

Южный математический институт – филиал  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Федерального научного центра  
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

На правах рукописи

**Нестеров Сергей Анатольевич**

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ  
ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

1.1.8 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:

Заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук, профессор  
Ватульян Александр Ованесович

Ростов-на-Дону – 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	9
<b>ГЛАВА 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ ТЕЛ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ</b> .....	33
<b>Часть 1. Решение динамических связанных задач термоупругости для неоднородных тел</b> .....	33
1.1 Постановка динамической связанной задачи термоупругости для неоднородных тел.....	34
1.2 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного стержня.....	36
1.2.1 Постановка задачи для стержня.....	36
1.2.2 Сведение к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.....	38
1.2.3 Численные результаты решения задачи для стержня.....	42
1.3 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородной трубы.....	47
1.3.1 Постановка задачи для трубы.....	47
1.3.2 Решение задачи для трубы.....	49
1.3.3 Численный анализ результатов.....	51
1.4 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного конечного цилиндра.....	55
1.4.1 Постановка задачи для конечного цилиндра.....	55
1.4.2 Совместное применение метода разделения переменных и метода пристрелки.....	57
1.4.3 Численные результаты решения задачи.....	60
1.5 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника.....	63

1.5.1	Постановка задачи для прямоугольника.....	63
1.5.2	Решение задачи для прямоугольника .....	65
1.5.3	Численные результаты .....	68
<b>Часть 2.</b>	<b>Решение динамических связанных задач термоэлектроупругости для неоднородных тел.....</b>	<b>71</b>
1.6	Постановка динамической связанной задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел.....	72
1.7	Динамическая связанная задача термоэлектроупругости для неоднородного стержня.....	75
1.7.1	Постановка задачи термоэлектроупругости для стержня.....	75
1.7.2	Решение задачи термоэлектроупругости для стержня.....	76
1.7.3	Результаты расчетов .....	77
1.8	Динамическая связанная задача термоэлектроупругости для неоднородного цилиндра.....	80
1.8.1	Постановка задачи термоэлектроупругости для цилиндра.....	80
1.8.2	Решение задачи термоэлектроупругости для цилиндра.....	82
1.8.3	Численные результаты .....	83
<b>ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ И СЛОИСТЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОЙ МЕХАНИКИ.....</b>		<b>87</b>
<b>Часть 1.</b>	<b>Решение статических задач градиентной теории упругости и термоупругости для составных и слоистых тел.....</b>	<b>87</b>
2.1	Основные положения градиентной теории упругости.....	88
2.2	Градиентная модель деформирования составного изотропного стержня.....	89
2.2.1	Постановка градиентной механики для составного изотропного стержня.....	89
2.2.2	Получение асимптотического решения методом Вишика-Люстерника.....	92

2.2.3	Результаты вычислений напряженно-деформированного состояния составного стержня.....	98
2.3	Градиентная модель изгиба составной балки Эйлера-Бернулли.....	102
2.3.1	Постановка задачи.....	102
2.3.2	Результаты вычислений.....	104
2.4	Градиентная модель деформирования изотропного полого слоистого цилиндра .....	106
2.4.1	Постановка задачи для слоистого изотропного цилиндра.....	106
2.4.2	Асимптотическое решение задачи методом Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна.....	108
2.4.3	Численные результаты.....	111
2.5	Градиентная модель термоупругого деформирования слоистой полосы.....	115
2.5.1	Постановка задачи для слоистой полосы.....	115
2.5.2	Решение задачи для слоистой полосы.....	116
2.5.3	Результаты вычислений .....	119
<b>Часть 2. Решение статических задач градиентной теории электроупругости для составных и слоистых тел.....</b>		
2.6	Основные положения градиентной теории электроупругости.....	122
2.7	Градиентная модель деформирования составного электроупругого стержня.....	124
2.7.1	Постановка задачи для составного электроупругого стержня.....	124
2.7.2	Решение упрощенных задач.....	126
2.7.3	Численные результаты .....	127
2.8	Градиентная модель деформирования сплошного двухслойного пьезокерамического цилиндра .....	130
2.8.1	Постановка задачи для сплошного электроупругого цилиндра.....	130

2.8.2	Решение задачи.....	130
2.8.3	Численные результаты.....	132
<b>ГЛАВА 3. КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ</b>		
<b>ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПЕРВОЙ ПОСТАНОВКЕ.....</b>		
3.1	Первая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для неоднородных тел.....	134
3.2	Операторные уравнения для решения обратной задачи термоупругости в трансформантах Лапласа.....	135
3.2.1	Обобщенное соотношение взаимности .....	136
3.2.2	Слабая постановка прямой задачи .....	137
3.3	Итерационная схема решения обратных задач термомеханики.....	139
3.4	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного стержня в первой постановке.....	140
3.4.1	Первая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для стержня. Операторные уравнения в трансформантах.....	141
3.4.2	Метод линеаризации.....	142
3.4.3	Решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова А.Н.....	143
3.4.4	Результаты идентификации термомеханических характеристик стержня.....	145
3.5	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородной трубы в первой постановке .....	146
3.5.1	Первая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для трубы. Операторные уравнения в трансформантах.....	146
3.5.2	Результаты идентификации характеристик трубы.....	147
3.6	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного конечного цилиндра в первой постановке .....	149

3.6.1	Первая постановка и операторные уравнения коэффициентной обратной задачи термоупругости для конечного цилиндра.....	149
3.6.2	Результаты поэтапного восстановления двух термомеханических характеристик конечного цилиндра.....	151
3.7	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника в первой постановке.....	152
3.7.1	Постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для прямоугольника. Операторные уравнения в трансформантах.....	152
3.7.2	Результаты вычислительных экспериментов.....	155
<b>ГЛАВА 4. КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ВО ВТОРОЙ ПОСТАНОВКЕ.....</b>		<b>157</b>
4.1	Вторая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для неоднородных тел.....	157
4.2	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного стержня во второй постановке.....	158
4.2.1	Вторая постановка обратной задачи для стержня. Операторные уравнения в оригиналах.....	158
4.2.2	Результаты идентификации одной характеристики стержня.....	159
4.2.3	Постановка задачи об одновременной идентификации двух характеристик стержня. Итерационная схема решения.....	168
4.2.4	Результаты идентификации двух характеристик стержня.....	170
4.3	Коэффициентная обратная задача термоупругости для поперечно неоднородного слоя.....	172
4.3.1	Постановка коэффициентной обратной задачи для слоя на конечном временном отрезке .....	172
4.3.2	Получение упрощенных задач .....	172
4.3.3	Результаты идентификация свойств слоя .....	175

4.4	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородной трубы во второй постановке.....	178
4.4.1	Вторая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для трубы. Операторные уравнения в оригиналах..	178
4.4.2	Результаты идентификации одной характеристики трубы.....	179
4.4.3	Постановка и решение обратной задачи об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик трубы.....	182
4.4.4	Результаты идентификации двух термомеханических характеристик трубы.....	184
4.5	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного конечного цилиндра во второй постановке.....	186
4.5.1	Вторая постановка и схема решения коэффициентной обратной задачи термоупругости для конечного цилиндра .....	186
4.5.2	Результаты поэтапной идентификации термомеханических характеристик конечного цилиндра.....	187
4.6	Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника во второй постановке.....	189
4.6.1	Вторая постановка и схема решения коэффициентной обратной задачи термоупругости для прямоугольника .....	189
4.6.2	Результаты поэтапной идентификации термомеханических характеристик прямоугольника.....	191
<b>ГЛАВА 5. КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ.....</b>		<b>194</b>
5.1	Постановка коэффициентной обратной задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел на конечном временном отрезке. Операторные уравнения.....	194
5.2	Коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости для неоднородного стержня.....	196

5.2.1	Постановка обратной задачи для стержня. Операторные уравнения.....	196
5.2.2	Результаты реконструкции.....	197
5.3	Коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости для поперечно неоднородного слоя.....	198
5.3.1	Постановка обратной задачи для слоя .....	198
5.3.2	Упрощенные задачи.....	200
5.3.3	Схема решения упрощенных обратных задач.....	205
5.3.4	Результаты реконструкции.....	206
5.4	Коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости для неоднородного цилиндра.....	209
5.4.1	Постановка обратной задачи для цилиндра. Операторные уравнения .....	209
5.4.2	Результаты реконструкции.....	211
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>215</b>
	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>216</b>
1.	Прикладная модель термоупругого деформирования прямоугольника с неоднородным покрытием.....	216
2.	Идентификация теплофизических характеристик неоднородного стержня на основе метода алгебраизации.....	220
	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>223</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Если в различных частях твердого тела температура различна, то отдельные его элементы стремятся увеличиться или уменьшиться в размерах на разные величины и в теле возникают сжимающие или растягивающие температурные напряжения. Область науки, в которой изучаются взаимодействующие процессы деформирования и передачи тепла, называется термоупругостью.

Сопряжение полей деформации и температуры постулировали Дюамель в 1838 г. и, независимо от него, Нейман в 1841 г. Обычно тепловые расчеты проводят на основе уравнения теплопроводности параболического типа, в котором используется закон теплопроводности Фурье, при котором скорость распространения тепла бесконечна. В настоящее время для учета конечной скорости распространения тепловых потоков применяется уравнение теплопроводности гиперболического типа Лорда-Шульмана [218]. Однако, уточнения, вносимые гиперболическим уравнением, являются существенными только в случае микроразмерных тел или при большой скорости изменения внешнего теплового воздействия.

Теория температурных напряжений Дюгамеля-Неймана [13, 131, 149] основывается на независимости тепловых и механических эффектов, при этом общая деформация определяется путем «наложения» упругой деформации и тепловой деформации, вызванной только распределением температуры, что подтверждается данными экспериментов для большинства материалов. Однако эффектом связанности нельзя пренебрегать для полимерных материалов, особенно из семейства поливинилацеталей [111]. Поливинилацетали находят широкое применение при производстве электроизоляционных материалов и безосколочных стекол триплекс.

В случае медленных тепловых воздействий для упрощения расчетов применяется квазистатическая постановка задачи термоупругости, при которой процесс распространения термоупругих напряжений является чисто

диффузионным. В случае кратковременных тепловых воздействий, когда скорость изменения температуры достаточно высока (взрыв, воздействие импульсного лазерного излучения), более точную картину распространения термоупругих напряжений дает учет инерционных членов в уравнениях движения. При этом процесс распространения термоупругих напряжений связан с распространением упругих волн.

Впервые динамическую задачу термоупругости исследовала Даниловская В.И., которая в [95] описала термоупругую реакцию на короткое интенсивное тепловое воздействие на поверхности полупространства.

Большой интерес к изучению проблем динамической термоупругости возник в 70-80-е годы XX столетия в связи с развитием лазерной техники и интенсивным внедрением ее в промышленные технологии, биомедицину, метрологию и т.д.

Динамические связанные задачи термоупругости исследовали: Бородин П.Ю., Галанин М.П. [14], Карташов Э.М., Кудинов В.А. [108], Фильштинский Л.А. [110], Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. [93], Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.В. [6, 221-223], Новацкий В. [146, 147], Коваленко А.Д. [111], Карнаухов В.Г. [107], Подстригач Я.С. [151], Кувыркин Г.Н. [115], Hertnarski R.V. [204], Wilms E.V. [263] и др.

Аналитические решения динамических связанных задач термоупругости получены только для некоторых частных случаев. Так, замкнутые решения для бесконечного цилиндра на основе метода обобщенного конечного интегрального преобразования при тепловых граничных условиях 1-го рода получены в [127, 128], а при условиях 2-го рода – в [159].

Одним из основных методов решения нестационарных задач термоупругости является применение интегрального преобразования Лапласа, решение полученной задачи в трансформантах и обращение

трансформант. При этом обращение решений из-за громоздкости формул для трансформант обычно осуществляется численно, например, с помощью модификаций метода Дурбина [168, 190, 191], алгоритма Stehfast [252], квадратурных формул, основанных на использовании ортогональных полиномов [162] или сумм Римана [234].

К связанным задачам термомеханики, кроме задач термоупругости, относятся также и задачи термоэлектроупругости. Основные положения теории термоэлектроупругости были сформулированы Миндлиным Р.Д. в [226]. Большой вклад в развитие термоэлектроупругости также внес Новацкий В. [148]. Интерес к задачам термоэлектроупругости связан с широким использованием пироматериалов при создании сенсорных устройств различного назначения [16, 205, 261]. Аналитические решения задач термоэлектроупругости получены в основном для некоторых однородных тел [19, 20, 94, 160, 238, 241]. Так, в [160] исследуется связанная динамическая задача термоэлектроупругости для бесконечно длинного полого цилиндра на основе аппарата неполного разделения переменных в виде обобщенного биортогонального конечного интегрального преобразования. В настоящее время для решения задач механики связанных полей, в том числе и термоэлектроупругости широко применяется метод конечных элементов (МКЭ) [145, 202].

Для повышения термостойкости изделий применяются теплозащитные покрытия [236]. Если покрытие изготовлено из однородного материала, то из-за различия термомеханических свойств покрытия и подложки, особенно коэффициентов линейного расширения, на поверхности раздела материалов часто возникают области концентрации напряжений. Современной альтернативой однородным покрытиям выступают функционально-градиентные материалы (ФГМ), термомеханические свойства которых являются непрерывными функциями пространственных координат, благодаря чему не возникает концентрации напряжений на поверхности

раздела покрытия и подложки [216, 248, 262]. В работе [228] приводится обзор исследований по свойствам и технологии изготовления ФГМ.

Аналитические решения задач неоднородной теории упругости и термомеханики были получены только для законов неоднородности в виде степенных и экспоненциальных функций [7, 112, 113, 116, 122, 151, 172, 233, 235, 240, 264, 265]. В монографии [122] изложены постановки и решения задач о кручении и изгибе неоднородных брусьев, в работе [7] исследована динамическая задача термоэлектроупругости для полупространства с неоднородным покрытием. В случае произвольных законов неоднородности для решения задач термомеханики применяются численные методы, например, метод конечных элементов [175, 179, 213] или метод конечных разностей [214].

Еще одной важной проблемой является расчет термо-напряженного состояния микроэлектромеханических систем. Применение уравнений классической механики деформируемого твердого тела для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) микрообъектов дает большую погрешность в решении. Обычно такие расчеты проводят на основе градиентной теории упругости (ГТУ), в которой энергия деформаций среды зависит не только от деформаций, но и от их пространственных производных. ГТУ предоставляет возможность более точно описать явления, в которых градиентами деформации пренебрегать нельзя. Особенно эффективно проявляет себя ГТУ при решении задач для тел, содержащих области с высокой концентрацией напряжений, которая может реализовываться вблизи дефектов, в малоразмерных структурах (микрoантилеверах, пленках), в области сопряжения слоистых материалов [124-126]. Однако при этом по сравнению с классической теорией уравнения равновесия обладают повышенным порядком дифференциальных уравнений, а формулировка краевых задач содержит расширенный набор граничных условий.

Наличие масштабных параметров в определяющих уравнениях позволяет применять ГТУ для описания неклассических эффектов [124, 164], суть которых заключается в том, что абсолютные размеры изучаемого объекта оказывают влияние на характер протекающих в нем физических процессов. Для проявления масштабных эффектов размеры образцов должны быть соизмеримы с характерным размером структуры материала.

В середине XX века Тупин [251] и Миндлин [225] предложили модель ГТУ, которая содержит 5 дополнительных параметров, подлежащих определению. В настоящее время для облегчения расчетов широко применяются упрощенные однопараметрические градиентные модели теории упругости [123, 165]. В дальнейшем ГТУ была обобщена на механику связанных полей, в т. ч. градиентную теорию термоупругости [163] и электроупругости [246]. Большой вклад в развитие градиентной механики в дальнейшем внесли работы: Лурье С.А., Соляев Ю.О. [123-126, 220, 223], Ahmadi G., Firoozbakhsh K. [163], Aifantis E.C. [164, 165], Chu L., Dui G. [184], Gao X.L., Park S.K. [196], Li A., Zhou S., Wang B. [217] и др.

В связи с многоэтапным технологическим процессом изготовления ФГМ основной проблемой, возникающей при их использовании, является определение истинных свойств на основе методов неразрушающего контроля, теоретически опирающегося на аппарат коэффициентных обратных задач (КОЗ) термомеханики.

На входе математической постановки обратных задач термомеханики задаются данные о полях температуры и перемещений, измеренные в ходе экспериментов, так называемая дополнительная информация. По особенностям использования дополнительной информации существует несколько типов постановок КОЗ. Для первого типа постановки физические поля измеряются внутри исследуемого объекта [182], а для второго – на части границы тела [188]. Применение второй постановки КОЗ является целесообразным для практической реализации, потому что в настоящее

время активно развивается применение датчиков, позволяющих измерять температуру и механические поля на поверхности тел. Однако обратная задача во второй постановке в отличие от первой является существенно нелинейной.

Обратные задачи, как правило, являются некорректными, т.к. при их решении обычно нарушается одно из условий корректности, выдвинутых Ж. Адамаром (существование, единственность, устойчивость решения) [1].

Исследованию проблем единственности КОЗ теплопроводности и теории упругости посвящено большое количество работ, например [3, 5, 15, 102, 106, 117, 134, 135, 152].

Другой важной проблемой КОЗ является исследование устойчивости решения по отношению к малым изменениям дополнительной информации, определяемой экспериментально.

Основы теории некорректных задач были заложены Тихоновым А.Н. в работе [157]. В дальнейшем некорректные задачи исследовали: Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. [5], Васин В.В., Агеев А.Л. [18], Денисов А.М. [96], Кабанихин С.И. [106], Лаврентьев М.М. [117], Морозов В.А. [134], Романов В.Г. [152] и многие другие. В работе Тихонова А.Н. [158] было сформулировано понятие регуляризирующего алгоритма для некорректно поставленной задачи, а также предложен способ его построения, основанный на введении сглаживающего функционала. В настоящее время широко применяются и другие методы регуляризации, например, метод квазирешений [96], метод регуляризации на компактных множествах [158], метод итерационной регуляризации [117], метод усеченных сингулярных разложений [134].

Обратные задачи теплопроводности и теории упругости в различных постановках достаточно хорошо исследованы.

Большой вклад в разработку методов решения обратной задачи теплопроводности внесли: Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.

[3], Вабищевич П.Н., Денисенко А.Ю. [17], Иванчов Н.И. [102], Клибанов М.В., Данилаев П.Г. [109], Денисов А.М. [96], Кабанихин С.И., Гасанов А., Пененко А.В. [105], Ненарокомов А.В. [166], Победря Б.Е., Кравчук А.С., Аризпе П.А. [150], Isakov V. [206], Lesnic D. [167, 178], Chen W.L., Chou H.M., Yang Y.C. [182], Lam T.T., Yeeng W.K. [214], Mohebbi F., Evans B., Rabczuk T. [227], Sladek J., Sladek V., Wen P.H. [245] и др.

Большинством исследователей решение КОЗ теплопроводности сводится к решению соответствующих задач в экстремальной постановке, что приводит к минимизации функционала невязки, как правило, градиентными методами [3, 105, 132, 178, 243]. Однако эти популярные методы обладают рядом недостатков, к которым относится наличие требований к целевой функции и необходимость многократного обращения к решателю прямой задачи. Другими методами минимизации функционала невязки являются итерационные эвристические алгоритмы, в т.ч. генетические алгоритмы [242] и нейронные сети [8]. Популярность генетических алгоритмов основывается на отсутствии каких-либо условий и ограничений на целевую функцию.

Обратная динамическая задача теории упругости впервые была рассмотрена Алексеевым А.С. [2], исследования которого в дальнейшем продолжили Романов В.Г. [152, 183], Яхно В.Г. [161], Кабанихин С.И. [104] и др. В работе [161] для решения КОЗ теории упругости применяется метод операторов Вольтерра, а в [104] – метод, основанный на регуляризованном обращении разностной схемы.

Обратные задачи теории упругости в дальнейшем исследовали: Бухгейм А.Л. [15], Ватульян А.О. [22, 23, 29, 42, 188], Глушковы Е.В. и Н.В. [97, 98, 192-194, 198-200], Сковорода А.Р. [155], Avril S., Pierron F. [171], Constantinescu A. [205], Jadamba B., Khan A.A., Racity F. [207], Chang J-D., Guo B-Z. [180], Chen J., Gockenbach M.S. [181], Geymonat G., Pagano S. [197], Ji L., McLaughlin J. [209, 224], Lee C.R., Kam T.Y. [215] и др.

КОЗ механики связанных полей для неоднородных тел из-за сложности построения операторных соотношений в настоящий момент изучены недостаточно. Имеется небольшое число работ по определению переменных свойств электроупругих тел стержневых [21, 23] и цилиндрических [12] структур. Решению КОЗ термоупругости посвящено небольшое число работ [4, 9, 88, 103, 119, 121, 153, 219, 247]. В [4] исследуются задачи идентификации материальных характеристик неоднородного термоупругого полупространства. Прямая и обратная задачи решены конечно-разностным методом. В [9] определены специальные режимы для нахождения термомеханических свойств, при которых получаются явные решения. В [88] решается КОЗ термоупругости для однородной изотропной пластинки в режиме установившихся колебаний. Благодаря специальным граничным условиям и геометрии, удастся свести задачу к одномерной. При некотором условии на частоту колебаний построено разрешающее уравнение для нахождения коэффициента температурных напряжений. В [187] для нахождения термомеханических характеристик однородного покрытия используются нейросетевые технологии. В [219] термомеханические характеристики трехслойной пластины находятся путем сведения КОЗ термоупругости к экстремальной постановке и минимизации функционала невязки градиентным методом. Монография [121] посвящена уточнению термомеханических характеристик слабо неоднородных материалов на основе метода стационарных базовых процессов. В [119] исследованы обратные задачи нахождения линейных и квадратичных законов неоднородности функционально-градиентных покрытий термоупругих тел, обеспечивающих наименьшее звукоотражение.

