МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

На правах рукописи

Корнута Анжелика Александровна

АНАЛИЗ СТРУКТУР НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **Лукьяненко Владимир Андреевич**
Официальные оппоненты:	**Муравник Андрей Борисович**, доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы"
	Моргулис Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО "Южный федеральный университет"

Защита состоится 16 января 2024 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090 г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21Ж; и на сайте https://hub.sfedu.ru/diss/show/1319463/

Автореферат разослан «   » декабря 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   В.Д. Кряквин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Математическое описание сложных процессов различной природы реализуется с помощью нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, функционально-дифференциальных, а также нелинейных интегральных уравнений. Как раздел математики, прикладная нелинейная динамика (ПНД) с широкими междисциплинарными связями сформировалась и бурно развивается. В рамках ПНД исследуется поведение решений нелинейных уравнений с параметрами. Рассматриваются вопросы устойчивости, бифуркации решений, возникновения неоднородных в пространстве структур, квазипериодических решений и др. При этом используются различные теории, методы и алгоритмы.

Именно модели нелинейной оптики позволяют наблюдать богатый набор систем, обладающих свойством самоорганизации, управление которыми происходит путем воздействия на внутренние параметры системы и может быть реализовано в реальных экспериментах в виде широкого спектра изменений светового поля. Одной из таких систем является оптическое устройство, которое представляет собой некоторый специально устроенный внешний контур, называемый "контуром обратной двумерной связи состоящий из различных оптических устройств (линз, призм и др.) и тонкого слоя нелинейной среды.

Эксперименты М. А. Воронцова, В. Ю. Иванова, А. В. Ларичева показали, что воздействие внешнего контура обратной связи, которое выполняется входящими в его состав оптическими устройствами, приводит к существенному видоизменению нелинейной динамики системы. Генерация сложных пространственно-временных структур светового поля (автоволн, стационарных и движущихся структур, оптических вихрей и др.) может быть получена, как результат использования достаточно простых преобразований, а именно: поворота, сжатия, отражения пространственных аргументов.

Возобновление интереса к данным оптическим системам вызвано возможностью использования оптических эффектов в информационных технологиях, прежде всего с точки зрения создания устройств для обработки больших данных. В последнее время особый интерес вызывают оптические вихри (винтовые дислокации волнового фронта), которые возникают, в частности, в турбулентной атмосфере, через которую распространяется пучок лазерного излучения. Поэтому анализ математических моделей, возникающих при описании нелинейных оптических систем, которые обладают возможностью управления преобразованием пространственных аргументов с помощью устройств в контуре обратной связи, является актуальным и с теоретической и с практических точек зрения.

В зависимости от того, как реализуется воздействие контура обратной связи, динамика оптической системы может быть описана либо обыкновенным дифференциальным уравнением, либо параболическим функционально-дифференциальным уравнением (ФДУ) с преобразованием пространственных переменных искомой функции, которое в общем случае может сопровождаться запаздыванием в системе. В этом случае управляемое изменение (фазовая модуляция) световой волны $u(x,t)$, которая в пределах области

$S \subset R^2$ проходит через тонкий слой нелинейной среды керровского типа, представляется математической моделью

$$\tau_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\triangle u(x,t) - u(x,t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x,t)), \tag{1}$$

где $x \in S$, $t \geq 0$. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями на границе области S и начальными условиями. Здесь $\triangle$ — оператор Лапласа, $D > 0$ — коэффициент диффузии, $K > 0$ — коэффициент пропорциональный интенсивности входного светового поля, $\gamma \in (0,1)$ — коэффициент обратной связи, $Qu(x,t) = u(q(x),t)$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственной переменной.

В диссертационной работе проводится бифуркационный анализ ФДУ параболического типа (1) без запаздывания при $\tau_1 = 1$ в замкнутой области S для случая круговой области (круг, кольцо, окружность (тонкое кольцо)), бесконечной полосы и прямоугольной области, где в качестве преобразования Q пространственных переменных искомой функции $u(x,t)$ выбраны поворот на некоторый угол, радиальное сжатие или отражение с условием периодичности и с краевыми условиями второго рода или с условиями косой производной на границе ∂S для полосы и прямоугольника.

Степень научной разработанности темы. Исследования функционально-дифференциальных уравнений имеет большую историю, начиная с работ А. Д. Мышкиса, Р. Беллмана, К. Кука, классической работы Дж. Хейла, цикла работ А. Л. Скубачевского и его учеников, Е. М. Варфоломеева, А. Б. Муравника, С. А. Кащенко, А. В. Разгулина и его учеников, А. Н. Куликова, Д. А. Куликова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Ю. С. Колесова, Н. Х. Розова, Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничего, Е. П. Белана и его учеников, О. Б. Лыковой и др.

Целью данной работы является выявление и описание условий, приводящих к появлению в начально-краевой задаче для ФДУ (1) новых структур; построение неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений; нахождение их асимптотических представлений с использованием метода центральных многообразий и согласованного с ним метода Галеркина, а также бифуркационный анализ полученных решений для круговых областей, бесконечной полосы и прямоугольника в зависимости от значений параметров — коэффициента диффузии (малый параметр) и коэффициента нелинейности среды (большой параметр).

