения $U_{nm}^{E,P}$ из (5.1) в первое из ГУ (5.6), имеем систему двух линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{nm}^E и b_{nm}^E , решая которую, находим [216]

$$a_{nm}^E = \frac{[b \cdot j_n(k_m b)]' [a \cdot n_n(k_m a)]'}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(1)E} - \frac{[b \cdot n_n(k_m b)]' [a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]'}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(2)E}, \quad (5.7)$$

$$b_{nm}^E = -\frac{[b \cdot j_n(k_m b)]' [a \cdot j_n(k_m a)]'}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(1)E} + \frac{[b \cdot j_n(k_m b)]' [a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]'}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(2)E}, \quad (5.8)$$

где $D_{nm}^E = [b \cdot n_n(k_m b)]' [a \cdot j_n(k_m a)]' - [b \cdot j_n(k_m b)]' [a \cdot n_n(k_m a)]'$, а штрих над скобкой означает производную по a или b , коэффициенты $F_{nm}^{(s)E}$ определены по (4.10).

Подставляя значения $U_{nm}^{H,P}$ и $U_{nm}^{H,S}$ из (4.9) и (5.2) во второе из ГУ (5.6), имеем систему двух линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{nm}^H и b_{nm}^H , решая которую, находим [216]:

$$a_{nm}^H = \frac{j_n(k_m b) n_n(k_m a)}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(1)H} - \frac{n_n(k_m b) h_n^{(2)}(k_m a)}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(2)H}, \quad (5.9)$$

$$b_{nm}^H = -\frac{j_n(k_m b) j_n(k_m a)}{D_{nm}^M} F_{nm}^{(1)H} + \frac{j_n(k_m b) h_n^{(2)}(k_m a)}{D_{nm}^M} F_{nm}^{(2)H}, \quad (5.10)$$

где $D_{nm}^H = n_n(k_m b) j_n(k_m a) - j_n(k_m b) n_n(k_m a)$, коэффициенты $F_{nm}^{(s)H}$ определены по (4.11).

Таким образом, выражения (5.7) - (5.10) совместно с выражениями (4.14) и (4.15) при учете (4.9) и (5.1), (5.2) определяют компоненты векторов напряженностей ЭМ поля, т.е. определяют решения соответственно граничных задач Неймана и Дирихле для идеально проводящих стенок полости.

5.3 Частное решение граничной задачи с импедансными граничными условиями

Для учета джоулевых потерь в металле, из которого изготовлена полость, необходимо сформулировать и решить граничные задачи возбуждения ЭМ поля во вращающемся сферическом резонаторе с импедансными стенками [214]. Считаем, что проводимость металлических стенок полости является конечной и равна σ_1 и σ_2 при $R = a$ и $R = b$ соответственно. Параметры σ_1 и σ_2 считаем измеренными в СО K , $\sigma_1 = \sigma_2$ (Рисунок 5.1).

5.3.1 Импедансные граничные условия на стенках полости

Формулировка граничной задачи возбуждения вращающейся полости, образованной пространством между концентрическими сферой и шаром, и ее решение строятся так же, как и для сферического резонатора в четвертой главе и определяются выражениями (4.8), (4.9), (4.14),

(4.15) и (5.1), (5.2) с тем отличием, что коэффициенты $a_{nm}^{E,H}$ и $b_{nm}^{E,H}$ в (5.1), (5.2) определяются из ИГУ на стенках резонатора при $R = a$ и $R = b$ (Рисунок 5.2).

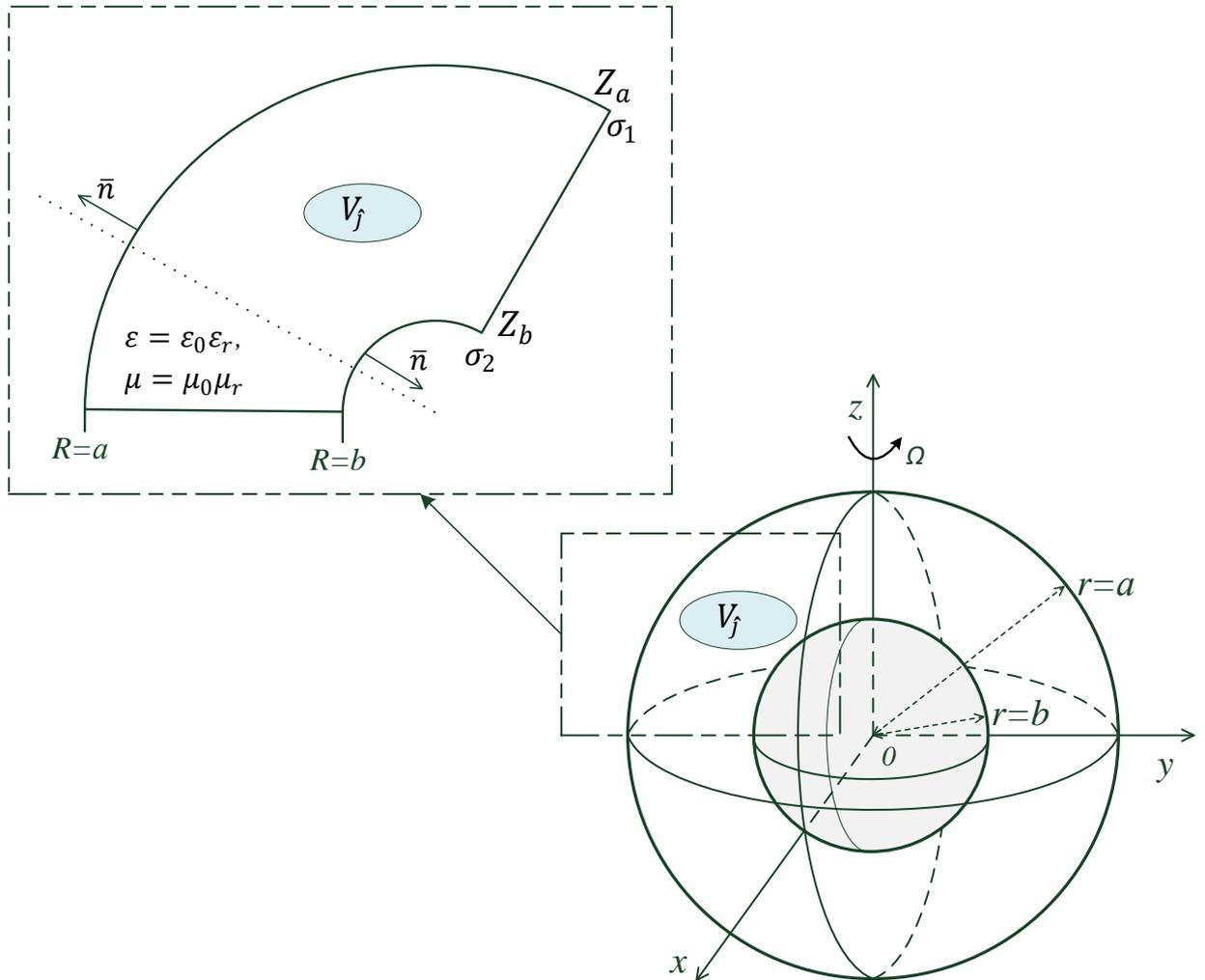


Рисунок 5.2 – К постановке граничной задачи с импедансными граничными условиями

ИГУ на внутренней поверхности большей сферы при $R = a$ были сформулированы в четвертой главе и записываются для электрической и магнитной функций $U_{nm}^{E,H}$ в форме (4.32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(k_m R U_{nm}^E)}{\partial(k_m R)} + i Z_0^\omega (k_m R U_{nm}^E) &= 0, & R = a, \\ i(k_m R) U_{nm}^H + Z_0^\omega \frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial(k_m R)} &= 0, & R = a, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $Z_0^\omega = Z^\omega / W$ – нормированное значение импеданса, W – характеристическое сопротивление среды, Z^ω определяется по (4.24).

ИГУ на внутренней поверхности полости при $R = b$ отличаются от условий (5.11) тем, что вектор нормали к поверхности внутренней сферы направлен в противоположную сторону (Рисунок 5.2), поэтому ИГУ (4.23) имеют форму:

$$E_\theta = -(1 - \beta^2)^{1/2} Z_1^\omega(\theta, \varphi) H_\varphi, \quad E_\varphi = (1 - \beta^2)^{-1/2} Z_2^\omega(\theta, \varphi) H_\theta \quad \text{при } R = b, \quad (5.12)$$

Таким образом, для электрической и магнитной сферических функций $U_{nm}^{E,H}$ ИГУ на поверхности внутренней сферы имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(k_m R U_{nm}^E)}{\partial(k_m R)} - i Z_0^\omega(k_m R U_{nm}^E) &= 0, \quad R = b, \\ i(k_m R) U_{nm}^H - Z_0^\omega \frac{\partial(k_m R U_{nm}^H)}{\partial(k_m R)} &= 0, \quad R = b, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $Z_0^\omega = R_0^\omega + i X_0^\omega$ – нормированное поверхностное сопротивление металлической оболочки внутренней сферы, $R_0^\omega = X_0^\omega = \sqrt{\omega_0 \mu / 2 \sigma_2}$ – активная и реактивная составляющие поверхностного импеданса (4.24) [169].

Таким образом, ИГУ в полости, образованной двумя концентрическими металлическими сферами, определяются выражениями (5.11) и (5.13).

5.3.2 Решение граничной задачи с импедансными граничными условиями

Подставляя в ИГУ (5.11) и (5.13) выражения для сферических функций полного ЭМ поля $U_{nm}^{E,H}$ (4.8), (4.9), и (5.1), (5.2), получаем систему уравнений относительно коэффициентов $a_{nm}^{E,H}$ и $b_{nm}^{E,H}$, решая которую для ЭМ поля E -типа находим [214]:

$$a_{nm}^E = \frac{a_{nm}^{E(1)}}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(1)E} + \frac{a_{nm}^{E(2)}}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(2)E}, \quad (5.14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{nm}^{E(1)} &= [[k_m a \cdot n_n(k_m a)]' + i Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot n_n(k_m a)]] \cdot [[k_m b \cdot j_n(k_m b)]' - i Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]], \\ a_{nm}^{E(2)} &= - \left[[k_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]' + i Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)] \right] \times \\ &\quad \times [[k_m b \cdot n_n(k_m b)]' - i Z_b^\omega [k_m b \cdot n_n(k_m b)]]; \end{aligned}$$

$$b_{nm}^E = \frac{b_{nm}^{E(1)}}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(1)E} + \frac{b_{nm}^{E(2)}}{D_{nm}^E} F_{nm}^{(2)E}, \quad (5.15)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{nm}^{E(1)} &= -[[k_m a \cdot j_n(k_m a)]' + iZ_{a0}^\omega [k_m a \cdot j_n(k_m a)]] \cdot [[k_m b \cdot j_n(k_m b)]' - iZ_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]], \\
b_{nm}^{E(2)} &= \left[[k_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]' + iZ_{a0}^\omega [k_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)] \right] \cdot [[k_m b \cdot j_n(k_m b)]' - iZ_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]], \\
D_{nm}^E &= [[k_m a \cdot j_n(k_m a)]' + iZ_{a0}^\omega [k_m a \cdot j_n(k_m a)]] \cdot [[k_m b \cdot n_n(k_m b)]' - iZ_{b0}^\omega [k_m b \cdot n_n(k_m b)]] - \\
&\quad [[k_m a \cdot n_n(k_m a)]' + iZ_{a0}^\omega [k_m a \cdot n_n(k_m a)]] \cdot [[k_m b \cdot j_n(k_m b)]' - iZ_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]];
\end{aligned}$$

и решения которой для ЭМ поля H -типа

$$a_{nm}^H = \frac{a_{nm}^{H(1)}}{D_{nm}^H} F_{nm}^{(1)H} + \frac{a_{nm}^{H(2)}}{D_{nm}^H} F_{nm}^{(2)H}, \quad (5.16)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{nm}^{H(1)} &= [ik_m a \cdot n_n(k_m a) + Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot n_n(k_m a)]'] \cdot [ik_m b \cdot j_n(k_m b) - Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]'], \\
a_{nm}^{H(2)} &= -[ik_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a) + Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]'] \cdot [ik_m b \cdot n_n(k_m b) - Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot n_n(k_m b)]'];
\end{aligned}$$

$$b_{nm}^H = \frac{b_{nm}^{H(1)}}{D_{nm}^H} F_{nm}^{(1)H} + \frac{b_{nm}^{H(2)}}{D_{nm}^H} F_{nm}^{(2)H}, \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{nm}^{H(1)} &= -[ik_m a \cdot j_n(k_m a) + Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot j_n(k_m a)]'] \cdot [ik_m b \cdot j_n(k_m b) - Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]'], \\
b_{nm}^{H(2)} &= [ik_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a) + Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot h_n^{(2)}(k_m a)]'] \cdot [ik_m b \cdot j_n(k_m b) - Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]'], \\
D_{nm}^H &= [ik_m a \cdot j_n(k_m a) + Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot j_n(k_m a)]'] \cdot [ik_m b \cdot n_n(k_m b) - Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot n_n(k_m b)]'] - \\
&\quad [ik_m a \cdot n_n(k_m a) + Z_{a0}^\omega [k_m a \cdot n_n(k_m a)]'] \cdot [ik_m b \cdot j_n(k_m b) - Z_{b0}^\omega [k_m b \cdot j_n(k_m b)]'],
\end{aligned}$$

а штрих над скобкой означает производную по $k_m R$ при $R = a$ и $R = b$.

Таким образом, все пространственные гармоники составляющих векторов напряженностей ЭМ поля E_{nm} -типа определяются по (4.14) с учетом (4.8), (4.9), (5.1), (5.14), (5.15), а все пространственные гармоники составляющих векторов напряженностей полного ЭМ поля H_{nm} -типа определяются по (4.15) пространственными гармониками U_{nm}^H (4.8), (4.9), (5.2), (5.16), (5.17).

Выражения (4.14), (4.15), (4.8), (4.9), (5.1), (5.2), (5.14) – (5.17) составляют общее решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля сторонними источниками во вращающемся сферическом концентрическом резонаторе с импедансными стенками.

5.4 Собственные значения. Резонансные частоты

Вращение концентрического сферического резонатора приводит к зависимости каждой пространственной гармонике возбужденного в нем ЭМ поля от частоты вращения Ω через волновое число $k_m = k_0 + m\Omega/v_\phi$ (4.7). Из выражений (5.7) - (5.10) следует, что при $D_{nm}^{E,H} \rightarrow 0$ амплитуды вторичного поля $U_{nm}^{E,H,S}$ стремятся к бесконечным значениям – наступает ЭМ резонанс. Резонансные частоты определяются характеристическими уравнениями:

для ЭМ поля E -типа при $D_{nm}^E = 0$ имеем

$$[b \cdot n_n(k_m b)]' [a \cdot j_n(k_m a)]' = [b \cdot j_n(k_m b)]' [a \cdot n_n(k_m a)]' \quad (5.18)$$

или

$$\frac{[k_m b \cdot n_n(k_m b)]'}{[k_m a \cdot n_n(k_m a)]'} = \frac{[k_m b \cdot j_n(k_m b)]'}{[k_m a \cdot j_n(k_m a)]'}, \quad b = \alpha a, \quad \alpha < 1;$$

для ЭМ-поля H -типа при $D_{nm}^H = 0$ имеем

$$\frac{n_n(k_m b)}{n_n(k_m a)} = \frac{j_n(k_m b)}{j_n(k_m a)}. \quad (5.19)$$

Каждое из трансцендентных уравнений (5.18), (5.19) имеет бесконечное количество корней u_{nmq}^E и u_{nmq}^H соответственно, где $q = 1, 2, 3, \dots$

Пусть $b = \alpha a$, $\alpha < 1$. Тогда для колебаний E -типа

$$\frac{[k_m \alpha a \cdot n_n(k_m \alpha a)]'}{[k_m a \cdot n_n(k_m a)]'} = \frac{[k_m \alpha a \cdot j_n(k_m \alpha a)]'}{[k_m a \cdot j_n(k_m a)]'}, \quad b = \alpha a, \quad \alpha < 1,$$

а для колебаний H -типа

$$\frac{n_n(k_m \alpha a)}{n_n(k_m a)} = \frac{j_n(k_m \alpha a)}{j_n(k_m a)}.$$

Каждому значению α соответствуют корни $k_m^{E,H} a = u_{nmq}^{E,H}(\alpha)$. То есть, получаем выражение для расщепления собственных частот (4.35) для вращающейся концентрической сферической полости в виде

$$\frac{\omega_{0,nmq}^{E,H} - m\Omega}{v_\phi} a = u_{nmq}^H(\alpha), \quad \omega_{0,nmq}^{E,H} = \frac{v_\phi}{a} u_{nmq}^H(\alpha) + m\Omega. \quad (5.20)$$

Значение α не влияет на $m\Omega$. Из полученных выражений видно, что для наблюдения эффекта расщепления собственных частот и измерения частоты вращения резонансным способом [144] при использовании концентрического сферического резонатора, необходимо, как и в случае с одиночной сферой, возбуждать во вращающемся резонаторе **колебание типа не ниже $N = n = 1$** , которое в связи с этим приято считать **основным** [142].

5.5 Численные результаты

Полученное решение позволяет построить ЧХ ЭМ поля, возбуждаемого во вращающемся концентрическом сферическом резонаторе. Для расчетов будем использовать полученное аналитическое решение граничной задачи возбуждения ЭМ поля (4.14), (4.15), (5.1), (5.2), (5.14) – (5.17) для частного случая, когда сторонним источником токов и зарядов является ЭЭВ.

5.5.1 Возбуждение вращающегося концентрического сферического резонатора элементарным электрическим вибратором

Воспользуемся записанными в четвертом разделе выражениями (4.40), (4.41). При возбуждении концентрического сферического резонатора радиальным ЭЭВ, расположенным в точке $p(R_0, \theta_0, \varphi_0)$, имеем (4.40), (4.41) $\hat{j}^{E,\theta} = \hat{j}^{E,\varphi} = \hat{j}^H \equiv 0$,

$$\hat{j}^{E,R} = e^{i\omega_0 t} \hat{I}_0^3 L \cdot \delta(R - R_0) \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{R} \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{R \sin\theta},$$

где $\hat{I}_0^3 L$ – площадь тока, $R_0 \in [b, a]$. Функции (4.10) и (4.11) источников сторонних токов и зарядов в приближении $\Omega/\omega_0 \ll 1$ имеют вид (4.42), (4.43):

$$F_{nm}^{(s)H} \approx 0,$$

$$F_{nm}^{(s)E} = -\frac{\varepsilon c_{nm} W I^E L}{4\pi R_0} e^{im\varphi_0} P_n^m(\cos\theta_0) R_n^{(s)}(k_m R_0).$$

Если $R_0 = b + b/2$, то $R > R_0$ и при расчетах учитываем, что ЭМ поле определяется в полости при $R_0 \leq R \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При этом $R_n^{(s)}(k_m R_0) = j_n(k_m R_0)$. Далее в работе расчеты выполнены при $\theta_0 = \pi/6$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\theta_1 = \pi/3$, $\varphi_1 = \pi/3$. Радиальный вибратор расположен у внутреннего шара, с координатами $(R_0, \theta_0, \varphi_0)$, а $(R_0, \theta_1, \varphi_1)$ – координаты точки наблюдения, в которой измеряются характеристики возбужденного в резонаторе ЭМ поля.

При этих условиях, в приближении $\Omega/\omega_0 \ll 1$ $U_{nm}^H \approx 0^4$, ЭЭВ возбуждает в полости только поля колебаний электрического типа, определяемые функцией U_{nm}^E :

$$\begin{aligned} U_{nm}^E &= U_{nm}^{E,P} + U_{nm}^{E,S} \\ &= e^{-im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \left[j_n(k_m R) F_{nm}^{(1)E} + a_{nm}^E j_n(k_m R) + b_{nm}^E n_n(k_m R) \right] = \\ &= -\frac{\varepsilon c_{nm} W I^E L}{4\pi R_0} e^{-im(\varphi - \varphi_0)} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta_0) \times \end{aligned} \quad (5.21)$$

⁴ В данном случае, как и в главе четыре, важно отметить, что выражения (4.42), (4.43) получены из условия $\Omega/\omega_0 \ll 1$ и с увеличением частоты вращения Ω в выражениях (4.10), (4.11) при возбуждении ЭМ поля E -типа получим, что $F_{nm}^{(s)H} \neq 0$ и $U_{nm}^H \neq 0$. То есть, во вращающейся полости будет возбуждаться и ЭМ поле H -типа.

$$\times \left\{ \left(j_n(k_m R) + j_n(k_m R) \frac{a_{nm}^{E(1)}}{D_{nm}^E} + n_n(k_m R) \frac{b_{nm}^{E(1)}}{D_{nm}^E} \right) \cdot h_n^2(k_m R_0) + \left(j_n(k_m R) \frac{a_{nm}^{E(2)}}{D_{nm}^E} + n_n(k_m R) \frac{b_{nm}^{E(2)}}{D_{nm}^E} \right) \cdot j_n(k_m R_0) \right\}.$$

Выражения (4.14), (4.15) совместно с (5.21) составляют строгое решение задачи возбуждения ЭМ поля ЭЭВ во вращающемся концентрическом сферическом резонаторе.

5.5.2 Частотные характеристики и добротности вращающегося концентрического сферического резонатора

В работе ЧХ рассчитаны по (4.44) с использованием (4.15), (4.8), (4.9), (5.1), (5.2), (5.14) – (5.17) для случая, когда ЭЭВ возбуждает ЭМ поле на частоте $f_0 = 10$ ГГц, полость заполнена различными диэлектриками (параметры которых приведены в Таблице 4.1), для различных проводимостей стенок резонатора при $\sigma_1 = \sigma_2$ (Таблица 4.1), частота вращения $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, отношение радиусов концентрических сфер $\alpha = b/a = 1/8$, $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 1/2$. Для учета тепловых потерь на нагревание диэлектрика, заполняющего резонатор, для аргументов сферических функций $k_m R$ использовано выражение (4.37).

Для расчета радиусов резонаторов, необходимых для возбуждения колебания основного типа ($n = 1$) использованы собственные значения идеальной полости (без тепловых потерь) $u_{nq} = \omega_m \sqrt{\varepsilon' \mu a}$, где u_{nq} – решение трансцендентного уравнения (5.18), $b = \alpha a$.

5.5.3 Численные результаты при $\Omega = 0$. Проверка решения

Для проверки полученного аналитического решения исследуем частный случай равенства частоты вращения резонатора нулю. В случае, когда $\Omega = 0$, аргумент $k_m^{E,H} R$ сферических функций $U_{nm}^{E,H}$ (5.21) выражается как $k_m^{E,H} a = k_{0,MNQ}^{E,H} a = \omega_{0,MNQ}^{E,H} \sqrt{\varepsilon' \mu a}$ (4.37), а построенные по (4.44) ЧХ (Рисунок 5.3) позволяют рассчитать добротность $Q = \omega_0 / \Delta \omega_0$ и собственные частоты резонаторов f_0 (5.20).

Примеры ЧХ при $\Omega = 0$ приведены на рисунке (Рисунок 5.3) для следующего случая: $f_0 = 10$ ГГц, $\Omega = 0$ рад/с, $N = 1$, проводимость стенок $\sigma_1 = \sigma_2 = 6,14 \cdot 10^7$ См/м, для разных материалов заполнения (Таблица 4.1). Радиусы сфер a и b выбраны из условия существования основного типа колебаний при $n = N = 1$ (5.18). Отношение радиусов концентрических сфер $\alpha = b/a = 1/4$. ЭМ поле возбуждается ЭЭВ, который расположен в точке с координатами $(a, 30^\circ, 30^\circ)$, точка наблюдения имеет координаты $(a, 60^\circ, 60^\circ)$.

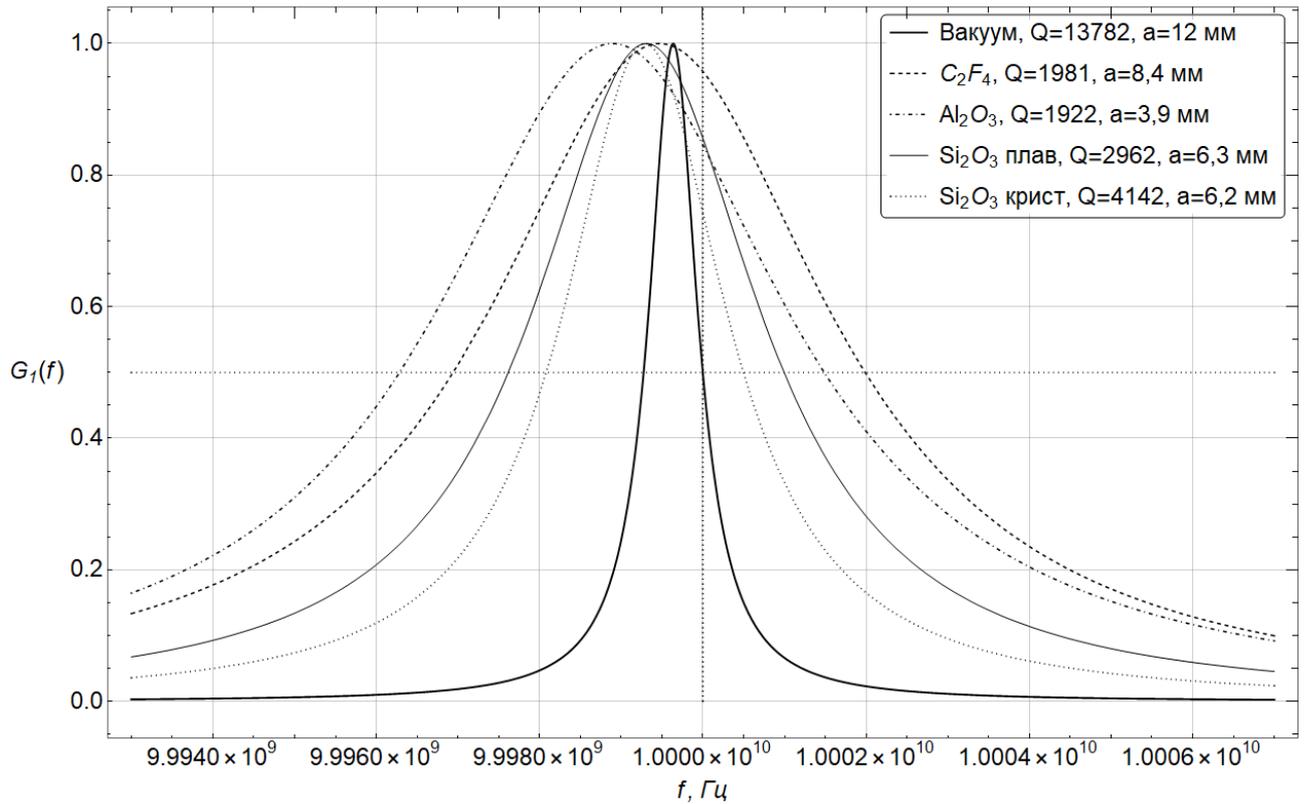


Рисунок 5.3 – Нормированные ЧХ $G_1(f)$ (4.44) при $\Omega = 0$

В таблице (Таблица 5.1) рассчитанные по ЧХ (Рисунок 5.3) значения Q и f_0 сравниваются со значениями, полученными при моделировании аналогичных задач в Ansys HFSS и CST Studio Suite. Из данных в таблице наблюдается совпадение полученных двумя способами расчета значений с точностью до сотых и тысячных долей процента (что может определяться заданной точностью решения в САПРах). Смещение ЧХ в сторону меньших частот обязано индуктивному характеру импеданса стенок резонатора (4.24).