#### **Актуальность темы.**

В настоящее время для повышения термомочности элементов конструкций, подвергающихся термосиловым нагрузкам, используют неоднородные материалы – слоистые термозащитные покрытия и ФГМ.

Однако при термомеханических расчетах конструкций из неоднородных материалов возникает ряд проблем. Законы неоднородности могут быть любыми, поэтому важной задачей является разработка эффективных численных методов решения задач термомеханики при произвольных законах неоднородности. Другая проблема связана с миниатюризацией устройств электроники и широким применением микроэлектромеханических систем. Однако использование для описания термомеханического поведения слоистых микрообъектов моделей классической механики не позволяет оценить масштабные эффекты, выявленные экспериментально. В настоящее время для учета масштабных эффектов используются, как модели микромеханики, например, молекулярной динамики, так и механики сплошных сред (градиентная теория упругости, поверхностная теория упругости, нелокальная теория упругости и др.). При этом решения задач градиентной теории упругости и термоупругости получены в основном для однородных материалов. Третьей проблемой является то обстоятельство, что точность расчета НДС неоднородных термоупругих тел зависит от знания переменных законов неоднородности. Для этого требуется построение эффективных и устойчивых вычислительных схем неразрушающей идентификации неоднородных термомеханических характеристик путем решения КОЗ термомеханики.

В связи с этим тема диссертационной работы «Прямые и обратные задачи термомеханики для неоднородных тел» является актуальной.

Работа на разных этапах выполнялась при поддержке грантов РФФИ (№ 10-01-00194-а, 13-1-00196, 16-01-00354-а), РФФИ (№ 18-11-00069, 22-11-00265), проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, Программы президиума РАН «Фундаментальные проблемы математического

моделирования» (грант №114072870112), НИР Южного математического института – филиала ВЦ РАН в 2016-2023 гг.

### **Объект и предмет исследования.**

Объектами исследования являются неоднородные тела канонической формы: стержень, балка, полоса, прямоугольник, труба, конечный цилиндр. Предметом изучения является исследование НДС неоднородных стержневых, плоских (прямоугольник, полоса) и цилиндрических структур (труба, конечный цилиндр), исследование масштабных эффектов, влияния законов изменения термомеханических свойств на физические поля, построение эффективных вычислительных схем идентификации термомеханических свойств неоднородных тел.

**Цель работы** заключается в исследовании задач термоупругого и термоэлектроупругого деформирования неоднородных объектов с учетом инерционных эффектов, связанности полей, неоднородности материала, масштабных эффектов, в решении одномерных коэффициентных обратных задач термоупругости и термоэлектроупругости, в проведении вычислительных экспериментов.

*Для достижения этой цели были сформулированы следующие задачи:*

1. Разработать эффективные методы решения ряда динамических связанных задач термоупругости для неоднородных тел (стержень, труба, конечный цилиндр, прямоугольник) при произвольных одномерных законах неоднородности, провести исследование влияния эффекта связанности полей и законов неоднородности на физические поля.

2. Решить динамические связанные задачи термоэлектроупругости для неоднородного стержня и цилиндра, провести исследование влияния параметров связанности и законов неоднородности на физические поля.

3. Исследовать особенности деформирования составных и слоистых тел (стержня, балки, цилиндра, полосы) на основе градиентной теории упругости, термоупругости и электроупругости, построить асимптотические

решения при малых значениях масштабного параметра, оценить влияние градиентных факторов.

4. Для решения КОЗ термоупругости получить операторные уравнения в пространстве трансформант Лапласа.

5. Получить операторные уравнения в оригиналах и сформировать итерационную схему для решения одномерных КОЗ термомеханики.

6. Провести вычислительные эксперименты по идентификации неоднородных термомеханических свойств стержня, слоя, прямоугольника, трубы и конечного цилиндра.

### **Научная новизна.**

В диссертации разработаны новые подходы к решению статических и динамических задач термомеханики для тел, изготовленных из функционально-градиентных материалов и тел с покрытиями, с учетом типа нагружения, законов неоднородности материала, связанности физических полей, масштабных эффектов, что имеет большое значение для адекватного прогнозирования поведения неоднородных тел под действием термомеханической нагрузки. Разработаны новые итерационные схемы решения обратных задач термомеханики, которые апробированы при решении задач идентификации материальных характеристик стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра, прямоугольника.

### **Новыми** являются следующие результаты:

1. Разработаны методы решения динамических связанных задач термоупругости и термоэлектроупругости для элементов стержневых, плоских и цилиндрических конструкций, изготовленных из неоднородных материалов.

2. В рамках градиентной модели исследованы задачи теории упругости, термоупругости и электроупругости для составных тел и тел с покрытиями (стержня, полосы, балки, цилиндра). Для малых значений масштабного параметра на основе методов Вишика-Люстерника и Вентцеля-Крамерса-

Бриллюэна (ВКБ) получены асимптотические формулы для нахождения перемещений и напряжений составного стержня, балки и трубы, оценен вклад градиентных факторов.

3. Построена итерационная схема идентификации термомеханических характеристик, причем на каждом этапе итерационного процесса решается прямая задача с известными переменными характеристиками и интегральные уравнения Фредгольма (ИУФ) 1-го рода с гладкими ядрами для определения поправок к искомым характеристикам.

4. На основе разработанного итерационного подхода исследованы обратные задачи термоэлектроупругости для стержня, слоя и цилиндра.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

*Теоретическая значимость* диссертационной работы определяется необходимостью создания экономных и устойчивых аналитических и численных методов решения прямых и обратных задач термоупругости и термоэлектроупругости для неоднородных тел.

*Практическая значимость* диссертационной работы определяется возможностью применения разработанных алгоритмов решения прямых и обратных задач термомеханики для усовершенствования теоретической базы неразрушающих методов диагностики свойств неоднородных тел, а также нахождения НДС элементов конструкций, выполненных из слоистых материалов и ФГМ с учетом связанности полей, законов неоднородности, масштабных эффектов.

### **Методология исследования.**

Решение динамических связанных задач термомеханики для тел, изготовленных из ФГМ, реализовано на основе нескольких подходов. Задача для неоднородного термоупругого стержня решается путем сведения к системе ИУФ 2-го рода относительно трансформант Лапласа и обращением трансформант на основе теории вычетов. Задачи для термоупругой трубы и термоэлектроупругих тел (стержня и цилиндра) решаются путем сведения к

канонической системе ОДУ в трансформантах Лапласа, ее решения методом пристрелки и обращении трансформант на основе метода разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра. Задачи для прямоугольника и конечного цилиндра решаются путем применения метода разделения переменных, а затем метода пристрелки для гармоник.

Исследование задачи градиентной теории упругости для составного стержня и составной балки при малых значениях масштабного параметра проведено на основе асимптотического метода Вишика-Люстерника.

Исследование задачи градиентной термоупругости для слоистого цилиндра проведено на основе асимптотического метода ВКБ.

Несколькими способами получены линеаризованные операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости, которые представляют собой ИУФ 1-го рода с гладкими ядрами; для построения их регуляризованного решения использован метод Тихонова А.Н.

#### **Достоверность результатов.**

Методы, использованные в работе, опираются на строгий математический аппарат динамических связанных задач термоупругости и термоэлектроупругости, на аппарат ИУФ 2-го рода, на применение апробированных численных методов решения задач Коши, на сравнении результатов, полученных при помощи предложенных методов с аналитическими и конечно-элементными решениями, на апробированные асимптотические методы, а также на проведении большого числа вычислительных экспериментов, показавших их достаточную эффективность.

#### **Апробация работы.**

Выводы и результаты, приведенные в диссертации, докладывались на всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 2007, 2008, 2011-2019, 2021-2023 гг.), на международной научной конференции

«Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2010 г.), на X всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 г.), на международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика Лаврентьева М.М. «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012 г.), на международной научной конференции «Механика и трибология транспортных систем МехТрибоТранс-2016» (Ростов-на-Дону, 2016 г.) на международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (Ростов-на-Дону, 2017 г.), на X всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017 г.), на IX международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис, Армения 2018 г.), на международных научных конференциях «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (РСО-А, с. Цей, 2017, 2019, 2021 гг.), на Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2017, 2019, 2021 гг.), на международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2017-2020, 2022 гг.), на международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2009, 2011, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020 гг.), на всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды — 2020» (Казань, 2020 г.), на V международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (Донецк, 2020 г.), на XXVIII научной конференции «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития (СИТО)» (Ростов-на-Дону, 2021-2023 гг.), на XI всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики» (Томск, 2021

г.), на международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2021 г.), на международной конференции «Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные» (Якутск, 2021 г.), на международной конференции «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications (PHENMA)» (2021, 2022 гг.), на международной конференции «Modern Problems in Modeling Materials for Mechanical, Medical and Biological Applications» (Ростов-на-Дону, 2022 г.), на семинарах кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета и отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиала ВНИИ РАН.

#### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация общим объемом 252 страницы состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения, содержит 81 рисунок, 14 таблиц и список литературы из 265 наименований.

#### **Публикации по теме диссертации.**

Содержание диссертации отражено в 87 публикациях, из них два издания монографии «Коэффициентные обратные задачи термомеханики», одна глава в коллективной монографии издательства Springer, 39 статей в рецензируемых журналах из перечня изданий, рекомендованных диссертационным советом ЮФУ801.01.10, баз Scopus и WoS.

Большая часть работ, опубликованных в рецензируемых изданиях, выполнена в соавторстве. Личный вклад автора состоит в следующем. В работах [24, 25, 30, 32, 35, 43, 44, 47, 51, 53, 60-63, 69] Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач, рекомендации по выбору методов исследования, обсуждение результатов, Нестерову С.А. принадлежит получение операторных уравнений для решения обратных задач, формулировка итерационных процессов, написание программ, получение, обработка и анализ результатов реконструкции. В работах [36-38, 48, 52, 54,

67, 68, 71, 74, 75, 81, 82, 253, 255] Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач, выбор метода исследования, Нестерову С.А. принадлежит разработка численных методов решения прямых и обратных задач термоупругости, реализация вычислительных алгоритмов, анализ результатов. В работах [76, 83-85, 257, 258] Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач, Нестерову С.А. принадлежит получение асимптотических решений на основе метода Вишика-Люстерника, сопоставление результатов решения в градиентной постановке и классической постановке. В [229-232, 254, 256] Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач и обсуждение результатов исследования, Нестерову С.А. принадлежит разработка численных методов решения прямых и обратных задач, анализ результатов, Недину Р.Д. принадлежит написание программ, получение и обработка результатов. В работах [77, 78] Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач, обсуждение результатов, Нестерову С.А. принадлежит применение асимптотического метода ВКБ, Юрову В.О. принадлежит написание программ, численная реализация решения и анализ результатов. В работе [260] Ватульяну А.О. принадлежит постановка задач, Явруян О.В. принадлежит разработка методов решения, Юрову В.О. принадлежит написание программ, Нестерову С.А. принадлежит численная реализация решения, обсуждение результатов.

Результаты диссертации также были опубликованы в тезисах докладов [40, 46, 49, 50, 59, 64, 66, 80, 137, 143, 144] и трудах конференций [26-28, 33, 39, 45, 55-58, 70, 72, 73, 79, 86, 87, 136, 138-142].

### **Содержание работы.**

**В первой главе** приведены постановки прямых задач термоупругости и термоэлектроупругости для неоднородных тел. Рассмотрены два способа нагружения – тепловой и механический. Предложены методы решения динамических связанных задач термоупругости для стержня, трубы, конечного цилиндра, прямоугольника и термоэлектроупругости – для стержня и цилиндра с учетом переменности свойств.

*Первая часть главы 1* посвящена исследованию динамических связанных задач термоупругости с переменными характеристиками.

В параграфе 1.1 сформулированы общие постановки прямых задач термоупругости для неоднородных тел, как при тепловом, так и механическом способах нагружения.

В параграфе 1.2 исследуется динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного стержня.

Рассмотрены продольные колебания жестко закрепленного на одном торце неоднородного термоупругого стержня под действием приложенной к другому торцу нестационарной нагрузки.

Задача термоупругости для стержня решается путем сведения к системе ИУФ 2-го рода относительно трансформант Лапласа и процедуры обращения трансформант на основе теории вычетов.

Оценена точность предложенного подхода по сравнению с аналитическим решением для однородного стержня. Исследовано влияние параметра связанности и законов неоднородности на температуру и смещение на торце стержня.

В параграфе 1.3 приводится решение динамической связанной задачи термоупругости для неоднородной трубы.

Исследована задача о радиальных колебаниях неоднородной трубы, внутренняя поверхность которой свободна от напряжений и поддерживается при нулевой температуре, а на внешней поверхности действует нестационарная нагрузка.

Задача сводится к канонической системе ОДУ 1-го порядка в трансформантах, для решения которой применяется метод пристрелки. Обращение трансформант находится путем разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра. Выяснено влияние законов неоднородности на граничные физические поля.

В параграфе 1.4 представлено решение динамической связанной задачи термоупругости для конечного радиально-неоднородного цилиндра.

Рассмотрена динамическая связанная задача термоупругости для конечного ФГ цилиндра, торцы которого теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. После применения преобразования Лапласа задача решается методом разделения переменных и методом пристрелки для решения одномерных задач для гармоник. Проведено сравнение предложенного подхода с конечно-элементным решением, полученным в пакете FlexPDE.

В параграфе 1.5 рассмотрена динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника, у которого боковые грани теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки, нижняя граница жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней границе действует нестационарная термосиловая нагрузка.

Решение задачи для прямоугольника основано на совместном применении метода разделения переменных и метода пристрелки.

*Вторая часть главы 1* посвящена исследованию динамических связанных задач термоэлектроупругости для тел с переменными характеристиками.

В параграфе 1.6 сформулированы общие постановки прямых задач термоэлектроупругости для неоднородных тел, проведено обезразмеривание задач.

В параграфе 1.7 исследована динамическая связанная задача термоэлектроупругости для неоднородного стержня.

Рассмотрен продольно поляризованный термоэлектроупругий стержень конечной длины, один торец которого жестко закреплён, закорочен и поддерживается при нулевой температуре, а на другом торце действует нестационарная нагрузка.

Обезразмеренная задача в трансформантах для стержня решается методом пристрелки.

В параграфе 1.8 проведено исследование динамической связанной задачи термоэлектроупругости для неоднородного цилиндра.

Рассмотрена динамическая связанная задача термоэлектроупругости для длинного полого радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра, внутренняя поверхность которого заземлена, свободна от напряжений и поддерживается при нулевой температуре, а на внешней заземленной поверхности, действует нестационарная нагрузка.

Задача в трансформантах решается методом пристрелки. Проведено исследование влияния законов неоднородности на характер радиального распределения температуры, радиального смещения, напряжений и электрического потенциала.

Во **второй главе** в рамках модели градиентной механики построены асимптотические решения статических задач для составных тел и тел с покрытиями (стержня, балки, цилиндра, полосы).

*Первая часть главы 2* посвящена исследованию статических задач градиентной теории упругости и термоупругости для составных тел.

В параграфе 2.1 представлены основные положения градиентной теории упругости.

В параграфе 2.2 в рамках градиентной модели проведено исследование деформирования составного изотропного стержня.

Рассмотрено равновесие составного стержня, один торец которого жестко заземлен, а на другом действует сила или постоянная температура. На основе вариационного принципа Лагранжа получен расширенный набор механических граничных условий и условий сопряжения.

На основе метода Вишика-Люстерника получены асимптотические формулы для нахождения распределения напряжений Коши по длине составного стержня.

В параграфе 2.3 на основе метода Вишика-Люстерника исследована градиентная модель изгиба составной балки.

Для каждого типа нагружения балки получены асимптотические выражения для изгибающих моментов составной балки.

Параграф 2.4 посвящен моделированию деформирования цилиндра с покрытием.

Рассмотрена задача о деформировании бесконечного полого двухслойного цилиндра. При малых значениях масштабного параметра методом ВКБ получены асимптотические формулы для нахождения распределения радиальных смещения слоистого цилиндра.

В параграфе 2.5 проведено исследование термоупругого деформирования слоистой полосы.

В рамках плоской деформации рассмотрено равновесие бесконечной термоупругой слоистой полосы, на верхней границе которой, свободной от напряжений, на конечном отрезке действует тепловой поток.

*Вторая часть главы 2* посвящена исследованию статических задач градиентной теории электроупругости для составных и слоистых тел.

В параграфе 2.6 представлены основные положения градиентной теории электроупругости.

В параграфе 2.7 проведено исследование деформирования составного продольно поляризованного пьезоупругого стержня.

Исследовано несколько частных случаев, когда учитывается только один из градиентных эффектов, механический или электростатический.

Параграф 2.8 посвящен моделированию деформирования сплошного двухслойного неэлектропроводящего радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра. Решение задачи после исключения потенциала из уравнения электростатики сводится к задаче ГТУ для анизотропного цилиндра с модифицированными модулями упругости.

В третьей главе представлены первые постановки коэффициентной обратной задачи термоупругости, когда дополнительная информация известна на полубесконечном интервале. Для решения КОЗ термоупругости в первой постановке получены операторные уравнения в трансформантах Лапласа. Сформулирован итерационный подход к идентификации одномерных термомеханических характеристик.

В параграфе 3.1 приведены общие первые постановки коэффициентных обратных задач термоупругости (в трансформантах Лапласа), как при тепловом, так и механическом способах нагружения.

В параграфе 3.2 для решения КОЗ термоупругости в первой постановке получены операторные уравнения в трансформантах.

Операторные уравнения в трансформантах получены 2 способами: 1) на основе обобщенного соотношения взаимности; 2) на основе слабой постановки прямой задачи и последующей линеаризации.

В параграфе 3.3 представлена итерационная схема решения одномерных КОЗ термомеханики. Начальное приближение находится в классе линейных функций, а законы неоднородности уточняются путем нахождения поправок из решения ИУФ 1-го рода.

В параграфе 3.4 представлены первые постановки КОЗ термоупругости для стержня и получены операторные уравнения для ее решения в случае реконструкции одной характеристики стержня при известных остальных.

В параграфе 3.5 представлены первые постановки и решение безразмерной КОЗ термоупругости для трубы.

Получены операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости для трубы. Представлены результаты реконструкции одной характеристики трубы при известных остальных.

В параграфе 3.6 получены операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости конечного цилиндра.

В предположении, что дополнительная информация о трансформантах перемещений и температуры допускает разложение в ряды Фурье, обратные задачи сформулированы для различных гармоник.

В параграфе 3.7 представлены постановки КОЗ термоупругости для прямоугольника, получены операторные уравнения для различных гармоник и проведены вычислительные эксперименты по идентификации термомеханических характеристик прямоугольника.

В четвертой главе представлены вторые постановки (в оригиналах) и решения КОЗ термоупругости для стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра, как при тепловом, так и при механическом способах нагружения.

В параграфе 4.1 представлена общая вторая постановка КОЗ термоупругости для неоднородных тел.

В параграфе 4.2 проведено исследование КОЗ термоупругости для неоднородного стержня во второй постановке. Путем обращения соответствующих операторных уравнений в трансформантах, полученных в главе 3, получены операторные уравнения в оригиналах.

В случае определения двух термомеханических характеристик неоднородного стержня рассмотрены две задачи термоупругости с разным типом нагрузки на торце. Представлена итерационная схема решения задачи, на каждом этапе которой для нахождения поправок решается система двух ИУФ 1-го рода.

В параграфе 4.3 представлено исследование КОЗ термоупругости для поперечно неоднородного слоя.

С помощью процедуры осреднения двумерная задача для слоя сводится к двум упрощенным одномерным задачам относительно усредненных по продольной координате компонентов полей. Идентификация термомеханических характеристик сводится к последовательному решению упрощенных КОЗ.

Проведены вычислительные эксперименты по идентификации плотности, модуля сдвига и коэффициента теплопроводности слоя.

В параграфе 4.4 проведено исследование КОЗ термоупругости для трубы во второй постановке.

Получены операторные уравнения и проведены вычислительные эксперименты по идентификации одной из характеристик трубы.

Проведено исследование задачи об идентификации двух неоднородных характеристик трубы. Рассмотрены две задачи термоупругости для трубы с разной тепловой нагрузкой на ее внешней поверхности. Для нахождения поправок получена система 2-х ИУФ 1-го рода и проведены вычислительные эксперименты по идентификации 2-х характеристик трубы.

В параграфе 4.5 исследована КОЗ термоупругости для неоднородного цилиндра конечной длины во второй постановке.

Рассмотрена схема поэтапного восстановления двух термомеханических характеристик конечного цилиндра.

В параграфе 4.6 решена КОЗ термоупругости для прямоугольника во второй постановке.

Приведены вторые постановки КОЗ термоупругости для прямоугольника. Обратные задачи сформулированы для гармоник и получены операторные уравнения в оригиналах для их решения. Реализована схема поэтапного восстановления нескольких пар термомеханических характеристик прямоугольника аналогичная схеме решения обратной задачи для конечного цилиндра.

**В пятой главе** представлена общая постановка КОЗ термоэлектроупругости на конечном временном отрезке. В качестве примеров исследованы обратные задачи термоэлектроупругости для стержня, слоя и цилиндра.

В параграфе 5.1 приведена общая постановка КОЗ термоэлектроупругости и получены операторные уравнения в трансформантах для ее решения.

В параграфе 5.2 исследована КОЗ термоупругости для неоднородного термоэлектроупругого стержня.

Получены новые операторные уравнения для нахождения поправок пьезомодуля и пироккоэффициента.

В параграфе 5.3 исследована обратная задача об идентификации материальных характеристик поперечно неоднородного термоэлектроупругого слоя.

После преобразования Фурье двумерная обратная задача для слоя сведена к ряду одномерных задач, аналогичных задачам для упругого и термоупругого стержня относительно усредненных характеристик и их моментов. Представлена трехэтапная схема реконструкции. Выяснено, что погрешность реконструкции характеристик с каждым этапом возрастает.