Достижение поставленной цели требует решения следующих задач:

1. На кольце, круге, окружности (тонком кольце), бесконечной полосе и прямоугольнике описать в зависимости от значений бифуркационных параметров условия возникновения и существования 2π-периодических стационарных неоднородных в пространстве структур и периодических по времени структур ФДУ параболического типа с преобразованием пространственных переменных (оператором поворота, оператором сжатия, оператором отражения) с краевыми условиями второго рода. Провести бифуркационный анализ возникающих новых структур и исследовать их устойчивость при варьировании значений бифуркационных параметров.

2. На кольце, круге, окружности (тонком кольце), бесконечной полосе и прямоугольнике, используя метод центральных многообразий и согласованный с ним метод Галеркина, в зависимости от значений параметров получить асимптотическое представление неоднородных в пространстве стационарных структур, а также периодических по времени структур, провести анализ их устойчивости и выполнить численные эксперименты.

3. Выявить условия, при которых происходит возникновение в рассматриваемой задаче на окружности метаустойчивых структур.

4. Показать существование и получить асимптотическую форму стационарных неоднородных в пространстве структур в задаче с косой производной для бесконечной полосы и для прямоугольника, возникающих при изменении значений бифуркационных параметров.

Объект исследования — квазилинейные ФДУ параболического типа с оператором преобразования пространственных переменных, дополненные краевыми условиями Неймана или условиями с косой производной.

Предмет исследования — стационарные неоднородные в пространстве и периодические по времени структуры, бифурцирующие при потере устойчивости одного из однородных в пространстве решений параболического ФДУ в пределах кольца, круга, окружности (тонкого кольца), полосы и прямоугольника с операторами поворота, радиального сжатия и отражения пространственных переменных, а также медленно меняющиеся (метаустойчивые) структуры в уравнении на окружности.

Методы исследования. Для решения поставленных задач были использованы методы функционального анализа, качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории бифуркаций и асимптотические методы, в частности, метод центральных многообразий и метод Галеркина. Для проведения вычислительных экспериментов и визуализации результатов использован пакет Wolfram Mathematica 11.3.

Научная новизна. Проведен бифуркационный анализ начально-краевой задачи для параболического ФДУ с преобразованием пространственных аргументов (оператором поворота, оператором поворота и сжатия) на кольце, (оператором поворота) на круге и окружности, (оператором отражения) на прямоугольнике, при условии, когда в качестве бифуркационного параметра рассматриваются коэффициент диффузии или коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего светового поля. Доказано существования стационарных неоднородных в пространстве структур и периодических по времени структур. Исследованы форма и устойчивость стационарных неоднородных в пространстве структур и периодических по времени структур при непрерывном изменении бифуркационных параметров. Выявлены условия возникновения в параболическом ФДУ с оператором поворота пространственной переменной на окружности медленно меняющихся структур.

Используя преобразования Лапласа и Фурье, получено интегральное представление задачи с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косой производной. Доказано существование и получена асимптотическая форма решения задачи на прямоугольнике с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косой производной и условием периодичности.

Разработаны алгоритмы проведения численных экспериментов для задач, представленных в работе.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Результаты аналитического и численного бифуркационного анализа начально-краевой задачи с условиями Неймана для параболического ФДУ с преобразованием пространственных аргументов (оператором поворота, оператором поворота и сжатия) на кольце, (оператором поворота) на круге и окружности, при условии, когда в качестве бифуркационного параметра рассматриваются коэффициент диффузии или коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего светового поля. Доказательство существования стационарных неоднородных в пространстве структур и периодических по времени структур.

2. Построение асимптотической формы, а также результаты анализа устойчивости стационарных неоднородных в пространстве структур и периодических по времени структур при непрерывном изменении бифуркационных параметров. Условия возникновения в задаче на окружности с оператором поворота пространственной переменной медленно меняющихся структур и описание их динамики.

3. Результаты аналитического и численного анализа начально-краевой задачи с условиями с косой производной для параболического ФДУ с преобразованием инволюции на полосе и на прямоугольнике, при условии, что в качестве бифуркационного параметра рассматриваются коэффициент диффузии. Доказательство существования стационарных неоднородных в пространстве структур. Представление задачи на бесконечной полосе с краевыми условиями с косой производной в виде нелинейного интегрального уравнения.

4. Доказательство существования и трехмодовая аппроксимация решения задачи на прямоугольнике с преобразованием инволюции и краевыми условиями с косой производной и условием периодичности.

5. Результаты проведения численных экспериментов для задач, представленных в работе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Исследование посвящено изучению процессов структурообразования в начально-краевой задаче для ФДУ параболического типа с преобразованием переменных. Работа имеет теоретическую направленность и может быть полезна для исследования задач в области нелинейной оптики. Полученные результаты дополняют и развивают теорию ФДУ параболического типа, могут быть использованы для построения алгоритмов решения краевых задач, а также при исследовании различных оптических эффектов, важных для развития информационных технологий, при планировании реальных экспериментов по нелинейной оптике в специальных оптических системах с обратной связью.