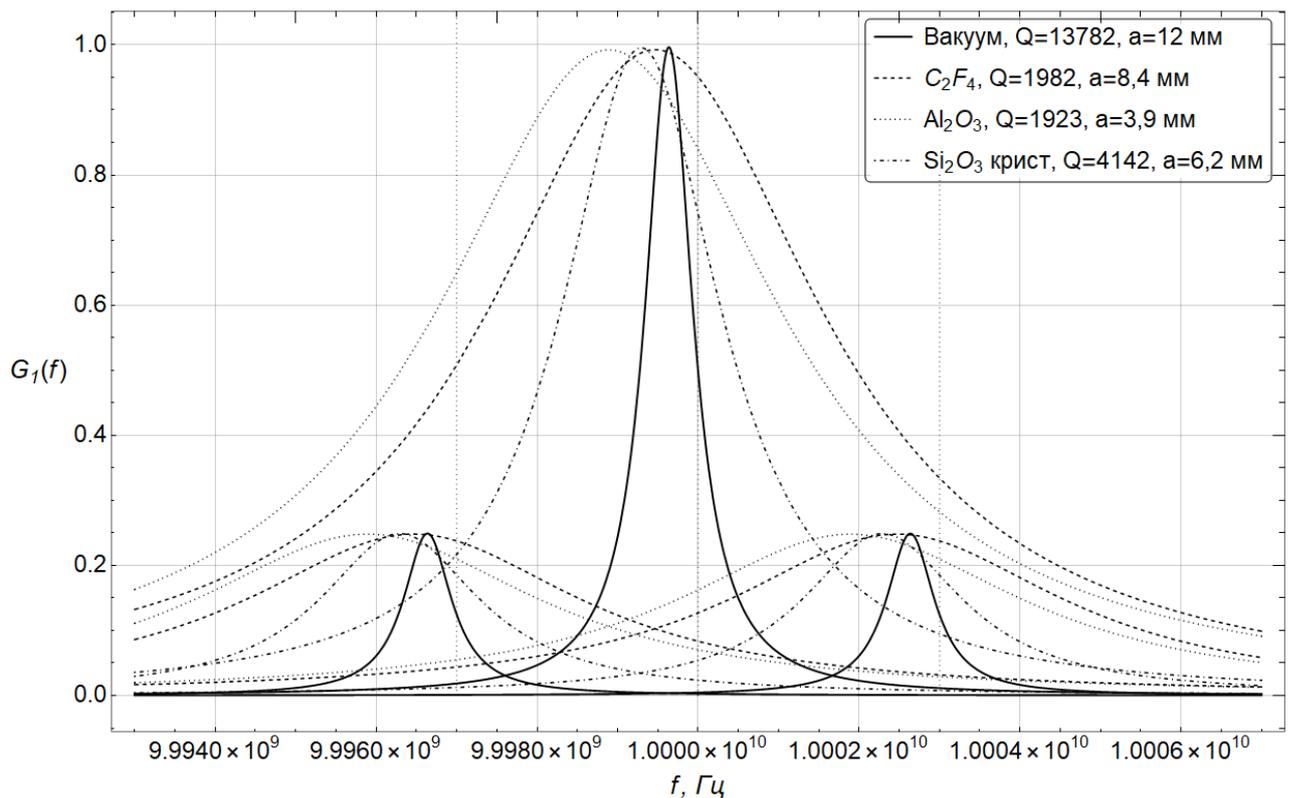
Таблица 5.1 – Добротности Q и собственные частоты f_0 (Гц) резонатора, $\Omega = 0$. Q_{math} - добротность, рассчитанная по аналитическому решению, Q_{CST} – добротность, рассчитанная в САПР

Материал заполнения полости		Материал стенок полости		
		Math	HFSS / CST	Отклонение, % $ Q_{math} - Q_{CST} /Q_{CST}$
		Ag, $\sigma_1 = 6,14 \cdot 10^7$		
Вакуум	Q	13782,1	13781,69	0,007
	f_0	9999637072,37	9999603283,95	0,0003
C_2F_4	Q	1981,6	1981,54	0,003
	f_0	9999470303,88	9999499359,74	0,0003
Si_2O_3 крист	Q	4141,82	4141,67	0,003
	f_0	9999291320,35	9999297793,56	0,00006
		Cu, $\sigma_1 = 5,95 \cdot 10^7$		
Вакуум	Q	13568,3	13567,89	0,003
	f_0	9999631373,51	9999597566,28	0,0003
C_2F_4	Q	1975,15	1975,09	0,003
	f_0	9999462025,67	9999491113,77	0,0003
Si_2O_3 крист	Q	4103,93	4103,78	0,004
	f_0	9999280199,34	9999286648,89	0,00006
		PEC		
C_2F_4	Q	2499	2482,6	0.68
	f_0	9999996208	9998977000	0.01
Si_2O_3 крист	Q	10000	9928,8	0.7
	f_0	9999999793	9997604000	0.02

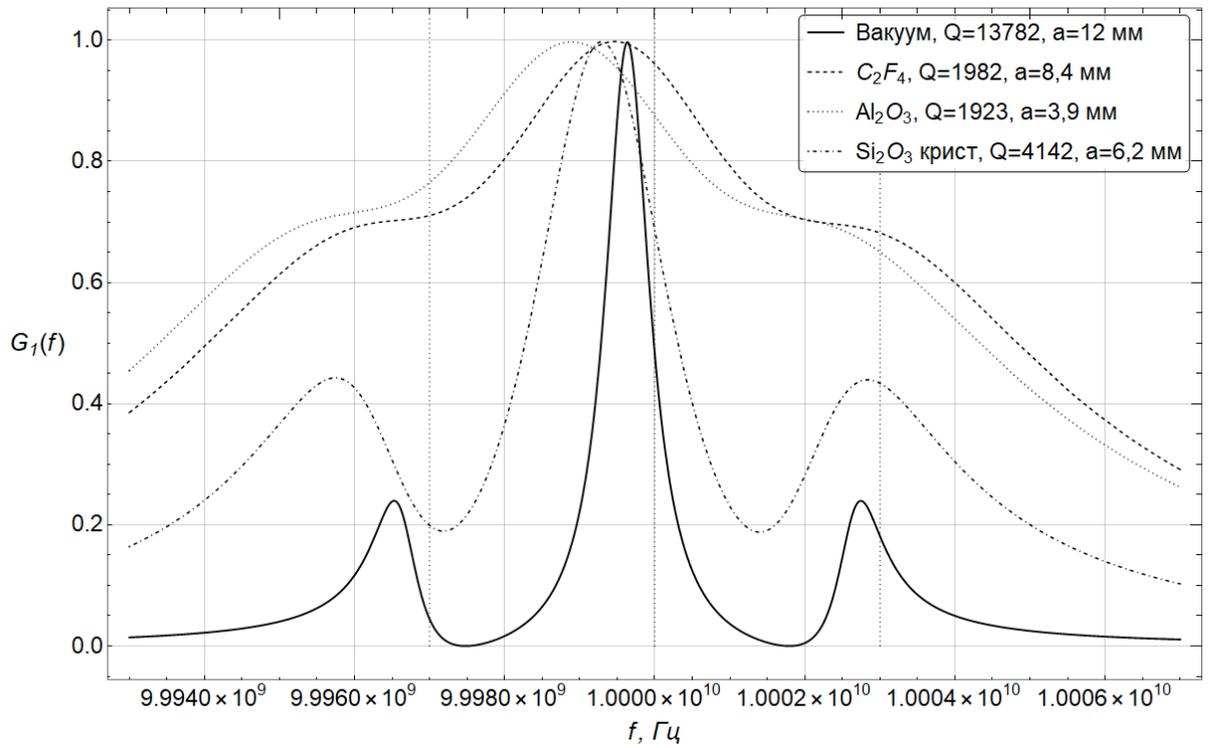
5.5.4 Численные результаты при $\Omega \neq 0$. Эффект расщепления частот

На Рисунке 5.4 представлена ЧХ (4.44) вращающегося концентрического сферического резонатора при заполнении полости между сферами диэлектриком и проводимостях стенок резонатора $\sigma_1 = \sigma_2$. Частота вращения полости $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, а остальные условия совпадают с описанными для Рисунка 5.3.

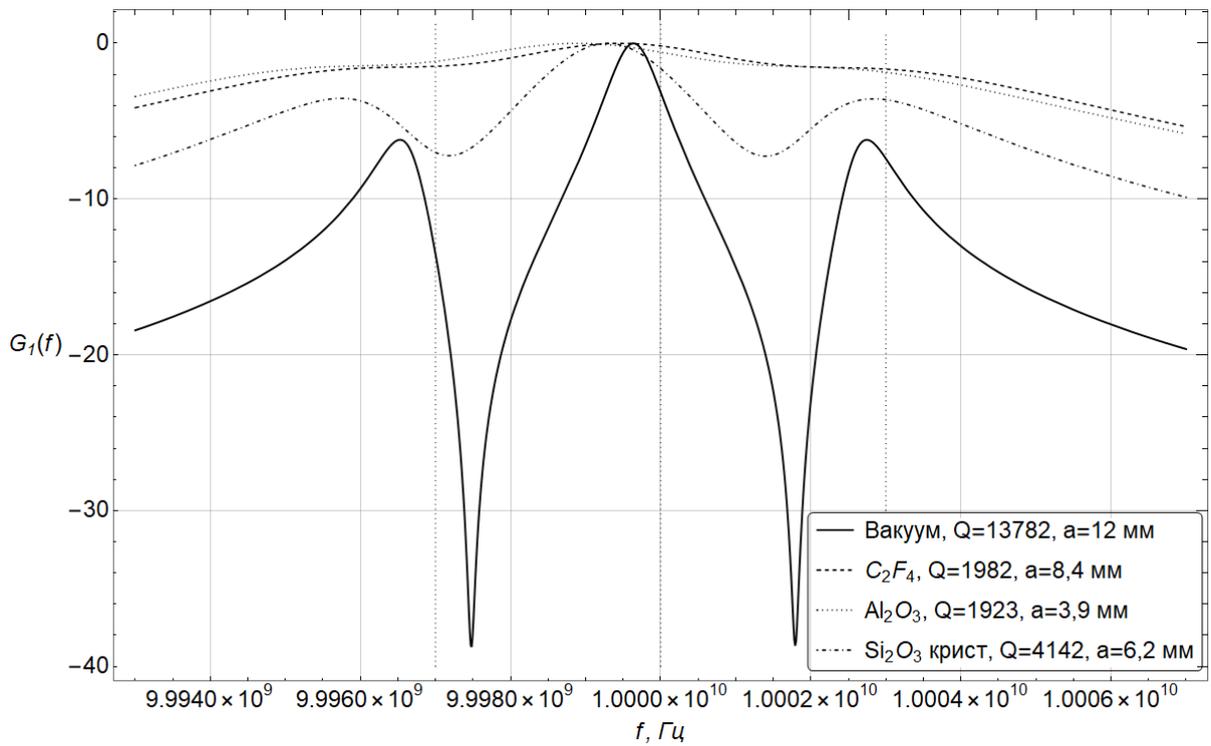
Полученные ЧХ качественно (по своей форме) совпадают с приведенными на Рисунке 4.5 для случая сферического резонатора. Как и в случае с одной полостью, на ЧХ заметно разделение собственной частоты полости в покое ω_0 на новые собственные частоты при вращении $\omega_0 \pm m\Omega$, $|m| \leq n$, n – порядок возбужденной моды (4.36), (4.39), а по самой ЧХ можно исследовать влияние характеристик материалов на добротность резонатора, и, соответственно, на разрешающую способность резонансного радиочастотного способа измерения частоты вращения [144]. Расчеты показывают, что в случае концентрического сферического резонатора радиус a меньше при тех же материалах, частоте возбуждения и вращения полости (Рисунок 5.4 и Рисунок 4.5), что позволяет уменьшить размеры резонатора, а, следовательно, и самого измерителя частоты вращения. Однако значения Q в случае концентрического сферического резонатора при прочих равных условиях ниже, чем в сферическом резонаторе на Рисунке 4.5 (за счет большей площади поверхности металла), что скажется на минимальной измеряемой частоте вращения $\Omega_{min} = \omega_0/Q$.



а) ЧХ на расщепленных собственных колебаниях полости $\omega_0 \pm m\Omega$, $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с



б) ЧХ полости при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с



в) ЧХ полости в дБ, $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с

Рисунок 5.4 – Нормированные ЧХ (4.44) для $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $\alpha = b/a = 1/4$.
Вертикальными пунктирными линиями отмечены резонансная частота резонатора в покое ω_0
и резонансные частоты при вращении $\omega_0 \pm m\Omega$

Значения добротностей вращающегося концентрического сферического резонатора, рассчитанные по ЧХ (Рисунок 5.4) для различных материалов стенок и заполнения резонатора приведены в Таблице 5.2. Из таблицы видно, что добротность концентрического сферического резонатора меньше добротности сферического резонатора (Таблица 4.3) при тех же материалах, частоте возбуждения и вращения полости. Однако разница в случае $\alpha = b/a = 1/4$ составляет от 1,5 до 8 % при выигрыше в размере до 10 % (радиус концентрического сферического резонатора при $\alpha = b/a = 1/4$ на Рисунке 5.4 сокращается на 10 % от величины радиуса сферического резонатора Таблица 4.1).

Таблица 5.2 – Добротности вращающихся концентрических сферических резонаторов при $\alpha = b/a = 1/4, \Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с

Диэлектрик	Радиус a , мм	Металл					
		PEC	Ag	Cu	Au	Pt	PI
Вакуум	12	∞	13782	13568	11601	5379	3838
C_2F_4	8,4	2499,9	1982	1975	1907	1497	1289
Al_2O_3	3,9	3333	1923	1940	1781	1157	917
BeO	4,7	3333	2062	2050	1924	1292	1037
Si_2O_3 плав	6,3	4999,9	2962	2943	2750	1809	1440
Si_2O_3 крист	6,2	9999,8	4142	4104	3731	2162	1645

На Рисунке 5.5 приведена зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора с импедансными стенками $\sigma_1 = \sigma_2$ и различным диэлектрическим заполнением от тангенса угла диэлектрических потерь $\tan\delta$ заполняющего его материала. Видно, что введение диэлектрического заполнения значительно (в несколько раз) сказывается на изменении добротности резонатора по сравнению с добротностью резонатора с вакуумным заполнением при одинаковом значении проводимости стенок резонатора. Несмотря на то, что добротность концентрического сферического резонатора меньше добротности сферического резонатора при прочих равных условиях, отличия являются незначительными при сравнении характеристик (Рисунок 5.5 и Рисунок 4.6).

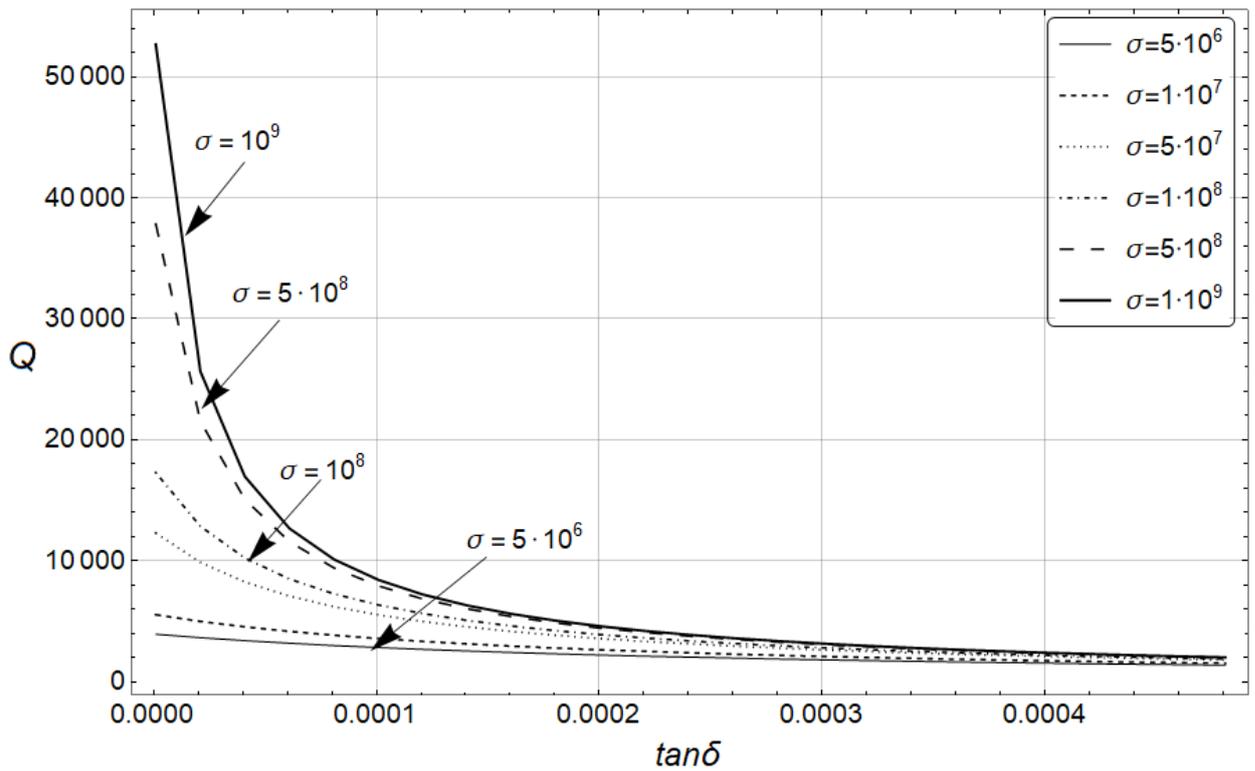


Рисунок 5.5 – Зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора от тангенса угла диэлектрических потерь заполняющего его материала при различных значениях проводимости стенок полости σ (См/м), $\alpha = b/a = 1/4$

На Рисунке 5.6 проиллюстрирована зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора от проводимости его импедансных стенок $\sigma_1 = \sigma_2$ при различном диэлектрическом заполнении ($\tan \delta$). Характеристики схожи с приведенными для случая вращающегося сферического резонатора (Рисунок 4.7) с отличиями в величинах добротностей во втором и третьем знаках (для случая $\alpha = b/a = 1/4$).

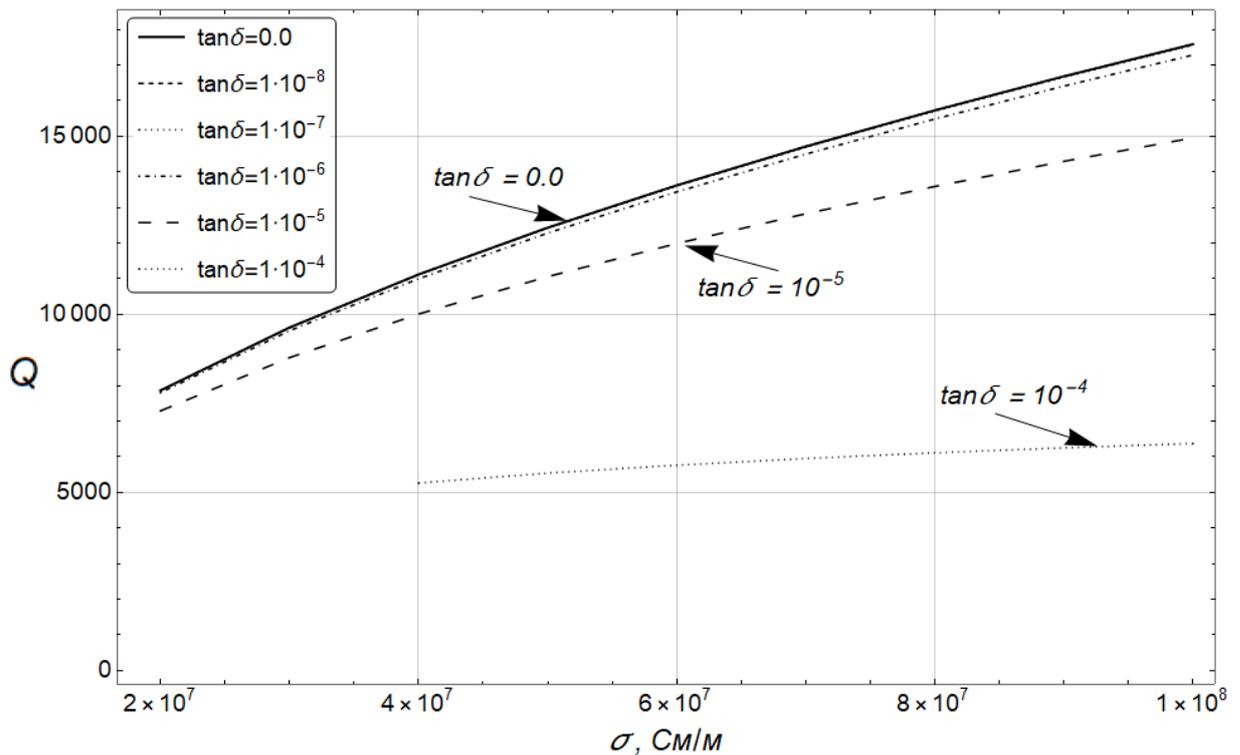
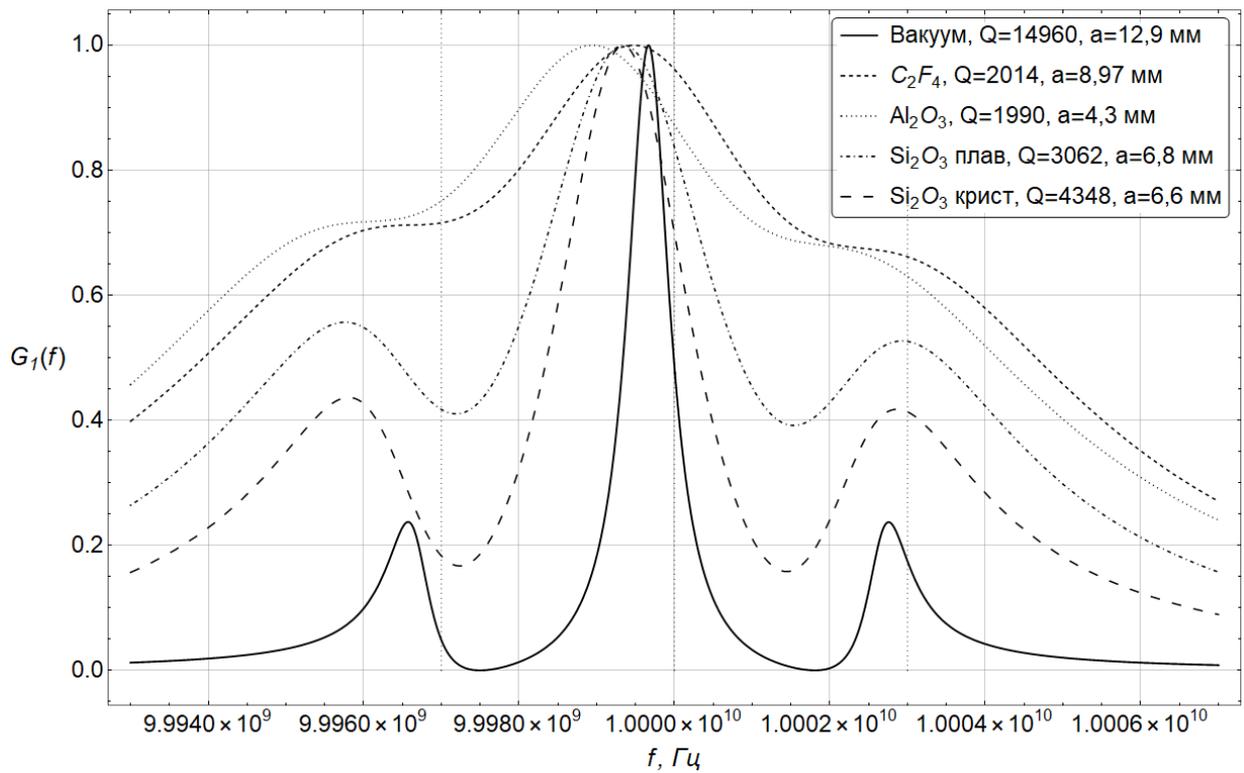


Рисунок 5.6 – Зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора от проводимости материала стенок при значении тангенса угла диэлектрических потерь заполняющего его материала, $\alpha = b/a = 1/4$

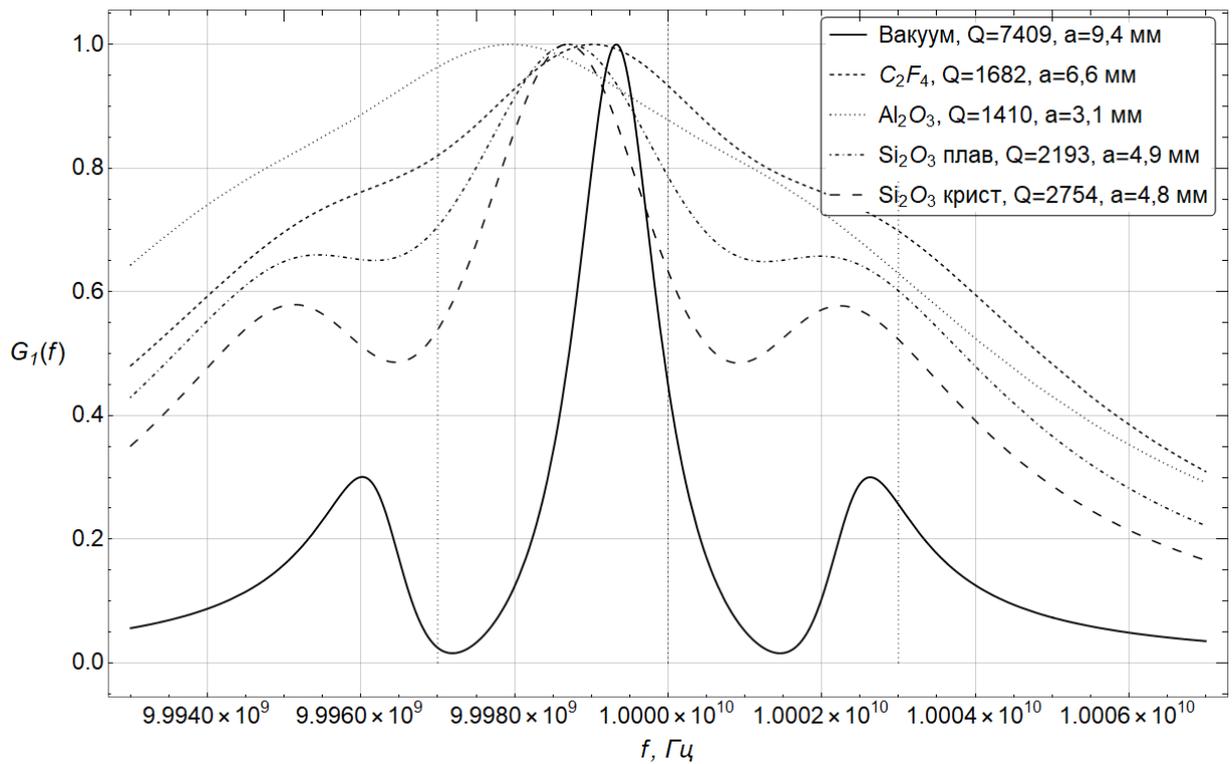
Полученные зависимости (Рисунок 5.5, Рисунок 5.6) качественно и количественно схожи с аналогичными графиками для сферической полости (Рисунок 4.6, Рисунок 4.7), что говорит о схожем характере зависимости добротностей концентрического сферического резонатора и сферической полости от параметров материалов резонаторов. Однако, в случае с концентрическим сферическим резонатором общий размер резонатора a уменьшается с ростом радиуса внутренней сферы b и при малых значениях отношения $\alpha = b/a$ он намного меньше размеров простой сферической полости при условии возбуждения в ней моды того же порядка.