В параграфе 5.4 решена обратная задача об идентификации материальных характеристик радиально поляризованного термоэлектроупругого цилиндра.

Получены операторные уравнения для нахождения поправок характеристик термоэлектроупругого цилиндра в итерационном процессе. В результате вычислительных экспериментов выяснено, что пьезомодули и пироккоэффициент восстанавливаются с большей погрешностью, чем упругие модули и теплофизические характеристики.

В **заключении** сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

# **ГЛАВА 1.**

## **ДИНАМИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ ТЕЛ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

При вычислении термо-напряженного состояния тел, изготовленных из функционально-градиентных материалов, следует учесть, что коэффициенты дифференциальных операторов термомеханики являются переменными. Решения динамических связанных задач неоднородной термомеханики можно получить только численными методами.

В данной главе представлены постановки прямых динамических связанных задач термомеханики для неоднородных тел, которые в главах 3–5 используются при постановках коэффициентных обратных задач термомеханики. Предложены численные методы решения поставленных задач. Проведена верификация предложенных методов путем сравнения с известными решениями, а также аналитическими и конечно-элементными решениями. Проведено исследование влияния инерционных эффектов, связанности полей, различных законов неоднородности на физические поля.

### **Часть 1.**

#### **Решение динамических связанных задач термоупругости для неоднородных тел**

В первой части главы 1 представлена общая постановка динамической связанной задачи термоупругости для неоднородных тел и проведено ее обезразмеривание. В качестве примеров рассмотрены нестационарные задачи термоупругости для ряда неоднородных тел (стержня, трубы, конечного цилиндра и прямоугольника). Предложены эффективные численные методы решения поставленных задач термоупругости. После обезразмеривания к поставленным задачам применяется преобразование

Лапласа. Полученные задачи в трансформантах после некоторых преобразований сводятся к канонической системе ОДУ 1-го порядка. В случае задачи для термоупругого стержня система ОДУ далее сводится к системе ИУФ 2-го рода; в случае задачи для термоупругой трубы – решается методом пристрелки.

### ***1.1 Постановка динамической связанной задачи термоупругости для неоднородных тел.***

Рассмотрим неустановившиеся колебания неоднородного термоупругого тела, имеющего объем  $V$  под действием тепловой или механической нагрузки. Пусть тело имеет кусочно-гладкую границу  $S = S_u \cup S_\sigma = S_T \cup S_q$ , где на  $S_q$  задан тепловой поток, на  $S_T$  – температура, на  $S_u$  – компоненты вектора перемещений, на  $S_\sigma$  – компоненты тензора напряжений.

Математическая постановка задачи динамической связанной термоупругости включает уравнения движения, уравнение притока тепла, тепловые и механические граничные условия, а также начальные условия.

При тепловом способе нагружения постановка задачи термоупругости описывается начально-краевой задачей [25, 68, 147]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.1.1)$$

$$\left(k_{ij}\theta_{,j}\right)_{,i} - c_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma_{ij} \dot{u}_{i,j} = 0, \quad (1.1.2)$$

$$\theta|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}\theta_{,i}n_j|_{S_q} = q, \quad (1.1.3)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0, \quad (1.1.4)$$

$$\theta(x,0) = u_i(x,0) = \dot{u}_i(x,0) = 0. \quad (1.1.5)$$

В случае механического способа нагружения граничные условия (1.1.3), (1.1.4) имеют вид:

$$\theta|_{S_T} = 0, \quad \theta_{,i}n_j|_{S_q} = 0, \quad (1.1.6)$$

$$u_i|_{S_n} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_n} = p_i. \quad (1.1.7)$$

Здесь  $q$  – плотность теплового потока,  $\theta$  – приращение температуры тела от естественного состояния с температурой  $T_0$ ,  $\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l} - \gamma_{ij}\theta$  – компоненты тензора напряжений,  $p_i$  – компоненты вектора механической нагрузки,  $\rho$  – плотность,  $c_\varepsilon$  – удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации,  $u_i$  – компоненты вектора перемещения,  $c_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих модулей,  $k_{ij}$  и  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора коэффициентов теплопроводности и температурных напряжений, являющиеся непрерывными функциями от пространственных переменных.

Отметим, что материальные характеристики и функции, входящие в (1.1.1)-(1.1.7), на несколько порядков различаются между собой. Для удобства дальнейших построений обезразмерим задачу (1.1.1)-(1.1.7) по

$$\text{формулам: } \bar{x} = \frac{x}{H}, \quad U_i = \frac{u_i}{H}, \quad W = \frac{\gamma_{33}^0 \theta}{c_{3333}^0}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{3333}^0}, \quad \bar{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_{33}^0}, \quad \bar{c} = \frac{c_\varepsilon}{c_\varepsilon^0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\gamma}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{33}^0},$$

$$\bar{c}_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{c_{3333}^0}, \quad t_1 = \frac{H^2 c_\varepsilon^0}{k_{33}^0}, \quad t_2 = H \sqrt{\frac{\rho_0}{c_{3333}^0}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{t_1}{t_2}, \quad \delta_0 = \frac{(\gamma_{33}^0)^2 T_0}{c_\varepsilon^0 c_{3333}^0}, \quad \tau_1 = \frac{t}{t_1}, \quad \tau_2 = \frac{t}{t_2}, \quad Q = \frac{qH\gamma_{33}^0}{k_{33}^0 c_{3333}^0},$$

$$P_i = \frac{p_i}{c_{3333}^0}.$$

Здесь  $H$  – характерный линейный размер тела,  $c_{3333}^0$ ,  $\rho_0$ ,  $\gamma_{33}^0$ ,  $k_{33}^0$ ,  $c_\varepsilon^0$  – характерные величины термомеханических характеристик, например, их максимальные значения,  $\delta_0$  – термомеханический параметр связанности,  $\varepsilon_0$  – отношение характерных времен звуковых  $t_2$  и тепловых  $t_1$  возмущений.

Обезразмеренная постановка задачи (1.1.1)-(1.1.5) в случае теплового способа нагружения имеет вид:

$$\Omega_{ij,j} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.1.8)$$

$$(\bar{k}_{ij} W_{,j})_{,i} - \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_1} - \delta_0 \bar{\gamma}_{ij} \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \tau_1} = 0, \quad (1.1.9)$$

$$W|_{s_r} = 0, \quad -\bar{k}_{ij}W_i n_j|_{s_q} = Q, \quad (1.1.10)$$

$$U_i|_{s_u} = 0, \quad \Omega_{ij}n_j|_{s_\sigma} = 0, \quad (1.1.11)$$

$$W(\bar{x}, 0) = U_i(\bar{x}, 0) = \frac{\partial U_i}{\partial \tau_1}(\bar{x}, 0) = 0. \quad (1.1.12)$$

Обезразмеренная постановка задачи (1.1.1), (1.1.2), (1.1.5)-(1.1.7) в случае механического способа нагружения имеет вид:

$$\Omega_{ij,j} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.1.13)$$

$$\left(\bar{k}_{ij}W_{,j}\right)_{,i} - \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_2} - \delta_0 \bar{\gamma}_{ij} \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \tau_2} = 0, \quad (1.1.14)$$

$$W|_{s_r} = 0, \quad -\bar{k}_{ij}W_i n_j|_{s_q} = 0, \quad (1.1.15)$$

$$U_i|_{s_u} = 0, \quad \Omega_{ij}n_j|_{s_\sigma} = P_i, \quad (1.1.16)$$

$$W(\bar{x}, 0) = U_i(\bar{x}, 0) = \frac{\partial U_i}{\partial \tau_2}(\bar{x}, 0) = 0. \quad (1.1.17)$$

Решение динамической связанной задачи термоупругости заключается в определении функций  $U_i$  и  $W$  из (1.1.8)-(1.1.12) или (1.1.13)-(1.1.17) при известных термомеханических характеристиках  $\bar{k}_{ij}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\gamma}_{ij}$ ,  $\bar{c}_{ijkl}$ .

## ***1.2 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного стержня.***

В настоящем параграфе в соответствии с [67, 229] приведены постановка и решение задачи о неустановившихся колебаниях неоднородного термоупругого стержня.

### **1.2.1 Постановка задачи для стержня**

Рассмотрим динамическую связанную задачу термоупругости для неоднородного жестко закрепленного на торце  $x = 0$  стержня, на котором поддерживается нулевая температура. На другом торце стержня  $x = l$

действует один из видов нестационарной нагрузки: 1)  $-k(l)\frac{\partial\theta}{\partial x}(l) = q_0\varphi(t)$ ,  $\sigma_x(l,t) = 0$ ; 2)  $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l) = 0$ ,  $\sigma_x(l,t) = p_0\varphi(t)$ .

Постановка задачи термоупругости для неоднородного стержня в случае теплового нагружения имеет вид [38]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}) = c_\varepsilon(x)\frac{\partial\theta}{\partial t} + T_0\gamma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}, \quad (1.2.2)$$

$$u(0,t) = \theta(0,t) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$-k(l)\frac{\partial\theta}{\partial x}(l) = q_0\varphi(t), \quad \sigma_x(l,t) = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\theta(x,0) = u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \quad (1.2.5)$$

Здесь  $\sigma_x = E\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma\theta$ .

Выполним обезразмеривание задачи (1.2.1)-(1.2.5) по формулам параграфа 1.1, приняв при этом за характерный размерный параметр  $H$  длину стержня  $l$ , за характерное значение упругого модуля  $c_{3333}^0 = E_0$ , а также

$$\beta_1 = \frac{q_0 l \gamma_0}{k_0 E_0}, \quad \beta_2 = \frac{p_0}{E_0}.$$

Обезразмеренная постановка задачи (1.2.1)-(1.2.5) имеет вид :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho}(z)\frac{\partial^2 U}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{k}(z)\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \bar{c}(z)\frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(z)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial \tau_1}, \quad (1.2.7)$$

$$U(0,\tau_1) = W(0,\tau_1) = 0, \quad (1.2.8)$$

$$-\bar{k}(1)\frac{\partial W}{\partial z}(1,\tau_1) = \beta_1\varphi(\tau_1), \quad \Omega(1,\tau_1) = 0, \quad (1.2.9)$$

$$W(z,0) = U(z,0) = \frac{\partial U}{\partial \tau_1}(z,0) = 0. \quad (1.2.10)$$

В случае механического нагружения стержня обезразмеренная постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau_2} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau_2}, \quad (1.2.12)$$

$$U(0, \tau_2) = W(0, \tau_2) = 0, \quad (1.2.13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau_2) = 0, \quad \Omega(1, \tau_2) = \beta_2 \phi(\tau_2), \quad (1.2.14)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau_2}(z, 0) = 0. \quad (1.2.15)$$

Задачи (1.2.6)-(1.2.10) и (1.2.11)-(1.2.15) можно решить, например, используя аппарат интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

### 1.2.2 Сведение к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода

Подробно рассмотрим применение аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода на примере решения задачи (1.2.6)-(1.2.10).

Применив к уравнениям (1.2.6), (1.2.7) и граничным условиям (1.2.8), (1.2.9) преобразования Лапласа по времени  $\tau_1$ , с учетом начального условия (1.2.10), получим:

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dz} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho}(z) \tilde{U}, \quad (1.2.16)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}}{dz} \right) = p \bar{c}(z) \tilde{W} + \delta_0 p \bar{\gamma}(z) \frac{d\tilde{U}}{dz}, \quad (1.2.17)$$

$$\tilde{U}(0, p) = 0, \quad \tilde{W}(0, p) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = \beta_1 \tilde{\phi}(p), \quad \tilde{\Omega}(1, p) = 0. \quad (1.2.18)$$

В случае механического нагружения стержня граничные условия в трансформантах вместо (1.2.18) имеют вид:

$$\tilde{U}(0, p) = 0, \quad \tilde{W}(0, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}(1, p) = \beta_2 \tilde{\phi}(p). \quad (1.2.19)$$

Задача (1.2.16)-(1.2.18) после некоторых преобразований сводится к канонической системе ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dz} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho}(z) \tilde{U}(z, p), \quad (1.2.20)$$

$$\frac{d\tilde{U}}{dz} = \frac{1}{\bar{E}(z)} \tilde{\Omega}(z, p) + \frac{\bar{\gamma}(z)}{\bar{E}(z)} \tilde{W}(z, p), \quad (1.2.21)$$

$$\frac{d\tilde{W}}{dz} = \frac{1}{\bar{k}(z)} \tilde{Q}(z, p), \quad (1.2.22)$$

$$\frac{d\tilde{Q}}{dz} = p \left( \bar{c}(z) + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2(z)}{\bar{E}(z)} \right) \tilde{W}(z, p) + p \delta_0 \frac{\bar{\gamma}(z)}{\bar{E}(z)} \tilde{\Omega}(z, p). \quad (1.2.23)$$

Здесь  $\tilde{Q}(z, p)$  – трансформанта плотности теплового потока.

При этом граничные условия (1.2.18) в новых обозначениях примут вид:

$$\tilde{U}(0, p) = 0, \quad \tilde{W}(0, p) = 0, \quad \tilde{Q}(1, p) = \beta_1 \tilde{\varphi}(p), \quad \tilde{\Omega}(1, p) = 0. \quad (1.2.24)$$

Выполним последовательно следующие действия: 1) проинтегрируем систему (1.2.20)-(1.2.23) по  $z$ ; 2) постоянные интегрирования найдем из граничных условий (1.2.24); 3) исключим из полученной системы функции  $\tilde{U}$  и  $\tilde{Q}$ . После некоторых преобразований получим систему интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 2-го рода [68]:

$$\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \zeta, p) \tilde{W}(\zeta, p) d\zeta + \int_0^1 K_2(z, \zeta, p) \tilde{\Omega}(\zeta, p) d\zeta + J_0(z, p), \quad (1.2.25)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \zeta, p) \tilde{W}(\zeta, p) d\zeta + \int_0^1 K_4(z, \zeta, p) \tilde{\Omega}(\zeta, p) d\zeta, \quad (1.2.26)$$

$$\text{где } K_1(z, \zeta, p) = -p \left( \bar{c}(\zeta) + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2(\zeta)}{\bar{E}(\zeta)} \right) \int_0^{\min\{z, \zeta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}, \quad K_2(z, \zeta, p) = -\delta_0 p \frac{\bar{\gamma}(\zeta)}{\bar{E}(\zeta)} \int_0^{\min\{z, \zeta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_3(z, \zeta, p) = -\varepsilon_0^2 p^2 \frac{\bar{\gamma}(\zeta)}{\bar{E}(\zeta)} \int_{\min\{z, \zeta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad K_4(z, \zeta, p) = -\frac{\varepsilon_0^2 p^2}{\bar{E}(\zeta)} \int_{\min\{z, \zeta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta,$$

$$J_0(z, p) = -\beta_1 \tilde{\varphi}(p) \int_0^z \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}.$$

Аналогичным образом строится решение задачи в случае механического нагружения стержня.

Для решения системы ИУФ 2-го рода (1.2.25), (1.2.26) методом коллокаций вводится равномерное разбиение отрезка  $[0,1]$  на  $n_1$  отрезков точками  $z_i = \frac{i-1}{n_1}$ ,  $i = 1..n_1 + 1$ . Далее система (1.2.25), (1.2.26) удовлетворяется в наборе точек  $z_i$ , что приводит к СЛАУ размерности  $2(n_1 + 1)$  относительно узловых неизвестных.

После нахождения трансформант температуры и напряжений из решения уравнений (1.2.25), (1.2.26) для нахождения трансформанты смещения  $\tilde{U}(z, p)$  проинтегрировав уравнение (1.2.21) по  $z$  на отрезке  $[0, z]$ , получим:

$$\tilde{U}(z, p) = \int_0^z \left( \frac{1}{\bar{E}(\zeta)} \tilde{\Omega}(\zeta, p) + \frac{\bar{\gamma}(\zeta)}{\bar{E}(\zeta)} \tilde{W}(\zeta, p) \right) d\zeta. \quad (2.1.27)$$

Следующим этапом в решении задачи (1.2.6)-(1.2.10) является обращение полученных решений в трансформантах.

Для нахождения оригиналов функций используется формула обращения Римана-Меллина [114]:

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \tilde{F}(p) e^{p\tau} dp, \quad (1.2.28)$$

где интегрирование в (1.2.28) происходит вдоль прямой  $\text{Re } p = b \geq b_0$ .

Если функция  $\tilde{F}(p)$  мероморфная, то применяя теорию вычетов, получим выражение для нахождения оригинала [114]:

$$F(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \text{res}_{p=p_m} \left( \tilde{F}(p) e^{p\tau} \right), \quad \tau > 0. \quad (1.2.29)$$

Решения системы интегральных уравнений (1.2.25), (1.2.26), полученные в Maple, в узловых точках  $z_i$  являются дробно-рациональными функциями от параметра преобразования Лапласа. Полюсами этих функций являются комплексно сопряженные числа с отрицательными

вещественными частями, которые определяются ядрами системы (1.2.25), (1.2.26). Для обращения трансформант применяется теория вычетов с использованием формулы (1.2.29). Преимущество данного метода обращения состоит в том, что среди особых точек отсутствуют точки ветвления, что значительно упрощает процедуру обращения.

Для верификации предложенного метода решения получим аналитическое решение задачи термоупругости для однородного стержня. Для этого выпишем постановку задачи в трансформантах для однородного стержня (1.2.16)-(1.2.18) в перемещениях при  $\beta_1 = 1$ :

$$\tilde{U}'' - \varepsilon_0^2 p^2 \tilde{U} - \tilde{W}' = 0, \quad (1.2.30)$$

$$\tilde{W}'' - p\tilde{W} - p\delta_0 \tilde{U}' = 0, \quad (1.2.31)$$

$$\tilde{U}(0, p) = 0, \quad \tilde{W}(0, p) = 0, \quad \tilde{W}'(1, p) = \tilde{\varphi}(p), \quad \tilde{U}'(1, p) - \tilde{W}(1, p) = 0. \quad (1.2.32)$$

Решение задачи (1.2.30)-(1.2.32) будем искать в виде:

$$\tilde{W}(z, p) = \sum_{i=1}^4 A_i(p) e^{\zeta_i z}, \quad \tilde{U}(z, p) = \sum_{i=1}^4 B_i(p) e^{\zeta_i z}. \quad (1.2.33)$$

Здесь  $\zeta_j$  – корни характеристического уравнения системы (1.2.30), (1.2.31):

$$\zeta^4 - p(1 - \delta_0 + \varepsilon_0^2 p)\zeta^2 + \varepsilon_0^2 p^3 = 0. \quad (1.2.34)$$

Связь между коэффициентами  $A_i$  и  $B_i$  находится из уравнения (1.2.30)

в виде  $B_i(p) = \frac{\zeta}{\zeta^2 - \varepsilon_0^2 p^2} A_i(p)$ , а коэффициенты  $A_i$  определяются из граничных условий (1.2.32).

При подстановке представлений (1.2.33) в (1.2.32), получим систему линейных уравнений следующего вида:

$$\sum_{i=1}^4 A_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 B_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 A_i \zeta_i e^{\zeta_i} = \tilde{\varphi}(p), \quad \sum_{i=1}^4 (B_i \zeta_i - A_i) e^{\zeta_i} = 0. \quad (1.2.35)$$

После нахождения  $A_i(p)$  и  $B_i(p)$  из решения системы (1.2.35) далее находятся трансформанты  $\tilde{W}(z, p)$ ,  $\tilde{U}(z, p)$ . Для обращения трансформант используется метод Дурбина, который имеет высокую точность вычислений на малых временах.

В 1974 г. Дурбин в [190] разработал численный метод вычисления интеграла (1.2.28) на основе представления:

$$F(\tau_j) \approx \frac{2e^{bj\Delta\tau}}{T_{period}} \left( -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\tilde{F}(b)) + \operatorname{Re} \left( \sum_{n_2=0}^{N-1} (A(n_2) + iB(n_2)) \mathcal{G}^{jn_2} \right) \right), \quad (1.2.36)$$

где  $A(n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1} \operatorname{Re} \left( \tilde{F} \left( b + i(n_2 + l_1 N) \frac{2\pi}{T_{period}} \right) \right)$ ,  $B(n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1} \operatorname{Im} \left( \tilde{F} \left( b + i(n_2 + l_1 N) \frac{2\pi}{T_{period}} \right) \right)$ ,

$$\Delta\tau = \frac{T_{period}}{N}, \quad \mathcal{G} = e^{\frac{i2\pi}{N}}.$$

Выбор значений параметров  $L_1$ ,  $N$  служит для контроля точности формулы обращения. При этом для обеспечения высокой точности в [190] рекомендуется соблюдать следующие ограничения  $5 \leq bT_{period} \leq 10$ ,  $50 \leq NL_1 \leq 5000$ . В работе при осуществлении расчетов приняты следующие значения параметров:  $bT_{period} = 6$ ,  $NL_1 = 3600$ .

### 1.2.3 Численные результаты решения задачи для стержня

Проведена верификация метода сведения к системе ИУФ 2-го рода путем сравнения результатов его применения с аналитическим решением.

В табл. 1.1 представлены значения температуры, вычисленные в точке  $z=1$  для некоторых моментов времени при нагрузке  $\varphi(\tau_1) = \delta(\tau_1)$ , а в табл. 1.2 – значения смещения при  $\varphi(\tau_2) = \tau_2 e^{-\tau_2}$  и  $\delta_0 = 0.03$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ .

Таблица 1.1

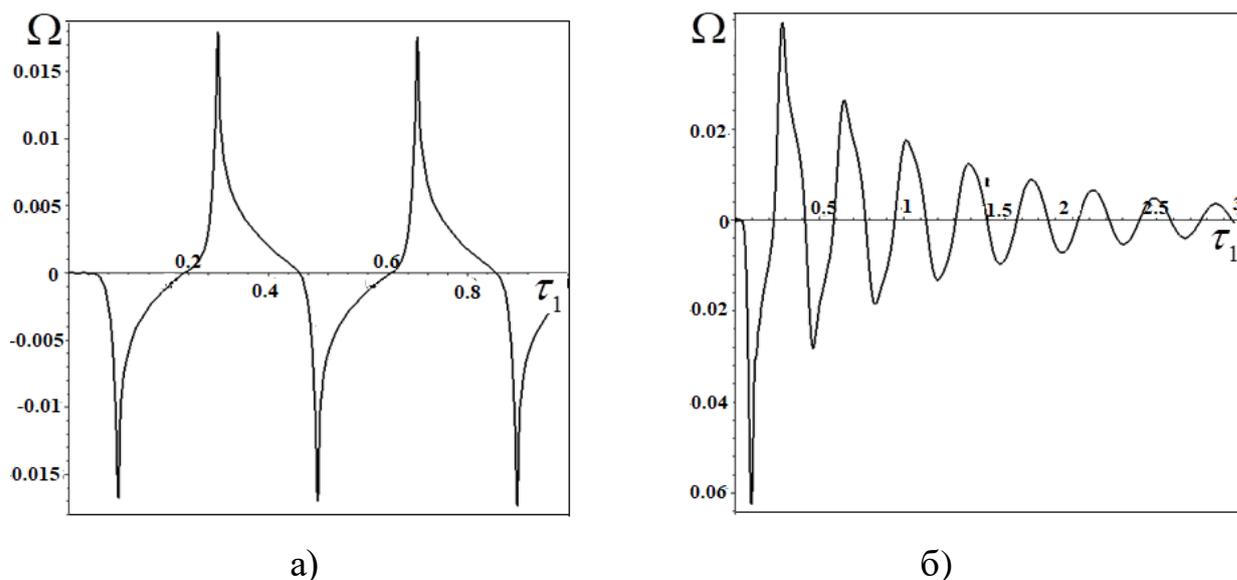
Моменты времени $\tau_1$	Аналитическое решение	ИУФ 2-го рода			
		$n_1 = 12$	Относительная погрешность, %	$n_1 = 38$	Относительная погрешность, %
$10^{-6}$	185.8	93.8	103	183.3	1
$10^{-5}$	1.473	1.687	14.5	1.491	0.52
$10^{-4}$	$1.2504 \cdot 10^{-1}$	$1.2560 \cdot 10^{-1}$	0.44	$1.252 \cdot 10^{-1}$	0.19
0.1	$8.693 \cdot 10^{-3}$	$8.701 \cdot 10^{-3}$	0.21	$8.703 \cdot 10^{-3}$	0.11
2	$2.863 \cdot 10^{-5}$	$2.863 \cdot 10^{-5}$	0.14	$2.865 \cdot 10^{-5}$	0.07

Таблица 1.2

Моменты времени $\tau_2$	Аналитическое решение	ИУФ 2-го рода			
		$n_1 = 14$	Относительная погрешность, %	$n_1 = 45$	Относительная погрешность, %
0.001	0.000354	0.000383	8.12	0.000357	0.85
0.01	0.000393	0.000398	1.27	0.000395	0.51
0.1	0.004922	0.004947	0.52	0.004931	0.23
0.5	0.090021	0.090271	0.28	0.090108	0.11
2	0.593910	0.594667	0.13	0.593997	0.02

Из табл. 1.1 следует, что относительная погрешность вычисления температуры при нагрузке  $\varphi(\tau_1) = \delta(\tau_1)$  не превосходит 1% на временах  $\tau_1 > 10^{-3}$  при  $n_1 = 12$ , а на временах  $\tau_1 \in [10^{-6}, 10^{-4}]$  – при  $n_1 = 38$ . Из табл. 1.2 следует, что относительная погрешность вычисления смещения при нагрузке  $\varphi(\tau_2) = \tau_2 e^{-\tau_2}$  не превосходит 1% на временах  $\tau_2 > 10^{-3}$  при  $n_1 = 45$ .

Исследуем инерционные эффекты, возникающие при нагружении торца  $z=1$  однородного стержня нестационарной тепловой нагрузкой. На рис. 1.1 изображена зависимость напряжения от времени в точке  $z=0$  при  $\varepsilon_0 = 0.1$  и двух значениях параметра связанности: а)  $\delta_0 = 0.04$ ; б)  $\delta_0 = 0.4$  в случае теплового нагружения  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$  в точке  $z=1$ .

Рисунок 1.1 – Зависимость  $\Omega(\tau_1)$  в точке  $z=0$  при: а)  $\delta_0 = 0.04$ ; б)  $\delta_0 = 0.4$ .

При решении задачи в квазистатической постановке ( $\varepsilon_0 = 0$ ) напряжение в любой момент времени равно нулю, а в динамической постановке возникают пики напряжений, амплитуды которых со временем убывают тем быстрее, чем больше параметр связанности. Выяснено, что с уменьшением  $\varepsilon_0$  первый пик напряжения быстро уменьшается и появляется на более малых временах. Так, при  $\varepsilon_0 = 1$  первый пик возникает при  $\tau_1 = 1$  и достигает значения 0.078, а при  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$  первый пик возникает при  $\tau_1 = 0.003$  и достигает значения  $1.8 \cdot 10^{-7}$ .

Исследуем влияние связанности полей на температуру и смещение стержня при механическом способе нагружения  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$  в точке  $z = 1$ .

На рис. 1.2 изображена зависимость от времени: а) температуры в точке  $z = 1$ ; б) теплового потока в точке  $z = 0$  при  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.4$ . В случае несвязанной задачи температура и тепловой поток равны нулю. При  $\delta_0 \neq 0$  изменение теплового потока и температуры от времени имеют колебательный характер; колебания с увеличением  $\delta_0$  быстрее затухают.

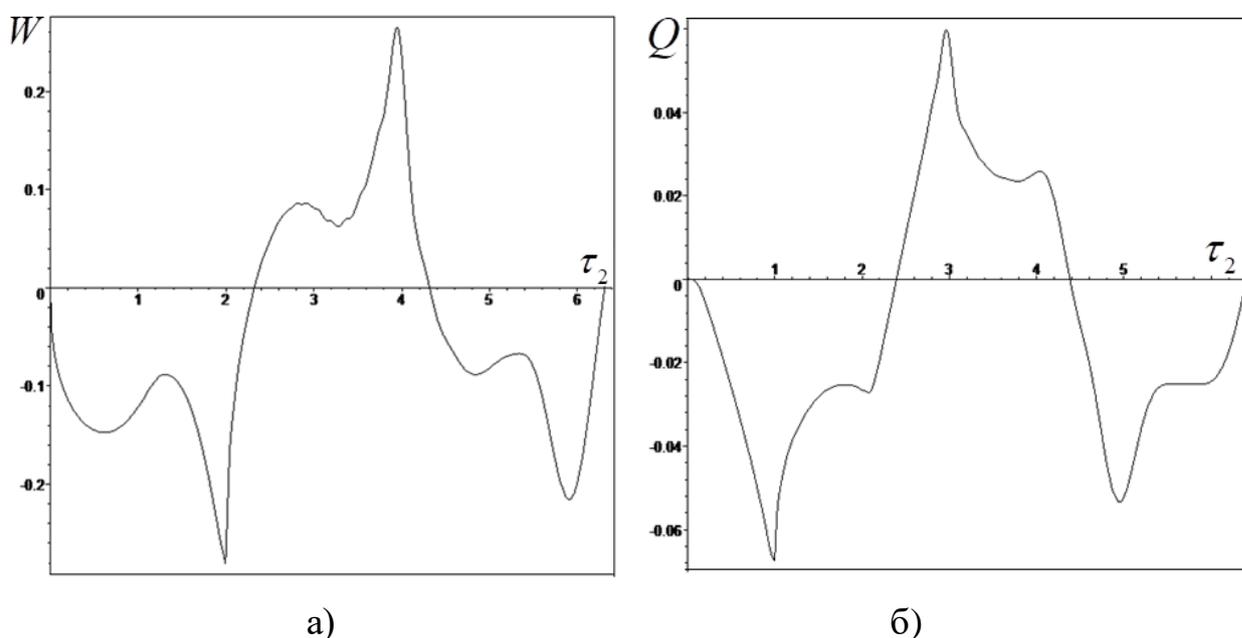


Рисунок 1.2 – Зависимость от времени: а) температуры в точке  $z = 1$ ; б) теплового потока в точке в точке  $z = 0$  при механическом нагружении.

На рис. 1.3 представлен график изменения смещения в точке  $z=1$  от времени при двух значениях параметра связанности: а)  $\delta_0 = 0.03$  (сплошная линия); б)  $\delta_0 = 0.3$  (точки).

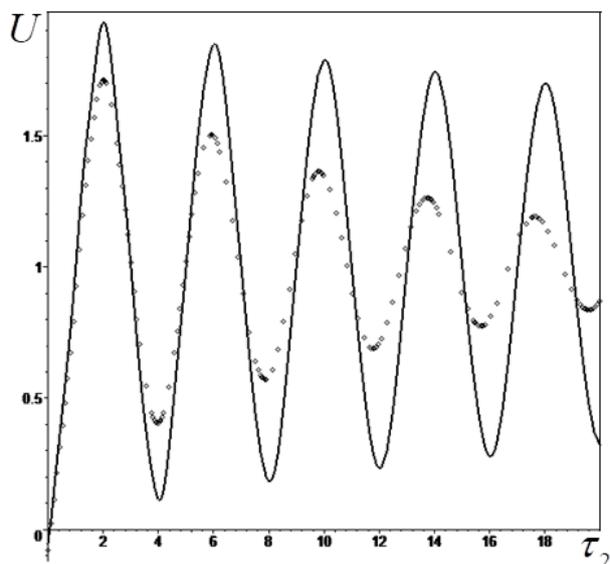


Рисунок 1.3 – Влияние величины параметра связанности на торцевое смещение.

Из рис. 1.3 следует, что с увеличением параметра термомеханической связанности  $\delta_0$  затухание механических колебаний происходит быстрее.

Проведем анализ чувствительности в случае однородного стержня. Рассмотрим законы изменения термомеханических характеристик:

$$\bar{k}_\nu = (1+\nu)\bar{k}, \quad \bar{c}_\nu = (1+\nu)\bar{c}, \quad \bar{\gamma}_\nu = (1+\nu)\bar{\gamma}, \quad \bar{E}_\nu = (1+\nu)\bar{E}, \quad \bar{\rho}_\nu = (1+\nu)\bar{\rho}. \quad (1.2.37)$$

Поочередно фиксируем все значения термомеханических характеристик за исключением одной, изменяющейся по правилу (1.2.37).

На рис. 1.4 изображено влияние: а) теплофизических характеристик  $\bar{k}_\nu$  (точки),  $\bar{c}_\nu$  (штрих пунктир) на температуру в точке  $z=1$ ; б) механических характеристик  $\bar{E}_\nu$  (точки),  $\bar{\rho}_\nu$  (штрих пунктир) на смещение в точке  $z=1$  при  $\nu = 1$ . В вычислениях принято:  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\phi(\tau_2) = \cos(2\tau_2)$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Сплошной линией изображены температура и смещение на торце стержня  $z=1$  при  $\nu = 0$ .

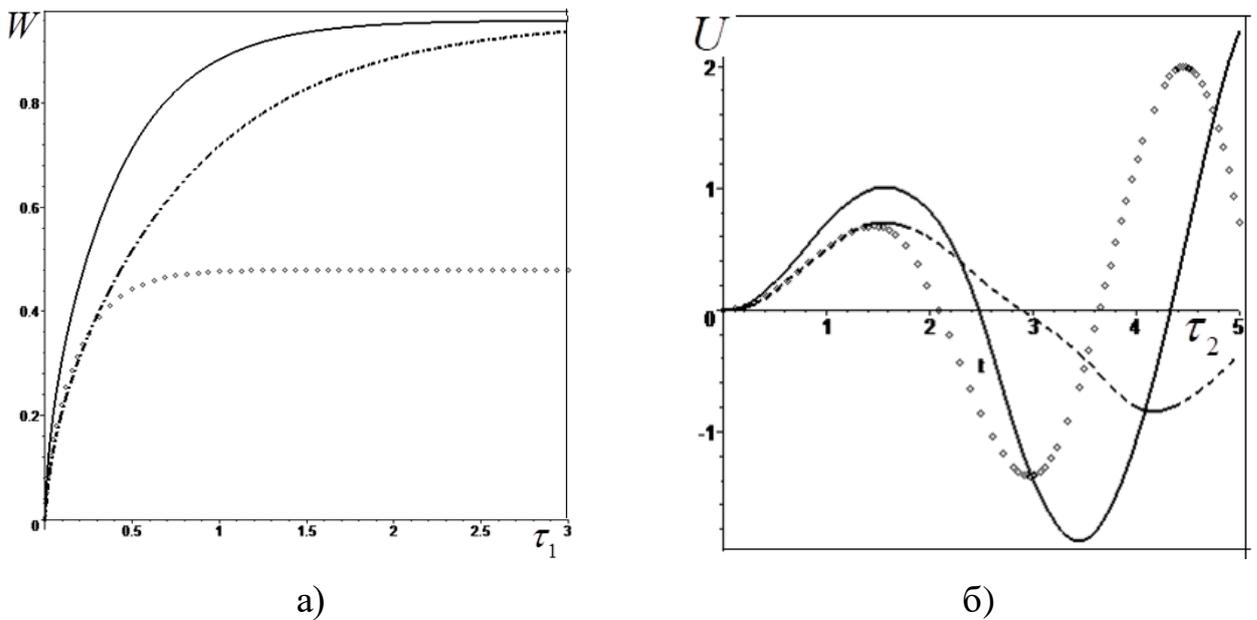
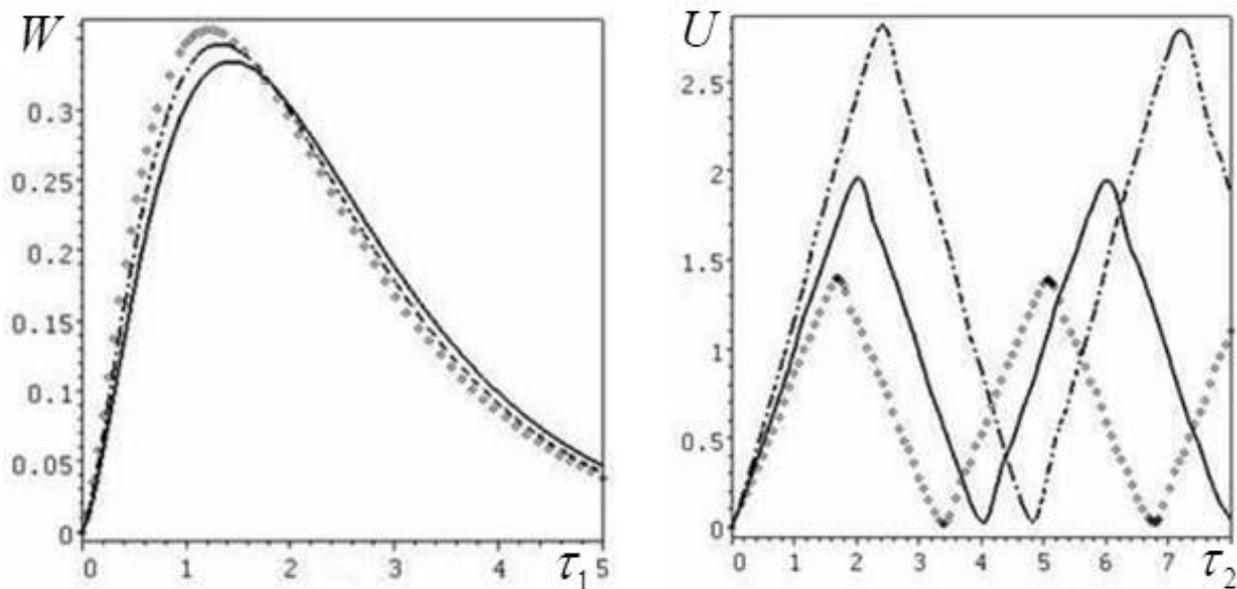


Рисунок 1.4 – Влияние: а) теплофизических характеристик на температуру; б) механических характеристик на смещение в точке  $z = 1$ .

Из рис. 1.4 следует, что теплофизические характеристики оказывают существенное влияние на температуру, при этом увеличение коэффициента теплопроводности приводит к уменьшению максимального значения температуры. Существенное влияние на изменение торцевого смещения оказывают механические характеристики – модуль Юнга и плотность. Вычисления также показали, что влияние коэффициента температурных напряжений на температуру зависит от значения параметра связанности.

Рассмотрим случай неоднородного стержня и проведем исследование влияния различных законов неоднородности на температуру и смещение в точке  $z = 1$  при  $\delta_0 = 0.05$ . На рис. 1.5 приведены результаты влияния законов неоднородности на: а) температуру при тепловой нагрузке  $\varphi(\tau_1) = \tau_1 e^{-\tau_1}$ ; б) смещение при механической нагрузке  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$ . Сплошной линией изображены графики в случае однородного стержня; точками – при  $\bar{k}(z) = 2(1 - 0.1e^{2z})$  и  $\bar{E}(z) = 1.2 - 0.5z^3$ ; штрихпунктирной линией – при  $\bar{k}(z) = 1 + \cos(z)$  и  $\bar{E}(z) = 1 + (z - 1)^2$ .



а)

б)

Рисунок 1.5 – Влияние различных законов неоднородности на изменение функций от времени: а)  $W_1(\tau_1)$ ; б)  $U_2(\tau_2)$ .

Из рис. 1.5 следует, что различные законы неоднородности существенно влияют на температуру и смещение на торце стержня.

### ***1.3 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородной трубы.***

В данном параграфе представлены результаты исследования неустановившихся колебаний ФГ термоупругой трубы [43, 68].

#### **1.3.1 Постановка задачи для трубы**

Рассмотрим неустановившиеся колебания неоднородной термоупругой трубы, внутренняя поверхность которой  $r = r_1$  поддерживается при нулевой температуре и свободна от напряжений, а на внешней поверхности  $r = r_2$  действует нестационарная тепловая или механическая нагрузка: 1)

$$-k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = q_0 \phi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = 0; \quad 2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = -p_0 \phi(t).$$

Постановка задачи в случае теплового нагружения трубы имеет вид [68]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k(r)r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - c_\varepsilon(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} - T_0 \gamma(r) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} \right), \quad (1.3.2)$$

$$\sigma_{rr}(r_1, t) = \theta(r_1, t) = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\sigma_{rr}(r_2, t) = 0, \quad -k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = q_0 \varphi(t), \quad (1.3.4)$$

$$\theta(r, 0) = u_r(r, 0) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, 0) = 0. \quad (1.3.5)$$

Здесь  $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} - \gamma\theta$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} - \gamma\theta$  – ненулевые

компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат.

Выполним обезразмеривание задачи (1.3.1)-(1.3.5) по формулам параграфа 1.1, приняв за характерный размерный параметр  $H$  радиус внешней поверхности цилиндра  $r_2$ , за характерное значение упругого модуля

$-\mu_0$  и, полагая  $\xi = \frac{r}{r_2}$ ,  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $U_r = \frac{u_r}{r_2}$ ,  $\Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\mu_0}$ .

Обезразмеренная постановка задачи (1.3.1)-(1.3.5) имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.3.6)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial^2 U_r}{\partial \xi \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1} \right), \quad (1.3.7)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \tau_1) = 0, \quad W(\xi_0, \tau_1) = 0, \quad (1.3.8)$$

$$\Omega_{rr}(1, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial \xi}(1, \tau_1) = \beta_1 \varphi(\tau_1), \quad (1.3.9)$$

$$W(\xi, 0) = U_r(\xi, 0) = \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1}(\xi, 0) = 0. \quad (1.3.10)$$

Здесь  $\Omega_{rr} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial U_r}{\partial \xi} + \bar{\lambda} \frac{U_r}{\xi} - \bar{\gamma}W$ ,  $\Omega_{\varphi\varphi} = \bar{\lambda} \frac{\partial U_r}{\partial \xi} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{U_r}{\xi} - \bar{\gamma}W$ .

Обезразмеренная постановка задачи термоупругости в случае механического способа нагружения трубы имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.3.11)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau_2} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial^2 U_r}{\partial \xi \partial \tau_2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_r}{\partial \tau_2} \right), \quad (1.3.12)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \tau_2) = 0, \quad W(\xi_0, \tau_2) = 0, \quad (1.3.13)$$

$$\Omega_{rr}(1, \tau_2) = -\beta_2 \phi(\tau_2), \quad \frac{\partial W}{\partial \xi}(1, \tau_2) = 0 \quad (1.3.14)$$

$$W(\xi, 0) = U_r(\xi, 0) = \frac{\partial U_r}{\partial \tau_2}(\xi, 0) = 0. \quad (1.3.15)$$

Задачи (1.3.6)-(1.3.10) и (1.3.11)-(1.3.15) при произвольных законах неоднородности можно решить лишь численно, например, используя подход, основанный на сведении задачи в трансформантах к канонической системе ОДУ 1-го порядка и решении ее методом пристрелки.

### 1.3.2 Решение задачи для трубы

Рассмотрим применение предложенного подхода на примере решения задачи (1.3.6)-(1.3.10).