Степень достоверности результатов. Степень достоверности результатов проведенных исследований обеспечивается строгостью математических доказательств, использованием проверенного математического аппарата: методов функционального анализа, качественной теории полулинейных параболических дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории бифуркаций; метода центральных многообразий и метода Галеркина. Полученные результаты согласуются с результатами других авторов: Е. П. Белана, Е. М. Варфоломеева, А. Б. Муравника, А. В. Разгулина, А. С. Скубачевского, Ю. А. Хазовой и др.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены и обсуждались на 18 международных, всероссийских и региональных конференциях, а именно: Международная конференция "Метод функций Ляпунова MFL-2014" (г. Алушта, 2014 г.), Крымская осенняя математическая школа КРОМШ (2014-2019 гг., 2021-2023 гг.), Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" (г. Ростов-на-Дону, 2016 г., 2017 г., 2021 г., 2023 г.), Всероссийская научно-практическая конференция "Математика. Информатика. Компьютерные науки. Моделирование. Образование" (МИКМО) (г. Симферополь, 2017-2019 гг.), Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Уравнения типа свертки в науке и технологиях" (ECTST-2019), посвященная 90-летию со дня рождения Ю. И. Черского (п. Мисхор, 2019 г.).

Благодарности. С чувством глубокой признательности автор посвящает данную работу памяти своего научного руководителя доктора физико-математических наук профессора Евгения Петровича Белана, при активном участии которого были получены первые результаты, представленные в диссертации. Выражаю благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук доценту Владимиру Андреевичу Лукьяненко за ценные советы по продолжению работы, а также за внимательное отношение к обсуждению проблем и результатов исследования.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты по теме диссертации изложены в 22 печатных изданиях. Публикации полностью соответствуют теме диссертационного исследования и раскрывают её основные положения. Научные статьи [1-4] опубликованы в журналах из списка, рекомендованного диссертационным советом ЮФУ801.01.02 при ФГАОУ ВО "Южный федеральный университет" и Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации. Научные статьи [2-5] опубликованы в журналах, индексированных в МБД Scopus, Web of Science. Научные статьи [6-8] индексированы в РИНЦ. Остальные научные статьи опубликованы в материалах и сборниках тезисов конференций и приводятся в отдельном списке.

Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ [2-5, 8, 21, 22] в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

На базе пакета Wolfram Mathematica 11.3 составлены и протестированы алгоритмы проведения численных экспериментов и визуализации полученных результатов для каждой задачи, представленной в диссертационном исследовании.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–02-2023-1799.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка иллюстраций, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 143 страницы с 21 рисунком. Список литературы содержит 141 наименование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение раскрывает сущность и состояние проблемы, ее значимость. Обосновывается актуальность темы, формулируются цель и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту, а так же практическое значение полученных результатов и апробация работы.

В **главе 1** описывается научная разработанность проблемы и приводится постановка задач, исследуемых в диссертационной работе.

Рассматривается параболическое ФДУ (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\triangle u - u + f(Qu), \quad t \geq 0, \quad D > 0. \tag{2}$$

Из физической постановки задачи следует, что

$$f(Qu) = K(1 + \gamma \cos Qu), \tag{3}$$

где в качестве оператора Q для круговых областей выбраны либо оператор инволюции, обладающий свойством $Q^p = I, p \in \mathbb{N}$, либо комбинация преобразований поворота и радиального сжатия, для полосы и прямоугольника — оператор отражения относительно одного из пространственных аргументов.

Задача моделирования явлений структурообразования, которые регистрировались в экспериментах, например, периодических по времени структур (решений типа "бегущих" (вращающихся) волн) далека от завершения. Здесь существенную роль, кроме границы области, параметров задачи, организации обратной связи, краевых условий, играет выбор бифуркационного параметра. В отличии от многих исследователей, в работе такими параметрами являются либо коэффициент диффузии D, либо одновременно D и коэффициент пропорциональный интенсивности светового потока K. Изучение процесса структурообразования в указанных задачах актуально как с точки зрения теории нелинейных уравнений параболического типа, так и в связи с разнообразными приложениями в нелинейной оптике.

В качестве области S в работе рассматриваются:

1) кольцо $S = S^r = \{(r,\theta)|\ 0 < r_1 \le r \le r_2;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$;

2) круг $(r_1 = 0)$ $S = S^c = \{(r,\theta)|\ 0 \le r \le r_2;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$;

3) окружность $S = S^1 = \{(r,\theta)|\ 0 < r_1 \le r \le r_2;\ r_2 - r_1 = \delta \ll 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$;

4) бесконечная полоса $S = S^l = \{(x,y)|\ x \in \mathbb{R}; |y| \le l\}$;

5) прямоугольник $S = S^q = \Big\{(x,y)|\ |x \le d,\ |y| \le l\}$.

Для круговых областей $\triangle u$ — оператор Лапласа задается в полярной системе координат. Для всех указанных круговых областей решение $u(r,\theta,t)$ удовлетворяет условию периодичности $u(r,\theta+2\pi,t) = u(r,\theta,t)$. Для круга и кольца оператор Q может совмещать преобразование радиальной и угловой координат $q(r,\theta) = (\kappa r, \theta + h)$, $0 < \kappa < 1$, $0 < h < 2\pi$. Для окружности оператор Q представляет собой преобразование только угловой координаты $q(\theta) = (\theta + h)$ — поворот. Если рассматривается $Qu = Q_h u = u(r,\theta+h,t)$ — оператор поворота на угол $h = 2\pi/p$ $(p \in \mathbb{N})$, то оператор Q_h является оператором инволюции. В уравнении (2) для полосы и прямоугольника преобразование $Qu(x,y,t) = u(-x,y,t)$. Каждая из перечисленных задач может быть поставлена и решена для всех рассматриваемых в работе областей.