На Рисунке 5.7 приведены ЧХ вращающейся концентрической сферической полости для значения отношения радиусов концентрических сфер $\alpha = b/a = 1/8$ и $\alpha = 1/2$ при прочих условиях, описанных в Рисунке 5.4 ($f_0 = 10$ ГГц, $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с, $N = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 6,139 \cdot 10^7$ См/м, ЭЭВ расположен в точке $(a, 30^\circ, 30^\circ)$, точка наблюдения – $(a, 60^\circ, 60^\circ)$). При соотношении радиусов концентрических сфер $\alpha = b/a = 1/8$ (Рисунок 5.7 а) полученные ЧХ совпадают с приведенными на Рисунке 4.5, а значения добротностей и радиусов полостей отличаются несущественно (менее одного процента). Можно утверждать, что с уменьшением α ($\alpha = 1/8$, $\alpha \rightarrow 0$) добротность Q вращающегося концентрического сферического резонатора стремится к добротности резонатора, образованного поллой сферой (Рисунок 4.5, Рисунок 5.7 а). То есть, с уменьшением радиуса внутренней сферы b радиус внешней сферы a , необходимый для

возбуждения в полости между сферами моды порядка $N = 1$ увеличивается и приближается к соответствующим значениям радиусов для полого сферического резонатора. Однако с ростом отношения радиусов до $\alpha = b/a = 1/2$ разрешение между резонансными частотами вращения и добротность самого резонатора ухудшаются, при том последняя падает почти вдвое (Рисунок 5.7 б). Это происходит в связи с тем, что по сравнению со случаем одной сферы, увеличивается площадь импедансной поверхности внесением второй, внутренней сферы, что приводит к увеличению тепловых потерь на стенках концентрического сферического резонатора.



а) Отношение радиусов концентрических сфер $\alpha = b/a = 1/8$



б) Отношение радиусов концентрических сфер $\alpha = b/a = 1/2$

Рисунок 5.7 – Нормированные ЧХ (4.44) при $\Omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$ рад/с. Вертикальными пунктирными линиями отмечены резонансная частота резонатора в покое ω_0 и резонансные частоты при вращении $\omega_0 \pm m\Omega$

Зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора от проводимости материала стенок $\sigma_1 = \sigma_2$ для различных $\alpha = b/a$, иллюстрирующая сделанные по Рисунку 5.7 выводы, приведена на Рисунке 5.8 (при вакуумном заполнении, стенках проводимости $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ и прочих условиях из Рисунка 5.4). Из графика видно, что с ростом объема полости, занимаемой ЭМ полем (уменьшением α , $\alpha = b/a \rightarrow 0$), значение Q концентрического сферического резонатора стремится к значению добротности полости, образованной одной сферой (кривые для случая $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/8$ и $\alpha = 1/10$ совпадают).

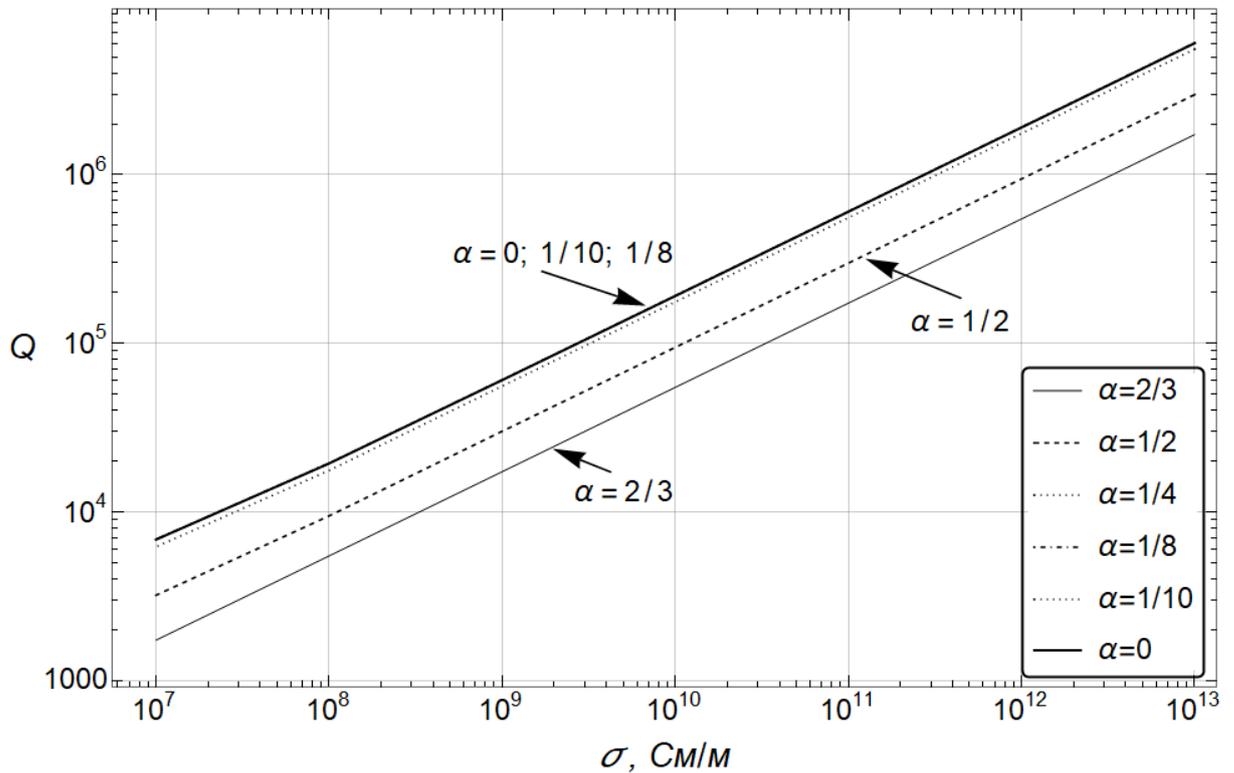


Рисунок 5.8 – Зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора от проводимости материала стенок при различном значении соотношения радиусов $\alpha = b/a$

Добротность концентрического сферического резонатора уменьшается по сравнению с добротностью полого сферического резонатора при прочих равных условиях в связи с тем, что объем V , занимаемый ЭМ полем, уменьшается, но при этом увеличивается объем проводника, в который поле проникает на толщину скин-слоя δ , что отображается в формуле добротности резонатора:

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{V}{S\delta} G,$$

где G – геометрический множитель, S – площадь поверхности резонатора, μ_c – магнитная проницаемость металлических стенок резонатора [217]. Ниже приведена зависимость отношения добротностей сферического Q_1 и концентрического сферического Q_2 резонаторов от отношения радиусов сфер в последнем $\alpha = a/b$ (Рисунок 5.9). При $\alpha = 0$ концентрический сферический резонатор переходит в обычный сферический резонатор и отношение добротностей $Q_2/Q_1 = 1$. Например, в случае, когда $\alpha = 1/4 = 0,25$, добротность резонатора $Q_2 = 0,85 \cdot Q_1$, и согласно данным для сферического резонатора с серебряными стенками и вакуумным заполнением из Таблицы 4.3 (глава 4) $Q_2 = 0,85 \cdot 14965 = 12720$ с точностью до величины отношения геометрических множителей G_2/G_1 .

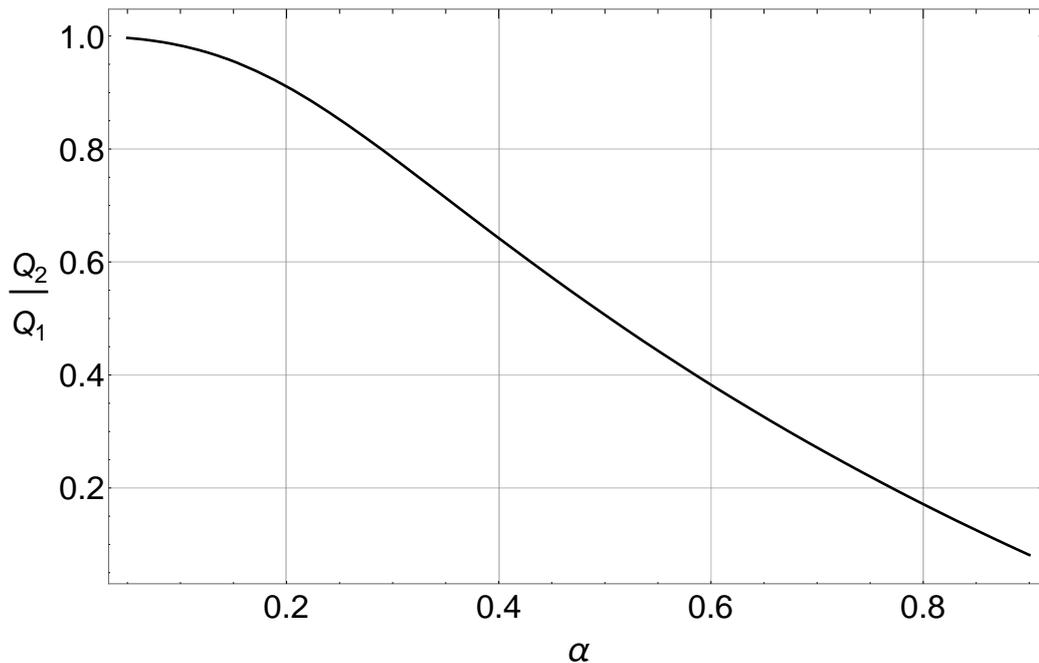


Рисунок 5.9 – Отношение добротностей концентрического сферического резонатора Q_2 и сферического резонатора Q_1 в зависимости от отношения радиусов сфер в концентрическом сферическом резонаторе $\alpha = b/a$

5.5.5 Измерение частоты вращения. Параметры гироскопов

В данном разделе считаем, что, как было отмечено в четвертом разделе, минимальная частота вращения, которую можно измерить с помощью резонансного способа Ω_{min} определяется шириной ЧХ $\Delta\omega_0$, которая определяет степень разделения соседних резонансных частот ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$ (Рисунок 5.4) и зависит от потерь в материалах, которым заполнен и из которого выполнен резонатор (Таблица 5.2). Ниже, как и для случая со сферическим резонатором, приведены графики для выбора концентрического сферического резонатора определенных параметров, позволяющих измерять заданные частоты вращения (Рисунок 5.10).

Задавшись определенным значением Ω_{min} , требуемым для измерения частоты вращения при выбранном значении возбуждаемой частоты f (Рисунок 5.10 а), можно определить возможный в данном случае размер резонатора a (Рисунок 5.10 в) и при какой добротности Q , обеспечиваемой параметрами материалов резонатора σ (Рисунок 5.10 б), можно требуемые Ω_{min} и a обеспечить.

Например, при необходимости обеспечить разрешение гироскопа, равное $6 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (г/м) необходимо обеспечить добротность 10^5 при частоте возбуждения резонатора 10^9 Гц (Рисунок 5.10 а), выбрав для обеспечения заданной добротности материал стенок резонатора

с проводимостью $\sigma_1 = \sigma_2 \approx 3 \cdot 10^9$ См/м для $\alpha = a/b \rightarrow 0$ (Рисунок 5.10 б), а радиус резонатора при этом будет составлять около 13 см (Рисунок 5.10 в), как и в случае для сферического резонатора (Рисунок 4.10). Но в случае концентрического сферического резонатора при $\alpha = a/b = 1/2$ для обеспечения того же порядка добротности уже потребуется большая проводимость, равная $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^{10}$ См/м, однако радиус резонатора a уменьшится до 9,5 см (Рисунок 5.7 б, Рисунок 5.10).

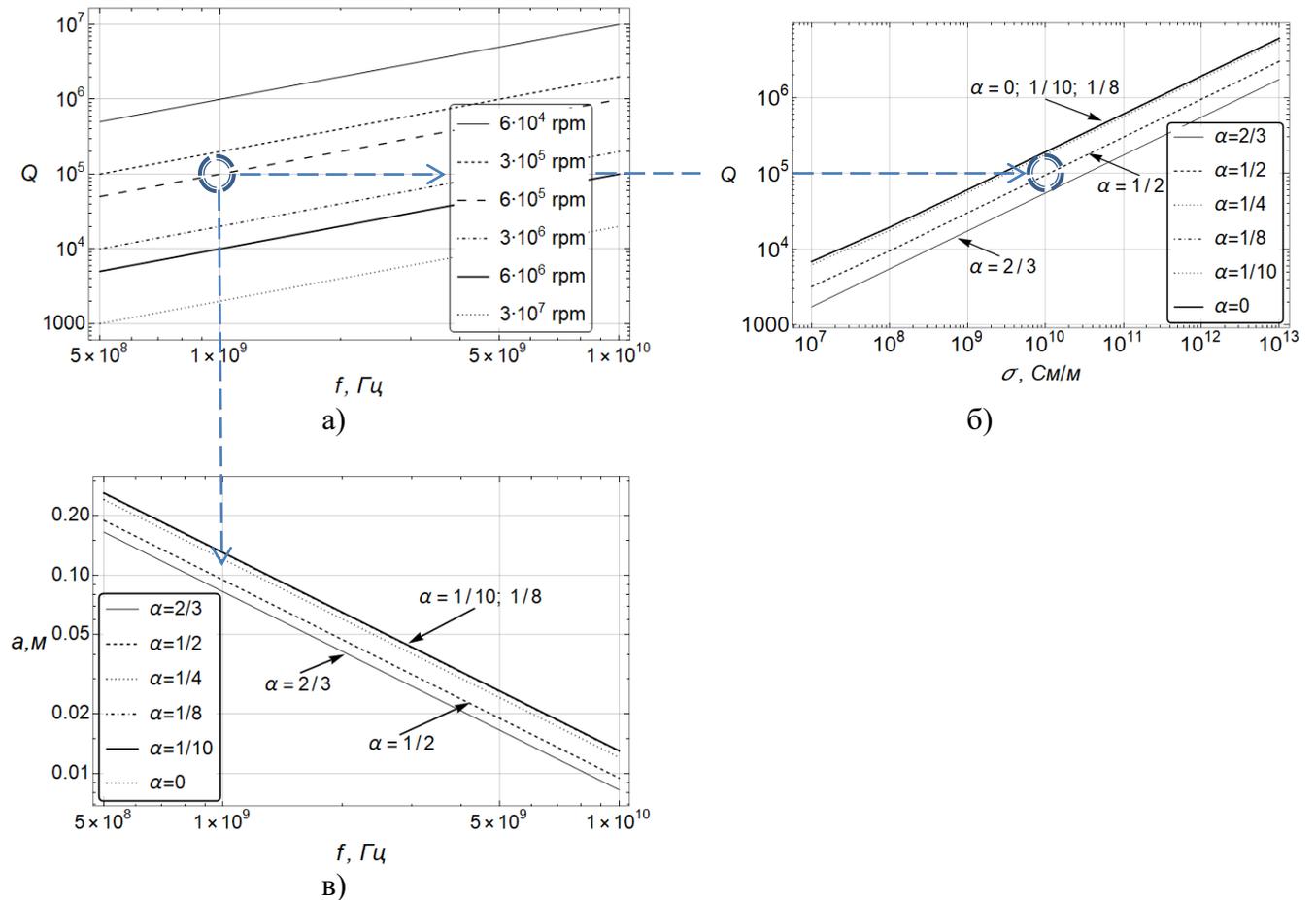


Рисунок 5.10 – Зависимость добротности вращающегося концентрического сферического резонатора с металлическими стенками от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (а) и проводимости материала стенок (б); Зависимость радиуса резонатора от частоты возбуждаемого в резонаторе ЭМП (в)

Для реальных материалов при нормальных условиях (комнатная температура, атмосферное давление) наилучшее достижимое разрешение при частотах возбуждения резонатора от $5 \cdot 10^8$ Гц до 10^{10} Гц и достижимых добротностях порядка 10^5 – от $3 \cdot 10^5$ оборотов в минуту (rpm) до $6 \cdot 10^6$ оборотов в минуту (rpm). Для улучшения разрешения (уменьшения Ω_{min}) при тех же частотах возбуждения необходимо значительно увеличивать

добротность резонатора за счет, например, применения сверхпроводящих материалов стенок резонатора, как было описано в четвертой главе.

5.6 Выводы

В разделе с использованием уравнений электродинамики в ковариантной форме [141] поставлена и решена в строгом виде граничная задача возбуждения ЭМ поля во вращающемся концентрическом сферическом резонаторе, образованном полостью между двумя концентрическими сферами, для исследования возможности уменьшения размеров гироскопов, использующих резонансный радиочастотный метод измерения частоты вращения [144]. Численные эксперименты, выполненные для частного случая возбуждения полости ЭЭВ, показали, что:

- полученное строгое аналитическое решение позволяет численно исследовать возбужденные во вращающемся концентрическом сферическом резонаторе ЭМ поля с учетом релятивистских эффектов при вращении (и является единственной возможностью сделать это ввиду отсутствия учитывающих подобные эффекты САПР);
- размеры устройства измерения частоты вращения определяются размерами концентрического сферического резонатора, которые зависят не только от частоты f_0 , на которой возбуждается колебание в резонаторе, и от порядка выбранной моды n , но и от соотношения радиусов концентрических сфер $\alpha = a/b$ и могут быть уменьшены при увеличении этого соотношения; разрешающая способность резонансного метода измерения частоты вращения во многом определяется добротностью полости, которая в свою очередь зависит от параметров материалов, из которых данная полость изготовлена, и уменьшается с внесением концентрической сферы за счет увеличения общей площади металлических стенок концентрического сферического резонатора;
- уменьшения геометрических (и электрических) размеров концентрического сферического резонатора, используемого для измерения частоты вращения, можно добиться увеличением размеров внутренней сферы (увеличением отношения радиусов внутренней и внешней сферы); при этом размеры концентрического сферического резонатора уменьшаются по сравнению с размерами сферического резонатора при прочих аналогичных условиях (частота вращения, частота генератора, материалы полости);
- при одинаковой выбранной возбуждаемой собственной частоте концентрический сферический резонатор будет иметь меньшие размеры, но и меньшую добротность, что

может сказаться на разрешении резонансного способа измерения частоты вращения. Однако процентное уменьшение размеров (до 10 % в исследованном случае при $\alpha = a/b = 1/4$) превышает процентное ухудшение добротности (в среднем 5%).

Как и в случае с другими рассмотренными в работе полостями, необходимо проведение дальнейших исследований с целью улучшения разрешения резонансного метода измерения частоты вращения за счет увеличения добротности полостей и анализа возможных конструкций устройства измерения частоты вращения и генерируемых в нем помех для определения таких характеристик точности, как случайный дрейф и ARW.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые при использовании уравнения Максвелла в ковариантной форме [141], [142] выполнены в строгой форме постановка и решение задач возбуждения произвольным распределением токов и зарядов ЭМ поля во вращающемся цилиндрическом волноводе и вращающихся цилиндрическом, сферическом и концентрическом сферическом резонаторах.

В первом случае задача имеет принципиальное значение для опытов с применением вращающихся интерферометров и лазерных гироскопов на основе трубок [90], [95], [121], так как дает строгое решение и представление о поведении ЭМ поля в устройстве при учете релятивистских эффектов при вращении (и является единственной возможностью сделать это ввиду отсутствия учитывающих подобные эффекты САПР).

Во втором – решение задач во вращающихся цилиндрических и сферических резонаторах позволяет выявить зависимость параметров ЭМ поля от частоты вращения и подтверждает описанный в [141] и [142] эффект расщепления собственных частот полости, который можно использовать [144] для измерения частоты вращения резонатора. Полученное строгое аналитическое решение позволило провести численные исследования основанных на этих эффектах радиочастотных способов измерения скорости вращения [144], [145] и установить степень и характер зависимости разрешающей способности резонансного способа от формы, материалов и добротностей вращающихся полостей. Определены предельно (теоретически) достижимые значения разрешающей способности радиочастотных резонаторных гироскопов в зависимости от параметров материалов, из которых изготовлены вращающиеся полости. Рассмотрены возможные пути уменьшения размеров и увеличения добротности рассматриваемых резонаторов для разработки более компактных и чувствительных к меньшим скоростям вращения гироскопов на основе одинарных и концентрических полостей.

Основываясь на полученных в работе результатах и сформулированных в разделах работы выводах, можно дать следующие рекомендации, которые необходимо учитывать при разработке устройств, реализующих радиочастотные способы измерения частоты вращения [144], [145]:

- в случае измерения частоты вращения одноволновым радиочастотным способом [145] разрешающая способность метода будет во многом определяться способностью измерительных приборов (анализаторов спектра) определить с высокой точностью критические частоты волновода и, соответственно, их смещение при вращении;
- разрешающая способность резонансного метода измерения частоты вращения во многом определяется добротностью полости Q , которая в свою очередь, зависит от

параметров материалов, из которых данная полость изготовлена. Минимальная частота вращения Ω_{min} , которую возможно измерить резонансным способом, определяется шириной ЧХ по половинной мощности $\Delta\omega_0 = \omega_0/Q$ и составляет $\Omega_{min}^{cil} = \Delta\omega_0/2$ и $\Omega_{min}^{sph} = \Delta\omega_0$ для цилиндрического и сферического резонаторов соответственно;

- для повышения разрешения и точности радиочастотного способа измерения частоты вращения необходимо использовать материалы стенок с высокой проводимостью, что позволяет сократить тепловые потери в металлических стенках полостей, вызывающие уменьшение добротности последних и смещение расщепленных резонансных частот полости от предсказанных методом значений;
- внесение диэлектрического заполнения позволяет сократить геометрические размеры резонаторов, а, следовательно, и устройств измерения частоты вращения, но при этом увеличивает тепловые потери в полости. Для улучшения разрешения резонансного способа измерения частоты вращения на основе полости, заполненной диэлектриком, следует выбирать материалы заполнения с малым значением тангенса угла диэлектрических потерь для повышения добротности резонатора и сокращения величины смещения расщепленных собственных частот резонатора от расчетных значений;
- в нормальных условиях резонансным методом измерения частоты вращения на основе сферического резонатора с серебряными стенками и вакуумным заполнением измерение частоты вращения становится возможным при соблюдении соотношения $\Omega_{min}/\omega_0 \geq 10^{-4}$. Например, в случае $f_0 = 10$ ГГц при радиусе полости $a \approx 13,1$ мм можно измерять $\Omega_{min} \geq 2\pi \cdot 10^6$ рад/с, объем полости при этом равен $V_{sph} \approx 9417$ мм³;
- при реализации резонансного метода измерения частоты вращения на основе цилиндрического резонатора разрешающая способность Ω_{min} будет выше в два раза по сравнению со сферическим резонатором при одинаковых добротностях полостей и при прочих равных условиях (одинаковые частоты и порядки возбуждаемых в резонаторах мод). В исследованных условиях измерение частоты вращения становится возможным при соблюдении соотношения $\Omega_{min}/\omega_0 \geq 5 \cdot 10^{-5}$. Однако требуемый для этого размер цилиндрического резонатора (занимаемый им объем – объем устройства измерения частоты вращения) будет кратно больше по сравнению с размерами сферического резонатора при тех же условиях. Таким образом, для уменьшения объема устройства измерения частоты вращения следует выбирать сферический резонатор при заданных значениях частоты возбуждения резонатора и Ω_{min} . Если же критическим является

повышение разрешающей способности (уменьшение Ω_{min}), имеет смысл выбирать цилиндрический резонатор при заданных значениях частоты возбуждения резонатора. Например, в случае $f_0 = 10$ ГГц при радиусе и длине цилиндрической полости с вакуумным заполнением $a = l \approx 23,6$ мм можно измерять $\Omega_{min} \geq \pi \cdot 10^6$ рад/с, объем полости при этом составит $V_{cil} \approx 41294$ мм³;

- сокращения геометрических (и электрических) размеров устройства измерения частоты вращения на основе сферического резонатора можно добиться за счет внесения малой концентрической сферы во вращающуюся сферическую полость большего радиуса. Стоит учитывать, что увеличение размеров внутренней концентрической сферы влечет за собой увеличение тепловых потерь в стенках резонатора, и, как следствие, ухудшение добротности резонатора – увеличений значения Ω_{min} . Однако процентное уменьшение размеров (10 % в случае отношения радиусов меньшей и большей сферы как один к четырем) превышает процентное ухудшение добротности (в среднем 5 %);
- повысить добротность вращающегося сферического резонатора, а, следовательно, и разрешающую способность устройства измерения частоты вращения резонансным способом можно в условиях сверхпроводимости материалов стенок резонатора; использование материалов с высокой проводимостью теоретически позволяет получить разрешение в сотые и тысячные доли Герц (единицы и десятки градусов в час или десятитысячные доли оборотов в минуту) при радиусе резонатора в несколько миллиметров, что по габаритам не уступает многим существующим устройствам измерения частоты вращения и соответствует разрешению для навигационных целей.

Представленные результаты и сделанные выводы говорят о том, что поставленные в работе задачи решены и цели достигнуты. Результаты исследований показали, что рассматриваемые радиочастотные методы [144], [145] могут обеспечить размеры измерительных модулей до нескольких миллиметров при разрешении датчика скорости вращения до единиц и сотых долей Герц (в условиях сверхпроводимости и в криогенных камерах), а хорошо разработанные методы измерения на СВЧ и отсутствие вибрирующих масс (вносящих паразитные колебания, как в МЭМС гироскопах) дает возможно делать предположения о возможной высокой точности измерений. Стоит отметить, что указанные выводы справедливы для рассматриваемых способов измерения частоты вращения по новым собственным частотам на ЧХ вращающихся полостей [144], [145]. Для повышения разрешающей способности резонансного способа при неявном разрешении новых собственных частот на ЧХ возможно рассмотреть применение различных методов спектрального анализа для детектирования входящих в спектр гармоник [164], [165]. В

данной работе этот вопрос не рассматривался и представляет собой постановку проблемы для последующих исследований.

Также в дальнейшем предстоит исследовать способы повышения добротности вращающихся резонаторов с целью улучшения разрешения резонансного метода измерения частоты вращения применительно к вращающимся полостям, рассмотреть возможные конструкции устройств и генерируемые в них помехи для определения точности, надежности и стабильности работы конструируемых датчиков. Перспективным является исследование возможности применения слоистых структур по типу резонансных отражателей и диэлектрических зеркал для увеличения добротности вращающихся резонаторов (аналогично с [218], [219], [220], [221]) [222].

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ARW – angle random walk, случайное отклонение угла
- GPS – Global Positioning System, система глобального позиционирования
- IoE – Internet of Everything, интернет всего
- IoT – Internet of Things, интернет вещей
- PEC – perfect electric conductor, идеальный проводник
- rpm – обороты в минуту (от англ. revolutions per minute)
- ВДНХ – Выставка достижений народного хозяйства
- ВОГ – волоконно-оптический гироскоп
- ВТСП – высокотемпературная сверхпроводимость
- ГЛОНАСС – Глобальная навигационная спутниковая система
- ГУ – граничные условия
- ИВОГ – интерферометрический волоконно-оптический гироскоп
- ИГУ – импедансные граничные условия
- КЛГ – кольцевой лазерный гироскоп
- МЭМС – микроэлектромеханическая система
- НОГ – нанофотонный оптический гироскоп
- НЭМС – наноэлектромеханические системы
- ОТО – общая теория относительности
- ПО – программное обеспечение
- РВОГ – резонаторный волоконно-оптический гироскоп
- САПР – система автоматизированного проектирования
- СО – система отсчета
- ФКВ – фотонно-кристаллическое оптическое волокно
- ЧХ – частотная характеристика
- ЭМ – электромагнитное
- ЭЭВ – элементарный электрический вибратор

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buret T., Ramecourt D., Honthaas J., Willemenot E., Paturel Y., Gaiffe T., Fiber Optic Gyroscopes for space application // Optical Fiber Sensors. OSA Technical Digest. - Cancun Mexico, 23–27 October 2006.
- [2] Basic Guide to Advanced Navigation / Research and Technology Organisation. - RTO PUBLICATION, 2010. – 88 p.
- [3] Song Z., Cao Z., Li Z., Wang J., Liu Y. Inertial motion tracking on mobile and wearable devices: Recent advancements and challenges // Tsinghua Science and Technology. - 2021. – Vol. 26, № 5. - P. 692-705.
- [4] Gyroscope market - Forecast (2023 - 2028) [Электронный ресурс]. - Furion analytics Research & Consulting LLP, 2022. – URL: <https://www.industryarc.com/Report/15628/gyroscope-market.html>.
- [5] Igel H., Bernauer M., Wassermann J., Schreiber K.U. Seismology, Rotational, Complexity [Раздел книги] // Encyclopedia of Complexity and Systems Science. - Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. – P. 1-26.
- [6] Tartaglia A., Di Virgilio A., Belfi J., Beverini N., Ruggiero M.L. Testing general relativity by means of ring lasers // The European Physical Journal Plus. - 2017. - Vol. 132. - № 73.
- [7] Pham V.T., Le Q.B., Nguyen D.A., Dang N.D., Huynh H.T., Tran D.T. Multi-Sensor Data Fusion in A Real-Time Support System for On-Duty Firefighters // Sensors. - 2019. - Vol. 19. - № 21.
- [8] Xia D., Yu C., Kong L. The development of micromachined gyroscope structure and circuitry technology // Sensors (Basel, Switzerland). - 2014. - Vol. 14. - №1. - P. 1394-1473.
- [9] Petrov B.M. Electrodynamics theory of Sagnac effect // Radioelectronics and Communications Systems. - 2010. - Vol. 53. - №10. - P. 511-520
- [10] Pascoli G. The Sagnac effect and its interpretation by Paul Langevin // Comptes Rendus Physique. - November–December 2017. - Vol. 18. - № 9-10. - P. 563-569.
- [11] Translation: On the Experiment of F. Harress [Электронный ресурс]. - 2023. – URL: https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Experiment_of_F._Harress [Дата обращения: 2022]
- [12] Schiff L.I. A Question in General Relativity // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. - 1939. - Vol. 25. - № 7. - P. 391-395
- [13] Зоммерфельд А. Оптика. - Москва: Издательство иностранной литературы, 1953.
- [14] Liu K., Zhang W., Chen W., Li K., Dai F., Cui F., Wu X., et al. The development of micro-gyroscope technology // Journal of Micromechanics and Microengineering. – 2009. - Vol. 19. - № 11.
- [15] Post E.J. Sagnac effect // Reviews of Modern Physics. - 1967. - Vol. 39. - № 2. - P. 475-493.
- [16] Fang J., Qin J. Advances in Atomic Gyroscopes: A View from Inertial Navigation Applications // Sensors. – 2012. - Vol. 5. - № 12. - P. 6331-6346.
- [17] Armenise M.N., Ciminelli C., De Leonardis F., Diana R., Passaro V., Peluso F., Gyroscope technologies for space applications // 4th Round Table on Micro/Nano Technologies for Space. - Noordwijk, Netherlands, 20–22 May 2003.
- [18] MEMS gyroscope patent investigation 2013 Report / Yole Developpement. – Dresden, Germany: Yole Developpement, 2013. – 18 p.