Применив к уравнениям (1.3.6)-(1.3.9) преобразование Лапласа по времени, с учетом начальных условий (1.3.10), получим:

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{rr}}{d\xi} + \frac{\tilde{\Omega}_{rr} - \tilde{\Omega}_{\varphi\varphi}}{\xi} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_r, \quad (1.3.16)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{d\tilde{W}}{d\xi} \right) = p \bar{c}(\xi) \tilde{W} + \delta_0 p \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{d\tilde{U}_r}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r}{\xi} \right), \quad (1.3.17)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{W}(\xi_0, p) = 0, \quad (1.3.18)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(1, p) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{d\tilde{W}}{d\xi}(1, p) = \beta_1 \tilde{\phi}(p). \quad (1.3.19)$$

В случае механического нагружения трубы граничные условия в трансформантах вместо (1.3.19) имеют вид:

$$\tilde{\Omega}_{rr}(1, p) = \beta_2 \tilde{\phi}(p), \quad \frac{d\tilde{W}}{d\xi}(1, p) = 0. \quad (1.3.20)$$

Система дифференциальных уравнений (1.3.16), (1.3.17) после выражения трансформант напряжений  $\tilde{\Omega}_{rr}$  и  $\Omega_{\varphi\varphi}$  через трансформанты радиального смещения и температуры и некоторых преобразований сводится к канонической системе 4-х ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{d\tilde{W}}{d\xi} = -\frac{1}{k(\xi)}\tilde{Q}(\xi, p), \quad (1.3.21)$$

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}\tilde{Q} + p\left(\bar{c} + \delta_0\frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\right)\tilde{W} + \delta_0 p\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\tilde{\Omega}_{rr} + \delta_0 p\frac{\bar{\gamma}}{\xi}\left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\right)\tilde{U}_r, \quad (1.3.22)$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{rr}}{d\xi} = \frac{1}{\xi}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} - 1\right)\tilde{\Omega}_{rr} + \frac{1}{\xi^2}\left(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} + \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} + \varepsilon_0^2 p^2 \xi^2 \bar{\rho}\right)\tilde{U}_r + \frac{\bar{\gamma}}{\xi}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} - 1\right)\tilde{W}, \quad (1.3.23)$$

$$\frac{d\tilde{U}_r}{d\xi} = \frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\tilde{\Omega}_{rr} - \frac{\bar{\lambda}}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\xi}\tilde{U}_r + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\tilde{W}. \quad (1.3.24)$$

Согласно методу пристрелки [239, 249] решим две вспомогательные задачи Коши, состоящие из канонической системы (1.3.21)-(1.3.24) и двух наборов условий на  $\xi = \xi_0$ :

- 1)  $\tilde{W}'(\xi_0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Omega}_{rr}'(\xi_0, p) = 0$ ,  $\tilde{U}_r'(\xi_0, p) = 1$ ,  $\tilde{Q}'(\xi_0, p) = 0$ ;
- 2)  $\tilde{W}''(\xi_0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Omega}_{rr}''(\xi_0, p) = 0$ ,  $\tilde{U}_r''(\xi_0, p) = 0$ ,  $\tilde{Q}''(\xi_0, p) = 1$ .

Для любого значения параметра преобразования Лапласа  $p$  вспомогательные задачи Коши могут быть решены с заданной точностью численно, например, методом Рунге-Кутты. Далее составляются выражения:

$$\tilde{U}_r = \alpha_1 \tilde{U}_r' + \alpha_2 \tilde{U}_r'', \quad \tilde{\Omega}_{rr} = \alpha_1 \tilde{\Omega}_{rr}' + \alpha_2 \tilde{\Omega}_{rr}'', \quad \tilde{W} = \alpha_1 \tilde{W}' + \alpha_2 \tilde{W}'', \quad \tilde{Q} = \alpha_1 \tilde{Q}' + \alpha_2 \tilde{Q}''.$$

Неизвестные константы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются из решения системы двух уравнений для функций  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{\Omega}_{rr}$ , которая получается при удовлетворении граничных условий на внешней поверхности трубы  $\xi = 1$ :

$$\tilde{Q}(1, p) = \beta_1 \tilde{\varphi}(p), \quad \tilde{\Omega}_{rr}(1, p) = 0.$$

Если трансформанты  $\tilde{F}(p)$  вычислены в целочисленном наборе точек, то для их обращения удобно применять метод разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра.

Область определения смещенных многочленов Лежандра  $P_{m_1}^*$  сведена к отрезку  $[0,1]$  вместо отрезка  $[-1,1]$ , характерного для многочленов Лежандра  $P_{m_1}$ , т.е.  $P_{m_1}^*(x) = P_{m_1}(2x-1)$ .

Для вычисления смещенных многочленов Лежандра используется формула:

$$P_{m_1}^*(x) = (-1)^{m_1} \sum_{s_1=0}^{m_1} (-1)^{s_1} \binom{m_1}{s_1} \frac{(m_1 + s_1)!}{m_1! s_1!} x^{s_1}. \quad (1.3.25)$$

Согласно [114] функция  $F(\tau)$  имеет следующее разложение по смещенным многочленам Лежандра:

$$F(\tau) = \sum_{s_1=0}^{\infty} (2s_1 + 1) a_{s_1} P_{s_1}^*(e^{-\tau}). \quad (1.3.26)$$

При этом коэффициенты разложения  $a_{s_1}$  определяются через коэффициенты  $\zeta_i^{(s_1)}$  многочленов  $P_{s_1}^*$  и целочисленные значения изображения  $\tilde{F}(p)$  по формуле  $a_{s_1} = \sum_{i=0}^{s_1} \zeta_i^{(s_1)} \tilde{F}(i)$ .

### 1.3.3 Численный анализ результатов

Проведена верификация предложенного метода решения задач (1.3.6)-(1.3.10) и (1.3.11)-(1.3.15) в случае однородной трубы путем сравнения, как с аналитическим решением, так и с конечно-элементным решением.

Получим аналитические решения задач теории упругости и теплопроводности для однородной трубы при  $\delta_0 = 0$  (несвязанные задачи).

В случае механического нагружения трубы для нахождения трансформанты радиального смещения имеем дифференциальное уравнение:

$$\tilde{U}_r'' + \frac{1}{\xi} \tilde{U}_r' - \left( \frac{1}{\xi^2} + p^2 \frac{\bar{\rho}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{U}_r = 0, \quad (1.3.27)$$

решение которого выражается через модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода 1-го порядка (функции Макдональда) в виде:

$$\tilde{U}(\xi, p) = C_1 I_1 \left( p \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}} \right) + C_2 K_1 \left( p \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}} \right). \quad (1.3.28)$$

Здесь константы интегрирования  $C_1, C_2$  определяются путем удовлетворения механических граничных условий.

В случае теплового нагружения трубы для нахождения трансформанты трансформанты температуры имеем дифференциальное уравнение:

$$\tilde{W}'' + \frac{1}{\xi} \tilde{W}' - p \frac{\bar{c}}{k} \tilde{W} = 0, \quad (1.3.29)$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{W}(\xi, p) = C_3 I_0 \left( p \sqrt{\frac{\bar{c}}{k}} \right) + C_4 K_0 \left( p \sqrt{\frac{\bar{c}}{k}} \right). \quad (1.3.30)$$

Здесь константы интегрирования  $C_3, C_4$  определяются путем удовлетворения тепловых граничных условий.

Обращение трансформант осуществляется на основе метода Дурбина.

В табл. 1.3 приведены значения безразмерной температуры при нагрузке  $\phi(\tau_1) = H(\tau_1)$  и  $\xi_0 = 0.9, \beta_1 = 1, \bar{k} = \bar{c} = 1$ , а в табл. 1.4 – значения безразмерного радиального смещения при нагрузке  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$  и  $\beta_2 = 1, \xi_0 = 0.9, \bar{\rho} = 1, \bar{\mu} = 1, \bar{\lambda} = 0.8$ .

Таблица 1.3

Время $\tau_1$	Аналитическое решение	Численное решение методом пристрелки			
		$s_1 = 25$	Относительная погрешность, %	$s_1 = 42$	Относительная погрешность, %
0.0001	0.010881	0.011334	4.16	0.010964	0.77
0.001	0.036403	0.036108	0.81	0.036321	0.23
0.01	0.097218	0.097402	0.19	0.097254	0.04
0.05	0.105364	0.105354	0.01	0.105358	0.005

Таблица 1.4

Время $\tau_2$	Аналитическое решение	Численное решение методом пристрелки			
		$s_1 = 60$	Относительная погрешность, %	$s_1 = 97$	Относительная погрешность, %
0.001	0.001355	0.001421	4.87	0.001367	0.88

Продолжение табл. 1.4

0.01	0.005711	0.005764	0.93	0.005727	0.28
0.1	0.060696	0.060513	0.30	0.060788	0.14
0.5	0.618968	0.618412	0.09	0.618642	0.05

Из табл. 1.3, 1.4 следует, что погрешность отклонения не превосходит 1% для времени  $\tau_1 > 10^{-3}$ , если в (1.3.26) ограничиться 42 членами при тепловом нагружении и 97 – при механическом нагружении.

Также проведено сопоставление решения, полученного предложенным методом с конечно-элементным (КЭ) решением, полученным в пакете FlexPDE. На рис. 1.6 показаны распределения по радиальной координате  $\xi$  в момент времени  $\tau_1 = 0.4$ : а) радиального смещения  $U_r$ ; б) окружного напряжения  $\Omega_{\varphi\varphi}$  при тепловой нагрузке  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$  и  $\beta_1 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.03$ ,  $s_1 = 50$ . При том сплошной линией показано распределение, полученное в пакете FlexPDE, точками – на основе предложенного метода.

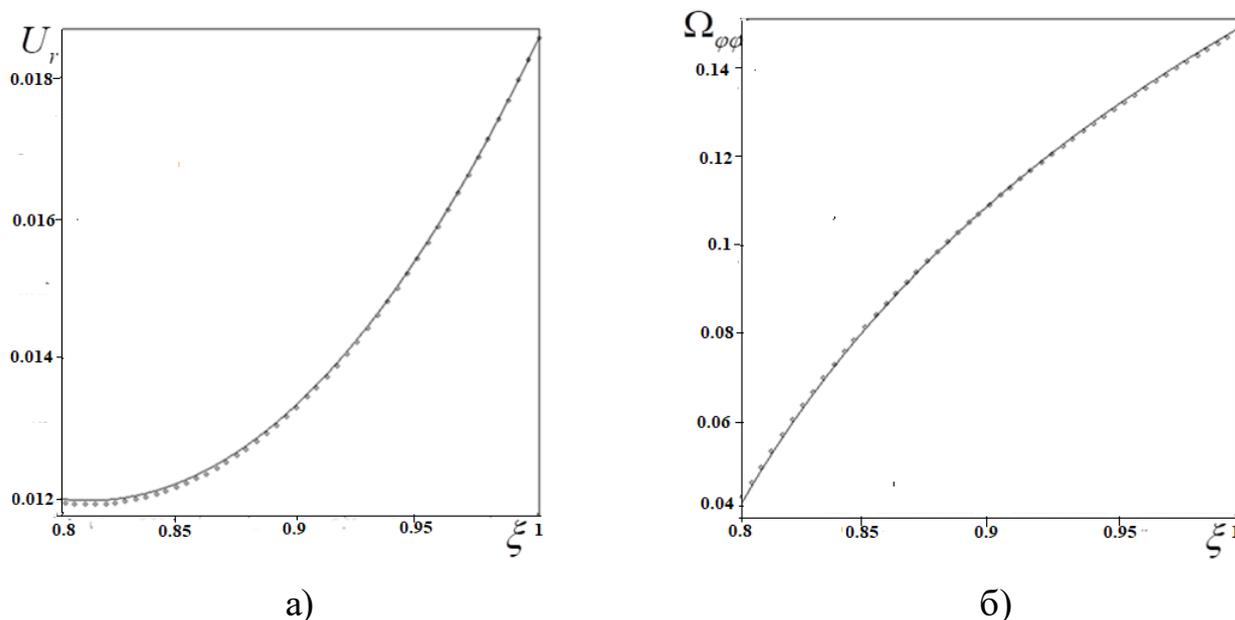


Рисунок. 1.6 – Графики изменения по координате  $\xi$ : а)  $U_r$ ; б)  $\Omega_{\varphi\varphi}$ .

Проведено исследование динамических эффектов. На рис. 1.7 изображено изменение радиального напряжения  $\Omega_{rr}$  от времени при  $\xi = 0.6$  в

случае: а) тепловой нагрузки  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ; б) механической нагрузки  $\varphi(\tau_2) = H(\tau_2)$ . В расчетах принято:  $\xi_0 = 0.2$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

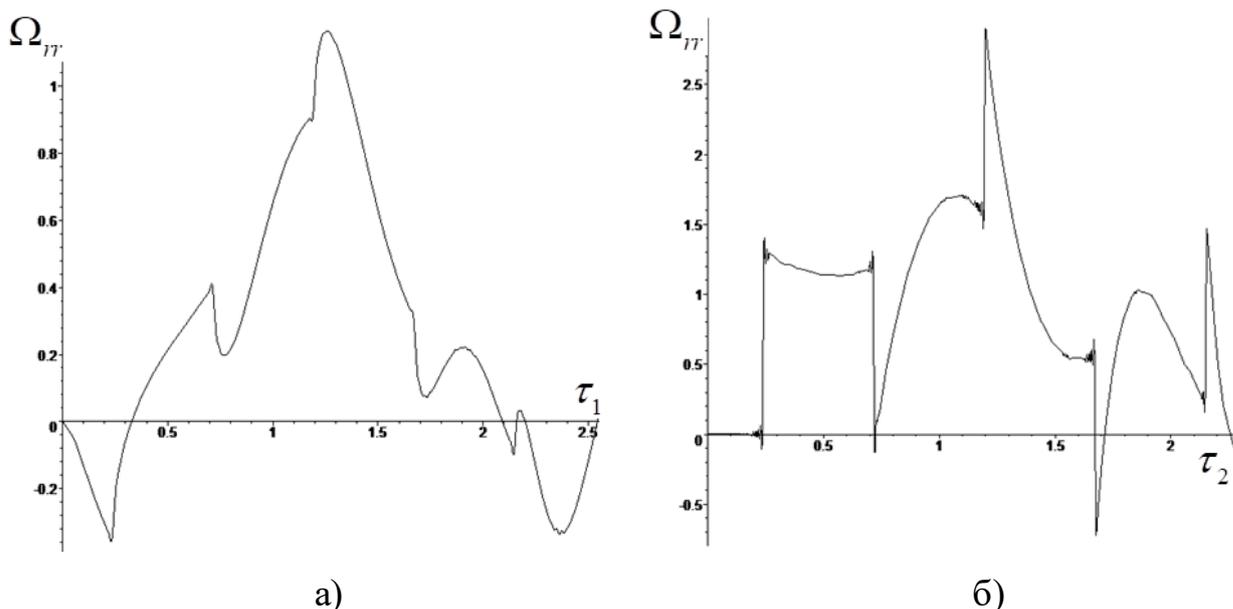


Рисунок 1.7 – Графики изменения радиальных напряжений от времени.

Исследовано влияние термомеханических характеристик на граничные физические поля. При тепловом способе нагружения на изменение температуры существенное влияние оказывают коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость, влияние коэффициента температурных напряжений зависит от параметра связанности. При механическом нагружении большое влияние на изменение радиального смещения оказывают изменения модуля сдвига и плотности, а влияние коэффициента Ламе  $\bar{\lambda}(\xi)$  существенно ниже.

Рассмотрим случай неоднородной трубы. На рисунке 1.8а показано влияние законов  $\bar{k}(\xi)$  на температуру на внешней поверхности трубы при нагрузке  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ . При этом сплошной линией изображен график для однородной трубы, точками – при  $\bar{k}(\xi) = 2.7 - \ln(0.5 + 25(\xi - \xi_0))$ , пунктиром – при  $\bar{k}(\xi) = 1.5 + \cos(10(\xi - \xi_0))$ . На рис. 1.8б изображено влияние законов  $\bar{\mu}(\xi)$  на радиальное смещение при нагрузке  $\varphi(\tau_2) = H(\tau_2)$ . При этом сплошной

линией изображен график для однородной трубы, точками при  $\bar{\mu}(\xi) = 50(\xi - \xi_0)^2 + 2$ , пунктиром – при  $\bar{\mu}(\xi) = 0.5e^{-10(\xi - \xi_0)} + 0.3$ .

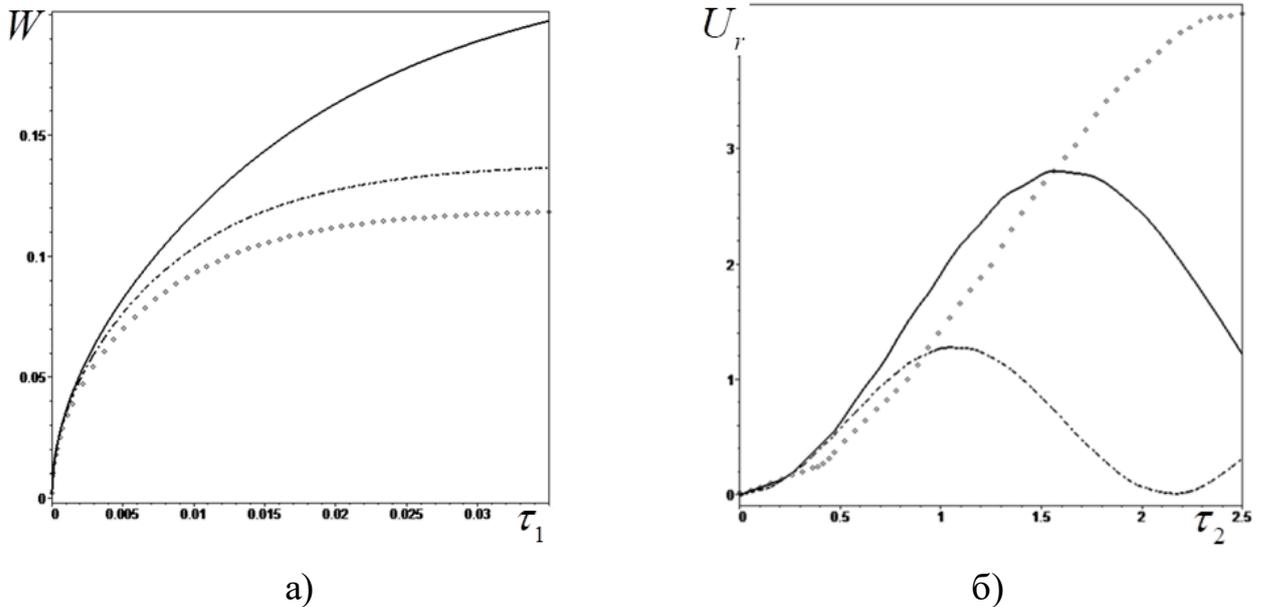


Рисунок 1.8 – Влияние различных законов неоднородности на:  
 а) температуру; б) радиальное смещение на внешней поверхности трубы.

#### ***1.4 Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного конечного цилиндра.***

В данном параграфе представлено решение динамической связанной задачи термоупругости для неоднородного конечного цилиндра [68, 75].

##### **1.4.1 Постановка задачи для конечного цилиндра**

Рассмотрим неустановившиеся колебания конечного радиально-неоднородного цилиндра, торцы которого  $z = \pm h$  находятся в условиях скользящей заделки и теплоизолированы, внутренняя поверхность  $r = r_1$  свободна от напряжений и поддерживается при нулевой температуре, а на внешней поверхности  $r = r_2$  действует один из видов термомеханической нагрузки:

$$1) \quad -k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = q_0 g_1(z) \varphi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0; \quad 2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = -p_{rr} g_2(z) \phi(t), \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0; \quad 3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0,$$

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = -p_{rz} g_3(z) \psi(t).$$

Постановка задачи в случае нормальной нагрузки имеет вид [68]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1.4.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k(r)r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + k(r) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - c_\varepsilon(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} - T_0 \gamma(r) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t} \right), \quad (1.4.3)$$

$$u_z(r, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, \pm h, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}(r, \pm h, t) = 0, \quad (1.4.4)$$

$$\sigma_{rr}(r_1, z, t) = \sigma_{rz}(r_1, z, t) = \theta(r_1, z, t) = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = -p_{rr} g_2(z) \phi(t), \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0, \quad (1.4.6)$$

$$\theta(r, z, 0) = u_r(r, z, 0) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = \frac{\partial u_z}{\partial t}(r, z, 0) = 0. \quad (1.4.7)$$

Здесь  $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \gamma \theta$ ,

$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$  — ненулевые

компоненты тензора напряжений,  $u_r = u_r(r, z, t)$ ,  $u_z = u_z(r, z, t)$  — компоненты вектора перемещения в цилиндрической системе координат.

Обезразмеренная постановка задачи (1.4.1)-(1.4.7) имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{zr}}{\partial \xi_2} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi_1} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \tau_2^2}, \quad \frac{\partial \Omega_{zr}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{zz}}{\partial \xi_2} + \frac{\Omega_{zr}}{\xi_1} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.4.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \bar{k}(\xi_1) \xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \right) + \bar{k}(\xi_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} = \\ & = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau_2} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial^2 U_r}{\partial \xi_1 \partial \tau_2} + \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial U_r}{\partial \tau_2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial \xi_2 \partial \tau_2} \right), \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

$$U_z(\xi_1, \pm \bar{h}, \tau_2) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi_1, \pm \bar{h}, \tau_2) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_2}(\xi_1, \pm \bar{h}, \tau_2) = 0, \quad (1.4.10)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \xi_2, \tau_2) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi_0, \xi_2, \tau_2) = 0, \quad W(\xi_0, \xi_2, \tau_2) = 0, \quad (1.4.11)$$

$$\Omega_{rr}(1, \xi_2, \tau_2) = \beta_2 g_2(\xi_2) \phi(\tau_2), \quad \Omega_{rz}(1, \xi_2, \tau_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_1}(1, \xi_2, \tau_2) = 0, \quad (1.4.12)$$

$$W(\xi_1, \xi_2, 0) = U_r(\xi_1, \xi_2, 0) = \frac{\partial U_r}{\partial \tau_2}(\xi_1, \xi_2, 0) = U_z(\xi_1, \xi_2, 0) = \frac{\partial U_z}{\partial \tau_2}(\xi_1, \xi_2, 0) = 0, \quad (1.4.13)$$

где  $\xi_1 = \frac{r}{r_2}$ ,  $\xi_2 = \frac{z}{r_2}$ ,  $\bar{h} = \frac{h}{r_2}$ ,  $U_r = \frac{u_r}{r_2}$ ,  $U_z = \frac{u_z}{r_2}$ ,  $\Omega_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\mu_0}$ ,  $\Omega_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\mu_0}$ ,  $\beta_2 = \frac{p_{rr}}{\mu_0}$ ,  $\beta_3 = \frac{p_{rz}}{\mu_0}$ .