В задаче (2) для круговых областей используются функциональные пространства: $H = H(S) = L_2^r(S)$ — пространства функций из $L_2(S)$, квадратично интегрируемых с весом r, со скалярным произведением и нормой соответственно

$$< u, v >_H = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} u(r,\theta)\overline{v(r,\theta)} r dr d\theta, \quad \|u\|_H^2 = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} |u(r,\theta)|^2 r dr d\theta,$$

здесь $< *, * >$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H; функциональное пространство H^2 — пространство Соболева комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой соответственно

$$< u, v >_{H^2} = < u, v >_H + < (-\triangle)^{1/2} u, (-\triangle)^{1/2} v >_H, \quad \|u\|_{H^2}^2 = < u, u >_{H^2}.$$

Шкалу пространств, порожденную оператором $-\Delta$, с учетом краевых условий обозначим $H^s, s \in \mathbb{Z}_+$. Норма в пространстве H^s определяется формулой $\|u\|_s^2 = < (-\Delta)^s u, u > + < u, u >$.

Вводится пространство Соболева $H^l(S)$ измеримых на S функций, норма в $H^l(S)$ определяется стандартным образом. Пространство $H^l = H^l(S) \bigcap \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = 0 \right\}$ является пополнением пространства бесконечно дифференцируемых на S функций, удовлетворяющих краевому условию по норме $||\cdot||_l$ пространства $H^l(S)$. Обозначим H^{-1} — пространство, сопряженное пространству H^1.

По теореме Соболева имеют место непрерывные вложения $H^1 \subset H \subset H^{-1}$.

Пусть $\boldsymbol{B}$ — банахово пространство. Обозначим $C(\boldsymbol{B})$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на вещественной оси функций со значениями в пространстве $\boldsymbol{B}$. Введем пространство $U = C(\boldsymbol{B}) \bigcap M^2(\boldsymbol{B})$ с нормой $\|u\| = \|u\|_{C(H)} + \|u\|_{M^2(H^1)}$. Оператор $Q : H \to H, Q : H^1 \to H^1$ в правой части уравнения (2), является линейным и ограниченным и $\|Q\|_{Hom(H)} = \kappa^{-1}$, $\|Q\|_{Hom(H)} = \kappa^{-1}$.

В качестве фазового пространства задачи (2) выбирается пространство H^1.

Начально-краевая задача (2) корректно поставлена. Если $u(r, \theta, t)$ решение данной задачи, то функция $u(r, \theta + \alpha, t)$, где $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, также решение (2), следовательно, задача (2) S^1-эквивариантна.

Исследуются вопросы существования и устойчивости решений начально-краевой задачи (2), которые бифурцируют из однородного в пространстве состояния равновесия, определяемого уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{4}$$

Известно, что указанная задача в зависимости от вида преобразования Q обладает богатым набором бифурцирующих структур. Рост K приводит к увеличению количества одновременно существующих корней уравнения (4). Зафиксируем непрерывную ветвь решений уравнения (2) $w = w(K)$. Пусть выполняется

Условие 1.1. Уравнение (4) при $K = \widehat{K}$ имеет такое решение $w = \widehat{w}$, что $1 + \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w} \neq 0$.

Выполнение условия 1.1, в силу теоремы о неявной функции, обеспечивает существование в окрестности точки $\widehat{K}$ аналитической функции $w = w(\widehat{K} + \nu) = w(\nu)$, $w(0) = \widehat{w}$, $w'(0) = \dfrac{1 + \gamma \cos \widehat{w}}{1 + \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w}}$, удовлетворяющей уравнению (4) при $K = \widehat{K} + \nu$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть $w = w(x, t), x \in S$ — какое-либо решение уравнения (2), обозначим $u = w + v$, где $v = v(x, t)$ — новая неизвестная функция. Тогда относительно v получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D \triangle v - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qv, Qw), \tag{5}$$

где

$$f(Qv, Qw) = K\gamma \left[\cos Qw \left(-\frac{(Qv)^2}{2!} + \frac{(Qv)^4}{4!} - \dots \right) - \sin Qw \left(-\frac{(Qv)^3}{3!} + \frac{(Qv)^5}{5!} - \dots \right) \right].$$

Сохраняя в разложении $f(Qv, Qw)$ конечное число членов ряда, реализуем ряд модельных уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \triangle v - v + \Lambda Qv + \Omega Qv^2 - \frac{\Lambda}{6} Qv^3 + \dots, x \in S,\ t \geq 0. \tag{6}$$

где $\Lambda = -K\gamma \sin w$, $\Omega = (1/2)\, K\gamma \cos w$, $x \in S,\ t \geq 0$, с условиями второго рода на границе, начальным условием $v\,(x, 0) = 0$ и условием $2\pi-$периодичности. Здесь и далее многоточием обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости чем v^3.

Рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений типа "бегущая волна", бифурцирующих из однородных в пространстве стационарных решений $u(x,t) = w$, определяемых уравнением (4) при различных значениях параметров уравнения (6).