- [19] Armenise M.N., Ciminelli C., Dell'Olio F., Passaro V.M.N. *Advances in Gyroscope Technologies* - Berlin: Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg GmbH and Co. KG, 2014. – 117 p.
- [20] *Accelerometer and Gyroscope Market. Global Opportunity Analysis and Industry Forecast, 2021–2030* / Allied Market Research [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.alliedmarketresearch.com/accelerometer-and-gyroscope-market>.
- [21] Gibney E. Rosetta probe makes history by landing on comet // *Nature*, 2014. URL: <https://www.nature.com/articles/nature.2014.16340>
- [22] Петрова Н.А., Полушкин В.М. Виды погрешностей микромеханических датчиков и методы их анализа // *Инженерный Вестник Дона*. - 2019. - Т. 1.
- [23] Литвин М.А., Малюгина А.А., Миллер А.Б., Степанов А.Н., Чикрин Д.Е. Типы ошибок в инерциальных навигационных системах и методы их аппроксимации // *Информационные процессы*. – 2014. - Т. 14. - № 4. – С. 326-339.
- [24] Passaro V.M.N., Cuccovillo A., Vaiani L., De Carlo M. *Gyroscope Technology and Applications: A Review in the Industrial Perspective* // *Sensors*. – 2017. – Vol. 17. - № 10.
- [25] Bennett S. M. Angle random walk (ARW) noise reduction in fiber optic sensors using an optical amplifier // *United States No. 6836334*. 2004.
- [26] Aslam Q.H., Iqbal A., Bibi F., Bibi S. Error Estimation of Inertial Sensors using Allan Variance // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2008. - Vol. 41. - № 1. - P. 167-171.
- [27] Dell'Olio F., Tatoli T., Ciminelli C., Armenise M. N. Recent advances in miniaturized optical gyroscopes // *Journal of the European Optical Society-Rapid Publications*. – 2014. - Vol. 9.
- [28] *Ring Laser and fundamental Physics* / Di Virgilio A. – Pisa, Italy: INFN sez. Di Pisa, 2018. – 38 p.
- [29] Goodall C., Carmichael S., Scannell B. The Battle Between MEMS and FOGs for Precision Guidance // *Analog Devices, Inc.*, 2013. – URL: <https://www.analog.com/en/technical-articles/the-battle-between-mems-and-fogs-for-precision-guidance.html>
- [30] Xu Y., Li Q., Wang P., Zhang Y., et al. 0.015 Degree-Per-Hour Honeycomb Disk Resonator Gyroscope // *IEEE Sensors Journal*. – 2021. - Vol. 21. - № 6. – P. 7326-7338.
- [31] Zhang Y., Yu S., Sun J., Lu K., et al. Rate-Integrating Honeycomb Disk Resonator Gyroscope With 0.038°/h Bias Instability and °7000°/s Measurement Range // *IEEE Electron Device Letters*. – 2021. - Vol. 42. - № 4. – P. 581-584.
- [32] Zhao W., Yang H., Liu F., Su Y., Li C. High sensitivity rate-integrating hemispherical resonator gyroscope with dead area compensation for damping asymmetry // *Scientific Reports*. – 2021. - Vol. 11. - Article number: 2195 (2021).
- [33] Zhao W., Rong Y., Li C., Wang Y., Cai X., Yu X. High Precision Hemispherical Resonator Gyroscopes With Oven Control Systems // *IEEE Sensors Journal*. – 2021. - Vol. 21. - № 6. – P. 7388 - 7401.
- [34] Khial P.P., White A.D., Hajimiri A. Nanophotonic optical gyroscope with reciprocal sensitivity enhancement // *Nature Photonics*. – 2018. – Vol. 12. – P. 671-675.
- [35] World's littlest light-sensing gyroscope fits on a grain of rice // *Nature*, 2018. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.nature.com/articles/d41586-018-06992-z>
- [36] Liu L., Li H., Ma H., Jin Z. Evaluation and Suppression of the Effect of Laser Frequency Noise on Resonant Fiber Optic Gyroscope // *Journal of Lightwave Technology*. – 2022. – Vol. 40, № 8. - P. 2631 - 2638.

- [37] Cai Y., Yu C., Ren Y., Wang W., Yin Z., Xia C. High Precision Attitude-Rate Measurement of Magnetically Suspended Control and Sensing Gyroscope Using Variational Mode Decomposition and Wavelet Transform // *IEEE Sensors Journal*. – 2022. - Vol. 22, № 2. - P. 1188 - 1198.
- [38] Asadian M.H., Wang D., Shkel, A.M. Fused Quartz Dual-Shell Resonator Gyroscope // *Journal of Microelectromechanical Systems*. – 2022. - Vol. 31, № 4. - P. 533-545.
- [39] Wang H., Quan H., Zhou J., Zhang L., Xie J., Chang H. A Wafer-Level Vacuum Packaged MEMS Disk Resonator Gyroscope With 0.42°/h Bias Instability Within $\pm 300^\circ/\text{s}$ Full Scale // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2022. - Vol. 69, № 5. - P. 5304-5313.
- [40] Sharma A., Zaman F.M., Amini B.V., Ayazi F., A high-Q in-plane SOI tuning fork gyroscope // *Sensors 2004 IEEE*. - Vienna, Austria, 24-27 October 2004. – P. 467-470.
- [41] Karlsson R., Hendeby G. Speed Estimation From Vibrations Using a Deep Learning CNN Approach // *IEEE Sensors Letters*. 2021 - Vol. 5, № 3. - P. 2475-1472.
- [42] Shao X., Shi Y. Neural-Network-Based Constrained Output-Feedback Control for MEMS Gyroscopes Considering Scarce Transmission Bandwidth // *IEEE Transactions on Cybernetics*. – 2022. - Vol. 52, № 11. - P. 12351 - 12363.
- [43] Ulm M., MEMS Inertial Sensors – Evolution of Markets, Sensors and Technologies // *The 9th Annual IEEE Inertial Sensors & Systems*. - Avignon, France, May 8-11, 2022.
- [44] Рынок акселерометров и гироскопов MEMS — рост, тенденции, влияние COVID-19 и прогнозы (2023–2028 гг.) / Mordor Intelligence. URL: <https://www.mordorintelligence.com/ru/industry-reports/mems-market>
- [45] Gadola M., Buffoli A., Sansa M., Berthelot A., Robert P., Langfelder G. 1.3 mm² Nav-Grade NEMS-Based Gyroscope // *Journal of Microelectromechanical Systems*. – 2021. - Vol. 30, № 4. - P. 513-520.
- [46] Cho J., Singh S., Nagourney T., Woo J.-K., Darvishian A., et al. High-Q Navigation-Grade Fused-Silica Micro Birdbath Resonator Gyroscope // *2021 IEEE Sensors*. - Sydney, Australia, 31 October 2021 - 03 November 2021. - P. 1-4.
- [47] Luetzenburg G., Kroon A., Bjørk A.A. Evaluation of the Apple iPhone 12 Pro LiDAR for an Application in Geosciences // *Scientific Reports*. – 2021. – Vol. 11. - Article number: 22221 (2021).
- [48] Rana M., Mittal V. Wearable Sensors for Real-Time Kinematics Analysis in Sports: A Review // *IEEE Sensors Journal*. – 2021. - Vol. 21, № 2. - P. 1187-1207.
- [49] Webber M., Rojas R.F. Human Activity Recognition With Accelerometer and Gyroscope: A Data Fusion Approach // *IEEE Sensors Journal*. – 2021. - Vol. 21, № 15. - P. 16979-16989.
- [50] Gobat G., Zega V., Fedeli P., Guerinoni L., Touzé C., Frangi A. Reduced order modelling and experimental validation of a MEMS gyroscope test-structure exhibiting 1:2 internal resonance // *Scientific Reports*. - 2021. – Vol. 11. - Article number: 16390 (2021).
- [51] Zhao W., Cheng Y., Zhao S., Hu X., Rong Y., Duan J., Chen J. Navigation Grade MEMS IMU for A Satellite // *Micromachines*. – 2021. - Vol. 12, № 2.
- [52] Ismail N., Nurhakim A., Saputra H.M. The Calculation of Gyroscope Sensor Angles Using Several Integral Methods // *2018 12th International Conference on Telecommunication Systems, Services, and Applications (TSSA)*. - Yogyakarta, Indonesia, 04-05 October 2018.
- [53] Shen Q., Li H., Hao Y., Yuan W., Chang H. Bias Contribution Modeling for a Symmetrical Micromachined Coriolis Vibratory Gyroscope // *IEEE Sensors Journal*. – Vol. 16, № 3. - P. 723-733.

- [54] Shi Y., Xi X., Li B., Chen Y., Wu Y., et al. Micro Hemispherical Resonator Gyroscope With Teeth-Like Tines // *IEEE Sensors Journal*. – 2021. - Vol. 21, № 12. - P. 13098-13106.
- [55] Nguyen M.N., Ha N.S., Nguyen L.Q., Chu H.M., Vu H.N. Z-Axis Micromachined Tuning Fork Gyroscope with Low Air Damping // *Micromachines*. – 2017. - Vol. 8, № 2.
- [56] Скупов А. Вакуумное корпусирование на уровне пластины – геттеры // *Электроника НТБ*. – 2016. - Т. 5. – С. 54-59.
- [57] Вавилов С.И. Экспериментальные основания Теории относительности. - Москва: АН СССР, 1956. – 112 с.
- [58] Brown K. Reflections on Relativity, 2004. URL: <https://www.mathpages.com/rr/rrtoc.htm>
- [59] Qu H., Fang D., Sadat A., Yuan P., Xie H. High-resolution Integrated Micro-gyroscope for Space Applications // *41st Space Congress*. - Cape Canaveral, Florida, USA, April 27-30, 2004. – P. 244-252.
- [60] Anderson R., Bilger H.R., Stedman G.E. “Sagnac” effect: A century of Earth-rotated interferometers // *American Journal of Physics*. 1994. - Vol. 62. - P. 975-985.
- [61] Gebauer A., Tercjak M., Schreiber K.U., Igel H., Kodet J., Hugentobler U., Wassermann J., Bernauer F., Lin C.J., Donner S., Egdorf S., Simonelli A., Wells J.P.R. Reconstruction of the Instantaneous Earth Rotation Vector with Sub-Arcsecond Resolution Using a Large Scale Ring Laser Array // *Physical Review Letters*. – 2020. - Vol. 125, № 3.
- [62] Wang Y.F., Brown S.M., Shao L., Zhao W. Tests of gravitational-wave birefringence with the open gravitational-wave catalog // *Physical Review D*. – 2022. – Vol. 106, № 9. – Article No. 084005
- [63] Spavieri G., Haug E.G. Testing light speed invariance by measuring the one-way light speed on Earth // *Physics Open*. 2022. - Vol. 12. – Article No. 100113.
- [64] Nagel M., Parker S., Kovalchuk E., et al. Direct terrestrial test of Lorentz symmetry in electrodynamics to 10^{-18} // *Nature Communications*. – 2015. - Vol. 6. - Article number: 8174 (2015).
- [65] Schreiber K.U., Wells J.P.R. Invited Review Article: Large ring lasers for rotation sensing // *Review of Scientific Instruments*. – 2013. - Vol. 84.
- [66] Lee B. Review of the present status of optical fiber sensors // *Optical Fiber Technology*. – 2003. - Vol. 9, № 2. - P. 57-79.
- [67] Pavlath G.A. Fiber optic gyros past, present, and future // *22nd International Conference on Optical Fiber Sensors OFS2012*. - Beijing, China, 14-19 October 2012.
- [68] Wang Z., Wang G., Kumar S., Marques C., Min R., Li X. Recent Advancements in Resonant Fiber Optic Gyro—A Review // *IEEE Sensors Journal*. – 2022. - Vol. 22, № 19. - P. 18240-18252.
- [69] Open-loop FOG: Assembl [Электронный ресурс]. - Fizoptika Malta, 2022. – URL: <https://fizoptika.com/open-loop-fog-intro/>
- [70] Yahalom R., Moslehi B., Oblea L., Sotoudeh V., Ha J.C. Low-cost, compact Fiber-Optic Gyroscope for super-stable Line-of-Sight stabilization // *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*. - Indian Wells, CA, USA, May 3, 2010 - May 6, 2010. – P. 180-186.
- [71] Wang Z., Wang G., Miao W., Gao W., Cheng Y. Closed-Loop Method Based on Faraday Effect in Resonant Fiber Optic Gyro Employing a low Coherence-Noise Resonator // *Journal of Lightwave Technology*. – 2021. - Vol. 39, № 21. - P. 6994 - 7000.

- [72] Liu L., Qian W., Liu S. Development of the Resonant Fiber Optic Gyroscope Prototype // 19th International Conference on Optical Communications and Networks (ICOON). - Qufu, China, 23-27 August 2021.
- [73] Smiciklas M., Sanders G., Strandjord L., Williams W., Benser E., Ayotte S., Costin F. Development of a Silicon Photonics-based Light Source for Compact Resonator Fiber Optic Gyroscopes // 2019 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS). - Braunschweig, Germany, 10-11 September 2019.
- [74] Zhao S., Liu Q., Liu Y., Ma H., He Z. Navigation-grade resonant fiber-optic gyroscope using ultra-simple white-light multibeam interferometry // Photonics Research. - Vol. 10, № 2. - P. 542-549.
- [75] Sanders G.A., Strandjord L.K., Williams W., Benser E., Ayotte S., Costin F. Improvements to Signal Processing and Component Minaturization of Compact Resonator Fiber Optic Gyroscopes // 2018 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS). - Braunschweig, Germany, 11-12 September 2018.
- [76] E. de Toldi, J. Bek, J.-J. Bonnefois, A. Bonnet, M. Collignon, A. Dupuis, et. al. ASTRIX NS: A Small, Accurate, Versatile and Cost-Efficient Fiber Optic Gyroscope // The 4S Symposium 2022. - Vilamoura, Portugal, 16-20 May 2022.
- [77] Suo X., Yu H., Li J., Wu X. Transmissive resonant fiberoptic gyroscope employing Kagome hollow-core photonic crystal fiber resonator // Optics Letters. 2020. - Vol. 45, № 8. - P. 2227-2230.
- [78] Forbes L., Geusic J.E. Hollow core photonic bandgap optical fiber // United States Patent No. 74986A1. 2003.
- [79] Kim H.K., Digonnet M.J.F., Kino G.S. Air-Core Photonic-Bandgap Fiber-Optic Gyroscope // Journal of Lightwave Technology. – 2006. - Vol. 24, № 8. – P. 3169-3174.
- [80] Zakirov R., Umarov A. Fiber optic gyroscope and accelerometer application in aircraft inertial system // 2020 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). - Tashkent, Uzbekistan, 04-06 November 2020.
- [81] Liu Y., Wang C., Luo G., Ji W. Design and applications of drilling trajectory measurement instrumentation in an ultra-deep borehole based on a fiber-optic gyro // Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems. – 2020. – Vol. 9, № 1. - P. 79-104.
- [82] Ученые Пермского Политеха разработали «навигатор» для бурения нефтяных скважин [Электронный ресурс]. - Пермский Политех, 2020. - URL: <https://pstu.ru/news/2020/10/05/10870/>
- [83] Kurzych A.T., Jaroszewicz L.R., Kowalski J.K. Development of Three-Axis Fibre-Optic Seismograph for Direct and Autonomous Monitoring of Rotational Events with Perspective of Historical Review // Sensors. – 2022. - Vol. 22, № 22.
- [84] Guattari F., de Toldi E., Garcia R.F., Mimoun D. Fiber optic gyroscope For 6-component planetary seismology // Proceedings Volume 11180, International Conference on Space Optics — ICSO 2018. - Chania, Greece, 9 - 12 October 2018.
- [85] Lefèvre H.C. Potpourri of comments about the fiber optic gyro for its 40th anniversary, and how fascinating it was and it still is! // SPIE Commercial + Scientific Sensing and Imaging. - Baltimore, Maryland, United States, 17–21 April 2016.
- [86] Лукьянов Д.П., Филатов Ю.В., Голяев Ю.Д., Курятов В.Н., Соловьева Т.И., Васильев В.П., Бузанов В.И., Спекторенко В.П., Клочко А.И., Виноградов В.И., Шрайбер К.-У., Перлмуттер М. 50 лет лазерному гироскопу // Фотоника. – 2014. - Т. 1, № 43. – С. 42-61.

- [87] Ермак Е.М., Синельников А.О., Тихменев Н.В. Влияние температуры окружающей среды на захват частот встречных волн в лазерном гироскопе [Электронный ресурс]. – URL: http://nuclphys.sinp.msu.ru/school/s10/10_25.pdf
- [88] Schreiber U., Schneider M., Rowe C.H., Stedman G.E., Cooper S.J., Schlüter W., Seeger H. The C-II ring laser project // *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*. – 2000. - Vol. 25, № 12. - P. 805-807.
- [89] Velikoseltsev A. The development of a sensor model for Large Ring Lasers and their application in seismic studies [электронный ресурс] // Technische Universität München, München, 2005. – URL: <https://d-nb.info/977828816/34>
- [90] Igel H., Schreiber K.U., Gebauer A., Bernauer F., Egdorf S., Simonelli A., Lin C.J., Wassermann J., Donner S., Hadziioannou C., Yuan S., Brotzer A., Kodet J., Tanimoto T., Hugentobler U., Wells J.P.R. ROMY: a multicomponent ring laser for geodesy and geophysics // *Geophysical Journal International*. – 2021. - Vol. 225, № 1. - P. 684-698.
- [91] Stedman G.E., Hurst R.B., Schreiber K.U. On the potential of large ring lasers // *Optics Communications*. – 2007. - Vol. 279, № 1. - P. 124-129.
- [92] Berkowitz R. Real-Time Measurements of Earth’s Spin and Tilt // *Physics*. – 2020. - Vol. 13, № 115. - <https://physics.aps.org/articles/v13/115>
- [93] Belfi J., Beverini N., Bosi F., Carelli G., Cuccato D., De Luca G., Di Virgilio A., Gebauer A., Maccioni E., Ortolan A., Porzio A., Saccorotti G., Simonelli A. Deep underground rotation measurements: GINGERino ring laser gyroscope in Gran Sasso // *Review of Scientific Instruments*. – 2017. – Vol. 88.
- [94] Beverini N., Di Virgilio A., Belfi J., Ortolan A., Schreiber K.U., Gebauer A., Klügel T. High-Accuracy Ring Laser Gyroscopes: Earth Rotation Rate and Relativistic Effects // 8th Symposium on Frequency Standards and Metrology. - Potsdam, Germany, 12-16 October.
- [95] Eisele Ch., Nevsky A.Yu., Schiller S. Laboratory Test of the Isotropy of Light Propagation at the 10^{-17} level // *Physical Review Letters*. – 2009. - Vol. 103, № 9.
- [96] Herrmann S., Senger A., Möhle K., Nagel M., Kovalchuk E.V., Peters A. Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level // *Physical Review D*. – 2009. - Vol. 80, № 10.
- [97] Сахаров В.К. Модель захвата частот в кольцевом лазере и полупроводниковый лазерный гироскоп // *Журнал технической физики*. – 2011. - Т. 81, № 8. - С. 76-82.
- [98] Ciminelli C., Campanella C.E., Dell’Olio F., Campanella C.M., Armenise M.N. Theoretical investigation on the scale factor of a triple ring cavity to be used in frequency sensitive resonant gyroscopes // *Journal of the European Optical Society: Rapid Publications*. – 2013. - Vol. 8.
- [99] Sorel M., Laybourn P.J.R., Scirè A., Balle S., Guiliani G., Miglierina R. Alternate oscillations in semiconductor ring lasers // *Optic Letters*. – 2002. - Vol. 27. - P. 1992–1994.
- [100] Cao H., Ling H., Liu C., Deng H., Benavidez M., Smagley V.A., Caldwell R.B., et al. Large S-section-ring-cavity diode lasers: directional switching, electrical diagnostics, and mode beating spectra // *IEEE Photonics Technology Letters*. – 2005. - Vol. 17. - P. 282-287.
- [101] Major F.G. *The Quantum Beat: Principles and Applications of Atomic Clocks*. - Berlin, Germany: Springer Verlag, 2007. – 475 p.
- [102] Stevenson R., Hush M., Bishop T., Lesanovsky I., Fernholz T. Sagnac Interferometry with a Single Atomic Clock // *Physical Review Letters*. – 2015. – Vol. 115, № 16.
- [103] Donley E.A. Nuclear magnetic resonance gyroscopes // *SENSORS, 2010 IEEE*. - Waikoloa, HI, USA, 01-04 November 2010. – P. 17-22.

- [104] Kanegsberg E., Nuclear Magnetic Resonance Gyroscope // Unated States Patents No. 7282910 B1, 2007.
- [105] Limes M.E., Sheng D., Romalis M.V. ^3He - ^{129}Xe Comagnetometry using ^{87}Rb Detection and Decoupling // Physical Review Letters. – 2018. - Vol. 120, № 3.
- [106] Lust L.M., Youngner D.W. Chip scale atomic gyroscope // United States Patent No. US7359059 B2, 2008.
- [107] Воронов А.С., Ривкин Б.С. Гирскоп на волнах де Бройля. Просто о сложном // Гирскопия и навигация. – 2021. - Т. 29, № 2. - С. 126-139.
- [108] Kasevich M., Chu S. Atomic interferometry using stimulated Raman transitions // Physical Review Letters. – 1991. - Vol. 67. – P. 181-184.
- [109] Cadoret M. Precision inertial measurements using cold-atom interferometry // International Symposium on Inertial Sensors and Systems (SISS). - Avignon, France, May 8-11, 2022. – URL: <https://2022.ieee-inertial.org/tutorials/>
- [110] J. Bernard, M. Cadoret, Y. Bidel, C. Salducci, N. Zahzam, S. Schwartz, et al. Progress towards the development of a cold-atom inertial measurement unit for onboard applications // 2022 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). - Avignon, France, 8-11 May 2022.
- [111] Liu J., Xu W.J., Zhang C., Luo Q., Hu Z.K., Zhou M.K. Sensitive quantum tiltmeter with nanoradian resolution // Physical Review A. – 2022. - Vol. 105. – Article No. 013316 (2022).
- [112] Savoie D., Altorio M., Fang B., Sidorenkov L.A., Geiger R., Landragin A. Interleaved atom interferometry for high-sensitivity inertial measurements // Science Advances. – 2018. - Vol. 4, № 12. – Article No. aau7948.
- [113] Durfee D.S., Shaham Y.K., Kasevich M.A. Long-Term Stability of an Area-Reversible Atom-Interferometer Sagnac Gyroscope // Physical Review Letters. – 2006. - Vol. 97. – Article No. 240801 (2006).
- [114] McGuirk J.M., Foster G.T., Fixler J.B., Snadden M.J., Kasevich M.A. Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry // Physical Review A. – 2002. - Vol. 65. – Article No. 033608.
- [115] Rice H.F., Benischek V. Submarine Navigation Applications of Atom Interferometry // Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION. - Monterey, CA, USA, 5 - 8 May 2008. – P. 933-939.
- [116] Aasi J., Abadie J., Abbott B.P., Abbott R., Abbott T.D., Abernathy M.R. et. al. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light // Nature Photonics. – 2013. – Vol. 7. - P. 613-619.
- [117] Sagnac G. Regarding the Proof for the Existence of a Luminiferous Ether Using a Rotating Inteferometer Experiment (1913) // The Abraham Zelmanov Journal. – 2008. - Vol. 1. - P. 77-80.
- [118] Maraner P., Zendri J.P. General relativistic Sagnac formula revised // General Relativity and Gravitation. – 2012. - Vol. 44. - P. 1713-1723.
- [119] Frauendiener J. Notes on the Sagnac effect in General Relativity // General Relativity and Gravitation. – 2018. - Vol. 50, № 147. - Article No. 147 (2018).
- [120] Tartaglia A. General relativistic corrections to the Sagnac effect // Physical Review D. – 1998. - Vol. 58. – Article No. 064009.

- [121] Abbott B.P., Abbott R., Abbott T.D., Abernathy M.R., et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Physical Review Letters*. – 2016. - Vol. 6, № 116. – Article No. 061102.
- [122] Ruggiero M.L. Sagnac Effect, Ring Lasers and Terrestrial Tests of Gravity // *Galaxies*. – 2015. - Vol. 3. - P. 84-102.
- [123] Penrose R. Gravitational Collapse: the Role of General Relativity // *Rivista del Nuovo Cimento*. Numero Speciale I. – 1969. – Vol. 1. - P. 257–276.
- [124] Zel'Dovich Ya.B. Generation of Waves by a Rotating Body // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. – 1971. - Vol. 14. - P. 180–181.
- [125] Zel'dovich Ya.B. Amplification of Cylindrical Electromagnetic Waves Reflected from a Rotating Body // *Soviet Physics JETP*. – 1972. - Vol. 35, № 6. - P. 1085-1087.
- [126] Cromb M., Gibson G.M., Toninelli E., Padgett M.J., Wright E.M., Faccio D. Amplification of waves from a rotating body // *Nature Physics*. – 2020. - Vol. 16. - P. 1069-1073.
- [127] Barrett T.W. Electromagnetic phenomena not explained by Maxwell's equations // *Essays on the Formal Aspects of Electromagnetic Theory*, World Scientific Publishing Company. – 1993. - P. 6-86.
- [128] Speake C.C., Ortolan A. Measuring Electromagnetic Fields in Rotating Frames of Reference // *Universe*. – 2020. - Vol. 6, № 2.
- [129] Bunney C.R.D., Gradoni G. Electromagnetism in Curved Space–Time: Coupling Doppler shifts and gravitational redshifts // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. – 2022. - Vol. 64, № 3. - P. 40-51.
- [130] Ruggiero M.L., Tartaglia A. A note on the Sagnac effect and current terrestrial experiments // *The European Physical Journal Plus* volume. – 2014. - Vol. 129. - Article No. 126 (2014).
- [131] Sun K.X., Fejer M.M., Gustafson E., Byer R.L. Sagnac Interferometer for Gravitational-Wave Detection // *Physical Review Letters*. – 1996. - Vol. 76, № 17. - P. 3053-3056.
- [132] Yildiz A., Tang C.H. Electromagnetic cavity resonances in accelerated systems // *Physical Review*. – 1966. – Vol. 146, № 4. - P. 947-954.
- [133] Benedetto E., Feleppa F., Licata I., Moradpour H., Corda C. On the general relativistic framework of the Sagnac effect // *The European Physical Journal C*. - 2019. – Article No. 187.
- [134] Gogberashvili M. Coriolis force and Sagnac effect // *Foundations of Physics Letters*. – 2022. - Vol. 15. - P. 487-493.
- [135] Malykin G.B. The Sagnac effect: correct and incorrect explanations // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk and Russian Academy of Sciences*. - 2000. - Vol. 43, № 12. – P. 1229 - 1252.
- [136] Heer C.V. Resonant frequencies of an electromagnetic cavity in an accelerated system of reference // *Physical Review*. – 1964. - Vol. 134. - №4A. – Article No. A799.
- [137] Shiozawa T. Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of Rotating Systems // *Proceedings of the IEEE*. – 1973. - Vol. 61, № 12. - P. 1694-1702.
- [138] Yildiz A. Electromagnetic cavity resonances in accelerated systems — II // *Il Nuovo Cimento B (1965-1970) volume*. – 1969. - Vol. 61. - P. 1-11.
- [139] Post E.J., Yildiz A. Cavity Resonances in Accelerated Systems // *Physical Review Letters*. – 1965. - Vol. 15, № 5. - P. 177-178.
- [140] Anderson J.L., Ryon J.W. Electromagnetic radiation in Accelerated Systems // *Physical Review*. – 1969. - Vol. 181, № 5. - P. 1765-1775.