В случае теплового способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{rz}}{\partial \xi_2} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi_1} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \tau_1^2}, \quad \frac{\partial \Omega_{rz}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{zz}}{\partial \xi_2} + \frac{\Omega_{rz}}{\xi_1} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.4.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \bar{k}(\xi_1) \xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \right) + \bar{k}(\xi_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} = \\ & = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial^2 U_r}{\partial \xi_1 \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi_1} \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial \xi_2 \partial \tau_1} \right), \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

$$U_z(\xi_1, \pm \bar{h}, \tau_1) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi_1, \pm \bar{h}, \tau_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_2}(\xi_1, \pm \bar{h}, \tau_1) = 0, \quad (1.4.16)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \xi_2, \tau_1) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi_0, \xi_2, \tau_1) = 0, \quad W(\xi_0, \xi_2, \tau_1) = 0, \quad (1.4.17)$$

$$\Omega_{rr}(1, \xi_2, \tau_1) = 0, \quad \Omega_{rz}(1, \xi_2, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial \xi_1}(1, \xi_2, \tau_1) = \beta_1 g_1(\xi_2) \varphi(\tau_1), \quad (1.4.18)$$

$$W(\xi_1, \xi_2, 0) = U_r(\xi_1, \xi_2, 0) = \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1}(\xi_1, \xi_2, 0) = U_z(\xi_1, \xi_2, 0) = \frac{\partial U_z}{\partial \tau_1}(\xi_1, \xi_2, 0) = 0. \quad (1.4.19)$$

При решении задач (1.4.8)-(1.4.13) и (1.4.14)-(1.4.19) граничные условия на торцах конечного цилиндра позволяют после применения преобразования Лапласа сначала применить метод разделения переменных, а затем решать одномерные задачи для гармоник методом пристрелки.

#### 1.4.2 Совместное применение метода разделения переменных и метода пристрелки

Рассмотрим предложенный подход на примере решения задачи (1.4.8)-(1.4.13).

Применив к (1.4.8)-(1.4.12) преобразование Лапласа, с учетом начального условия (1.4.13), получим:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{rr}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zr}}{\partial \xi_2} + \frac{\tilde{\Omega}_{rr} - \tilde{\Omega}_{\varphi\varphi}}{\xi_1} = p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_r, \quad \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zr}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zz}}{\partial \xi_2} + \frac{\tilde{\Omega}_{zr}}{\xi_1} = p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_z, \quad (1.4.20)$$

$$\frac{1}{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \bar{k}(\xi_1) \xi_1 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi_1} \right) + \bar{k}(\xi_1) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi_2^2} = p \bar{c}(\xi_1) \tilde{W} + \delta_0 p \bar{\gamma}(\xi_1) \left( \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial \xi_1} + \frac{\tilde{U}_r}{\xi_1} + \frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial \xi_2} \right), \quad (1.4.21)$$

$$\tilde{U}_z(\xi_1, \pm \bar{h}, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(\xi_1, \pm \bar{h}, p) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \pm \bar{h}, p) = 0, \quad (1.4.22)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(\xi_0, \xi_2, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(\xi_0, \xi_2, p) = 0, \quad \tilde{W}(\xi_0, \xi_2, p) = 0, \quad (1.4.23)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(1, \xi_2, p) = \beta_2 g_2(\xi_2) \tilde{\phi}(p), \quad \tilde{\Omega}_{rz}(1, \xi_2, p) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi_1}(1, \xi_2, p) = 0. \quad (1.4.24)$$

В случае теплового нагружения конечного цилиндра граничные условия вместо (1.4.24) имеют вид:

$$\tilde{\Omega}_{rr}(1, \xi_2, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(1, \xi_2, p) = 0, \quad Q(1, \xi_2, p) = \beta_1 g_1(\xi_2) \tilde{\phi}(p). \quad (1.4.25)$$

Задача (1.4.20)-(1.4.24) решается методом разделения переменных, аналогично, как в [188]. Полагаем:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(\xi_1, \xi_2, p) &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{a}_{N_1}(\xi_1, p) \cos(\nu_{N_1} \xi_2), \quad \tilde{U}_z(\xi_1, \xi_2, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{b}_{N_1}(\xi_1, p) \sin(\nu_{N_1} \xi_2), \\ \tilde{W}(\xi_1, \xi_2, p) &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{d}_{N_1}(\xi_1, p) \cos(\nu_{N_1} \xi_2), \quad \tilde{Q}(\xi_1, \xi_2, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{q}_{N_1}(\xi_1, p) \cos(\nu_{N_1} \xi_2), \quad \nu_{N_1} = \frac{N_1 \pi}{h}, \\ g_1(\xi_2) &= \sum_{N_1=0}^{\infty} g_{1N_1} \cos(\nu_{N_1} \xi_2), \quad g_2(\xi_2) = \sum_{N_1=1}^{\infty} g_{2N_1} \cos(\nu_{N_1} \xi_2), \quad g_3(\xi_2) = \sum_{N_1=1}^{\infty} g_{3N_1} \sin(\nu_{N_1} \xi_2). \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

$$\text{Здесь} \quad g_{10} = \frac{1}{2h} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} g_1(\xi_2) d\xi_2, \quad g_{20} = \frac{1}{2h} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} g_2(\xi_2) d\xi_2, \quad g_{1N_1} = \frac{1}{h} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} g_1(\xi_2) \cos(\nu_{N_1} \xi_2) d\xi_2,$$

$$g_{1N_1} = \frac{1}{h} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} g_1(\xi_2) \cos(\nu_{N_1} \xi_2) d\xi_2, \quad g_{3N_1} = \frac{1}{h} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} g_3(\xi_2) \sin(\nu_{N_1} \xi_2) d\xi_2, \quad N_1 = 1, 2, \dots$$

Тогда компоненты тензора напряжений можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{rr} &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{R}_{1N_1} \cos(\nu_{N_1} \xi_2), & \tilde{\Omega}_{zr} = \tilde{\Omega}_{rz} &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{R}_{2N_1} \sin(\nu_{N_1} \xi_2), \\ \tilde{\Omega}_{\varphi\varphi} &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{R}_{3N_1} \cos(\nu_{N_1} \xi_2), & \tilde{\Omega}_{zz} &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{R}_{4N_1} \cos(\nu_{N_1} \xi_2). \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Здесь  $\tilde{R}_{1N_1} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\tilde{a}'_{N_1} + \bar{\lambda} \left( \frac{\tilde{a}_{N_3}}{\xi_1} + \nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1} \right) - \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_1}$ ,  $\tilde{R}_{2N_1} = \bar{\mu}(\tilde{b}'_{N_1} - \nu_{N_1} \tilde{a}_{N_1})$ ,

$$\tilde{R}_{3N_1} = \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\xi_1} \tilde{a}_{N_1} + \bar{\lambda}(\tilde{a}'_{N_1} + \nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1}) - \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_1}, \quad \tilde{R}_{4N_1} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1} + \bar{\lambda} \left( \tilde{a}'_{N_1} + \frac{1}{\xi_1} \tilde{a}_{N_1} \right) - \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_1}.$$

Подставив соотношения (1.4.26), (1.4.27) в (1.4.20), (1.4.21), умножив первое уравнение (1.4.20) и уравнение (1.4.21) на  $\cos(\nu_{N_1} \xi_2)$ , второе уравнение (1.4.20) на  $\sin(\nu_{N_1} \xi_2)$  и, проинтегрировав полученные выражения по  $\xi_2 \in [-\bar{h}, \bar{h}]$ , получим следующий набор для гармоник.

При  $N_1 = 0$ :

$$\tilde{a}'_0 = \frac{R_{10} - \bar{\lambda} \frac{\tilde{a}_0}{\xi_1} + \bar{\gamma} \tilde{d}_0}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \quad \tilde{R}'_{10} = \frac{\tilde{R}_{30} - \tilde{R}_{10}}{\xi_1} + p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_0, \quad \tilde{d}'_0 = \frac{1}{\bar{k}(\xi_1)} \tilde{q}_0,$$

$$\tilde{q}'_0 = -\frac{\tilde{q}_0}{\xi_1} + p \left( \bar{c} + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{d}_0 + p \delta_0 \frac{\bar{\gamma}}{\xi_1} \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{a}_0 + p \delta_0 \bar{\gamma} \frac{R_{10}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \quad (1.4.28)$$

$$\tilde{R}_{10}(\xi_0, p) = \beta_2 g_{20}(\xi_2) \tilde{\phi}(p), \quad \tilde{d}_0(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{10}(1, p) = 0, \quad \tilde{q}_0(1, p) = 0. \quad (1.4.29)$$

При  $N_1 = 1, 2, \dots$ :

$$\tilde{a}'_{N_1} = \frac{\tilde{R}_{1N_1} - \bar{\lambda} \left( \frac{\tilde{a}_{N_1}}{\xi_1} + \nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1} \right) + \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_1}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \quad \tilde{d}'_{N_1} = \frac{1}{\bar{k}(\xi_1)} \tilde{q}_{N_1}, \quad \tilde{b}'_{N_1} = \frac{\tilde{R}_{2N_1}}{\bar{\mu}} + \nu_{N_1} \tilde{a}_{N_1},$$

$$\tilde{R}'_{1N_1} = - \left( \nu_{N_1} \tilde{R}_{2N_1} + \frac{R_{1N_1} - R_{3N_1}}{\xi_1} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_{N_1}, \quad \tilde{R}'_{2N_1} = - \left( \nu_{N_1} \tilde{R}_{4N_1} + \frac{R_{2N_1}}{\xi_1} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_{N_1},$$

$$\tilde{q}'_{N_1} = -\frac{\tilde{q}_{N_1}}{\xi_1} + \left( p \left( \bar{c} + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) + \nu_{N_1} \bar{k} \right) \tilde{d}_{N_1} + p \delta_0 \frac{\bar{\gamma}}{\xi_1} \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{a}_{N_1} +$$

$$+ p \delta_0 \bar{\gamma} \nu_{N_1} \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{b}_{N_1} + p \delta_0 \frac{\bar{\gamma} \tilde{R}_{1N_1}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \quad (1.4.30)$$

$$\tilde{R}_{1N_3}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{2N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{d}_{N_1}(\xi_0, p) = 0,$$

$$\tilde{R}_{1N_1}(1, p) = \beta_2 g_{2N_1}(\xi_2) \tilde{\phi}(p), \quad \tilde{R}_{2N_1}(1, p) = 0, \quad \tilde{q}_{N_1}(1, p) = 0. \quad (1.4.31)$$

Решение задач (1.4.28), (1.4.29) и (1.4.30), (1.4.31) строится с помощью метода пристрелки.

Например, для решения задачи (1.4.30), (1.4.31) сначала составляются три вспомогательные задачи Коши, состоящие из канонической системы (1.4.30) и трех различных наборов условий при  $\xi = \xi_0$ :

$$1) \quad \tilde{R}_{1N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{2N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{d}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{a}_{N_1}(\xi_0, p) = 1, \quad \tilde{b}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \\ \tilde{q}_{N_1}(\xi_0, p) = 0;$$

$$2) \quad \tilde{R}_{1N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{2N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{d}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{a}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{b}_{N_1}(\xi_0, p) = 1, \\ \tilde{q}_{N_1}(\xi_0, p) = 0;$$

$$3) \quad \tilde{R}_{1N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{2N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{d}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{a}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{b}_{N_1}(\xi_0, p) = 0, \\ \tilde{q}_{N_1}(\xi_0, p) = 1.$$

Три вспомогательные задачи решаются методом Рунге-Кутты.

Далее для нахождения  $\tilde{R}_{1N_1}(\xi_1, p)$ ,  $\tilde{R}_{2N_1}(\xi_1, p)$ ,  $\tilde{q}_{N_1}(\xi_1, p)$ ,  $\tilde{d}_{N_1}(\xi_1, p)$ ,  $\tilde{a}_{N_1}(\xi_1, p)$ ,  $\tilde{b}_{N_1}(\xi_1, p)$ , составляются выражения вида  $\tilde{R}_{1N_1}(\xi_1, p) = A_{N_1} \tilde{R}'_{1N_1}(\xi_1, p) + B_{N_1} \tilde{R}''_{1N_1}(\xi_1, p) + C_{N_1} \tilde{R}'''_{1N_1}(\xi_1, p)$ . Здесь  $\tilde{R}'_{1N_1}$ ,  $\tilde{R}''_{1N_1}$ ,  $\tilde{R}'''_{1N_1}$  – решения первой, второй и третьей задач Коши соответственно. Коэффициенты пристрелки  $A_{N_1}$ ,  $B_{N_1}$ ,  $C_{N_1}$  определяются из решения системы трех алгебраических уравнений, полученной путем удовлетворения граничных условий при  $\xi_1 = 1$ .

Обращение трансформант осуществляется методом разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра.

### 1.4.3 Численные результаты решения задачи для конечного цилиндра

Рассмотрим ФГМ, свойства которого принимают свойства  $Ni$  при  $\xi_1 = \xi_0$  и свойства  $TiC$  при  $\xi_1 = 1$ . Для моделирования свойств ФГМ в работе используются законы вида [68, 75]:

$$\bar{a}(\xi_1) = \bar{a}_{Ni} + (\bar{a}_{TiC} - \bar{a}_{Ni}) \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_1}, \quad n_1 = 1, 2, \dots \quad (1.4.31)$$

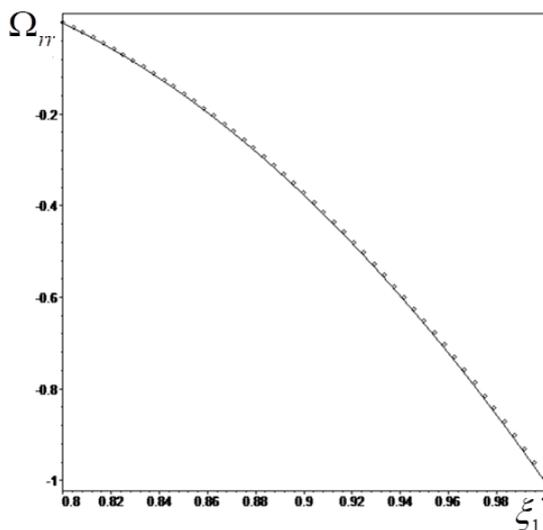
Согласно (1.4.31) и свойствам композиции  $Ni - TiC$  получим следующие законы неоднородности:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\xi_1) &= 0.79 + 0.44(5\xi_1 - 4)^{n_1}, \quad \bar{\lambda}(\xi_1) = 1.19 + 0.66(5\xi_1 - 4)^{n_1}, \\ \bar{\rho}(\xi_1) &= 0.89 - 0.4(5\xi_1 - 4)^{n_1}, \quad \bar{k}(\xi_1) = 0.9 - 0.65(5\xi_1 - 4)^{n_1}, \\ \bar{\gamma}(\xi_1) &= 2.74 - 0.37(5\xi_1 - 4)^{n_1}, \quad \bar{c}(\xi_1) = 0.44 - 0.3(5\xi_1 - 4)^{n_1}. \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

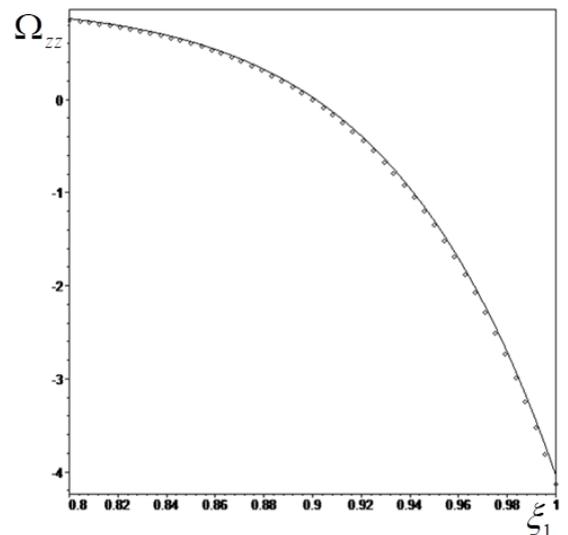
Проведена верификация предложенного метода решения задачи путем его сопоставления с КЭ решением при нагрузке  $\Omega_{rr}(1, \xi_2, \tau_2) = -\left(1 - \left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2\right) H(\tau_2)$ .

Т.к. в пакете FlexPDE в цилиндрической системе координат возможны вычисления только для слабо неоднородных материалов, то решение задачи (1.4.8)-(1.4.13) строилось на плоской области в виде прямоугольника, описывающего половину продольного сечения цилиндра. Для обеспечения сходимости рядов (1.4.26), (1.4.27) достаточно ограничиться 9 членами рядов для температуры и перемещений и 18 членами рядов для напряжений.

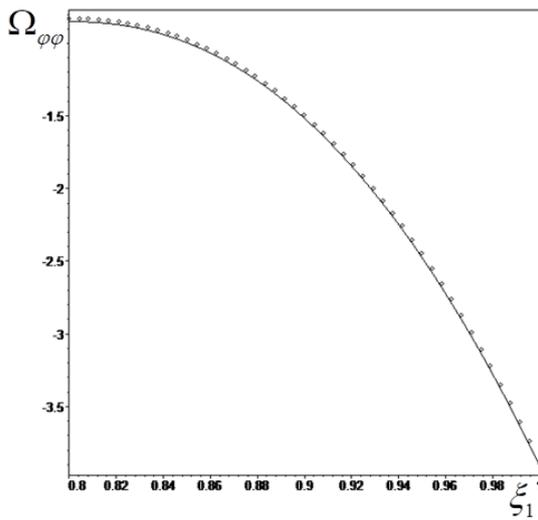
На рис. 1.9 в показаны распределения по координате  $\xi_1$  при  $\xi_2 = 0$  и  $\tau_2 = 0.6$ : а) радиального напряжения  $\Omega_{rr}$ ; б) осевого напряжения  $\Omega_{zz}$ ; в) окружного напряжения  $\Omega_{\varphi\varphi}$ ; г) касательного напряжения  $\Omega_{rz}$ , если в законах (1.4.32) принять  $n_1 = 1$ . При этом сплошной линией показано КЭ решение, точками – на основе предложенного подхода, если в представлениях (1.4.26) ограничиться 18 членами, а в (1.3.26) – сотней членов.



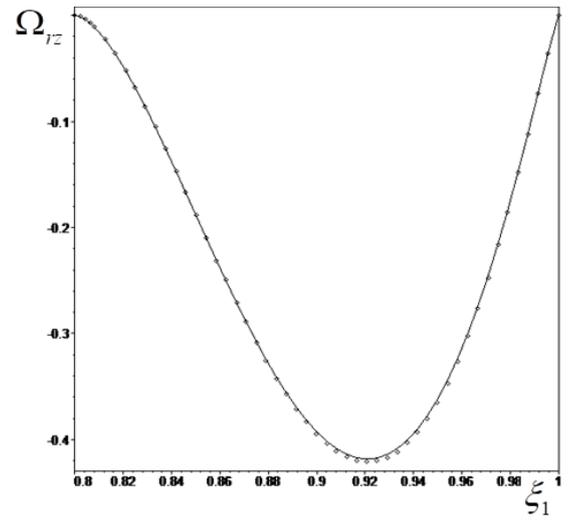
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.9 – Графики изменения по радиальной координате:

а)  $\Omega_{rr}$ ; б)  $\Omega_{zz}$ ; в)  $\Omega_{\varphi\varphi}$ ; г)  $\Omega_{rz}$ .

Исследовано влияние степенных законов неоднородности (1.4.32) на граничные физические поля конечного цилиндра при  $\xi_0 = 0.8$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ . На рис. 1.10а показано изменение температуры  $W$  от  $\tau_1$  в точке (1,0)

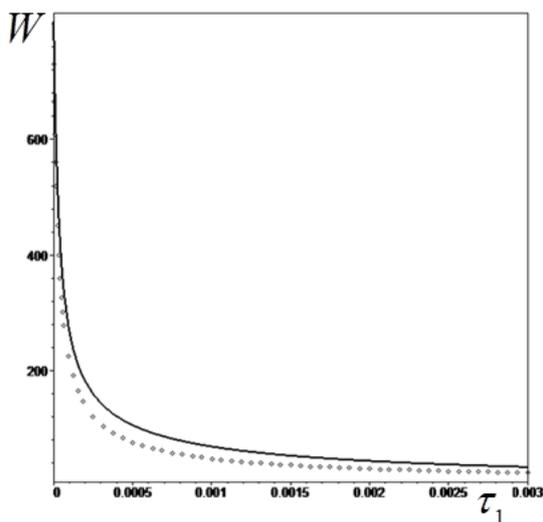
при тепловой нагрузке  $Q(1, \xi_2, \tau_1) = \left(1 - \left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2\right) \delta(\tau_1)$ . На рис. 1.10б изображено

изменения смещения  $U_r$  от  $\tau_2$  при механической нагрузке

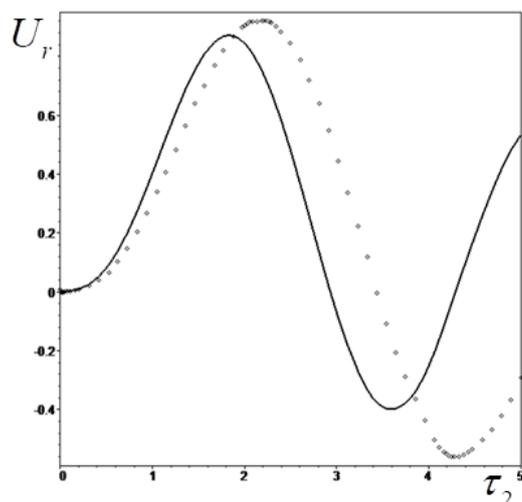
$\Omega_{rr}(1, \xi_2, \tau_2) = -\left(1 - \left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2\right) \tau_2 e^{-\tau_2}$ . При этом сплошной линией изображены

физические поля, рассчитанные при параметре неоднородности  $n_1 = 1$  в (1.4.32), точками – при  $n_1 = 2$ .