В первой части **главы 2** рассматривается задача на кольце $S = S^r$, с оператором инволюции $Q = Q_h : Q^p = I, p \in \mathbb{N}$ в контуре обратной связи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\triangle u + K(1 + \gamma \cos Qu), \ x \in S, \ t \geq 0, \tag{7}$$

где $u = u\,(r, \theta, t)$, $Q_h u = u(r, \theta + h, t)$ — преобразование поворота на угол h, например, для $h = 2\pi/p$, с краевыми условиями второго рода, начальным условием $u\,(r, \theta, 0) = u_0\,(r, \theta)$ и условием периодичности $u(r, \theta + 2\pi, t) = = u\,(r, \theta, t)$.

Пусть $w = w(r, \theta, t)$ — одно из решений задачи (7), $u = w + v$, где $v = v(r, \theta, t)$ – новая неизвестная функция. Тогда приходим к начально-краевой задаче

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\triangle v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w),\, r_1 \leq r \leq r_2,\, t > 0, \\ v_r(r_1, \theta, t) = g_1(\theta, t), \ v_r(r_2, \theta, t) = g_2(\theta, t), \\ v\,(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta), \ v\,(r, \theta + 2\pi, t) = v\,(r, \theta, t)\,,\end{gathered} \tag{8}$$

где $f(Q_h w, Q_h v) = K\gamma\,(\cos Q_h w (\cos Q_h v - 1) - \sin Q_h w (\sin Q_h v - Q_h v))$.

Ставится задача получения асимптотического представления для неоднородного в пространстве стационарного решения и периодического по времени решения, которые возникают при потере устойчивости однородного в пространстве решения, определяемого условием 1.1, в также проведения анализа их устойчивости.

В зависимости от предположений о решении w подробно рассмотрены частные случаи задачи (8).

Представим уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(D, K)v + N(Qv), \tag{9}$$

где $L(D, K) = D\Delta v - v - K\gamma \sin w Q_h v, \ N(Qv) = f(Q_h v, w)$.

Известно, что оператор $L(D, K)$ в пространстве H с областью определения H^2 имеет компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр $\left\{\lambda_n\right\}_1^\infty$.

Используя метод разделения переменных для оператора $L(D, K)$, действующего в пространстве $H(S)$, доказаны утверждения о собственных функциях и собственных значениях. В частности, для кольца имеет место

Лемма 2.1. Оператор $L(D, K)$, действующий в пространстве $H(S^r)$, на кольце S^r имеет полную в $H(S^r)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}(r, \theta) = R_{n,m}(\lambda_{n,m} r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ m = 1, 2, \ldots,$$

где $L(D, K)\psi_{n,m}(r, \theta) = (-1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])\psi_{n,m}(r, \theta)$,

$$R_{n,m}(r) = R_{n,m}(\lambda_{n,m} r) = J_n\left(\lambda_{n,m} r\right) \cdot Y_n'\left(\lambda_{n,m} r_1\right) - Y_n\left(\lambda_{n,m} r\right) \cdot J_n'\left(\lambda_{n,m} r_1\right). \tag{10}$$

Здесь J_n, Y_n функции Бесселя первого и второго рода соответственно, порядка n, $\widetilde{\lambda} = \lambda_{n,m}$ – упорядоченные по возрастанию корни уравнения

$$J_n'\left(\widetilde{\lambda} r_1\right) \cdot Y_n'\left(\widetilde{\lambda} r_2\right) - J_n'\left(\widetilde{\lambda} r_2\right) \cdot Y_n'\left(\widetilde{\lambda} r_1\right) = 0. \tag{11}$$

Функции $R(r) = R_{n,m}\left(\lambda_{n,m} r\right)$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \left(\widetilde{\lambda}^2 r^2 - n^2\right) R(r) = 0,\ R'(r_1) = 0,\ R'(r_2) = 0. \tag{12}$$

Норма $R(r)$ определяется равенством

$$d_{n,m}^2 = \frac{2}{\pi^2 \lambda_{n,m}^2 r_1^2}\left[\frac{\pi^2 r_1^2}{4}\left(\lambda_{n,m}^2 r_2^2 - n^2\right)\left(R_{n,m}(r_2)\right)^2 - \left(\lambda_{n,m}^2 r_1^2 - n^2\right)\right]. \tag{13}$$

Собственные значения для оператора $L(D, K)$:

$$\lambda_n^r = -D\lambda_{n,m}^2 - 1 + \Lambda \exp[inh], \tag{14}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots,\ \Lambda = -K\gamma \sin Q_h w = -K\gamma \sin w$ для $w = const$.

В зависимости от значений действительной и мнимой частей λ_n^r могут быть реализованы различные типы решений, бифурцирующие из однородного в пространстве решения, определяемого условием 1.1. В частности, при $Re\lambda_n^r \neq 0,\ Im\lambda_n^r = 0$ происходит бифуркация неоднородных в пространстве стационарных решений, при $Re\lambda_n^r = 0$, $Im\lambda_n^r \neq 0$ — периодических по времени решений.

Уравнение (8), в зависимости от специфики постановки задачи представлено в трех операторных формах $\dfrac{\partial v}{\partial t} = L_j v + N_j,\ j = 1, 2, 3,$ $L_1 v = D\triangle v,$ $L_2 v = D\triangle v - v,$ $L_3 v = D\triangle v - v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v,$ $N_1 = -v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w),$ $N_2 = -K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w),\ N_3 = f(Q_h v, Q_h w)$.