- [141] Петров Б.М. Прикладная электродинамика вращающихся тел. - Москва: Горячая линия - Телеком, 2009. – 288 с.
- [142] Петров Б.М. Электромагнитные поля во вращающихся интерферометрах и гироскопах. - Москва: Горячая линия - Телеком, 2015. – 208 с.
- [143] Schouten J.A. Tensor analysis for physicists. - New York: Dover Publications, Inc., 1989. – 320p.
- [144] Петров Б.М. Резонансный способ измерения частоты вращения объекта и устройство, реализующее этот способ // Патент России № 2562149 С2. 2015. Бюл. № 29.
- [145] Петров Б.М. Одноволновый способ измерения частоты вращения интерферометра // Патент России № 2554316. 2015. Бюл. № 18.
- [146] Петров Б.М. Радиолокационный способ измерения скорости вращения // Патент России № 278263. 1974. Бюл. № 45.
- [147] Обидовский В.Г., Савельев В.В., Петров Б.М. Радиолокационный измеритель частоты вращения// Рассеяние электромагнитных волн. Межвуз. тематич. сб. Таганрог, Таганрогский радиотехническ. ин-т им. В.Д. Калмыкова. - 1978. - Вып. 2. - С.77-81.
- [148] Atwater H.A., Shiozawa T. The electromagnetic field in rotating coordinate frames // Proceedings of the IEEE. – 1975. - Vol. 63, № 2. - P. 316-318.
- [149] Sunada S., Narayama T. Sagnac effect in resonant microcavities // Physical Review A. – 2006. - Vol. 74, № 2. – Article No. 021801(R) (2006).
- [150] Narayama T., Sunada S., Miyasaka T. Wave chaos in rotating optical cavities // Physical Review E. – 2007. - Vol. 76, № 1. – Article No. 016212.
- [151] Акпаров В.В. Полупроводниковый кольцевой лазер и его применение в качестве датчика вращения (кандидат физико-математических наук). - Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, 2011.
- [152] The Encyclopedia of Physics // Besançon R.M. (Editor). - New York, NY: Springer, 1990. – 1378.
- [153] Тонелла М.А. Основы электромагнетизма и теории относительности. - Москва: Издательство иностранной литературы, 1959. – 485 с.
- [154] Blanford A. Classical Field Theory beyond the Standard Model // IHEP. Fundamental problems of high energy physics and field theory. – Protvino, Russia, June 23-25, 1999. - P. 165-177. – URL: <http://web.ihep.su/library/pubs/tconf99/blanford.htm>
- [155] Jiménez J., Monsivais G. Explicitly covariant form of the integral Maxwell equations // Revista Mexicana de Física E. – 2021. - Vol. 18, № 1. - P. 76-89.
- [156] Volkov A.M., Kiselev V.A. Proper frequencies of a rotating ring resonator // Soviet Physics JETP. – 1970. - Vol. 30, № 4. - P. 733-736.
- [157] Bladel J.V. Electromagnetic fields in the presence of rotating bodies // Proceedings of the IEEE. – 1976. - Vol. 64, № 3. - P. 301-318.
- [158] De Zutter D. Scattering by a rotating dielectric sphere // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1980. - Vol. 28, № 5. - P. 643-651.
- [159] Cartan E. On manifolds with affine connection, and the theory of general relativity // Scientific Annals of the Ecole Normale Supérieure. – 1924. – Vol. 41, № 3.
- [160] Weyl H. Space, Time, Matter. Translated from the fourth German edition by H.L. Brose. [Электронный ресурс] // Project Gutenberg – URL: <https://www.gutenberg.org/files/43006/43006-pdf.pdf>.

- [161] Van Dantzig D. The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. – 1934. - Vol. 30. – №4. – P. 421-427.
- [162] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория Поля. - 7-е изд., испр. - Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 512 с.
- [163] Steinberg V.Z., Kazma I. Metamaterials, Gyroscopes, and two century-old problems in number theory // 2020 Fourteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials). - New York, NY, USA, 27 September 2020 - 03 October 2020. – P. X-382 – X-384.
- [164] Марпл-младший С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - Москва: Мир, 1990. – 265 с.
- [165] Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. - СПб: "Питер", 2003. – 604 с.
- [166] Titova D.E. Excited Electromagnetic Field in Rotating Cylindrical Waveguide // 2023 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). - Divnomorskoe, Russia, 26-30 June 2023. – P. 44-47.
- [167] Титова Д.Е. Краевая задача возбуждения вращающегося цилиндрического волновода с импедансными стенками // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2023. - Т. 3. - С. 240-251.
- [168] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. - Москва: Радио и связь, 1988. – 440 с.
- [169] Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов. - Москва: Горячая линия–Телеком, 2007. – 558 с.
- [170] Morse P.H., Feshbach H. *Methods of theoretical physics*. Part 1, 2. - New York: McGraw-Hill, 1953. – 1978 p.
- [171] Паули В. Теория относительности. - Москва: "Наука", 1991. – 328 с.
- [172] Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. - Москва: Высшая школа, 1961. - 372с.
- [173] Barnett S.J. Magnetization by Rotation // *Physical Review Journals Archive*. – 1915. - Vol. 6. - P. 239-270.
- [174] Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. - Москва: Наука, 1969. – 329 с.
- [175] R&S®FSW Signal and Spectrum Analyzer [Электронный ресурс] // Rohde & Schwarz, Munich, Germany, 2022. – URL: https://scdn.rohde-schwarz.com/ur/pws/dl_downloads/pdm/cl_brochures_and_datasheets/specifications/5215_6749_22/FSW_specs_en_5215-6749-22_v1200.pdf
- [176] Stanwix P.L., Tobar M.E., Wolf P., Susli M., Locke C.R., Ivanov E.N., Winterflood J., van Kann F. Test of Lorentz Invariance in Electrodynamics Using Rotating Cryogenic Sapphire Microwave Oscillators // *Physical Review Letters*. – 2005. - Vol. 95, № 4. – Article No. 040404.
- [177] Titova D.E. Spectrum of a Rotating Cylindrical Cavity Resonator // 2023 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). - Divnomorskoe, Russia, 26-30 June 2023. – P. 48-51.
- [178] Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. Главное издательство физико-математической литературы, 1977. – 735 с.
- [179] Sunada S., Narayama T., Miyasaka T. Generalized Sagnac Effect in Rotating Optical Cavities // 2007 9th International Conference on Transparent Optical Networks. - Rome, Italy, 01-05 July 2007. – P. 158-161.

- [180] Titova D.E. Excitation of Electromagnetic Field inside Rotating Spherical Cavity // *IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques*. – 2023. – Vol. 9. – P. 1-9.
- [181] Petrov B.M., Titova D.E. Electromagnetic Waves in Rotating Spherical Cavities. E-field // 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). - Divnomorskoe, Russia, 24-28 June 2019. - P. 12-15.
- [182] Petrov B.M., Titova D.E. Electromagnetic Waves in Rotating Spherical Cavities. H-field // 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). - Divnomorskoe, Russia, 24-28 June 2019. - P. 16-19.
- [183] Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. Перевод Рабиновича М.С. и Харитоновой В.М. под редакцией Рытова С.М. - Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 539 с.
- [184] Petrov B.M., Titova D.E. Influence of the dielectric loss in a dielectric filled rotating spherical resonator on the precision of the rotation rate measurement // *MMET2016, IEEE 16th International Conference “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory”*. - Lviv, Ukraine, July 5-7, 2016. – P. 318-321.
- [185] Петров Б.М., Титова Д.Е. Влияние тепловых потерь в диэлектрике на частотную характеристику сферического резонатора и на возможность измерения частоты вращения // *Известия ЮФУ. Технические науки*. - Т. 5 (178). – С. 113-125.
- [186] Petrov B.M., Titova D.E. Impedance Boundary Problem for Rotating Spherical Cavity // *Proceedings of the 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, EIConRus 2018*. - Moscow and St. Petersburg, Russia, 29 January 2018 - 01 February 2018. – P. 480-484.
- [187] Petrov B.M., Titova D.E. Dependence of the Q-factor of a rotating cavity on the heat losses in the metal // 2016 2nd International Conference on Humanity and Social Science (ICHSS2016). - Phuket, Thailand, August 28-29, 2016. – P. 210-214.
- [188] Petrov B.M., Titova D.E. Q-factor of a rotating spherical resonator filled with dielectric // 2017 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). - Divnomorskoe, Russia, 26-30 June 2017. – P. 96-99.
- [189] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы. Графики. Таблицы. - Москва: Наука, 1968. – 343 с.
- [190] Petrov B.M., Titova D.E. Excitation of a Rotating Metal Wall Dielectric Resonator and its Rotation Rate Measurement // *CAOL2016 «7th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers»*. - Odessa, Ukraine, September 12-15, 2016. – P. 12-15.
- [191] Пасынков В.В., Сорокин В.С. Материалы электронной техники. Учеб. для студ. вузов по спец. электронной техники. 3-е изд. - Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2001. – 368 с.
- [192] Drozdov A.P., Kong P.P., Minkov V.S., Besedin S.P., Kuzovnikov M.A., Mozaffari S., Balicas L., Balakirev F.F., Graf D.E., Prakapenka V.B., Greenberg E., Knyazev D.A., Tkacz M., Eremets M.I. Superconductivity at 250 K in lanthanum hydride under high pressures // *Nature*. – 2019. - Vol. 569. - P. 528-531.
- [193] Somayazulu M., Ahart M., Mishra A.K., Geballe Z.M., Baldini M., Meng Y., Struzhkin V.V., Hemley R.J. Evidence for Superconductivity above 260 K in Lanthanum Superhydride at Megabar Pressures // *Physical Review Letters*. – 2019. – Vol. 122, № 2. – Article No. 027001.
- [194] Rohrer N.J., Valco G.J., Bhasin K.B. Hybrid high temperature superconductor/GaAs 10 GHz microwave oscillator: temperature and bias effects // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. – 1993. - Vol. 41, № 11. - P. 1865-1871.

- [195] Hagen M., Hein M., Klein N., Michalke A., Müller G., Piel H., Röth R.W., Mueller F.M., Sheinberg H., Smith J.-L. Observation of RF superconductivity in $Y_1Ba_2Cu_3O_{9-\delta}$ AT 3 GHz // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 1987. - Vol. 68, № 1. – P. L1-L5.
- [196] Knizhnik A., Shter G.E., Grader G.S., Reisner G.M., Eckstein Y. Interrelation of preparation conditions, morphology, chemical reactivity and homogeneity of ceramic YBCO // *Physica C: Superconductivity*. – 2003. - Vol. 400, № 1-2. - P. 25-35.
- [197] Biswas R.N. Superconductor Materials-A Revolutionary Value Addition to Space Electronics // *Defence Science Journal*. – 2004. - Vol. 54, № 2. – P. 236-246.
- [198] Zhou X., Lee W.S., Imada M., Trivedi N., Phillips P., Kee H.-Y., Törmä P., Eremets M. High-temperature superconductivity // *Nature Reviews Physics* volume. – 2021. - Vol. 3. - P. 462-465.
- [199] Drozdov A.P., Eremets M.I., Troyan I.A., Ksenofontov V., Shylin S.I. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system // *Nature*. – 2015. - Vol. 525. - P. 73-76.
- [200] Kong P., Minkov V.S., Kuzovnikov M.A., Drozdov A.P., Besedin S.P., Mozaffari S., Balicas L., Balakirev F.F., Prakapenka V.B., Chariton S., Knyazev D.A., Greenberg E., Eremets M.I. Superconductivity up to 243 K in the yttrium-hydrogen system under high pressure // *Nature Communications*. – 2021. – Vol. 12. - Article No. 5075 (2021).
- [201] Shen Z.-Y., Wilker C., Pang P., Hoistein W.L., Kountz D.J. High Tc Superconductor-Sapphire Microwave Resonator with Extremely High Q-Values up to 90K // *IEEE Transactions of Microwave Theory and Techniques*. – 1992. - Vol. 40, № 12. - P. 2424-2431.
- [202] Zhang C., He X., Liu C., Li Z., Lu K., Zhang S., Feng S., Wang X., Peng Y., Long Y., Yu R., Wang L., Prakapenka V., Chariton S., Li Q., Liu H., Chen C., Jin C. Record high Tc element superconductivity achieved in titanium // *Nature Communications*. – 2022. - Vol. 13. - Article No. 5411 (2022)
- [203] Lim J., Hire A.C., Quan Y., Kim J.S., Xie S.R., Sinha S., Kumar R.S., Popov D., Park C., Hemley R.J., Vohra Y.K., Hamlin J.J., Hennig R.G., Hirschfeld P.J., Stewart G.R. Creating superconductivity in WB2 through pressure-induced metastable planar defects // *Nature Communications*. – 2022. - Vol. 13. - Article No. 7901 (2022).
- [204] Jung S.-G., Han Y., Kim J.H., Hidayati R., Rhyee J.-S., Lee J.M., Kang W.N., Choi W.S., Jeon H.-R., Suk J., Park T. High critical current density and high-tolerance superconductivity in high-entropy alloy thin films // *Nature Communications*. – 2022. - Vol. 13. - Article No. 3373 (2022).
- [205] Hung T.L., Huang C.H., Deng L.Z., Ou M.N., Chen Y.Y., Wu M.K., Huyan S.Y., Chu C.W., Chen P.J., Lee T.K. Pressure induced superconductivity in MnSe // *Nature Communications*. – 2021. - Vol. 12. - Article No. 5436 (2021).
- [206] Lee S., Kim J.H., Kwon Y.W. The First Room-Temperature Ambient-Pressure Superconductor [Электронный ресурс]. - 2023. - URL: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2307/2307.12008.pdf>.
- [207] Ильченко В.С. Собственные СВЧ диэлектрические потери в Al_2O_3 при 100-300 К // *Физика твердого тела*. – 1989. - Т. 31, № 7. - С. 135-138.
- [208] Мухортов В.М., Следков В.А., Мухортов В.М. Высокотемпературные сверхпроводники в современной аппаратуре связи. (Перспективы применения и состояния исследований) Часть I. - 2002. [Электронный ресурс]. URL: <http://microsystems.ru/files/publ/464.htm>.
- [209] Fletcher R., Cook J. Measurement of surface impedance versus temperature using a generalized sapphire resonator technique // *Review of Scientific Instruments*. – 1994. - Vol. 65, № 8. - P. 2658-2666.

- [210] Zhang Y., Wang Z. Measurement of dielectric loss tangent at cryogenic temperature using superconducting film resonator // *Journal of Theoretical and Applied Physics*. – 2016. - Vol. 10. – P. 27-32.
- [211] Forrest. A.M. Meissner and Ochsenfeld revisited // *European Journal of Physics*. – 1983. - Vol. 4, № 2. – P. 117-120.
- [212] Sorongane E.W. The Classical Description of the Meissner Effect: Theory and Applications // *Open Journal of Applied Sciences*. – 2023. - Vol. 13, № 3. – P. 275-287.
- [213] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. – Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – 3-е изд., испр. - Москва: "НАУКА". Главная редакция физико-математической литературы, 1992. – 664 с.
- [214] Petrov V.M., Titova D.E. Excitation of Electromagnetic Field in a Rotating Coaxial Spherical Resonator // II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2016. - Kharkiv, Ukraine, October 10-14, 2016. – P. 46-49.
- [215] Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. - Москва: Наука, 1989. – 229 с.
- [216] Petrov V.M., Titova D.E. Influence of the parameters of the dielectric on the Q-factor of a rotating coaxial resonator // 2017 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering. - Moscow and St. Petersburg, Russia, February 01-03, 2017. – 1278-1281.
- [217] Джексон Дж. Классическая Электродинамика. - Москва: Мир, 1965. - 702 с.
- [218] Comte R., Gendraud S., Verdeyme S., Guillon P., Boschet C., Theron B. A high Q factor microwave cavity // *IEEE MTT-S Digest*. – 1995. - P. 1535-1538.
- [219] Maggiore C.J., Clogston A.M., Spalek G., Sailor W.C., Mueller F.M. Low-loss microwave cavity using layered-dielectric materials // *Applied Physics Letters*. – 1994. - Vol. 11, № 64. - P. 1451–1453.
- [220] Le Floch J.-M., Tobar M.E., Mouneyrac D., Cros D., Krupka J. High-Q Cylindrical Alumina Resonator Based on Bragg Confined Mode of Azimuthal Mode Number Greater Than Zero // 2007 Joint IEEE International Frequency Control Symposium Joint with the 21st European Frequency and Time Forum. - Geneva, Switzerland, 29 May 2007 – 1 June 2007. – P. 678-680.
- [221] Моденов В.П., Гуцин Р.А., Ерохин А.И., Шапкина Н.Е. Математическое моделирование сферически-слоистого диэлектрического резонатора [Электронный ресурс] // *Журнал Радиоэлектроники*. – 2006. - Т. 2. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/apr06/2/text.html>
- [222] Petrov V.M., Titova D.E. Excitation of Electromagnetic Field inside Rotating Spherical Cavity with Dielectric Layer on the Wall // 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconus). - St. Petersburg and Moscow, Russia, 27-30 January 2020. – P. 1087-1092.
- [223] Опыт Майкельсона—Морли. Элементы. [Электронный ресурс]. URL: https://elementy.ru/trefil/21167/Опыт_МайкельсонаMorli. [Дата обращения: 2018].
- [224] Michelson A.A. The Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether // *American Journal of Science*. – 1881. - Vol. 22. - P. 120-129.
- [225] Michelson A.A., Morley E.W. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether // *American Journal of Science*. – 1887. - Vol. 34, № 203. - P. 333-345.
- [226] Shankland R.S. Michelson-Morley Experiment // *American Journal of Physics*. - Vol. 32, № 16. - P. 16-35.

- [227] Опыт Майкельсона — Морли. [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%8B%D1%82_%D0%9C%D0%B0%D0%B9%D0%BA%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%E2%80%94%D0%9C%D0%BE%D1%80%D0%BB%D0%B8#cite_note-shankland2-25.
- [228] Blum E.K., Lototsky S.V. Mathematics of Physics and Engineering. - World Scientific Publishing Company, 2006. – 496 p.
- [229] Петров В. Опыты Саньяка, Майкельсона – Гаэля, Миллера [Электронный ресурс] // Электронная библиотека. Наука и Техника. - 2002. - URL: <https://n-t.ru/tp/iz/os.htm>.
- [230] Hariharan P. Sagnac or Michelson-Sagnac interferometer? // Applied Optics. – 1975. - Vol. 14, № 10. - P. 2319_1-2321.
- [231] Moyer A.E. Michelson in 1887 // Physics Today. – 1987. - Vol. 40, № 5.
- [232] Macek W.M., Davis Jr. D.T.M. Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers // Applied Physics Letters. – 1963. - Vol. 2, № 3. - P. 67-68.
- [233] Anyi C.L., Thirkettle R.J., Zou D., Follman D., Cole G.D., Schreiber K.U., Wells J.P.R. The Macek and Davis experiment revisited: a large ring laser interferometer operating on the $2s2 \rightarrow 2p4$ transition of neon // Applied Optics. – 2019. - Vol. 58, № 2. - P. 302-307.
- [234] Danner A., Demirel B., Kersten W., et al. Spin-rotation coupling observed in neutron interferometry // npj Quantum Information volume. – 2020. - Vol. 6. – Article No. 23.
- [235] Bertocchi G., Alibart O., Ostrowsky D.B., Tanzilli S., Baldi P. Single-photon Sagnac interferometer // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2009. - Vol. 39. – P. 1011-1016.
- [236] Механик А. Улитка гироскопических инноваций [Электронный ресурс]. - Стимул: Наука и Технологии. - URL: <https://stimul.online/articles/science-and-technology/ulitka-giroskopicheskikh-innovatsiy/>.
- [237] Perkins R. Spinning the Light: The World's Smallest Optical Gyroscope [Электронный ресурс] // Caltech Logo, 2018. URL: <https://www.caltech.edu/about/news/spinning-light-worlds-smallest-optical-gyroscope-84183>.
- [238] Abe H., Akutsu T., Ando M., Araya A., Aritomi N., et al. The Current Status and Future Prospects of KAGRA, the Large-Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope Built in the Kamioka Underground // Galaxies. – 2022. - Vol. 10, № 63.
- [239] LIGO's Interferometer,» California Institute of Technology [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligos-ifo>.
- [240] Coyne D.C. The Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO) Project // Proceedings of the IEEE 1996 Aerospace Applications Conference. - Snowmass, CO, USA, 4-9 February 1996.
- [241] Danzmann K. LISA Laser Interferometer Space Antenna [Электронный ресурс]. // Leibniz Universität Hannover and Max Planck Institute for Gravitational Physics, Hannover, Germany, 2017. URL: https://www.elisascience.org/files/publications/LISA_L3_20170120.pdf
- [242] Ruan W.H., Liu C., Guo Z.K., et al. The LISA–Taiji network // Nature Astronomy. – 2020. – Vol. 4. - P. 108-109.
- [243] Bailes M., Berger B.K., Brady P.R. et al. Gravitational-wave physics and astronomy in the 2020s and 2030s // Nature Reviews Physics. – 2021. - Vol. 3. - P. 344-366.
- [244] Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) [Электронный ресурс]. // EPICS Controls, 2023. URL: <https://epics-controls.org/projects-archive/ligo/>.

- [245] Gill W.A., Howard I., Mazhar I., McKee K. A Review of MEMS Vibrating Gyroscopes and Their Reliability // *Sensors*. – 2022. - Vol. 22. – Article No. 7405.
- [246] Deppe O., Dorner G., König S., Martin T., Voigt S., Zimmermann S. MEMS and FOG Technologies for Tactical and Navigation Grade Inertial Sensors—Recent Improvements and Comparison // *Sensors*. – 2017. - Vol. 17, № 3.
- [247] Шахнович И. МЭМС-гироскопы - единство выбора // *Электроника: Наука, Технология, Бизнес*. - 2007. - №1. – С. 76-85.
- [248] Ren X., Zhou X., Yu S., Wu X., Xiao D. Frequency-Modulated MEMS Gyroscopes: A Review // *IEEE Sensors Journal*. – 2021. - Vol. 21, № 23. - P. 26426 - 26446.
- [249] Forke R., Hiller K., Hahn S., Konietzka S., Motl T., et al. Yet another tuning fork gyroscope // 2015 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (ISISS). - Hapuna Beach, HI, USA, 23-26 March 2015.
- [250] Lee F.Y., Liang K.C., Cheng E., Fang W. Design and implementation of a fully-decoupled tuning fork (FDTF) MEMS vibratory gyroscope for robustness improvement // 2015 Transducers - 2015 18th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS). - Anchorage, AK, USA, 21-25 June 2015. – P. 1160-1163.
- [251] Edean D., Christ K., Duffy P., Freeman E., Glenn M., et al. Near-Navigation Grade Tuning Fork MEMS Gyroscope // 2019 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). - Naples, FL, USA, 01-05 April 2019.
- [252] Putty M.W., Eddy D.S. Microstructure for vibratory gyroscope // United States Patent No. 5450751. 1995.
- [253] Как это устроено: Гироскопы [Электронный ресурс]. URL: https://fiz.1sept.ru/view_article.php?ID=200901520.
- [254] Ayazi F., Najafi K. A HAROSS polysilicon vibrating ring gyroscope // *Journal of Microelectromechanical Systems*. -2001. - Vol. 10, № 2. - P. 169-179.
- [255] Liang F., Liang D.D., Qian Y.J. Dynamical analysis of an improved MEMS ring gyroscope encircled by piezoelectric film // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2020. - Vol. 187, № 1. – Article No. 105915
- [256] Cao H., Liu Y., Kou Z., Zhang Y., Shao X., Gao J., Huang K., Shi Y., Tang J., Shen C., Liu J. Design, Fabrication and Experiment of Double U-Beam MEMS Vibration Ring Gyroscope // *Micromachines (Basel)*. – 2019. - Vol. 10, № 186.
- [257] Gill W.A., Ali D., An B.H., Syed W.U., Saeed N., Al-shaibah M., Elfadel I.M., Al Dahmani S., Choi D.S. MEMS multi-vibrating ring gyroscope for space applications // *Microsystem Technologies*. – 2020. - Vol. 26. - P. 2527-2533.
- [258] Matthews A., Rybak F.J. «Comparison of hemispherical resonator gyro and optical gyros // *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*. – 1992. - Vol. 7, № 5. - P. 40-46.
- [259] Anthony M. The operation and mechanization of the hemispherical resonator gyroscope // 2018 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS). - Monterey, CA, USA, 23-26 April 2018. – P. 7-14.
- [260] R.D. Horning, B.R. Johnson, R. Compton, E. Cabuz Hemitoroidal resonator gyroscope // United States Patent No. 8631702 B2. 2014.
- [261] Delhaye F. HRG by SAFRAN: The game-changing technology // 2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). - Lake Como, Italy, 26-29 March 2018.