Из рис. 1.10 следует, что графики температуры и радиального смещения от времени при различных законах неоднородности существенно отличаются друг от друга, поэтому информацию об изменении температуры и радиального смещения от времени можно использовать при решении обратных задач.



а)



б)

Рисунок 1.10 – Изменение от времени: а) температуры; б) смещения в точке  $(1,0)$  конечного цилиндра.

## 1.5 *Динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника.*

### 1.5.1 *Постановка задачи для прямоугольника*

Рассмотрим неустановившиеся колебания неоднородной по координате  $x_3$  термоупругой среды, занимающей прямоугольную область  $S = [-L, L] \times [0, h]$ . Боковые стороны прямоугольника  $x_1 = \pm L$  теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. Нижняя сторона  $x_3 = 0$  жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре. На верхней стороне  $x_3 = h$  действует один из видов нагрузки: 1) тепловой поток  $-k(h) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, h, t) = q_0 R_2(x_1) \phi(t)$ , механическая нагрузка отсутствует; 2) нормальные напряжения  $\sigma_{33}(x_1, h, t) = -p_{33} R_1(x_1) \phi(t)$ , касательное напряжение и тепловой поток равны нулю; 3) касательные напряжения  $\sigma_{13}(x_1, h, t) = p_{13} R_3(x_1) \psi(t)$ , остальные нагрузки отсутствуют.

Постановка задачи термоупругости для прямоугольника в случае действия тепловой нагрузки на его верхней грани имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1.5.1)$$

$$k(x_3) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( k(x_3) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) = c_\varepsilon(x_3) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x_3) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial t} \right), \quad (1.5.2)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = 0, \quad (1.5.3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = 0, \quad -k(h) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, h, t) = q_0 R_2(x_1) \varphi(t), \quad (1.5.4)$$

$$u_1(\pm L, x_3, t) = \sigma_{31}(\pm L, x_3, t) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}(\pm L, x_3, t) = 0, \quad (1.5.5)$$

$$u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \theta(x_1, x_3, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_1, x_3, 0) = \frac{\partial u_3}{\partial t}(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (1.5.6)$$

Здесь 
$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \gamma \theta, \quad \sigma_{33} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \gamma \theta,$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right).$$

В случае действия на верхней грани прямоугольника нормальной механической нагрузки постановка задачи совпадает с (1.5.1)-(1.5.5) за исключением (1.5.4), которое примет вид:

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = -p_{33} R_1(x_1) \phi(t), \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, h, t) = 0. \quad (1.5.7)$$

Выполним обезразмеривание задачи (1.5.1)-(1.5.7) по формулам параграфа 1.1, приняв за характерный размерный параметр  $H$  ширину прямоугольника  $h$ , введя при этом  $y_i = \frac{x_i}{h}$ ,  $U_i = \frac{u_i}{h}$ ,  $\Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu_0}$ ,  $i = 1, 3$ ,  $\beta_0 = \frac{L}{h}$ ,

$$\beta_1 = \frac{q_0 h \gamma_0}{k_0 \mu_0}, \quad \beta_2 = \frac{p_{33}}{\mu_0}, \quad \beta_3 = \frac{p_{13}}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad t_1 = \frac{h^2 c_0}{k_0}, \quad t_2 = \frac{h}{v_2}, \quad t_3 = \frac{h}{v_3}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}},$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, \quad \tau_1 = \frac{t}{t_1}, \quad \tau_2 = \frac{t}{t_2}, \quad \tau_3 = \frac{t}{t_3}.$$

Обезразмеренная постановка задачи (1.5.1)-(1.5.6) при тепловом нагружении имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau_1^2}, \quad \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.5.8)$$

$$\bar{k} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k} \frac{\partial W}{\partial y_3} \right) = \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{y} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial \tau_1} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y_3 \partial \tau_1} \right), \quad (1.5.9)$$

$$U_1(y_1, 0, \tau_1) = U_3(y_1, 0, \tau_1) = W(y_1, 0, \tau_1) = 0, \quad (1.5.10)$$

$$\Omega_{13}(y_1, 1, \tau_1) = \Omega_{33}(y_1, 1, \tau_1) = 0, \quad Q(y_1, 1, \tau_1) = \beta_1 R_2(y_1) \varphi(\tau_1), \quad (1.5.11)$$

$$U_1(\pm \beta_0, y_3, \tau_1) = \Omega_{31}(\pm \beta_0, y_3, \tau_1) = \frac{\partial W}{\partial y_1}(\pm \beta_0, y_3, \tau_1) = 0, \quad (1.5.12)$$

$$U_1(y_1, y_3, 0) = U_3(y_1, y_3, 0) = W(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1}(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_3}{\partial \tau_1}(y_1, y_3, 0) = 0. \quad (1.5.13)$$

Обезразмеренная постановка задачи в случае воздействия нормальной механической нагрузки имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial y_3} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau_3^2}, \quad \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial y_3} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau_3^2}, \quad (1.5.14)$$

$$\bar{k} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k} \frac{\partial W}{\partial y_3} \right) = \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_3} + \delta_0 \bar{y} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial \tau_3} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y_3 \partial \tau_3} \right), \quad (1.5.15)$$

$$U_1(y_1, 0, \tau_3) = U_3(y_1, 0, \tau_3) = W(y_1, 0, \tau_3) = 0, \quad (1.5.16)$$

$$\Omega_{13}(y_1, 1, \tau_3) = 0, \quad \Omega_{33}(y_1, 1, \tau_3) = \beta_2 R_1(y_1) \phi(\tau_3), \quad Q(y_1, 1, \tau_3) = 0, \quad (1.5.17)$$

$$U_1(\pm \beta_0, y_3, \tau_3) = \Omega_{31}(\pm \beta_0, y_3, \tau_3) = \frac{\partial W}{\partial y_1}(\pm \beta_0, y_3, \tau_3) = 0, \quad (1.5.18)$$

$$U_1(y_1, y_3, 0) = U_3(y_1, y_3, 0) = W(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_1}{\partial \tau_3}(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_3}{\partial \tau_3}(y_1, y_3, 0) = 0. \quad (1.5.19)$$

При решении задач (1.5.8)-(1.5.13) и (1.5.14)-(1.5.19) граничные условия на боковых сторонах прямоугольника позволяют сначала применить метод разделения переменных, а затем решать полученные одномерные задачи для гармоник методом пристрелки.

### 1.5.2 Решение задачи для прямоугольника

Рассмотрим предложенный подход на примере решения задачи (1.5.8)-(1.5.13).

Применим к (1.5.8)-(1.5.12) преобразование Лапласа и с учетом начальных условий (1.5.13), получим:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{13}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\Omega}_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{33}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_3, \quad (1.5.20)$$

$$\bar{k} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y_3} \right) = p \bar{c} \tilde{W} + p \delta_0 \bar{y} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial y_3} \right), \quad (1.5.21)$$

$$\tilde{U}_1(y_1, 0, p) = \tilde{U}_3(y_1, 0, p) = \tilde{W}(y_1, 0, p) = 0, \quad (1.5.22)$$

$$\tilde{U}_1(\pm \beta_0, y_3, p) = \tilde{\Omega}_{31}(\pm \beta_0, y_3, p) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y_1}(\pm \beta_0, y_3, p) = 0, \quad (1.5.23)$$

$$\tilde{\Omega}_{33}(y_1, 1, p) = \tilde{\Omega}_{13}(y_1, 1, p) = 0, \quad \tilde{Q}(1, y_1, p) = \beta_1 R_2(y_1) \tilde{\phi}(p). \quad (1.5.24)$$

В случае нормального механического нагружения верхней грани прямоугольника граничные условия в трансформантах вместо (1.5.24) имеют вид:

$$\tilde{\Omega}_{33}(y_1, 1, p) = \beta_2 R_1(y_1) \tilde{\phi}(p), \quad \tilde{\Omega}_{13}(y_1, 1, p) = 0, \quad \tilde{Q}(1, y_1, p) = 0. \quad (1.5.25)$$

Применим к задаче (1.5.20)-(1.5.24) метод разделения переменных, полагая:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(y_1, y_3, p) &= \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{a}_{N_2}(y_3, p) \sin(\nu_{N_2} y_1), \quad \tilde{U}_3(y_1, y_3, p) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{b}_{N_2}(y_3, p) \cos(\nu_{N_2} y_1), \\ \tilde{W}(y_1, y_3, p) &= \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{d}_{N_2}(y_3, p) \cos(\nu_{N_2} y_1), \\ \tilde{Q}(y_1, y_3, p) &= \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{q}_{N_2}(y_3, p) \cos(\nu_{N_2} y_1), \quad \nu_{N_1} = \frac{\pi N_1}{\beta_0}. \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

Полагаем функции  $R_1(y_1)$  и  $R_2(y_1)$  четными, а  $R_3(y_1)$  – нечетной. Тогда их можно представить в виде:

$$R_1(y_1) = \sum_{N_2=0}^{\infty} r_{N_2} \cos(\nu_{N_2} y_1), \quad R_2(y_1) = \sum_{N_2=0}^{\infty} g_{N_2} \cos(\nu_{N_2} y_1), \quad R_3(y_1) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \zeta_{N_2} \sin(\nu_{N_2} y_1). \quad (1.5.27)$$

Распишем компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{11}(y_1, y_3, p) &= \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{Z}_{1N_2}(y_3, p) \cos(v_{N_2} y_1), & \tilde{\Omega}_{33}(y_1, y_3, p) &= \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{Z}_{3N_2}(y_3, p) \cos(v_{N_2} y_1), \\ \tilde{\Omega}_{13}(y_1, y_3, p) &= \tilde{\Omega}_{31}(y_1, y_3, p) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{Z}_{2N_2}(y_3, p) \sin(v_{N_2} y_1).\end{aligned}\quad (1.5.28)$$

Здесь  $\tilde{Z}_{1N_2} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})v_{N_2} \tilde{a}_{N_2} + \bar{\lambda} \tilde{b}'_{N_2} - \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_2}$ ,  $\tilde{Z}_{2N_2} = \bar{\mu}(\tilde{a}'_{N_2} - v_{N_2} \tilde{b}_{N_2})$ ,  $\tilde{Z}_{3N_2} = \bar{\lambda} v_{N_2} \tilde{a}_{N_2} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \tilde{b}'_{N_2} - \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_2}$ , а знак «штрих» обозначает производную по координате  $y_3$ .

Подставив соотношения для трансформант компонент тензора напряжений и температуры в (1.5.20), (1.5.21), умножив первое уравнение (1.5.20) на  $\sin(v_{N_2} y_1)$ , а второе уравнение (1.5.20) и уравнение (1.5.21) на  $\cos(v_{N_2} y_1)$  и, проинтегрировав полученные выражения по  $y_1 \in [-\beta_0, \beta_0]$ , получим следующий набор для гармоник.

При  $N_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}Z'_{30} &= p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_0, \quad \tilde{b}'_0 = \frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} (\tilde{Z}_{30} + \bar{\gamma} \tilde{d}_0), \\ \tilde{d}'_0 &= -\frac{1}{k} \tilde{q}_0, \quad \tilde{q}'_0 = p \delta_0 \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \tilde{Z}_{30} + p \left( \bar{c} + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{d}_0,\end{aligned}\quad (1.5.29)$$

$$\tilde{b}_0(0, p) = 0, \quad \tilde{d}_0(0, p) = 0, \quad \tilde{Z}_{30}(1, p) = \beta_2 r_0 \tilde{\phi}(p), \quad \tilde{q}_0(1, p) = 0. \quad (1.5.30)$$

При  $N_2 = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}'_{2N_2} &= v_{N_2}^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \bar{\lambda}^2) \tilde{a}_{N_2} + (\bar{\lambda} - 1) \bar{\gamma} v_{N_2} \tilde{d}_{N_2} + \bar{\lambda} v_{N_2} Z_{3N_2} + \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_{N_2}, \\ \tilde{Z}'_{3N_2} &= -v_{N_2} \tilde{Z}_{2N_2} + \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_{N_2}, \quad \tilde{a}'_{N_2} = \frac{1}{\bar{\mu}} \tilde{Z}_{2N_2} + v_{N_2} \tilde{b}_{N_2}, \quad \tilde{b}'_{N_2} = \tilde{Z}_{3N_2} - \bar{\lambda} v_{N_2} \tilde{a}_{N_2} + \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_2}, \quad \tilde{d}'_{N_2} = -\frac{1}{k} \tilde{q}_{N_2}, \\ \tilde{q}'_{N_2} &= \left( p(\bar{c} + \delta_0 \bar{\gamma}^2) + \bar{k} v_{N_2}^2 \right) \tilde{d}_{N_2} + p \delta_0 \bar{\gamma} v_{N_2} (1 - \bar{\lambda}) \tilde{a}_{N_2} + p \delta_0 \bar{\gamma} \tilde{Z}_{3N_2},\end{aligned}\quad (1.5.31)$$

$$\tilde{a}_{N_2}(0, p) = 0, \quad \tilde{b}_{N_2}(0, p) = 0, \quad \tilde{d}_{N_2}(0, p) = 0, \quad (1.5.32)$$

$$\tilde{Z}_{2N_2}(1, p) = 0, \quad \tilde{Z}_{3N_2}(1, p) = 0, \quad \tilde{q}_{N_2}(1, p) = \beta_1 g_{N_2} \tilde{\phi}(p). \quad (1.5.33)$$

В случае действия на верхней грани только касательной нагрузки, имеем следующий набор краевых задач при  $N_2 = 1, 2, \dots$ :

$$Z'_{2N_2} = (\bar{\mu}v_{N_2}^2 + p^2\bar{\rho})\tilde{a}_{N_2}, \quad \tilde{a}'_{N_2} = \frac{1}{\bar{\mu}}\tilde{Z}_{2N_2}, \quad (1.5.34)$$

$$\tilde{a}_{N_2}(0, p) = 0, \quad \tilde{Z}_{2N_2}(1, p) = \beta_3\zeta_{N_2}\tilde{\psi}(p). \quad (1.5.35)$$

Решение задач (1.5.29)-(1.5.30), (1.5.31)-(1.5.33) и (1.5.34), (1.5.35) осуществляется методом пристрелки.

### 1.5.3 Численные результаты решения задачи для прямоугольника

Рассмотрим ФГМ, свойства которого принимают свойства  $Ni$  на нижней грани  $y_3 = 0$  и свойства  $TiC$  на верхней грани  $y_3 = 1$ .

Термомеханические свойства  $Ni$  и  $TiC$  имеют вид [240]:  $E_{Ni} = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,

$$v_{Ni} = 0.3, \quad \rho_{Ni} = 8890 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \alpha_{Ni} = 13.3 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{К}}, \quad k_{Ni} = 90 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c_{Ni} = 439.5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$E_{TiC} = 3.2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad v_{TiC} = 0.3, \quad \rho_{TiC} = 4940 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \alpha_{TiC} = 7.4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{К}}, \quad k_{TiC} = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}},$$

$$c_{TiC} = 134 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Согласно [240, 256] для моделирования свойств ФГМ применим степенные законы вида:

$$\bar{a}(y_3) = \bar{a}_{Ni} + (\bar{a}_{TiC} - \bar{a}_{Ni})y_3^{n_2}, \quad n_2 = 1, 2, \dots \quad (1.5.36)$$

Здесь  $n_2 = 1, 2, \dots$  – показатель неоднородности.

Согласно (1.5.36) и свойствам композиции  $Ni-TiC$  получим следующие законы неоднородности:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(y_3) &= 0.56 + 0.35y_3^{n_2}, & \bar{\lambda}(y_3) &= 0.62 + 0.38y_3^{n_2}, & \bar{\gamma}(y_3) &= 1 - 0.14y_3^{n_2}, & \bar{\rho}(y_3) &= 1 - 0.44y_3^{n_2}, \\ \bar{k}(y_3) &= 1 - 0.75y_3^{n_2}, & \bar{c}(y_3) &= 1 - 0.58y_3^{n_2}. \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

Для обеспечения сходимости рядов (1.5.26), (1.5.28) достаточно ограничиться 10 членами рядов для температуры и компонент вектора перемещений и 20 членами рядов для компонент тензора напряжений.

Проведена верификация предложенного метода решения задачи путем сопоставления с КЭ решением, полученным в пакете FlexPDE для неоднородного прямоугольника при  $n_2 = 2$  в (1.5.37).

В расчетах принято:  $\delta_0 = 0.04$ ,  $\beta_0 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  
 $R_1(y_1) = R_2(y_1) = 1 - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2$ ,  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\phi(\tau_3) = H(\tau_3)$ . На рис. 1.11, 1.12 показано  
 распределение температуры и вертикального перемещения в момент  
 времени  $\tau_1 = 0.5$  по координатам: а)  $y_1$  при  $y_3 = 0.9$ ; б)  $y_3$  при  $y_1 = 0$ . При  
 этом сплошной линией показано КЭ решение, точками – решение на основе  
 предложенного подхода.

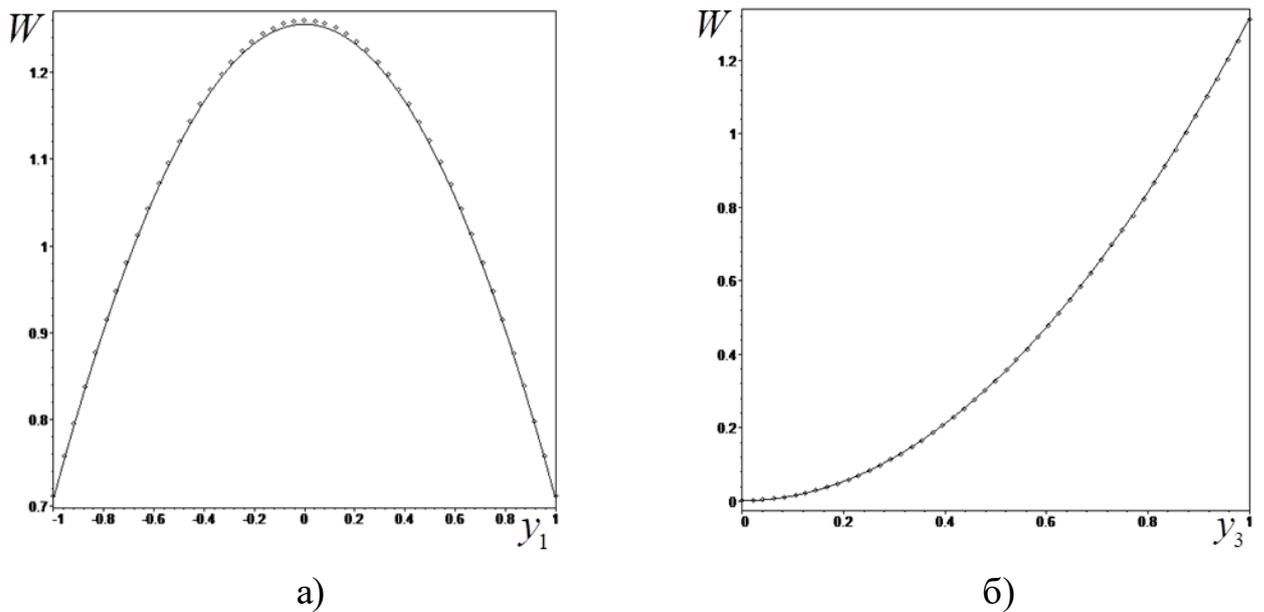


Рисунок 1.11 – Графики изменения  $W$  по координатам: а)  $y_1$ ; б)  $y_3$ .

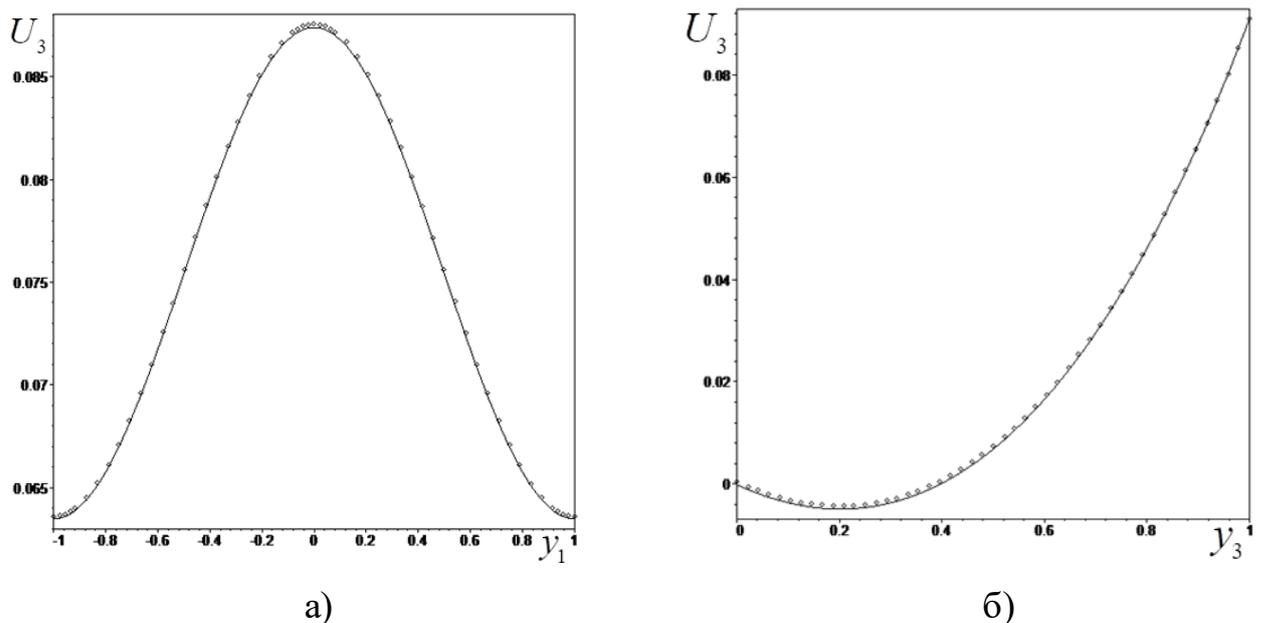


Рисунок 1.12 – Графики изменения  $U_3$  по координатам: а)  $y_1$ ; б)  $y_3$ .