В случае $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ функции Грина G_1, G_2 для операторов L_1, L_2 имеют вид

$$G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) = \frac{\rho}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp[-in(\theta - \varphi)] R_{n,m}(r) R_{n,m}(\rho) \exp[-D\lambda_{n,m}^2 (t - \tau)]}{d_{n,m}(r)^2},$$

$$G_2(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) = \frac{\rho}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp[-in(\theta - \varphi)] R_{n,m}(r) R_{n,m}(\rho) \exp[-\left(1 + D\lambda_{n,m}^2\right)(t - \tau)]}{d_{n,m}(r)^2}.$$

Здесь $R_{n,m}(r)$ определяются равенством (10), $\lambda_{n,m}$ — расположенные по возрастанию корни уравнения (11), $d_{n,m}^2$ определяются равенством (13). Функция G_3 имеет более громоздкий вид.

В случае нелинейных уравнений с операторами $L_j,\ j = 1, 2, 3$ с нулевыми краевыми условиями и ненулевыми начальными условиями использование функции Грина G_j приводит к нелинейным уравнениям следующего вида

$$v_j(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_j(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau)[N_j(v(\rho, \varphi, \tau)) + v_0(\rho, \varphi)\delta(\tau)] d\varphi \rho d\rho d\tau,$$

где $j = 1, 2, 3$ Далее рассматривается задача с оператором L_3.

Действительная часть λ_n^r (14) содержит параметры K, γ, w, D. В качестве бифуркационного параметра рассматривается коэффициент диффузии D. Параметр $\Lambda = -K\gamma \sin w$ считается фиксированным. Рассмотрим случай $Re\lambda_n^r \neq 0$ для одной из модельных задач (8) с условиями второго рода на границе

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = 0. \tag{15}$$

Далее будем считать, что $h = \pi/3$ (аналогично можно рассмотреть другие случаи). Выберем теперь K так, чтобы выполнялось

Условие 2.1. $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Пусть $D_{s,m} = (-1 - (-1)^s \Lambda)/\lambda_{3s,m}$, $s = 1, 2, \dots$ — критические значения бифуркационного параметра. Используя формализм метода центральных многообразий, в окрестности $D_{1,1}$ доказана теорема о существовании и асимптотической форме неоднородного в пространстве стационарного решения

Теорема 2.1. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$, существует $\mu > 0$, такое что при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра D, удовлетворяющих неравенству $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$, существует неоднородное в пространстве стационарное решение $\varphi(r, \theta, D)$ задачи (8)

$$\begin{gathered}\varphi(r, \theta, D) = zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2 P_6(r, D) \cos 6\theta + \\ + z^3 P_9(r, D) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, D) \mid_{z=z(D)},\end{gathered} \tag{16}$$

$$P_6(r, D) = \frac{\Omega\gamma_1}{2\,(2\lambda_3^r - \lambda_6^r)\, d_{6,1}^2} \cdot R_{6,1}(r),$$

$$P_9(r, D) = -\frac{1}{(3\lambda_3^r - \lambda_9^r)\, d_{9,1}^2} \left[\frac{\Omega^2 \gamma_1 \gamma_2}{(2\lambda_3^r - \lambda_6^r)\, d_{6,1}^2} + \frac{\gamma_4}{4}\right] \cdot R_{9,1}(r),$$

здесь $\xi(z, r, \theta, D) = O(|z|^4)$, $z(D) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_3^r(D) z + \frac{1}{d_{3,1}^2} \left[\frac{\Omega^2 \gamma_1^2}{2\,(2\lambda_3^r - \lambda_6^r)\, d_{6,1}^2} - \frac{3\gamma_4}{4}\right] z^3 + \dots, \tag{17}$$

где $R_{3s,1}$ и $d_{3s,1}^2$, $(s = 1, 2, 3)$ определяются равенствами (10) и (13) соответственно,

$$\gamma_1 = \int\limits_{r_1}^{r_2} R_{3,1}^2(r) R_{6,1}(r) r dr,\ \gamma_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} R_{3,1}^4(r) r dr,\ \gamma_3 = \int\limits_{r_1}^{r_2} R_{3,1}(r) R_{6,1}(r) R_{9,1}(r) r dr,$$

$$\gamma_4 = \int_{r_1}^{r_2} R_{3,1}^3(r) R_{9,1}(r) r dr.$$

Решение $\varphi(r, \theta, D)$ — орбитально устойчиво.

Используя пакет Wolfram Mathematica 11.3, построены приближенные стационарные решение $\varphi(r, \theta, D)$ задачи (8), определяемые равенством (16), для $\Lambda = -3/2$ и различных значений параметр D.

Для построения приближенных решений при значениях бифуркационных параметров, отходящих от критических значений, использованный в доказательстве теоремы 2.1

метод центральных многообразий дополняется согласованным с ним методом Галеркина, в соответствии с которым приближенные решения представляются в виде

$$\varphi^*(r,\theta,D)=\sum_{k=1}^{N}\left(z_k\exp[ik\theta]+\overline{z}_k\exp[-ik\theta]\right)R_{k,1}(r), \tag{18}$$

где $z_k,\overline{z}_k$ — комплексно сопряженные выражения.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. При выполнении условий 1.1 и 2.1 для $h=\pi/3$ существует непрерывное по D неоднородное в пространстве стационарное решение $\varphi^*(r,\theta,D)$ уравнения (6)

$$\varphi^*(r,\theta,D)=\sum_{k=1}^{[N/3]}z_{3k}(D)\cos[3k\theta]R_{3k,1}(r), \tag{19}$$

где $z_{3k}(D)$ определяется системой (17).