- [262] Sun J., Yu S., Zhang Y., Li Q., Xi X., Lu K., Wu X., Xiao D. 0.79 ppm scale-factor nonlinearity whole-angle microshell gyroscope realized by real-time calibration of capacitive displacement detection // *Microsystems & Nanoengineering*. – 2021. – Vol. 7. - Article No. 79 (2021)
- [263] Challoner A.D., Ge H.H., Liu J.Y. Boeing Disc Resonator Gyroscope // 2014 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014. - Monterey, CA, USA, 05-08 May 2014. – P. 504-514.
- [264] Li Q., Xiao D., Zhou X., Hou Z., Zhuo M., Xu Y., Wu X. Dynamic Modeling of the Multiring Disk Resonator Gyroscope // *Micromachines*. – 2019. - Vol. 10, № 3. – Article No. 181.
- [265] Merlo S., Norgia M., Donati S. Fiber gyroscope principles // *Handbook of Fiber Optic Sensing Technology*. - University of Pavia, Italy, John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [266] Vali V., Shorthill R.W. Fiber ring interferometer // *Applied Optics*. – 1976. - Vol. 15, № 5. - P. 1099-1100.
- [267] Sireesha T., Murthy K.K. Comparative Assessment on Linearity Test based $V2\pi$ and $V\pi/2$ Voltage Variations of Closed Loop IFOG // *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*. – 2016. - Vol. 6, № 2. - P. 583-595.
- [268] Digonnet M.J. Fiber optic sensors with reduced noise // United States Patent No. 2004/0061863 A1. 1 April 2004.
- [269] Ravaille A., Feugnet G., Debord B., Gérôme F., Benabid F., Bretenaker F. Rotation measurements using a resonant fiber optic gyroscope based on Kagome fiber // *Applied Optics*. – 2019. – Vol. 58, № 9. - P. 2198-2204.
- [270] Gao S.F., Wang Y.Y., Ding W., Jiang D.L., Gu S., Zhang X., Wang P. Hollow-core conjoined-tube negative-curvature fiber with ultralow loss // *Nature Communications*. – 2018. - Vol. 9. - Article No. 2828 (2018).
- [271] Bouwmans G., Luan F., Knight J.C., Russell P.St.J., Farr L., Mangan B.J., Sabert H. Properties of a hollow-core photonic bandgap fiber at 850 nm wavelength // *Optics Express*. – 2003. - Vol. 11, № 14. - P. 1613-1620.
- [272] Yi L., Han S. Theoretical analysis on polarization characteristics of spun birefringent optical fiber based on an analytical Jones matrix model // *Optik*. - 2021. – Vol. 28. – Article No. 166179.
- [273] Wang Z., Wang G., Gao W., Cheng Y. Suppression of Kerreffect induced error in resonant fiber optic gyro by a resonator with spun fiber // *Optics Express*. – 2021. - Vol. 29, № 13. - P. 19631-19642.
- [274] Wang Z., Wang G., Wang Z., Gao W., Cheng Y. Incoherence suppression method of optical noises in a resonant fiber optic gyro based on the circularly polarized light propagation mechanism in a resonator // *Optics Letters*. – 2021. - Vol. 46, № 13. - P. 3191-3194.
- [275] Jiao H., Feng L., Wang K., Liu N., Yang Z. Analysis of polarization noise in transmissive single-beam-splitter resonator optic gyro based on hollow-core photonic-crystal fiber // *Optics Express* – 2017. - Vol. 25, № 22. - P. 27806-27817.
- [276] Jiao H., Feng L., Wang J., Wang K., Yang Z. Transmissive single-beam-splitter resonator optic gyro based on a hollow-core photonic-crystal fiber // *Optics Letters*. – 2017. - Vol. 42, № 15. - P. 3016-3019.
- [277] Sanders G.A., Taranta A.A., Narayanan C., Fokoua E.N., Mousavi S.A., Strandjord L.K., Smiciklas M., Bradley T.D., Hayes J., Jasion G.T., Qiu T., Williams W., Poletti F., Payne D.N. Hollow-core resonator fiber optic gyroscope using nodeless anti-resonant fiber // *Optics Letters*. – 2021. – Vol. 46, № 1. - P. 46-49.

- [278] Zhao S., Liu Q., Ma H., He Z. White-light-driven resonant fiber-optic gyro based on round trip filtering scheme // *Optics Letters*. – 2022. - Vol. 47, № 5. - P. 1137-1140.
- [279] Klein. T. Ring lasers – a brief history // *Europhysics News*. – 2017. - Vol. 48, № 4. - P. 25-27.
- [280] ZERODUR [Электронный ресурс] // The SCHOTT Company. URL: <https://www.schott.com/en-ca/products/zerodur>.
- [281] Graydon O. Giant laser gyroscope detects Earth's wobble // *Nature Photonics*. – 2012. - Vol. 6. – Article No. 12 (2012).
- [282] Hand E. Buried lasers will sense Earth's spin and quakes doing the twist [Электронный ресурс] // *Science*, 20 April 2017. URL: <https://www.science.org/content/article/buried-lasers-will-sense-earths-spin-and-quakes-doing-twist>.
- [283] Rowe C.H., Schreiber K.U., Cooper S.J., King B.T., Poulton M., Stedman G.E. Design and operation of a very large ring laser gyroscope // *Applied Optics*. – 1999. – Vol. 38, № 12. – P. 2516-2523.
- [284] Hurst R.B., Stedman G.E., Schreiber K.U., Thirkettle R.J., Graham R.D., Rabeendran N., Wells J.P.R. Experiments with an 834 m² ring laser interferometer // *Journal of Applied Physics*. – 2009. - Vol. 105. – Article No. 113115 (2009).
- [285] Heptonstall A., Adhikari R., Gustafson E., King P. Optical Gyroscopes for Ground Tilt Sensing in Advanced LIGO [Электронный ресурс] // The LIGO Laboratory, 2009. URL: <https://dcc.ligo.org/LIGO-G0900270-v1/public>
- [286] Hand E. Lord of the rings // *SCIENCE*. – 2017. - Vol. 356, № 6335. - P. 236-238.
- [287] Müller H., Herrmann S., Braxmaier C., Schiller S., Peters A. Modern Michelson-Morley experiment using cryogenic optical resonators // *Physical Review Letters*. – 2003. - Vol. 91, № 2. – Article No. 020401.
- [288] The IceCube Collaboration. Neutrino interferometry for high-precision tests of Lorentz symmetry with IceCube // *Nature Physics volume*. – 2018. - Vol. 14. - P. 961-966.
- [289] Zyga L. Most precise test of Lorentz symmetry for the photon finds that the speed of light is indeed constant [Электронный ресурс] // *Phys.org*. URL: <https://phys.org/news/2015-09-precise-lorentz-symmetry-photon-constant.html>.
- [290] Kenji O. Semiconductor ring laser gyro // Japanese Patent No. JP 60148185. 1985.
- [291] Бабичев А.В., Колодезный Е.С., Гладышев А.Г., Денисов Д.В., Вознюк Г.В. и др. Поверхностно-излучающий квантово-каскадный лазер с кольцевым резонатором // *Физика и техника полупроводников*. – 2021. - Т. 55, № 7. - С. 602-606.
- [292] Lai Y.H., Suh M.G., Lu Y.K., Shen B., Yang Q.F., Wang H., Li J., Lee S.H., Yang K.Y., Vahala K. Earth rotation measured by a chip-scale ring laser gyroscope // *Nature Photonics*. – 2020. - Vol. 14. - P. 345-349.
- [293] Wu B., Yu Y., Xiong J., Zhang X. Silicon Integrated Interferometric Optical Gyroscope // *Scientific Reports*. – 2018. – Vol. 8. - Article No. 8766 (2018).
- [294] Wu B., Yu Y., Zhang X. Mode-assisted Silicon Integrated Interferometric Optical Gyroscope // *Scientific Reports*. – 2019. - Vol. 9. - Article No. 12946 (2019).
- [295] Lee C. Awesome tiny gyroscope promising but not ready for prime time [Электронный ресурс] // *Ars Technica*, 2018. URL: <https://arstechnica.com/science/2018/11/tiny-laser-gyroscopes-awesome-though-still-need-work/>.

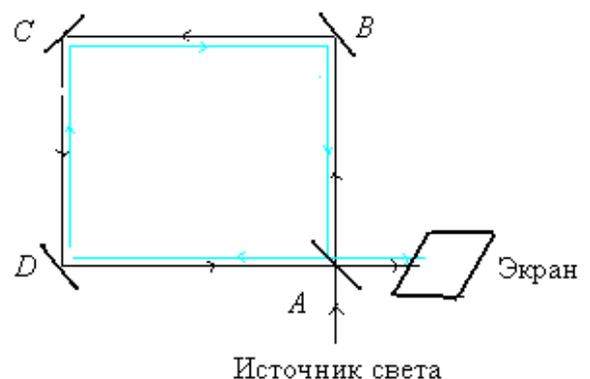
- [296] Hu P., Zhao L., Tang C., Liu S., Dang X., Hu Y. A New Method for Measuring the Rotational Angles of a Precision Spherical Joint Using Eddy Current Sensors // *Sensors*. – 2020. – Vol. 20, № 14. – Article No. 4020.
- [297] Yang L., Hu P., Ma K., Zhang J., Dang X., Liu S. A new method for measuring 3D rotation angle of spherical joint // *Measurement*. – 2022. - Vol. 190. – Article No. 110661.
- [298] Yu D., Humar M., Meserve K., Bailey R.C., Chormaic S.N., Vollmer F. Whispering-gallery-mode sensors for biological and physical sensing // *Nature Reviews Methods Primers*. – 2021. - Vol. 1. - Article No. 83 (2021).
- [299] Tian L., Shen Q., Chang H. A novel progressive wave gyroscope based on acousto-optic effects // *Microsystems & Nanoengineering*. – 2022. - Vol. 8. - Article No. 95 (2022).
- [300] Cronin A.D., Schmiedmayer J., Pritchard D.E. Optics and interferometry with atoms and molecules // *Reviews of Modern Physics*. – 2009. - Vol. 81. – Article No. 1051.
- [301] Schuldt T., Schubert C., Krutzik M., Bote L.G., Gaaloul N. Design of a dual species atom interferometer for space // *Experimental Astronomy*. – 2015. - Vol. 2, № 39. - P. 167-206.
- [302] Ciminelli C., Dell’Olio F., Campanella C.E., Armenise M.N. Photonic technologies for angular velocity sensing // *Advances in Optics and Photonics*. – 2010. - Vol. 2, № 3. - P. 370-404.
- [303] Gauguet A., Canuel B., Lévêque T., Chaibi W., Landragin A. Characterization and limits of a cold-atom Sagnac interferometer // *Physical Review A*. – 2009. - Vol. 6, № 80. – Article No. 063604.
- [304] Müller T., Gilowski M., Zaiser M., Wendrich T., Ertmer W., Rasel E.M. A compact dual atom interferometer gyroscope based on laser-cooled rubidium // *The European Physical Journal D*. – 2009. - Vol. 3, № 53. - P. 273-281.
- [305] Stockton J.K., Takase K., Kasevich M.A. Absolute Geodetic Rotation Measurement Using Atom Interferometry // *Physical Review Letters*. – 2011. - Vol. 13, № 107. – Article No. 133001 (2011).
- [306] Tackmann G., Berg P., Schubert C., Abend S., Gilowski M., Ertmer W., Rasel E.M. Self-alignment of a compact large-area atomic Sagnac interferometer // *New Journal of Physics*. – 2012. - Vol. 1, № 14. – Article No. 015002.
- [307] Canuel B., Leduc F., Holleville D., Gauguet A., Fils J., Viridis A., Clairon A., Dimarcq N., Bordé Ch.J., Landragin A., Bouyer P. Six-Axis Inertial Sensor Using Cold-Atom Interferometry // *Physical Review Letters*. – 2006. - Vol. 1, № 97. – Article No. 010402.
- [308] Abbink H.C., Kanegsberg E., Patterson R.A. NMR Gyroscope // *United States Patent No. 7239135 B2*. 2007.
- [309] Abbink H.C., Kanegsberg E., Marino K.D., Volk C.H. Micro-Cell for NMR Gyroscope // *United States Patent No. 7292031 B2*. 2007.
- [310] Abbink H.C., Debley W.P., Geosling C.E., Sakaida D.K., Stewart R.E. Middle Layer of Die Structure that Comprises a Cavity that Holds an Alkali Metal // *United States Patent No. 7292111 B2*. 2007.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРАМИ И ГИРОСКОПАМИ

На рубеже XIX и XX веков научный мир был озадачен теориями абсолютного пространства и поиском светоносного эфира, его заполняющего, который, предполагалось, и передавал взаимодействия в этом пространстве на большие расстояния [57]. Для экспериментального подтверждения вращения Земли в таком эфире американский физик Майкельсон совместно с коллегами спланировал и провел серию экспериментов по наблюдению «эфирного ветра». Все экспериментальные установки по сути являлись интерферометрами: луч света из источника расщеплялся надвое полупрозрачным зеркалом (делителем), а два получившихся когерентных луча расходились под прямым углом друг к другу по плечам интерферометра. Отражаясь от двух равноудаленных от делителя зеркал-отражателей, лучи соединялись снова на полупрозрачном зеркале (Рисунок А.1 а), образуя интерференционную картину, показывающую малейшую десинхронизацию этих двух лучей [223]. Причиной десинхронизации должна была стать разница во времени прохождения расстояния до отражающих зеркал лучами, распространяющимися параллельно и перпендикулярно направлению движения Земли в эфире, вызванная задержкой эфиром луча, распространяющегося параллельно (навстречу) потоку эфира (эфирному ветру). Однако ни при единичном прохождении лучами пути до зеркал (1881 год, [224], Рисунок А.1 а), ни при многократном их переотражении (для увеличения пути и, как следствие, наблюдаемой разности во времени, 1887 год, [225]) положительный результат эксперимента получен не был, о чем писал сам Майкельсон [226], [227].



а) Схема опыта Майкельсона [223]



б) Схема опыта Саньяка [228]

Рисунок А.1 – Схемы экспериментов по поискам эфирного ветра

Отрицательный («неудачный») результат опыта Майкельсона-Морли 1887 года обычно считается первым веским доказательством против преобладающей в то время теории эфира, что побудило ученых к поискам различных объяснений результатов опытов, объединяющих ньютоновскую относительность и закон сложения скоростей с одной стороны и постоянство скорости света – с другой. Эти размышления, например, привели нидерландского физика Лоренца к идее об изменении длины, скорости, массы и времени при близких к скорости света скоростях, выразившейся в известных преобразованиях между координатами и временем в движущихся относительно друг друга инерциальных системах отсчета (преобразования Лоренца). А приняв постоянство скорости света при любых вращениях Земли и интерферометра как данность, но не отказываясь при этом от принципа сложения скоростей, а используя преобразования Лоренца, 26-летний Альберт Эйнштейн в 1905 году явил миру теорию, объединившую эти противоречия – специальную теорию относительности [229].

Саньяк же, будучи сторонником теории эфира [10], продолжил поиски последнего. В 1913 году он провел эксперимент на установке кольцевого интерферометра, в котором лучи света распространялись в противоположных направлениях по замкнутому контуру, образованному системой зеркал (Рисунок А.1 б). Положительный результат этого эксперимента – наличие сдвига на интерференционной картине – можно было бы трактовать как доказательство существования неподвижного эфира, но Майкельсоном уже было показано обратное. К тому же в теории эфира универсальный эфир одинаково воздействовал бы на все части вращающегося в кольцевой установке света (Рисунок А.1 б), а, следовательно, никакого сдвига полос в подобной установке не наблюдалось бы. Но сдвиг был наблюдаем – и не только Саньяком. Немецкий математик Франц Харресс, занимаясь изучением дисперсионных свойств стекол с помощью интерферометра, провел в 1911 году эксперимент по измерению сопротивления света, распространяющегося через вращающееся стекло [11], обнаруживший некую неустранимую погрешность, которую сам ученый объяснял способностью стекла утягивать свет. Позже Макс фон Лауэ и Пол Харзер отнесли сдвиг, наблюдаемый в опыте Харресса, к эффекту Саньяка, а сам эксперимент назовут первым известным наблюдением эффекта Саньяка. Уже в 1920 году Лауэ даст первое описание наблюдаемого Харрессом эффекта в рамках специальной теории относительности [11] с точки зрения постоянства скорости света и разности времени распространения лучей в противоположных направлениях. В итоге, изменение интерференционной картины, полученное Харрессом практически одновременно с и независимо от Саньяка, имело одну и ту же природу и подчинялось той же самой формуле, ныне именуемой формулой Саньяка (1):

$$\delta\phi = \frac{8\pi\Omega S}{\lambda v}, \quad (\text{A.1})$$

где $\delta\phi$ - разность фаз, вызванная разностью хода лучей, Ω - частота вращения, S – площадь, охватываемая лучами, λ - длина волны света, v - скорость светового луча [15].

Интересна в происходящем сама последовательность событий: как заметил академик С.И. Вавилов [57], если бы эффект Саньяка с его положительным результатом был обнаружен раньше, чем были проведены давшие отрицательный результат эксперименты Майкельсона, то физика могла бы пойти не по пути теории относительности, а по пути физики эфира.

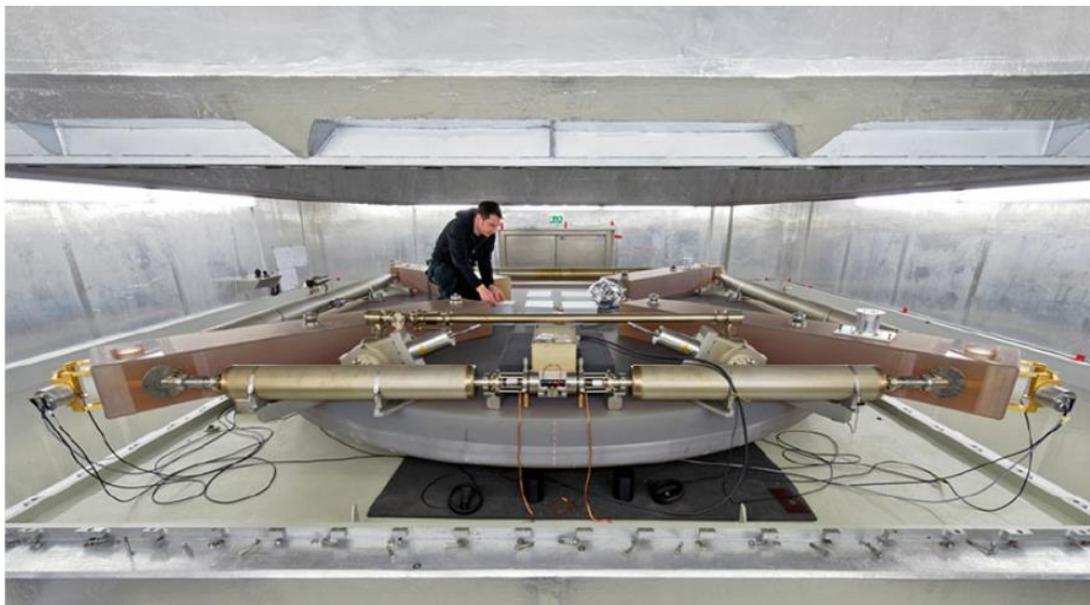
Стоит отметить, что эксперимент с вращающимся контуром и с распространяющимися в противоположных направлениях лучами был описан и Майкельсоном как один из возможных для определения эфирного ветра в его книге по подобным установкам еще в 1903. А в 1925 году физик провел подобный эксперимент совместно с Г. Гейлом и ожидаемо получил положительный результат (подробное описание этого и других подобных экспериментов можно найти у С.И. Вавилова в [57]). Саньяк же, впервые описав кольцевую установку в 1910 году, реализовал различные ее конструкции и описал полученные результаты в более чем пяти статьях только в 1911–1913 годах. Несмотря на практически параллельно приводимую работу над схожими установками, ни Майкельсон, ни Саньяк не ссылались в своих работах на работы друг друга, что связывают с различной интерпретацией результатов экспериментов [230]. Не стоит исключать, что работавшие на разных материках ученые могли не знать о работах друг друга, хотя Майкельсон и находился в постоянном неформальном общении с европейскими учеными в стремлении быть ближе к научным центрам и передовым достижениям [231]. Поэтому считается, что оба ученых внесли весомый вклад в развитие оптической интерферометрии, а результаты их экспериментов дали толчок дальнейшим открытиям и изобретениям [231].

Все новые попытки повторения опытов Майкельсона и Саньяка предпринимались с 60-х годов прошлого века: качественный скачок в интерферометрии для измерения вращения дало появление лазеров, позволившее перейти от измерения фазовых сдвигов, измеряемых косвенно, по величине сдвига интерференционных полос, к измерению сдвига оптических частот. Впервые устройство, работающее на этом принципе, было предложено Розенталем в 1962 году и воплощено в жизнь Мацеком и Девисом в 1963 году [232], [233] (Рисунок А.2 а). С тех пор все современные оптические интерферометры представляют собой установки, схожие с кольцевой установкой Саньяка (Рисунок А.1 б) или с L-образной установкой Майкельсона (Рисунок А.1 а). Изменялась лишь точность самого прибора путем улучшения характеристик входящих в установку зеркал, повышения стабильности вращающихся стендов и направляющих систем, по которым распространяются лучи, использования сверхпроводящих интерферометров и когерентных лучей [60], уменьшения размеров для широкого коммерческого использования и т. д. [65] (Рисунок А.2 б). Сам эффект Саньяка был обнаружен с помощью нейтронного

интерферометра [234], а квантовый эффект Саньяка может наблюдаться при перемещении по интерферометру всего лишь одного протона, и заключаться в различии длин путей, пройденных протонами, летящими по часовой стрелке и против часовой стрелки в кольцевом интерферометре [235]. Это привело к тому, что к настоящему времени работающие на эффекте Саньяка крупные исследовательские установки обладают чувствительностью, позволяющей наблюдать изменения в скорости вращения Земли и наклоне ее оси, а также некоторые релятивистские эффекты (Рисунок А.2 в).



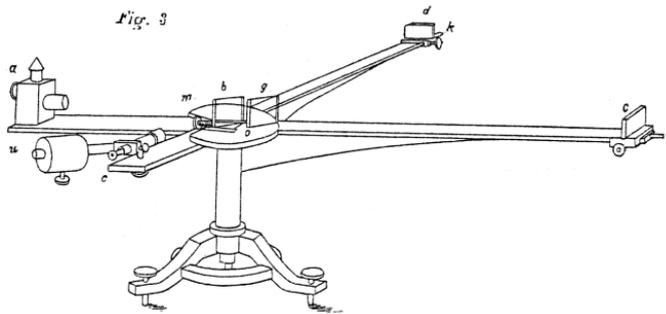
а) Действующий макет лазерного гироскопа В. Мацека и Д. Девиса [236] б) Прототип самого маленького оптического гироскопа площадью 2 мм^2 [237]



в) Кольцевой лазерный гироскоп G в геодезической обсерватории Ветцель с площадью 16 м^2 для наблюдения вращения Земли [5]

Рисунок А.2 – Кольцевые лазерные гироскопы

Эксперимент Майкельсона со временем повторялся на все более крупных установках [238], [239], на одной из которых – лазерном интерферометре LIGO [239], [240] – с длиной плеча 4 км, что в 360 раз превышает размеры интерферометра Майкельсоном и Морли, впервые удалось наблюдать гравитационную волну (Рисунок А.3 б). В планах у ученых уже к 2030-2035 году разместить подобные установки в космосе [241], [242], [243], увеличив длину плеча интерферометра до трех миллионов километров!



а) Схема первого опыта Майкельсона 1881 года [224]



б) Вид сверху на LIGO [244]

Рисунок А.3 – Оптические интерферометры

Так установка, задуманная для подтверждения теории эфира, дала толчок к созданию новой фундаментальной теории, подтверждения которой она обнаруживает уже в своей видоизмененной форме спустя сотню лет.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. УСТРОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ

В данном разделе рассмотрены основные группы гироскопов: МЭМС, оптические, оптоэлектронные и некоторые другие перспективные технологии. Дано описание принципов работы устройств, приведены основные реализуемые параметры.

Б.1 МЭМС-устройства измерения частоты вращения

Основой работы всех МЭМС гироскопов является изменение параметров собственных колебаний системы под действием силы Кориолиса. В зависимости от принципов построения колебательной системы, формы датчика, количества осей, вокруг которых определяется вращение, выделяют различные группы и классификации МЭМС гироскопов: вибрационные, вращательные, камертонные, кольцевые, пьезоэлектрические, полусферические, одноосевые, многоосевые и т.д. Ниже приведены некоторые основные виды МЭМС гироскопов и обеспечиваемые ими характеристики, более подробное описание которых можно найти в [8], [245], [246], [247], [248].

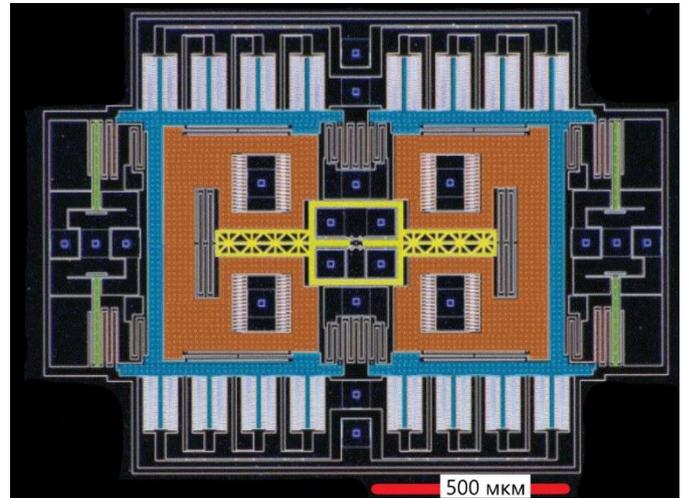
Вибрационные гироскопы. К вибрационным гироскопам относятся все датчики вращения, в которых есть вибрирующие массы с двумя и более степенями свободы: вибрирующие с определенной частотой в одной плоскости (первичное/управляющее колебание), при вращении датчика под воздействием силы Кориолиса, амплитуда которой пропорциональна скорости вращения Ω , а направление перпендикулярно направлению вибрации, подвижные массы начинают колебаться в другой плоскости (вторичное/считываемое колебание) с амплитудой, пропорциональной скорости вращения [17] (Рисунок Б.1 а [247]).

Камертонные гироскопы считаются одними из самых распространенных вибрационных гироскопов, что подчеркивают и сами разработчики (давая своим публикациям заголовки «Yet another tuning fork gyroscope» [249]). За свою тридцатилетнюю историю гироскоп такого типа прошел путь от размера в 1 мм^2 в 1993 году (таких размеров коммерчески доступные оптические гироскопы не достигли и по сей день), до гироскопов, изготовленных на монокристалле кремния размером 40 мкм на диэлектрической пластине [40] с применением методов травления кремния и реактивного ионного травления. Сами же конструкции камертонных гироскопов, способных обеспечить большую добротность, высокое разрешение гироскопа, сокращение воздушного демпфирования [55] и иных помех, в настоящее время сильно усложнились и значительно отличаются по структуре от вилки с двумя зубцами [250] (Рисунок Б.1 а), обеспечивая навигационную точность и разрешение [251] (Рисунок 1). Так, например, новые гироскопы на основе нанорезистивного датчика (НЭМС) (Рисунок Б.1 б) способны обеспечивать точность

измерения (ARW) $0,005^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ [45], при общей площади $1,3 \text{ мм}^2$ и общем объеме конструктивных частей $0,03 \text{ мм}^3$.



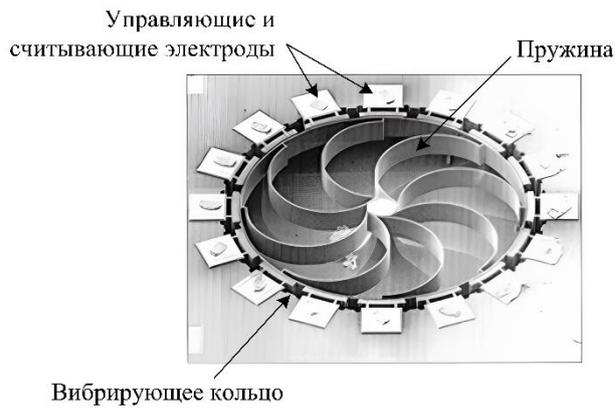
а) Общая схема камертонного гироскопа [247]



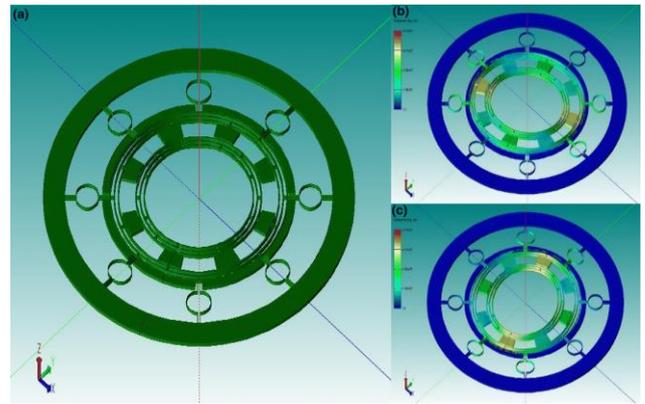
б) камертонный НЭМС гироскоп [45]

Рисунок Б.1 – Камертонные гироскопы

В **вибрационном кольцевом гироскопе** управляющие и считывающие электроды расположены вокруг проводящей кольцевой структуры с радиальными колебаниями [252]. В таком гироскопе по подвешенному на изогнутых пружинах кремниевому кольцу (Рисунок Б.2 а) распространяется стоячая волна (управляющее колебание), которая искажается при повороте кольца под действием внешних сил, – и пропорциональный скорости вращения сигнал (считываемое колебание) поступает на считывающие электроды [253]. Наличие осевой симметрии, использование новых материалов (полукремний [254]) и технологий (сухое травление [254]), использования пьезоэлектриков [255], усложнение формы пружин [256] и введение двойной структуры [257] (Рисунок Б.2 б) позволили разрабатывать вибрационные гироскопы для космического применения, обеспечивающие случайный дрейф $8,86^\circ/\text{ч}$ и ARW $0,776^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ [256].