В качестве примера построена трехмодовая аппроксимация неоднородного в пространстве стационарного решения задачи (8) и проведены численные эксперименты для различных значений параметров.

Рассматривается ситуация, когда однородное в пространстве решение при изменении параметров в задаче (D,K) теряет устойчивость колебательным образом. В этом случае возникает периодическое по времени решение типа "бегущая волна".

В кольце S^r для случая комбинации преобразований поворота и радиального сжатия $Qu(r,\theta,t)=u(\kappa r,\theta+h,t)$, $0<\kappa<1$ рассматривается начально-краевая задача (8) с однородными начальными и краевыми условиями. Рассматриваем задачу, считая бифуркационными параметрами D и K, при выполнении следующих условий.

Условие 2.2. $\Lambda<\kappa^{-1}$.

Условие 2.3. Существуют $n\in Z_+$, действительные положительные $\widehat{D},\widehat{K},\omega_0\neq 0$ такие, что выполняется равенство $-\widehat{D}\lambda_{n,m}^2-1-\widehat{K}\gamma\sin w\exp[inh]\delta_{n,m}=-i\omega_0$, где $\delta_{n,m}=\int\limits_{r_1}^{r_2}R_{n,m}\left(\lambda_{n,m}r\right)R_{n,m}\left(\lambda_{n,m}\kappa r\right)\,rdr.$

Используя равенства $D=\widehat{D}+\mu$, $K=\widehat{K}+\nu$, перейдем к параметрам μ и ν. Получим

$$\lambda_n(\mu,\nu)=-(\widehat{D}+\mu)\lambda_{n,m}^2-1-(\widehat{K}+\nu)\gamma\sin w\exp[inh]\frac{\delta_{n,m}}{d_{n,m}^2}. \tag{20}$$

Пусть выполняются следующие условия.

Условие 2.4.

1. Необходимое условие бифуркации устойчивых структур: $Re\lambda_n(0,0)\leq 0$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

2. Условие, определяющее Хопф-Хопф бифуркацию: при $\mu=0$, $\nu=0$ существует ровно две пары собственных значений λ_{n_1}, λ_{n_2}, для которых $Re\lambda_{n_i}=0$, $i=1,2$.

3. Условие регулярности: $\det\dfrac{\partial(Re\lambda_{n_1},Re\lambda_{n_2})}{\partial(\mu,\nu)}\neq 0$.

Доказана теорема о существовании в окрестности критических значений бифуркационных параметров экспоненциально устойчивого периодического по времени решения.

Рассмотрена двухмодовая аппроксимация вращающихся структур типа "бегущая волна" в задаче (8) на кольце с оператором инволюции, которые рождается в результате бифуркации Андронова-Хопфа при наибольшем критическом значении параметра $D = D^* : \{Re\lambda(D^*) = 0\}$ из теряющего колебательным образом устойчивость нулевого решения системы.

Для проведения численных экспериментов использованы построения, основанные на методе Галеркина.

В первой части **главы 3** рассматривается начально-краевая задача для параболического ФДУ с преобразованием инволюции пространственной переменной на S^c:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\triangle u + K(1+\gamma\cos Qu),\ x\in S^c,\ t\geq 0,\\ u\left(r,\theta,0\right) = u_0\left(r,\theta\right),\\ u\left(r,\theta+2\pi,t\right) = u\left(r,\theta,t\right),\end{gathered} \tag{21}$$

где $u = u\left(r,\theta,t\right)$, $\triangle u$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, $Q_h u = u(r,\theta+h,t)$, например, для $h = 2\pi/p$, с условиями второго рода на границе.

Доказаны утверждения аналогичные результатам главы 2 для кольца.

Во второй части **главы 3** работы рассматривается начально-краевая модельная задача (6) на окружности S^1 с оператором инволюции $Q_h u(\theta,t) = u(\theta+h,t)$.

В окрестности одного из ее однородных в пространстве решений $u\left(\theta,t\right) = w$, определяемых (4), рассматриваются вопросы существования, асимптотической формы и устойчивости неоднородных в пространстве стационарных решений задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + v = D^2 v_{\theta\theta} + \Lambda\left(\mathrm{Q}_h v + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} w\left(\mathrm{Q}_h v\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\mathrm{Q}_h v\right)^3 + O\left(v^4\right)\right),\\ v\left(\theta+2\pi,t\right) = v\left(\theta,t\right), v(\theta,0) = v_0(\theta), t>0.\end{gathered} \tag{22}$$

где $\Lambda = -K\gamma\sin w$.

Доказано утверждение о собственных функциях и собственных значения оператора $L(D,K)$ ((9)).

Собственные значения оператора $L(D,K)$:

$$\lambda_n = -1 - Dn^2 + \Lambda\exp[inh], \tag{23}$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\Lambda = -K\gamma\sin Q_h w = -K\gamma\sin w$ для $w = const$.

Для бифуркационного параметра D критические значения $D_n = \left(-1-\Lambda\right)/n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Для D из левой полуокрестности D_1 доказана теорема о существовании неоднородного в пространстве орбитально устойчивого стационарного решения.

Отметим, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру D характер. Поэтому при углублении D в область надкритичности для дальнейших исследований использован метод Галеркина.

Показано, что в исходной задаче для малых D имеются медленно меняющиеся со временем решения типа внутреннего переходного слоя. Получены решения в виде метаустойчивых структур, которые в течении длительного промежутка времени меняются медленно, а затем за сравнительно небольшой промежуток времени переходят в окрестность одного из устойчивых решений.

Установлено, что при средних значениях параметра D имеют место седло-узловые бифуркаций. Описан один из вариантов эволюции метаустойчивых структур типа внутреннего переходного слоя с шестью точками перехода.

В **четвертой главе** рассматривается ФДУ (1) с оператором инволюции (отражение по переменной x) на бесконечной полосе и на прямоугольнике с краевыми условиями с косой производной. Использование преобразований Фурье по переменной x и Лапласа по переменной t позволило представить данную задачу на полосе в виде нелинейного интегрального уравнения, что в частном случае дает возможность организовать итерационный процесс построения его решения.

Для задачи на прямоугольнике решена спектральная проблема и в случае выполнения условия периодичности по переменной x и краевых условий с косой производной по переменной y доказана теорема о существовании и асимптотической форме неоднородных в пространстве решений, которые возникают при изменении значений бифуркационных параметров.

В **заключении** приводятся основные результаты и выводы диссертационной работы: представлены результаты исследования соискателя, направленные на выявление характерных особенностей структур начально-краевой задачи параболического уравнения с преобразованием пространственной переменной, основанные на методах центрального многообразия и согласованного с ним метода Галеркина. Эффектам реализованным экспериментально в оптических системах с обратной связью, соответствуют три характерные задачи. А именно, начально-краевая задача параболического типа с оператором поворота и радиального сжатия на кольце, начально-краевая задача параболического типа с оператором поворота на круге и окружности, а также начально-краевая задача параболического типа с оператором инволюции и краевыми условиями с косой производной для бесконечной полосы и прямоугольника.

Основные итоги представленной работы можно сформулировать в виде следующих положений

1. На кольце, круге и окружности для начально-краевой задачи параболического типа с условиями Неймана на границе и условиями 2π-периодичности с преобразованиями поворота и радиального сжатия пространственных переменных на основе метода центральных многообразий доказаны теоремы о существовании в окрестности однородного в пространстве решения неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений. Получены их аналитические представления.

2. На основе метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий, определены форма и характер устойчивости бифурцирующих решений при уменьшении значений бифуркационного параметра. Проведен спектральный анализ соответствующих неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений при изменении бифуркационного параметра.

3. Получены условия возникновения медленно меняющихся (метаустойчивых) структур в результате седло-узловых бифуркаций в начально-краевой задаче параболического типа с условиями Неймана на границе и условиями 2π-периодичности с преобразованиями поворота на окружности. Описана динамика метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) с течением времени.

4. Получено представление начально-краевой задачи с оператором инволюции с краевыми условиями с косой производной для полосы в виде нелинейного интегрального уравнения. Предложена формула для организации итерационного процесса нахождения решения.

5. Для начально-краевой задачи параболического типа с условиями с косой производной на прямоугольнике получены собственные функции и собственные значения соответствующей линеаризованной задачи для краевых условий двух типов: с косой производной по переменным x, y и с условием периодичности по x и с косой производной по y. Получена трехмодовая аппроксимация неоднородного в пространстве стационарного решения начально-краевой задачи на прямоугольнике с условием периодичности по x и с косой производной по y.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня изданий совета ЮФУ801.01.02 и перечня ВАК, баз Scopus и Web of Science

[1] Корнута, А. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения / А. А. Корнута // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — Т. 3 (28). — С. 49-62. — URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_26153986_15049264.pdf.

[2] Kornuta, A. A. Stable Structures of Nonlinear Parabolic Equations with Transformation of Spatial Variables / A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42. — P. 911-930. — DOI : https://doi.org/10.1134/S1995080221050073.

[3] Kornuta, A. A. Stability of Structures and Asymptotics of Nonlinear Parabolic Type Equations Solutions with Transformation of Arguments / A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42. — P. 3468-3485. — DOI : https://doi.org/10.1134/S1995080222020123.

[4] Корнута, А. А. Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2022. — Т. 30, №2. — С. 132-151. — URL: https://andjournal.sgu.ru/sites/andjournal.sgu.ru/files/text-pdf/2022/03/2-kornuta_132-151.pdf.

[5] Корнута, А. А. Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и косой производной / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 276-288. — DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288.

Статьи, опубликованные в прочих изданиях

[6] Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности с поворотом пространственной переменной / А. А. Корнута // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1-2. — С. 59-75. — URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_28377224_16971871.pdf.

[7] Корнута, А. А. Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности / А. А. Корнута // Динамические системы. — 2016. — Т. 6 (34), № 4, — С. 311-322. — URL: http://dynsys.cfuv.ru/wp-content/uploads/2017/12/002kornuta.pdf.

[8] Корнута, А. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Динамические системы. — 2019. — Т. 9 (37), № 4. — С. 390-409. — URL: http://dynsys.cfuv.ru/wp-content/uploads/2021/03/Dinamicheskie-cistemy-4-2019-view-72-91.pdf.