а) общая схема кольцевого вибрационного гироскопа [253] на примере гироскопа площадью $1,7 \times 1,7$ мм и толщиной 80 мкм [254]



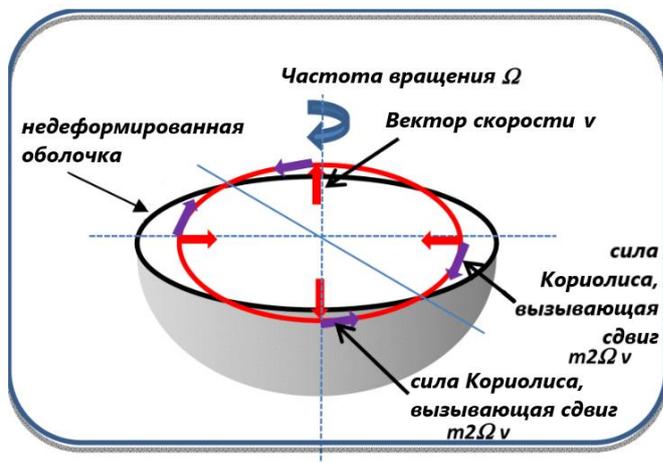
б) гироскоп для применения в космосе с двойной кольцевой структурой [257]

Рисунок Б.2 – Кольцевые гироскопы

Полусферические гироскопы (или wine-glass – по аналогии с колебаниями вдоль кромки бокала), в отличие от остальных МЭМС гироскопов, были способны конкурировать по точности с оптическими со времени своего появления в 1992 году [258]. Широко используемые NASA, эти гироскопы уникальны своей простотой и способностью улавливать очень маленькие углы поворота. Информация о вращении в таких гироскопах извлекается из амплитуды стоячей волны, появляющейся в результате сложения собственного колебания полусферы (управляющего колебания) и колебания, вызванного внешней (кориолисовой) силой [259] (Рисунок Б.3 а). Отсутствие вибрирующих масс и подвесных частей, как у вибрационных гироскопов, минимизирует износ датчика и влияние механического трения на результаты измерения, обеспечивая стабильную работу в течение долгих промежутков времени (уменьшение значений случайного дрейфа и ARW). Этот тип гироскопа можно встретить в зонде Кассини для изучения Сатурна, в телескопе Хаббл [259], и именно он в настоящее время покоряет просторы вселенной в космическом телескопе JWST (Just Wonderful Space Telescope). И если в Хаббл этот гироскоп был доставлен во время одной из миссий по ремонту взамен гироскопов с изнашивающимися подвесными массами [259], то для недоступного с Земли JWST стабильность точной работы навигационных систем на временном отрезке длиной в 15 и более лет является критичной.

Для уменьшения размеров гироскопа и увеличения длины дуги, вдоль которой распространяется колебание в полусферических гироскопах, часто используют такие формы полусферического резонатора, как полутороидальная [260] и форма ванночки для птиц (birdbath). В теории это помогло обеспечить уменьшение случайного дрейфа до значения $0,0001^\circ/\text{ч}$ на протяжении 2000 часов [261] и точность измерения – ARW – до $0,00016^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ при дрейфе нуля

0,0014 °/ч [46], что в 10000 раз точнее, чем в смартфоне, и может составлять серьезную конкуренцию оптическим гироскопам. Развитие технологий производства, сделавшее возможным изготовление прочных высокодобротных полусферических гироскопов из плавленного кварца [38], а также постоянное усовершенствование путем, например, применения зубчатой структуры в основании полусферы для повышения чувствительности и упрощения механической подгонки [54], и новых методов калибровки для устранения нелинейных эффектов [262], позволили при размере гироскопа 4,5 мм и толщине подложки 200 мкм достигать значений случайного дрейфа 0,0673 °/ч и минимальной разрешимой частоты вращения 0,001 °/с (3,6 °/ч), что считается [262] лучшими реализованными характеристиками МЭМС гироскопов на данный момент (Рисунок Б.3 б). В теории точности разработанных за последний год полусферических МЭМС гироскопов может быть достаточно даже для измерения частоты вращения Земли [32], [33].



а) общая схема полусферического гироскопа [259]

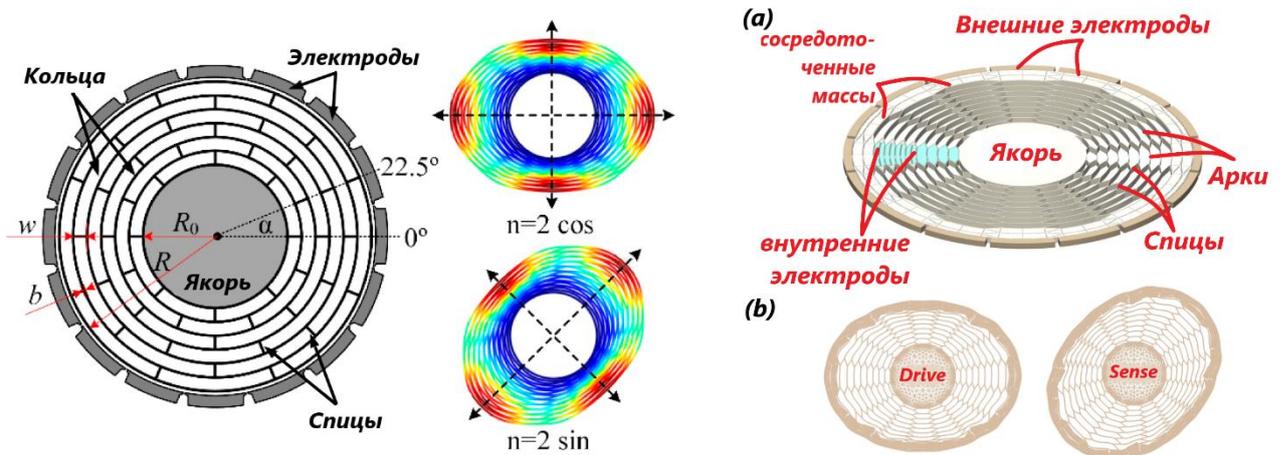


б) прототип высокоточного МЭМС гироскопа с зубчатой структурой [262]

Рисунок Б.3 – Полусферические гироскопы

Дисковые резонаторные гироскопы (ДРГ) обязаны своим появлением полусферическим гироскопам и являются продуктом исследований, инициированных компанией Boeing по улучшению характеристик симметричных конструкций недорогих МЭМС гироскопов. Случилось это после успешной демонстрации разработанного Delco Systems надежного и достаточно точного полусферического гироскопа исследователям из NASA в 1994 году [263]. ДРГ состоит из нескольких концентрических колец, которые соединены между собой спицами, и управляющих и считывающих электродов, равномерно распределенных по периметру внешнего кольца (Рисунок Б.4 а). Имеющий в покое две вырожденные (потому неразличимые) колебательные моды, под воздействием силы Кориолиса ДРГ электродами регистрирует

изменения в колебании одной из мод, несущие в себе информацию о частоте вращения [264]. Наследуя преимущества долговечности и точности полусферических гироскопов, но имея меньший размер за счет своей низкопрофильности, в настоящее время модифицированные дисковые гироскопы в форме сот (Рисунок Б.4 б) с внутренними электродами способны обеспечивать $ARW\ 0,0048^\circ/\sqrt{ч}$ и значение случайного дрейфа $0,015^\circ/ч$, демонстрируя отличный потенциал для того, чтобы стать МЭМС гироскопом следующего поколения с высокой производительностью и надежностью [30], [31].



а) общая схема дискового резонаторного гироскопа [264]: схема (а) и режимы работы (б)

б) сотевый дисковый резонаторный гироскоп [31], [30]: схема (а) и режимы работы (б)

Рисунок Б.4 – Дисковые резонаторные гироскопы

Ниже приведен перечень некоторых МЭМС гироскопов с улучшенными характеристиками, предложенных за последние три года (Таблица Б.1):

Таблица Б.1

№	Год	Принцип работы и особенности; используемые технологии	Размер	Точность и разрешающая способность
[262] [54]	2021	Микрополусферический резонатор с зубчатым основанием	Высота резонатора: 4 мм; Диаметр резонатора: 12 мм	случайный дрейф: $0,0673^\circ/ч$ диапазон работы: $\pm 200^\circ/с$ добротность: $1,18 \cdot 10^6$ чувствительность: $0,001^\circ/с$
[32] [33]	2021	Полусферический резонаторный гироскоп с прямым измерением угла и неограниченным динамическим диапазоном	Нет прототипа. Теоретический расчет	случайный дрейф: $0,001^\circ/ч$ добротность: $7,8 \cdot 10^6$
[30] [31]	2021	ДРГ со структурой в виде сот	Диаметр резонатора: 8 мм	случайный дрейф: $0,015^\circ/ч$ диапазон работы: $\pm 300^\circ/с$ $ARW: 0,0048^\circ/\sqrt{ч}$ разрешение: $0,001^\circ/с$

[45]	2021	Камертонный гироскоп с использованием технологии нанорезистивного зондирования и электронных компонентов с минимальными фазовыми шумами	Площадь гироскопа: 1,3 мм ² Объем гироскопа: 0,026 мм ³	случайный дрейф: 0,02°/ч ARW: 0,004°/√ч
[38]	2022	МЭМС полусферический гироскоп из плавленого кварца с двойной оболочкой с использованием тройного склеивания пластин и высокотемпературных процессов выдувания стекла	Толщина гироскопа: 0,1 мм; Диаметр резонатора: 4 мм Площадь гироскопа: 15 мм ²	добротность: 1,83 × 10 ⁶ ARW: 0,058°/√ч случайный дрейф: 0,4°/ч
[39]	2022	ДРГ, изготовленный новым методом вакуумного корпусирования на уровне пластины [56] с использованием технологии анодного соединения стекло-кремний	Диаметр резонатора: 8 мм Толщина: 0,1 мм	случайный дрейф: 0,42°/ч диапазон работы: ±300°/с ARW: 0,05°/√ч

Из таблицы видно, что менее чем за 5 последних лет бурное развитие всех смежных областей, от новых материалов до новых технологий производства, помогло значительно улучшить характеристики точности и разрешения МЭМС датчиков вращения до навигационных при сокращении размеров за счет перехода от МЭМС к НЭМС технологиям. Это делает данные гироскопы востребованными не только в миниатюрных сенсорах и потребительских устройствах 6G и ЮЕ/ЮТ, но и в средствах локации и навигации. Однако перед учеными все еще стоят такие задачи, как уменьшение ошибок и шумов в выходном сигнале МЭМС гироскопов, уменьшение демпфирования колебаний вибрирующих масс, поиск новых способов изготовления разработанных конструкций, а также способов увеличения надежности и долговременной стабильности датчиков вращения.

Б.2 Оптические устройства измерения частоты вращения

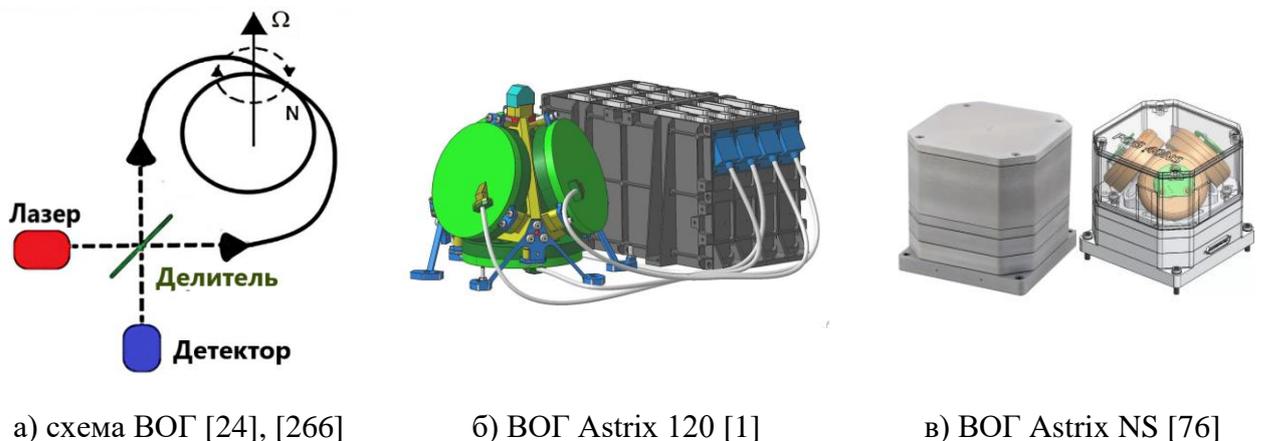
В оптических устройствах измерения частоты вращения, ВОГ и КЛГ, появившихся в 1960-х с изобретением лазеров, информация о частоте вращения Ω , согласно формуле Саньяка (1), извлекается из фазовых характеристик ЭМ поля, распространяющегося во вращающихся установках [1], [17], [59], [60].

Б.2.1 Воконно-оптические гироскопы

В ВОГ свет распространяется в оптическом волокне, использование нескольких витков которого позволяет обеспечивать большую точность измерения скорости вращения за счет увеличения охватываемой лучами площади (1), а само волокно обеспечивает высокую прочность и надежность приборов. Способность противостоять ЭМ помехам, высокая чувствительность,

устойчивость к высоким давлениям, простота интеграции в другие конструкции [66], [67], [68] позволяют использовать ВОГ в широком спектре коммерческих, промышленных и навигационных устройств [5], [17], [74], [80], [83], [84], [265].

Первая экспериментальная конфигурация ВОГ, предложенная в 1976 году [266] (Рисунок Б.5 а) [24], повторяла принципиально установку Саньяка 1913 года [117] (Рисунок А.1 б). Лучи из лазера, когерентность которых обеспечена делителем, распространялись по оптическому волокну в противоположных направлениях, а на детекторе по интерференционной картине от лучей, прошедших разные оптические пути из-за вращения гироскопа, можно было определить параметры вращения.



а) схема ВОГ [24], [266]

б) ВОГ Astrix 120 [1]

в) ВОГ Astrix NS [76]

Рисунок Б.5 – Схемы и конструкции ВОГ

Увеличение разрешения и точности современных ВОГ в основном происходит за счет уменьшения и учета внешних, аппаратных (вибрации интенсивности источника света) и иных шумов посредством применения различных методов обработки сигналов внутри и на выходе гироскопов и уменьшением влияния таких ограничивающих длину используемого оптического волокна эффектов, как рэлеевское (обратное) рассеяние, эффект Керра (изменение показателя преломления под действием приложенного ЭМ поля), эффект Фарадея (изменение угла плоскости поляризации света), эффект Шуле (при термическом растяжении участка волокна в контуре встречные волны приобретают разные фазовые набеги) [79] и др. Перечисленные эффекты вызывают кратковременный шум и/или долговременный дрейф сигнала на выходе гироскопа, что ограничивает его способность точно измерять малые скорости вращения в течение длительных промежутков времени.

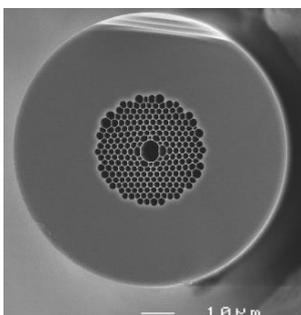
Существуют две различные конфигурации ВОГ: интерферометрический волоконно-оптический гироскоп (ИВОГ), в котором оптическая разность хода считывается путем измерения фазы двух интерферирующих лучей; и резонаторный волоконно-оптический гироскоп (РВОГ), в

котором измеряется сдвиг резонансных частот распространяющихся в противоположных направлениях лучей [71], [267]. Сравнительно высокая точность ИВОГ достигается увеличением (до нескольких километров) длины оптического волокна (1), которое вместе с прочим измерительным оборудованием датчика может складываться в громоздкие конструкции, в десятки и сотни раз проигрывающие МЭМС гироскопам по массогабаритным характеристикам (Рисунок Б.5 б). Например, надежные и стабильные при воздействии температур и в вакууме, используемые в научных целях, телекоммуникации, для наблюдения вращения Земли и межпланетных полетов коммерческие ВОГ Astrix в различных своих модификациях могут содержать от 1 до 5 км оптоволоконна, что доводит общий вес устройства до 4-7 кг (Рисунок Б.5 б) при точности измерения частоты вращения (случайный дрейф) от $0,1^\circ/\text{ч}$ до $0,001^\circ/\text{ч}$ [1]. Самый миниатюрный гироскоп из семейства, Astrix NS (Рисунок Б.5 в), имеет размеры $100 \times 100 \times 100$ мм при весе 1,4 кг и способен обеспечивать ARW от $0,005^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ до $0,0025^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ в различных режимах работы [76]. Уменьшения размеров ИВОГ добиваются конструкциями гироскопов с открытым контуром, [69], [70] позволяющими разрабатывать недорогие ИВОГ со случайным дрейфом $0,2^\circ/\text{ч}$ и ARW $0,0022^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ при размере $6,9 \times 6,9 \times 5$ см. Однако сегодня такие характеристики точности в некоторых прототипах новых МЭМС гироскопов возможно реализовать и в гораздо меньшем размере (Таблица Б.1).

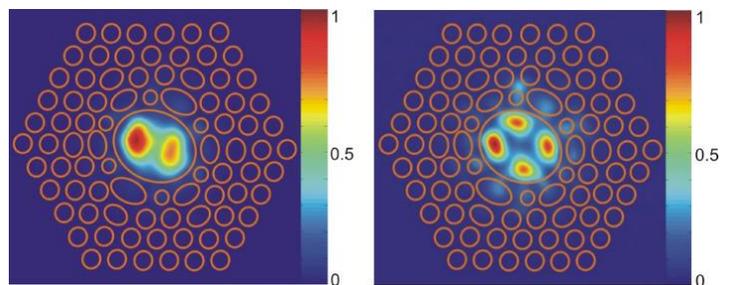
В РВОГ сократить требуемую длину оптического волокна по сравнению с таковой в ИВОГ удастся с помощью кольцевого рециркуляционного волоконного резонатора, что делает данные сенсоры многообещающим кандидатом для приложений, требующих небольших, легких и надежных гироскопов [72]. Однако стоит помнить, что при распространении света в волокне параметры сигнала могут ухудшаться под влиянием различных упомянутых выше паразитных эффектов, включающих вынужденное рассеяние Бриллюэна (дифракция оптического излучения конденсированными средами в результате его взаимодействия с собственными упругими колебаниями этих сред), и рециркуляция света в резонаторе РВОГ эти эффекты только усиливает [72]. Из-за таких проблем, как шум и сложность обработки сигналов, РВОГ по-прежнему не имеют такого широкого применения, как ИВОГ. Однако в последние годы, с изобретением новых структур оптического волокна и разработкой все новых методов обработки сигналов, появился ряд системных решений озвученных выше проблем [68].

Так, для устранения эффектов, связанных с потерями в среде (в волокне), было решено избавиться от этой самой среды посредством использования фотонно-кристаллического оптоволоконна (ФКВ) с полый сердцевинной [268]: воздух в полый сердцевине ФКВ менее подвержен влиянию факторов окружающей среды, таких как температура, что подразумевает хорошую температурную стабильность, а распространение света в воздухе нивелирует проявление

перечисленных выше паразитных эффектов, связанных с распространением света в волокне. Внутренний вид ФКВ и картины возбужденных в них мод представлены на Рисунке Б.6. Использование ФКВ в РВОГ позволяет обеспечивать значение случайного дрейфа $0,15^\circ/\text{ч}$ и $\text{ARW } 0,04^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ [77], а конструкция с использованием зеркал в гироскопе с замкнутым контуром позволила и вовсе достичь $\text{ARW } 0,004^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ при значении случайного дрейфа $0,45^\circ/\text{ч}$ [269], что открывает большие перспективы реализации РВОГ на основе ФКВ с навигационной точностью. В таком случае сокращение размеров гироскопов ограничено углом изгиба ФКВ, т.е. стоит вопрос разработки оптического волокна, которое допускает меньший радиус кривизны для миниатюризации радиуса резонатора в РВОГ (например, волокон с отрицательной кривизной [270]).



а) ФКВ с воздушной сердцевиной 850 нм. Внешний диаметр волокна 85 мкм [271]



б) картины ближнего поля мод высших порядков, возбужденных в коротком отрезке волокна (длиной 1 м) на длине волны 882 нм [271]

Рисунок Б.6 – ФКВ

Одним из следующих решений в разработке новых оптических волокон стало скручивание. Spun-fiber – скрученное вдоль своей оси оптическое волокно, позволяющее анализировать и контролировать поляризацию, что дает возможность использовать его для изготовления волокна с линейной поляризацией, вращателей поляризации, замедлителей и волокон с произвольным значением поляризации [272], а также позволяет улучшить характеристики ВОГ с круговой поляризацией. Так в [71], [273] и [274] авторы использовали свет с круговой поляризацией для подавления оптических шумов и эффекта Керра и уменьшения обратного рассеяния в РВОГ, что показало теоретические значения случайного дрейфа до $3^\circ/\text{ч}$ [273]. Но несмотря на то, что использование скрученного волокна гарантирует одинаковую поляризацию и взаимность встречных лучей света, поляризационные шумы, наряду с иными помехами, ограничивают точность подобных РВОГ.

Перечисленные способы повышения точности работы РВОГ дают им существенное преимущество и сулят большие перспективы применения, но при этом актуальными остаются

вопросы уменьшения размеров самого оптоволоконного резонатора и миниатюризация источника света при улучшении его характеристик (стабильности мощности и частоты). Более того, многие высокоточные конструкции РВОГ все еще находятся на стадии теоретических и лабораторных исследований с лишь малым количеством готовых прототипов и коммерческих образцов. Ученым еще предстоит провести подробные экспериментальные исследования данных гироскопов и определить их параметры и стабильность работы в реальных условиях для рассмотрения возможности их дальнейшего практического применения в различных областях [68].

Ниже приведен перечень некоторых РВОГ с улучшенными характеристиками, предложенных за последние несколько лет (Таблица Б.2):

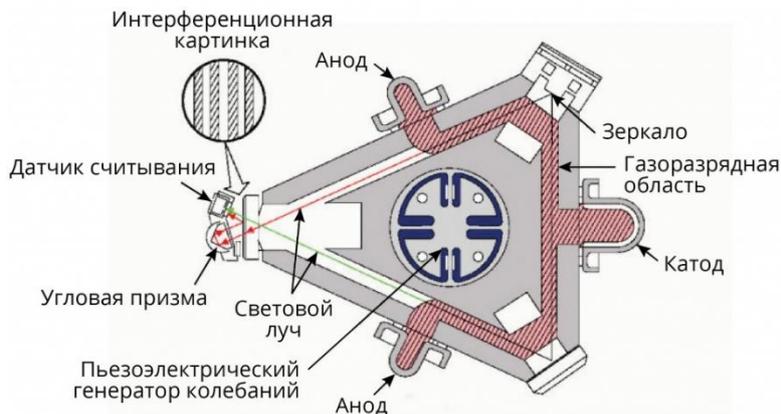
Таблица Б.2

№	Год	Принцип работы и особенности; используемые технологии	Размер	Основные характеристики
[275] [276]	2017	РВОГ на основе ФКВ, использующий микрооптический ответвитель, образованный парами линз и одним фильтром. Изготовлен опытный образец	Диаметр резонатора: 15см	случайный дрейф 1,3°/ч
[277]	2021	РВОГ с использованием антирезонансного ФКВ, в котором свет удерживается за счет когерентного отражения: только те длины волн, которые резонируют с толщиной мембраны, могут выходить из центральной полости волокна	Теоретическое исследование	случайный дрейф 0,05°/ч,
[278]	2022	РВОГ, который управляется широкополосным белым светом, а не лазером с узкой шириной линии. Волоконно-оптический кольцевой резонатор работает как фильтр, а информации о вращении считывается из потерь в фильтре. Паразитный шум эффективно устраняется благодаря низкой когерентности света, и, таким образом, может быть улучшено разрешение измерения	Длина волокна: 100м	случайный дрейф 0,012°/ч
[74]	2022	РВОГ. Предложен метод многолучевой интерференции белого света для обнаружения эффекта Саньяка. Изготовлен прототип	Длина волокна: 100м	ARW: 0,0093°/√ч; случайный дрейф 0,009°/ч
[269]	2019	РВОГ на основе ФКВ Kagome. Оптимизированная схема сервопривода Паунда-Древера-Холла использовалась для тестирования резонатора	Длина волокна: 18м; Диаметр резонатора: 60см	ARW: 0,004°/√ч; случайный дрейф 0,45°/ч

Б.2.2 Кольцевые лазерные гироскопы

КЛГ являются наиболее чувствительными к изменению скорости вращения устройствами из доступных на рынке, способными обеспечить высокую производительность, то есть разрешение менее 1°/ч и случайный дрейф менее 0,1°/ч [65]. В КЛГ возбужденные в газовой смеси электрическим разрядом высокого напряжения резонирующие на одной частоте лучи

распространяются встречно в объемном оптическом резонаторе треугольной или квадратной формы (Рисунок Б.7). Возникающая при вращении устройства разница между резонансными частотами лучей, пропорциональная скорости вращения (1), считывается на матрице фотоприемника [27], [24]. Чаще всего встречаются He-Ne КЛГ, которые подробно изучены, могут работать в непрерывном режиме, обладают достаточным коэффициентом усиления, малой потребляемой мощностью, высокой надежностью, прочностью и компактностью [87].



а) Схема КЛГ. Рисунок [279], перевод [236]



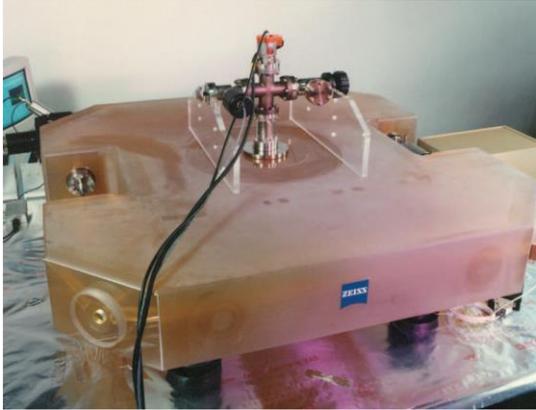
б) Внешний вид устройства

Рисунок Б.7 – Коммерческий КЛГ (Honeywell, [279])

Высокое разрешение и малый случайный дрейф КЛГ обеспечиваются за счет отсутствия в самой установке подверженных износу и чувствительных к демпфированию вибрирующих масс (как в МЭМС гироскопах) и высокой чувствительности лазеров, что делает данные гироскопы подходящими не только для использования в навигации, геофизике, геодезии и сейсмологии (Рисунок 1 б), но и для наблюдения за скоростью вращения Земли, ее малейшими колебаниями и наклоном ее оси [65], [88]. Для обеспечения требуемых для этого порядков точности (разрешение от 10^{-7} °/ч и меньше), КЛГ предъявляют исключительные требования к механической стабильности самой конструкции, на которую они установлены, и в зависимости от конструктивного исполнения делятся на монолитные и модульные. Первые целиком выполнены из материалов с низким коэффициентом теплового расширения, например, зеродура (Zerodur, керамический материал [280] (Рисунок Б.8 а)), в то время как модульные КЛГ выполняются на основе вакуумных трубок, соединенных переходами с зеркалами (Рисунок Б.8 б) [65], [89] по образцу и подобию установок Саньяка [117] (Приложение А).

В силу определения монолитные КЛГ – это относительно небольшие датчики скорости вращения. Например, монолитный He-Ne лазерный гироскоп для авиации, изготовленный из зеродура, может иметь площадь порядка $0,02 \text{ м}^2$ (периметр 30 см и меньше) и работать с одной продольной модой при длине волны 632,8 нм. Типичная чувствительность таких устройств

составляет около $5 \cdot 10^{-7}$ рад/с ($0,1$ °/ч) при случайном дрейфе всего $0,0001$ °/ч [65] (что в случае МЭМС гироскопов на данный момент можно реализовать только в теории и/или в лабораторных условиях). Но для увеличения разрешения до необходимых в сейсмологии и фундаментальной физике значений (Рисунок 1) следует увеличивать размер установок (1). Невозможность получить большие цельные монолиты зеродура привела к разработке модульных конструкций КЛГ (Рисунок Б.8 б).



а) монолитный КЛГ С-II для сейсмологии [65]



б) модульный КЛГ G с точностью 10^{-14} рад/с, позволившей наблюдать эффект Чандлера (колебаниях земной оси длительностью более года) [281]

Рисунок Б.8 – Кольцевые лазерные гироскопы

Благодаря своей беспрецедентной точности и чувствительности, в настоящее время КЛГ являются единственной реализованной технологией для наблюдения за параметрами вращения Земли [88]. За последние два десятилетия по всему миру (Италия, Германия, Новая Зеландия) было построено множество установок различных форм и размеров для экспериментального исследования и проверки фундаментальных научных гипотез и наблюдения движения масс на Земле (вод мирового океана, воздушных масс и сейсмических волн), и еще много установок находятся в разработке [243]. Большой вклад в построение подобных КЛГ внес Карл Ульрих Шрайбер, принимавший участие в создании всех крупных экспериментальных научных установок с КЛГ, за что был назван коллегами «Властелином колец» («the lord of the rings» [282]). И несмотря на то, что созданная им и его коллегами в пещере времен второй мировой войны в Новой Зеландии лаборатория с пятью КЛГ по измерению вращения Земли [65], [88], [89], [283], [284], [285] не смогла противостоять серии землетрясений в Крайстчерче в 2010-2012 годах, азарт и энтузиазм Шрайбера не угасли, а накопленный опыт позволил ему принять участие в разработке нового, самого большого на сегодня модульного КЛГ – ROMY (Rotational Motions in Seismology) [90].

Расположенный в Геофизической обсерватории недалеко от Мюнхена, Германия [90], ROMY состоит из четырех КЛГ (Рисунок Б.9) треугольной формы с длиной стороны 12 м, собранных в тетраэдр и размещенных на устойчивом бетонном основании под землей. Такая конструкция при максимальном разрешении 10^{-13} рад/с (10^{-8} °/ч) дает возможность измерять параметры вращения планеты в различных плоскостях, что обеспечивает построение полного вектора вращения Земли с очень высоким разрешением и делает ROMY самым совершенным кольцевым лазером в мире, чувствительным к изменениям в скорости вращения Земли и ее наклона [286]. Более того, ученые говорят о возможности с помощью ROMY наблюдать на Земле такие гравитационные эффекты, как увлечение инерциальных СО – эффект Лензе - Тирринга, наблюдение которого ранее NASA проводило с помощью гироскопов, установленных на космическом спутнике [282]. К настоящему времени были опубликованы результаты непрерывного измерения ROMY вектора вращения Земли в течение 47 дней, в которых удалось наблюдать отклонение полюсов Земли менее чем на одну угловую секунду ($4,8 \cdot 10^{-6}$) в среднем от их среднего положения за время измерения и отклонение скорости вращения Земли от ее постоянного значения не более чем на 2 нанорадиана в секунду, что свидетельствует о высокой стабильности датчика [92].

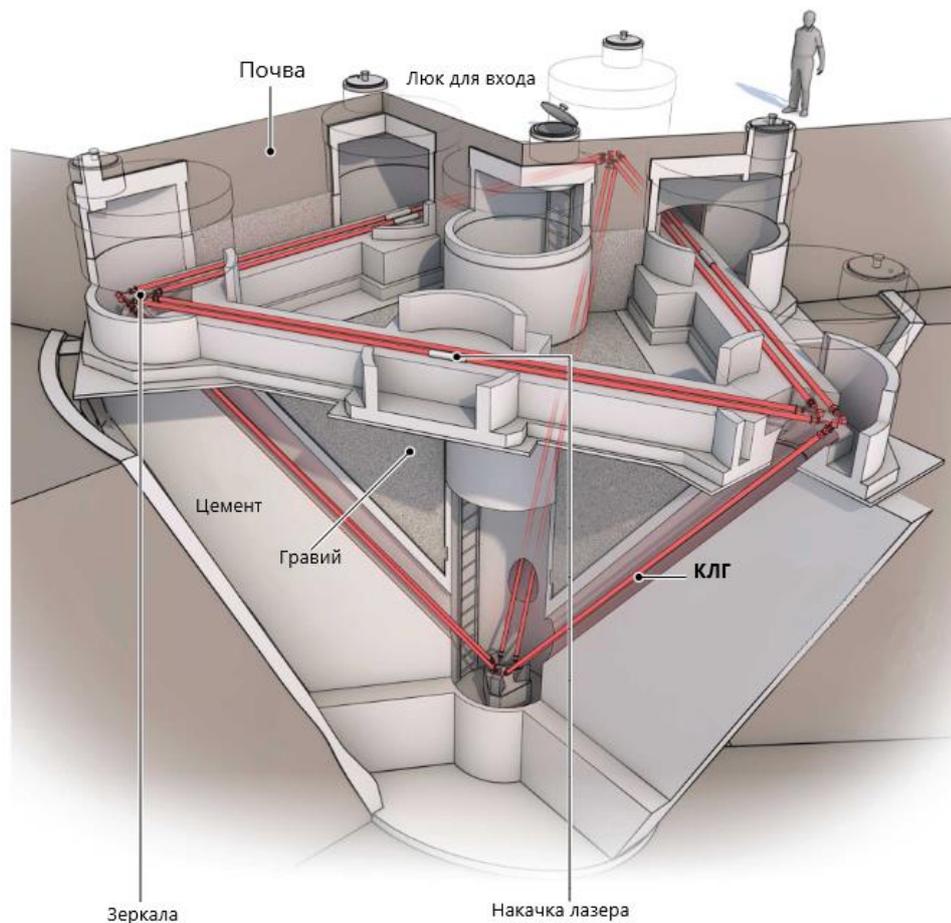


Рисунок Б.9 – Общая схема конструкции ROMY [282]

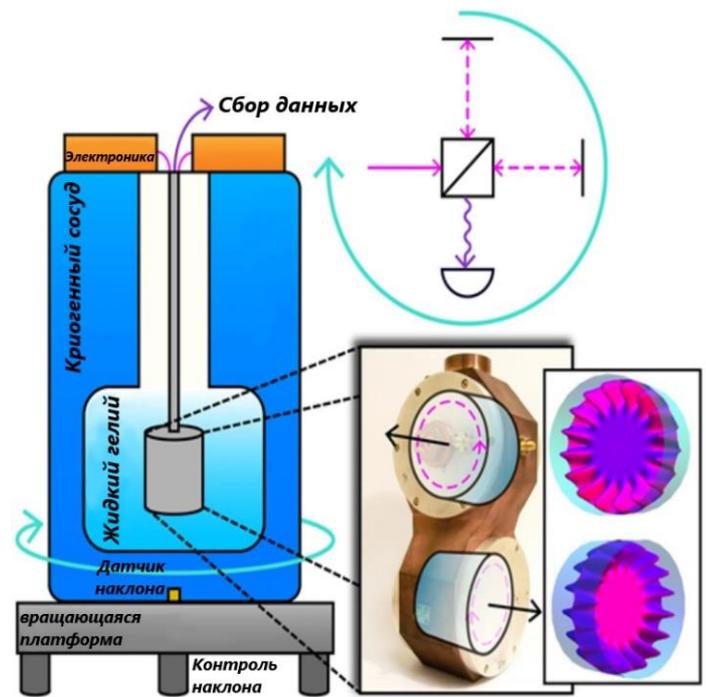
Еще один сверхмощный КЛГ для наземного наблюдения эффектов Лензе-Тирринга и де Ситтера – спрятанный в изолированной камере в центральной Италии большой модульный квадратный He-Ne КЛГ GINGERino (Gyroscopes IN General Relativity – назначение которого читается из названия) [93], [94] со стороной 3,6 м со встроенными супер-зеркалами с коэффициентом отражения 99,999%. Чувствительность в 10^{-10} рад/с/ $\sqrt{\text{Гц}}$ при максимальном разрешении $30 \cdot 10^{-12}$ рад/с ($6,2 \cdot 10^{-6}$ °/ч) позволяет данному гироскопу достигать точность в четырнадцать знаков после запятой, достаточную в том числе для наблюдения за движением литосферных плит и продолжительностью дня (Рисунок 1) [93], [94].

В научных проектах гравитационные эффекты наблюдаются также с применением сверхточных и сверхчувствительных лазерных интерферометров Майкельсона (Рисунок А.1 а). Являясь интерферометрами Саньяка с нулевой площадью (описание которых можно найти в [57] и Приложении А), они используются для тестов утверждений ОТО, определения анизотропии скорости света и наблюдения колебаний пространства-времени. Так, например, проведенные примерно одновременно разными группами ученых эксперименты [95] и [96] с вращающимися лабораторными установками из двух высокочастотных ортогональных резонаторов, просверленных в монолитном блоке стекла с низким коэффициентом расширения (Рисунок Б.10 а) и с зеркалами с высоким коэффициентом отражения на торцах, не обнаружили ни малейшего изменения значения скорости света (признаков анизотропии скорости света) с точностью до семнадцати знаков после запятой. Предположение авторов [95], [96], [287] об использовании криогенных резонаторов для дальнейшего повышения точности измерений нашли отклик в [64], где конструкция из двух перпендикулярно расположенных криогенных сапфировых резонаторов, которые совместно представляют установку Майкельсона-Морли [176] (Рисунок А.1 а), позволила наблюдать постоянство скорости света с точностью до 10^{-18} [64] (Рисунок Б.10 б). Более высокие порядки точности (до 10^{-28} !) можно получить уже с использованием нейтринной интерферометрии в чистейших льдах Южного Полюса [288].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что все рассмотренные выше экспериментальные установки являются высокотехнологичными лабораториями и разрабатывались и обслуживаются международными группами ученых, что говорит о трудоемкости и высокой стоимости реализации подобных экспериментов, о важности повышения точности измерений, уменьшении потерь в используемых зеркалах, уменьшении влияния внешних факторов, а также строгого исследования поведения ЭМ поля во вращающихся полостях для учета всех возможных эффектов.



а) лабораторная установка к эксперименту [96]; Размеры: 55×55×35 мм; Добротность: 380000



б) криогенные резонаторы [64], [289]

Рисунок Б.10 – Интерферометры для определения анизотропии скорости света

Б.2.3 Оптоэлектронные гироскопы

Несмотря на свою большую точность, рассмотренные выше оптические КЛГ и ВОГ все еще являются дорогими, массивными и энергозатратными датчиками, что часто не отвечает требованиям новых применений, например, для управления ориентацией и орбитой кубсатов [68]. Конкурирующей технологией в этом случае могут стать недорогие оптоэлектронные гироскопы на чипе с разрешением $10^\circ/\text{ч}$ и меньше [68], обширный обзор которых приведен в [27], [98].

Предложенные впервые в середине 1980-х годов [290] активные оптоэлектронные гироскопы на полупроводниковом кольцевом лазере [97] в настоящее время разрабатываются на основе двойных квантовых ям на GaAs/AlGaAs [99] или InGaAs-GaAs-AlGaAs [100], что сокращает размер оптического резонатора до 1 мм [99]; на основе пассивного резонатора с большим значением добротности, что позволяет разместить все активные и пассивные компоненты датчика на одном кристалле [291]; и на основе конструкций кремний-на-изоляторе (КНИ или SOI – silicon on insulator), уменьшающих размеры оптоэлектронных датчиков до микрометров [99], [290].

Свойственные гироскопам на основе квантовых ям недостатки, как конкуренция мод, обратное рассеяние и захват частот (вызванный обратным рассеянием циркулирующего в резонаторе излучения) и ограничение минимальной разрешимой частоты вращения квантовыми шумами, обязанными спонтанному излучению лазера, удается исключить в резонансных микрооптических гироскопах на высокодобротном кольцевом резонаторе «оксид кремния на кремнии», либо на резонаторе на основе *InP* (фосфид индия) с использованием *LiNbO₃*, стекла, кремния и полимеров [292]. Минимальная разрешимая частота вращения при этом ограничена дробовыми шумами на фотодетекторе и может уменьшаться с увеличением добротности резонатора (уменьшение потерь при распространении и отражении, а также шероховатости стенок резонатора, оказывающих все большее влияние с ростом частоты). Высокодобротные чувствительные гироскопы можно получить из кольцевых лазеров Бриллюэна на кремниевой микросхеме, способных обеспечивать достаточные для измерения скорости вращения Земли случайный дрейф $3,6^\circ/\text{ч}$ и случайное отклонение угла $0,068^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ при радиусах резонатора 36 мм и 18 мм [292].

Технологии КНИ совместно с фотолитографией в глубоком ультрафиолете, травлением в индуктивно-связанной плазме и плазменно-химическим осаждением из газовой фазы позволяют изготавливать образцы оптоэлектронных гироскопов площадью 600×700 мкм при разрешении $51,3^\circ/\text{ч}$ [293] и образцы площадью $3,83 \cdot 10^{-3}$ м², способные измерять угловую скорость $0,64^\circ/\text{с}$ ($2,3^\circ/\text{ч}$), что подтверждено экспериментальными результатами [293].

Ожидаемо в инновациях преуспели и ученые из Калифорнийского технологического института, заявившие о создании лазерно-оптического гироскопа размером с рисовое зернышко, что примерно в 500 раз меньше среднего размера подобных коммерческих гироскопов [34], [35], применяемых при навигации. Разработанный полностью интегрированный нанофотонный оптический гироскоп с выгравированными световодными каналами на кремниевом чипе площадью 2 мм² является отличным кандидатом для миниатюризации датчиков на нанофотонных платформах (НЭМС технологии) (Рисунок Б.11). Несмотря на свой малый размер даже по сравнению с современными миниатюрными ВОГ (Таблица Б.2), данный гироскоп в теории способен обнаруживать в 30 раз меньшие фазовые сдвиги. Однако на практике к настоящему времени лабораторные испытания изготовленного макета показали значения случайного отклонения угла (ARW) лишь в $650^\circ/\sqrt{\text{ч}}$ при случайном дрейфе в один оборот в минуту ($21600^\circ/\text{ч}$).

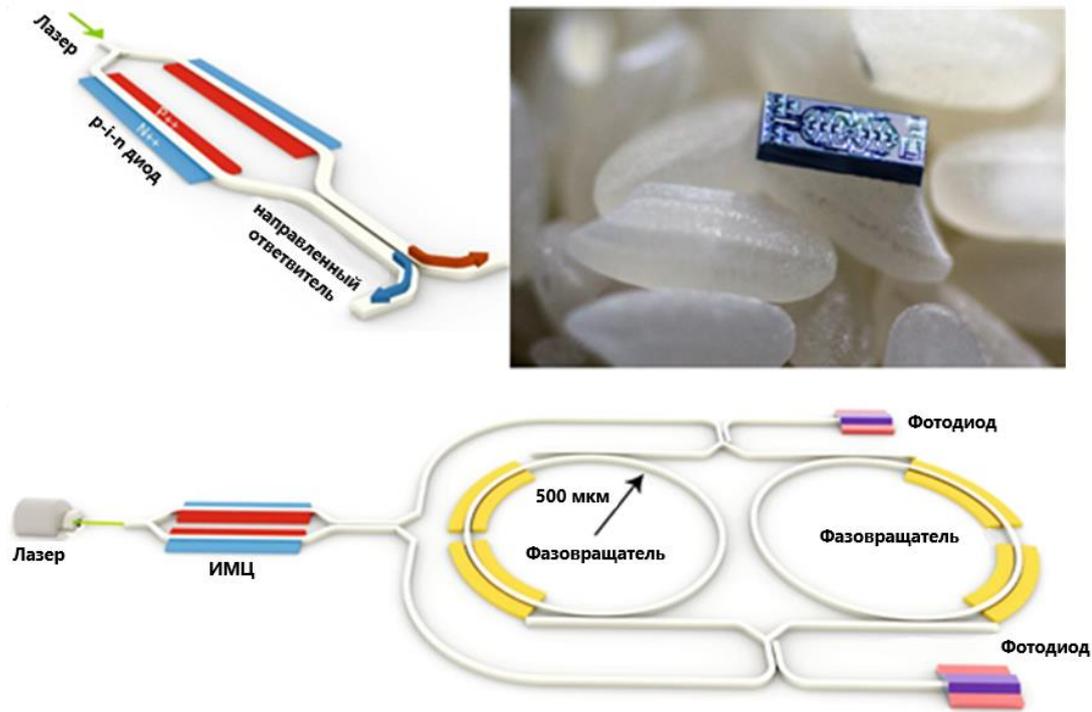


Рисунок Б.11 – Конструкция НЭМС сенсора включает два кольцевых резонатора радиусом 500 мкм, питание которых переключается интерферометром Маха-Цендера из двух р-і-п-диодов и направленного ответвителя. Лазер работает на длине волны 1550 нм, а германиевые фотодиоды на выходе преобразуют оптический свет в электрический ток [34], [35]

Ниже приведен перечень некоторых оптоэлектронных гироскопов с минимальными линейными размерами, предложенных за последние несколько лет (Таблица Б.3):

Таблица Б.3

№	Год	Принцип работы и особенности; используемые технологии	Размер	Точность и разрешающая способность
[292]	2020	Монолитный КЛГ на основе лазера Бриллюэна, стабильность и чувствительность которого позволяют измерять вращение Земли. Изготовлен прототип и измерено вращение Земли	радиус резонатора: 36 мм и 18 мм	случайный дрейф 3,6°/ч; ARW: 0,068°/√ч
[293]	2018	Интегральный интерференционный оптический гироскоп на основе конструкции кремний-на-изоляторе (КНИ или SOI) из спиральных многомодовых волноводов для уменьшения потерь при распространении и миниатюризации размеров	Площадь гироскопа: 600 × 700 мкм	Разрешение гироскопа: 51,3°/ч
[294]	2019	Внутрикристаллический интерференционный оптический гироскоп кремний-на-изоляторе (КНИ) с поддержкой мод	Площадь гироскопа: 3,85 × 10 ⁻³ м ²	Разрешение гироскопа: 0,64°/с (2304°/ч)
[34], [35]	2018	Полностью интегрированный нанопотонный оптический гироскоп. Световодные каналы выгравированы на кремниевом чипе площадью два квадратных миллиметра	Площадь гироскопа: 2 мм ²	ARW: 650°/√ч; случайный дрейф: один оборот в минуту (21600°/ч)

В целом, согласно теоретически достижимым и потенциально реализуемым оптоэлектронными гироскопами характеристикам, этот вид датчиков имеет большие перспективы и с точки зрения высокой точности, и с точки зрения малых размеров. Однако большинство из перечисленных устройств, за редким исключением [292], в лучшем случае находятся на стадии разработки лабораторных макетов для проверки основных принципов работы, показывая при этом характеристики точности порой в тысячу раз хуже [34], чем в коммерчески доступных датчиках [295]. Но при дальнейших исследованиях в части уменьшения случайного дрейфа и увеличения разрешения, маленькие размеры и низкое потребление энергии могут сделать оптоэлектронные гироскопы вполне конкурентоспособными на постоянно растущем рынке инерциальных сенсоров.

Б.3 Новые методы измерения частоты вращения

Стабильно растущий спрос на датчики вращения и несовершенство существующих технологий (в части объединения высокой точности и малых размеров в одном устройстве) стимулирует поиск новых идей для измерения скорости вращения. Так, в последние годы появились гироскопы, использующие новые методы измерения скорости вращения: на датчиках вихревых токов [296], [297], на резонаторах с модами шепчущей галереи [298], на поверхностных акустических волнах (ПАВ) [299] и т.д. Развитие квантовой механики, атомной физики и оптики, особенно нобелевские премии в 1997, 2001 и 2005 годах позволили рассмотреть идею атомной интерферометрии, способной обеспечить высокую чувствительность измерений [300], делающей атомный интерференционный гироскоп одной из наиболее прорывных технологий для высокочувствительных датчиков скорости вращения в будущем [115].

Принцип работы атомных датчиков вращения схож с принципами работы оптических гироскопов: по аналогии с лучами света в оптических интерферометрах, атомные волны де Бройля могут быть разделены и соединены снова, генерируя при этом интерференционный сигнал, который можно использовать в различных целях. Потенциально высокая точность атомного интерферометра позволяет использовать его в космических аппаратах для тестирования принципа эквивалентности Галилея и наблюдения гравитационных волн [301], [302], в высокочувствительных сенсорах для измерения ускорения и вращения [303], [304], [305], [306], позволяя выполнять шестиосевое измерение [307] и точное измерение гравитационного ускорения [301], [302]. В работе [301] авторы представляют дизайн высокочувствительного атомного интерферометра, выполненного на изотопах рубидия $^{85}\text{Rb}/^{87}\text{Rb}$, для использования в космических аппаратах для проведения экспериментов по фундаментальной физике с точностью

до 2×10^{-15} (что схоже с предельной точностью для оптических гироскопов). Но такая точность достигается очень сложной конструкцией, включающей в себя девять блоков с лазерными установками, термоконтролем, вакуумной полостью и прочим оборудованием, смонтированных в зеродур, что доводит вес установки до 221 кг с общим потреблением энергии в 608 ватт и объемом 470 литров [301] (что схоже с размерами для сверхточных оптических гироскопов).

Большие усилия (и большие надежды) сконцентрированы вокруг попыток использовать для измерения частоты вращения интерференцию холодных атомов, которая согласно теоретическим расчетам точности и разрешения может стать основной технологией для точных измерений, применимой как в прикладных, так и в фундаментальных науках. Подобно оптическому интерферометру, атомный интерферометр разделяет по двум встречным путям и затем соединяет материальные волны [108] при охлаждении используемых атомов до миллионных долей градуса выше абсолютного нуля [109]. Однако к настоящему времени разработано всего несколько лабораторных образцов таких датчиков [110], [111], [112], [113], [114] способных в лучшем случае реализовать случайный дрейф в $3 \cdot 10^{-10}$ рад/с ($206,3^\circ/\text{ч}$) [112] и разрешение 1,8 нанорадиан в течение 640 секунд [111].

Другое устройство, способное обеспечивать атомную точность – ядерный магнитный резонансный гироскоп [103] (Nuclear magnetic resonance gyroscope, NMRG), в котором определение частоты вращения происходит путем измерения Ларморовской прецессии (прецессии магнитного момента ядра атома вокруг вектора внешнего магнитного поля). Гироскопы, работающие на данном эффекте, были описаны еще в 1960-х и 1970-х как обладающие точностью измерений (случайный дрейф) меньше $0,1^\circ/\text{ч}$, а в последние десятилетия ведется активная разработка их модификаций для размещения на одном чипе [104], [308], [309], [310], которая так же еще не привела к готовому прототипу.

Надеемся, что развитие технологий и научно-технический прогресс в смежных областях сделают возможным претворение перечисленных выше теоретических результатов и инженерных идей в реальные устройства уже в ближайшем будущем!

ПРИЛОЖЕНИЕ В. АКТЫ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института

радиотехнических систем и управления
Южного федерального университета

А. С. Болдырев

« 1 » октября 2023 г.

М.П.

АКТ

О внедрении результатов

Диссертационной работы на

Соискание ученой степени кандидата технических наук

Титовой Дарьи Евгеньевны на тему:

«ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ
ГИРОСКОПАХ И ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ»**Комиссия в составе председателя:**Заведующего кафедрой Антенн и радиопередающих устройств (АиРПУ), д.т.н., профессора
Ю.В. Юханова,**Члены комиссии:**

Обуховец В.А.

Кисель Н.Н.

Семенихина Д.В.

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы:

- строгое аналитическое решение граничных задач возбуждения электромагнитного поля во вращающихся резонаторах и концентрических резонаторах сторонними источниками токов и зарядов;
- результаты численных исследований релятивистского эффекта расщепления критических и собственных частот вращающихся волноводов, резонаторов и концентрических резонаторов при возбуждении в них электромагнитного поля; физическая интерпретацию полученных результатов;
- результаты численных исследований влияния параметров материалов стенок и заполнения вращающихся полостей на добротность последних и на величину предельно-достижимых параметров радиочастотных методов измерения частоты вращения, основанных на эффектах расщепления собственных частот полостей;

- результаты численного исследования путей увеличения разрешающей способности радиочастотных резонансных методов измерения частоты вращения при использовании сверхпроводящих материалов стенок вращающихся полостей;
- результаты численного исследования путей миниатюризации устройств измерения частоты вращения радиочастотным способом при использовании концентрической сферической полости;
- рекомендации по выбору гироскопов на основе вращающихся полостей в зависимости от требуемых характеристик разрешения и линейных размеров устройства измерения частоты вращения

внедрены в учебный процесс по курсам «Системы спутниковой связи и определения местоположения» основной образовательной программы «Средства радиоэлектронной борьбы» по направлению подготовки 11.04.01 «Радиотехника» и «Электроника, радиотехника и системы связи» по направлению подготовки 11.06.01 «Электроника, радиотехника и системы связи», направленность – Антенны, СВЧ-устройства и их технологии.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ КОМИССИИ:

Заведующий кафедрой АиРПУ

Юханов Ю.В.

ЧЛЕНЫ КОМИССИИ:

Профессор кафедры АиРПУ ИРТСУ,
Руководитель ОПОП 11.04.01 (2020 год набора)

Обуховец В.А.

Доцент кафедры АиРПУ ИРТСУ,
к.т.н., доцент

Кисель Н.Н.

Профессор кафедры АиРПУ ИРТСУ,
д.т.н., доцент

Семенихина Д.В.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной и
исследовательской деятельности
Южного федерального университета

_____ А. В. Метелица



« 22 » октября 2023 г.

М.П.

АКТ

О внедрении результатов

Диссертационной работы на

Соискание ученой степени кандидата технических наук

Титовой Дарьи Евгеньевны на тему:

«ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ
ГИРОСКОПАХ И ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ»

Комиссия в составе председателя:

Руководителя НИОКТР № 122022200226-3 «Прорывные поисковые лаборатории "Системы связи"» в рамках реализации государственной программы поддержки университетов «Приоритет 2030», заведующего кафедрой Антенн и радиопередающих устройств (АиРПУ), д.т.н., профессора Ю.В. Юханова,

Члены комиссии:

Демьяненко А.В.

Мерглов И.В.

Семенихина Д.В.

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Титовой Д.Е.:

- строгое решение на основе ковариантных уравнений Максвелла и импедансных граничных условий задачи возбуждения электромагнитного поля во вращающихся волноводах: решение общей задачи возбуждения вращающегося цилиндрического волновода; решение граничной задачи;
- результаты численных исследований релятивистского эффекта расщепления критических частот вращающихся волноводов: частотные характеристики вращающегося цилиндрического волновода для случая возбуждения электромагнитного поля элементарным электрическим вибратором;

внедрены в НИОКТР № 122022200226-3.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ КОМИССИИ:

Руководитель НИОКТР № 122022200226-3,
д.т.н., профессор, зав. каф. АиРПУ ИРТСУ

Юханов Ю.В.

ЧЛЕНЫ КОМИССИИ:

Руководитель Дивизиона (отдела) "Приборы,
комплексы и системы" Передовой инженерной
школы ЮФУ, к.т.н.

Демьяненко А.В.

Старший научный сотрудник Центра
инженерных разработок "Микроволновые
технологии электродинамических структур"
Передовой инженерной школы ЮФУ, к.т.н.

Мерглодов И.В.

Профессор кафедры АиРПУ ИРТСУ, д.т.н.,
доцент

Семенихина Д.В.