На рис. 1.13 показано распределение нормальных напряжений по координате  $y_3$  при  $y_1 = 0$ : а)  $\Omega_{33}$ ; б)  $\Omega_{11}$ .

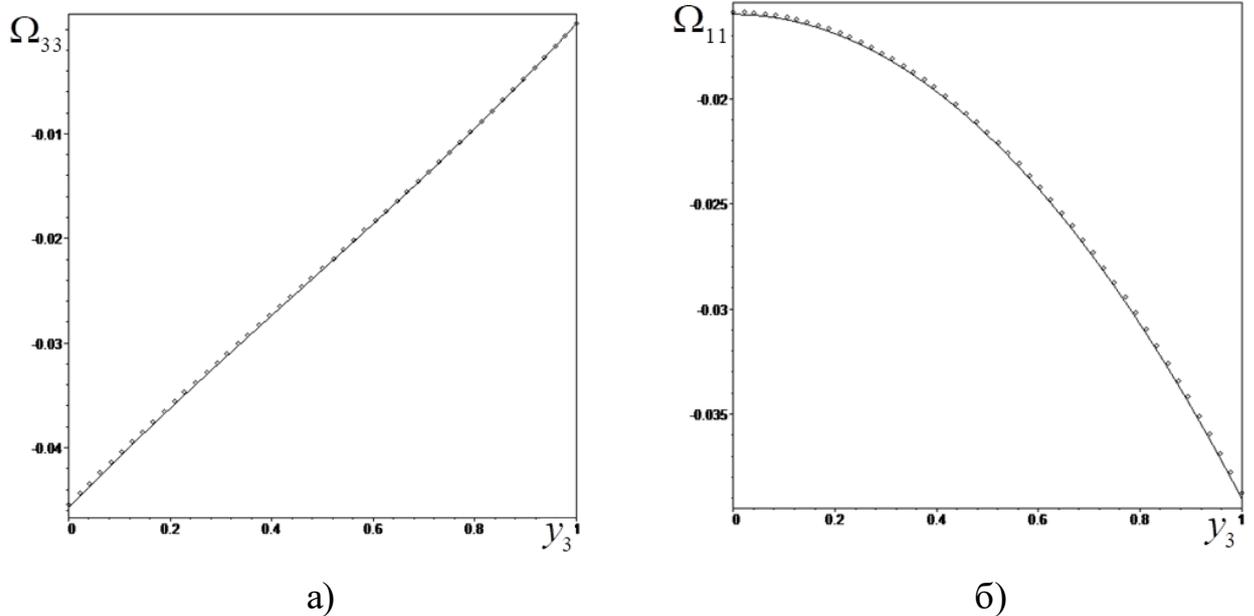


Рисунок 1.13 – Графики изменения по координате  $y_3$ : а)  $\Omega_{33}$ ; б)  $\Omega_{11}$ .

Проведено исследование влияния термомеханических характеристик прямоугольника на граничные физические поля. Выяснено, что соразмерное влияние на изменение температуры на верхней стороне прямоугольника оказывают теплофизические характеристики ( $\bar{k}(y_3)$  и  $\bar{c}(y_3)$ ), а влияние коэффициента температурных напряжений  $\bar{\gamma}(y_3)$  пропорционально значению параметру термомеханической связанности  $\delta_0$ . При касательной нагрузке на горизонтальное перемещение  $U_1$  оказывают влияние только модуль сдвига  $\bar{\mu}(y_3)$ . При нормальной механической нагрузке влияние на изменение вертикального перемещения  $U_3$  оказывают  $\bar{\lambda}(y_3)$ ,  $\bar{\mu}(y_3)$  и  $\bar{\rho}(y_3)$ ; при этом влияние  $\bar{\lambda}(y_3)$  существенно меньше влияния других характеристик.

На рис. 1.14 показано влияние различных степенных законов неоднородности (1.5.37) на граничные физические поля конечного цилиндра в точке  $(y_1, y_3) = (0.1, 1)$  при  $\xi_0 = 0.8$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ ,  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $R_1(y_1) = R_2(y_1) = 1 - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2$ ,  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1) - H(\tau_1 - 1)$ ,  $\phi(\tau_3) = H(\tau_3) - H(\tau_3 - 0.1)$ . На рис.

1.18а изображена зависимость температуры от времени при тепловом нагружении; на рис. 1.18б – зависимость вертикального перемещения от времени при нормальной механической нагрузке. При этом сплошной линией изображены физические поля, рассчитанные при параметре неоднородности  $n_2 = 1$  в (1.5.37), точками – при  $n_2 = 2$ .

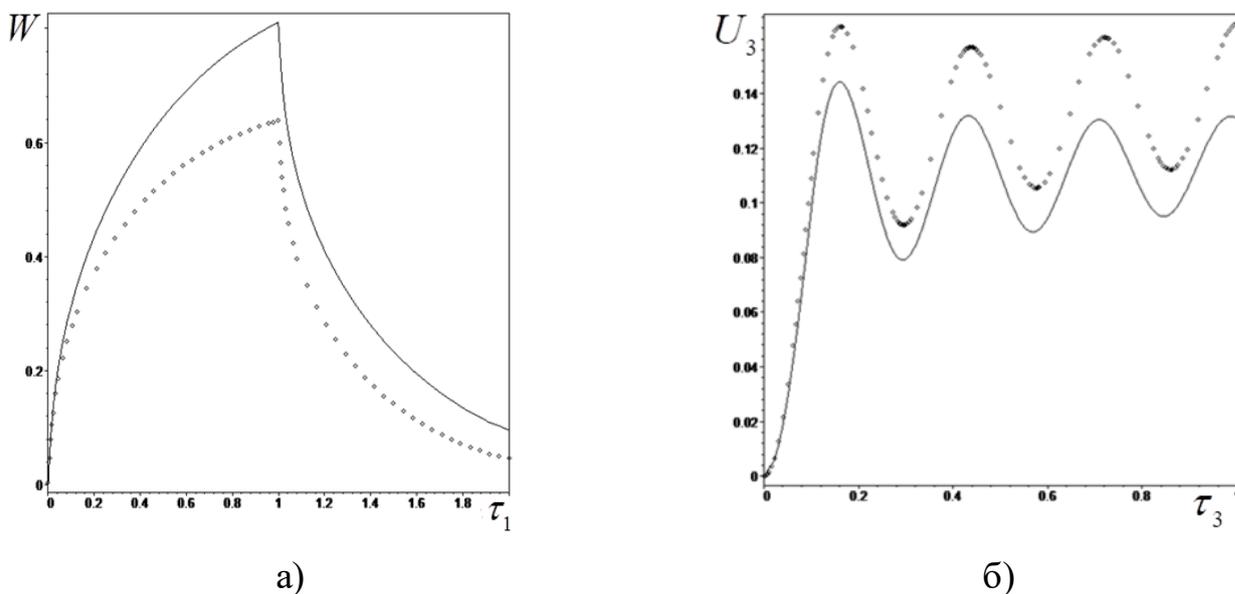


Рисунок 1.14 – Изменение от времени: а) температуры; б) вертикального перемещения в точке (0,1) при различных законах неоднородности.

Из рис. 1.14 следует, что различные степенные законы изменения термомеханических характеристик прямоугольника по-разному оказывают влияние на изменение температуры и перемещения от времени.

## Часть 2.

### Решение динамических связанных задач термоэластостатики для неоднородных тел

Интерес к задачам термоэластостатики связан широким применением сенсорных устройств разнообразного назначения, в том числе бесконтактных термометров и приборов ночного видения, в которых в качестве основных элементов используются пьезоэлектрические материалы [16]. В конструкциях, изготовленных из пьезоматериалов при

нестационарном тепловом воздействии, возникают температурные деформации, что приводит к образованию в поляризованной среде электрического поля. Расчеты НДС в таких конструкциях с учетом взаимного влияния механического, теплового и электрического полей проводятся на основе уравнений термоэлектроупругости, которые были получены в [226]. В настоящее время в целях оптимизации пьезоэлектрических структур изготавливают так называемые функционально - градиентные пироматериалы (ФГПМ) – пьезокомпозиты, обладающие переменными физическими свойствами [261].

Во второй части главы 1 представлена общая постановка динамической связанной задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел и проведено ее обезразмеривание. В качестве примеров исследованы нестационарные задачи термоэлектроупругости для стержня и цилиндра.

### ***1.6 Постановка динамической связанной задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел.***

Рассмотрим неустановившиеся колебания неоднородного термоэлектроупругого тела, имеющего объем  $V$  под действием тепловой или механической нагрузки. Пусть тело имеет кусочно-гладкую границу  $S = S_u \cup S_\sigma = S_T \cup S_q = S_+ \cup S_- \cup S_H$ , где на  $S_q$  задан тепловой поток, на  $S_T$  – температура, на  $S_u$  – компоненты вектора перемещений, на  $S_\sigma$  – компоненты тензора напряжений, на  $S_\pm$  – электрический потенциал, поверхность  $S_H$  неэлектродирована.

Математическая постановка динамической связанной задачи термоэлектроупругости включает дифференциальные уравнения движения, электростатики и притока тепла, тепловые, механические и электрические граничные условия, а также начальные условия.

При тепловом способе нагружения общая постановка задачи термоэлектроупругости имеет вид [68]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.6.1)$$

$$D_{i,i} = 0, \quad (1.6.2)$$

$$(k_{ij}\theta_{,i})_{,j} - c_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 (\gamma_{ij}\dot{u}_{i,j} - g_i \dot{\phi}_{,i}) = 0, \quad (1.6.3)$$

$$\theta|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}\theta_{,i}n_j|_{S_q} = q, \quad (1.6.4)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0, \quad (1.6.5)$$

$$\varphi|_{S_\pm} = 0, \quad D_i n_i|_{S_H} = 0, \quad (1.6.6)$$

$$\theta(x,0) = \varphi(x,0) = u_i(x,0) = \dot{u}_i(x,0) = 0. \quad (1.6.7)$$

В случае механического нагружения граничные условия (1.6.4), (1.6.5) имеют вид:

$$\theta|_{S_T} = 0, \quad \theta_{,i}n_j|_{S_q} = 0, \quad (1.6.8)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i. \quad (1.6.9)$$

Здесь  $\varphi$  – электрический потенциал,  $\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k} - \gamma_{ij}\theta$  – компоненты тензора напряжений,  $D_i = e_{ikl}u_{k,l} - \varepsilon_{ik}\varphi_{,k} + g_i\theta$  – компоненты вектора электрической индукции,  $e_{ikl}$  – компоненты тензора пьезомодулей,  $\varepsilon_{ik}$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости,  $g_i$  – компоненты вектора пироккоэффициентов.

Для удобства дальнейших построений обезразмерим задачу

$$(1.6.1)-(1.6.7) \text{ по формулам: } \bar{x} = \frac{x}{H}, \quad U_i = \frac{u_i}{H}, \quad W = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \bar{D}_i = \frac{D_i}{D_0}, \quad \bar{\Omega}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{3333}^0},$$

$$\varphi_0 = H \sqrt{\frac{c_{3333}^0}{\varepsilon_{33}^0}}, \quad t_1 = \frac{H^2 c_\varepsilon^0}{k_{33}^0}, \quad t_2 = H \sqrt{\frac{\rho_0}{c_{3333}^0}}, \quad \theta_0 = \sqrt{\frac{T_0 c_{3333}^0}{c_\varepsilon^0}}, \quad Q = \frac{qH\gamma_{33}^0}{k_{33}^0 c_{3333}^0}, \quad P_i = \frac{p_i}{c_{3333}^0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{t_1}{t_2},$$

$$\tau_1 = \frac{t}{t_1}, \quad \tau_2 = \frac{t}{t_2}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{33}^0}, \quad \bar{c} = \frac{c_\varepsilon}{c_\varepsilon^0}, \quad \bar{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_{33}^0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{g}_i = \frac{g_i}{g_3^0}, \quad \bar{\gamma}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{33}^0}, \quad \bar{c}_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{c_{3333}^0},$$

$$\bar{e}_{ijk} = \frac{e_{ijk}}{e_{333}^0}, \quad \delta_1 = \frac{e_{333}^0}{\sqrt{\varepsilon_{33}^0 c_{3333}^0}}, \quad \delta_2 = \frac{\gamma_{33}^0 \sqrt{T_0}}{\sqrt{c_\varepsilon^0 c_{3333}^0}}, \quad \delta_3 = \frac{g_3^0 \sqrt{T_0}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^0 c_\varepsilon^0}}. \quad \text{Здесь } H \text{ – характерный}$$

линейный размер тела,  $c_{3333}^0, \vartheta_{33}^0, e_{333}^0, \rho_0, \gamma_{33}^0, k_{33}^0, c_\varepsilon^0, g_3^0$  – максимальные значения величины термомеханических характеристик,  $\delta_1$  – параметр электромеханической связанности,  $\delta_2$  – параметр термомеханической связанности,  $\delta_3$  – параметр теплоэлектрической связанности.

Обезразмеренная постановка задачи (1.6.1)-(1.6.7) в случае теплового нагружения имеет вид:

$$\Omega_{ij,j} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.6.10)$$

$$\bar{D}_{i,i} = 0, \quad (1.6.11)$$

$$\left( \bar{k}_{ij} W_{,j} \right)_{,i} - \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_1} - \delta_2 \bar{\gamma}_{ij} \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \tau_1} + \delta_3 \bar{g}_i \frac{\partial \Phi_{,i}}{\partial \tau_1} = 0, \quad (1.6.12)$$

$$W|_{S_r} = 0, \quad -\bar{k}_{ij} W_{,i} n_j|_{S_q} = Q, \quad (1.6.13)$$

$$U_i|_{S_u} = 0, \quad \Omega_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0, \quad (1.6.14)$$

$$\Phi|_{S_\pm} = 0, \quad \bar{D}_i n_i|_{S_H} = 0, \quad (1.6.15)$$

$$W(\bar{x}, 0) = \Phi(\bar{x}, 0) = U_i(\bar{x}, 0) = \frac{\partial U_i}{\partial \tau_1}(\bar{x}, 0) = 0. \quad (1.6.16)$$

Здесь  $\Omega_{ij} = \bar{c}_{ijkl} U_{k,l} + \delta_1 \bar{e}_{kij} \Phi_{,k} - \delta_2 \bar{\gamma}_{ij} W$ ,  $\bar{D}_i = \delta_1 \bar{e}_{ikl} U_{k,l} - \bar{\vartheta}_{ik} \Phi_{,k} + \delta_3 \bar{g}_i W$ .

В случае механического нагружения обезразмеренная постановка задачи термоэлектроупругости имеет вид:

$$\Omega_{ij,j} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.6.17)$$

$$\bar{D}_{i,i} = 0, \quad (1.6.18)$$

$$\left( \bar{k}_{ij} W_{,j} \right)_{,i} - \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_2} - \delta_2 \bar{\gamma}_{ij} \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \tau_2} + \delta_3 \bar{g}_i \frac{\partial \Phi_{,i}}{\partial \tau_2} = 0, \quad (1.6.19)$$

$$W|_{S_r} = 0, \quad W_{,i} n_j|_{S_q} = 0, \quad (1.6.20)$$

$$U_i|_{S_u} = 0, \quad \Omega_{ij} n_j|_{S_\sigma} = P_i, \quad (1.6.21)$$

$$\Phi|_{S_\pm} = 0, \quad \bar{D}_i n_i|_{S_H} = 0, \quad (1.6.22)$$

$$W(\bar{x}, 0) = \Phi(\bar{x}, 0) = U_i(\bar{x}, 0) = \frac{\partial U_i}{\partial \tau_2}(\bar{x}, 0) = 0. \quad (1.6.23)$$

Решение прямой задачи термоэлектроупругости заключается в определении функций  $U_i$ ,  $W$ ,  $\Phi$  из (1.6.10)-(1.6.16) или (1.6.17)-(1.6.23) при известных термомеханических характеристиках.

### ***1.7 Динамическая связанная задача термоэлектроупругости для неоднородного стержня.***

В данном параграфе представлено решение динамической связанной задачи термоэлектроупругости для стержня [52, 68, 254].

#### **1.7.1 Постановка задачи термоэлектроупругости для стержня**

Рассмотрим неустановившиеся колебания продольно поляризованного термоэлектроупругого стержня конечной длины, один торец которого  $x_3 = 0$  жестко зашпелен, закорочен и поддерживается при нулевой температуре, а на другом торце  $x_3 = l$  действует нестационарная нагрузка: 1)

$$-k_3(l) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(l, t) = q_0 \varphi(t), \quad \sigma(l, t) = 0, \quad \varphi(l, t) = 0; \quad 2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(l, t) = 0, \quad \sigma(l, t) = p_0 \phi(t), \quad \varphi(l, t) = 0.$$

$$\text{Здесь } \sigma(x, t) = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \gamma_3 \theta.$$

Обезразмеренная постановка задачи, выполненная по формулам параграфа 1.6, в случае теплового нагружения термоэлектроупругого стержня в обозначениях Фойгта имеет вид [254]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{c}_{33}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \delta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{e}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \delta_2 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z) W) = \varepsilon_0^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.7.1)$$

$$\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{e}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\varepsilon}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{g}(z) W) = 0, \quad (1.7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau_1} - \delta_2 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau_1} + \delta_3 \bar{g}(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \tau_1} = 0, \quad (1.7.3)$$

$$U(0, \tau_1) = W(0, \tau_1) = \Phi(0, \tau_1) = 0, \quad (1.7.4)$$

$$\Omega(1, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}_3(1) \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau_1) = \beta_1 \varphi(\tau_1), \quad \Phi(1, \tau_1) = 0, \quad (1.7.5)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \Phi(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau_2}(z, 0) = 0, \quad (1.7.6)$$

$$\text{где } \Omega(z, \tau_1) = \bar{c}_{33}(z) \frac{\partial U}{\partial z} + \delta_1 \bar{e}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \delta_2 \bar{\gamma}(z) W.$$

Обезразмеренная постановка задачи в случае механического нагружения термоэлектроупругого стержня имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{c}_{33}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \delta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{e}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \delta_2 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z) W) = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.7.7)$$

$$\delta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{e}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\varepsilon}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z} (\bar{g}(z) W) = 0, \quad (1.7.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau_2} - \delta_2 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau_2} + \delta_3 \bar{g}(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \tau_2} = 0, \quad (1.7.9)$$

$$U(0, \tau_2) = W(0, \tau_2) = \Phi(0, \tau_2) = 0, \quad (1.7.10)$$

$$\Omega(1, \tau_2) = \beta_2 \phi(\tau_2), \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau_2) = 0, \quad \Phi(1, \tau_2) = 0, \quad (1.7.11)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \Phi(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau_2}(z, 0) = 0. \quad (1.7.12)$$

Задачи (1.7.1)-(1.7.6) и (1.7.7)-(1.7.12) при произвольных законах неоднородности можно решить лишь численно, например, методом пристрелки.

### 1.7.2 Решение задачи термоэлектроупругости для стержня

Применив к (1.7.7)-(1.7.11) преобразование Лапласа, после некоторых преобразований получим следующую каноническую систему ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dz} = p^2 \rho(z) \tilde{U}(z, p), \quad (1.7.13)$$

$$\frac{d\tilde{D}}{dz} = 0, \quad (1.7.14)$$

$$\frac{d\tilde{W}}{dz} = -\frac{1}{k(z)} \tilde{Q}(z, p), \quad (1.7.15)$$

$$\frac{d\tilde{Q}}{dz} = p \frac{\delta_2 \bar{\gamma} \bar{e} + \delta_3 \bar{g} \bar{c}_{33}}{\Delta_1} \tilde{D}(z, p) + p \frac{\bar{\varepsilon} \bar{c}_{33} \bar{c} + \delta_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\varepsilon}}{\Delta_1} \tilde{W}(z, p) + p \frac{\delta_2 \bar{\gamma} \bar{\varepsilon}}{\Delta_1} \tilde{\Omega}(z, p), \quad (1.7.16)$$

$$\frac{d\tilde{U}}{dz} = \frac{\delta_1 \bar{e}}{\Delta_1} \tilde{D}(z, p) + \frac{\delta_2 \bar{\gamma} \bar{\varepsilon} - \delta_1 \bar{g} \bar{e}}{\Delta_1} \tilde{W}(z, p) + \frac{\bar{\varepsilon}}{\Delta_1} \tilde{\Omega}(z, p), \quad (1.7.17)$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz} = \frac{\bar{c}_{33}}{\Delta_1} \tilde{D}(z, p) - \frac{\delta_3 \bar{c}_{33} \bar{g} + \delta_2 \bar{\gamma} \bar{e}}{\Delta_1} \tilde{W}(z, p) - \frac{\delta_1 \bar{e}}{\Delta_1} \tilde{\Omega}(z, p), \quad (1.7.18)$$

где  $\Delta_1 = \bar{\varepsilon} \bar{c}_{33} + \delta_1^2 \bar{e}^2$ .

Согласно методу пристрелки далее составляются три вспомогательные задачи Коши, состоящие из канонической системы ОДУ 1-го порядка (1.7.13)-(1.7.18) и трех наборов условий при  $z = 0$ :

- 1)  $\tilde{W}'(0, p) = 0$ ,  $\tilde{U}'(0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Phi}'(0, p) = 0$ ,  $\tilde{D}'(0, p) = 1$ ,  $\tilde{Q}'(0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Omega}'(0, p) = 0$ ;
- 2)  $\tilde{W}''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{U}''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Phi}''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{D}''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Q}''(0, p) = 1$ ,  $\tilde{\Omega}''(0, p) = 0$ ;
- 3)  $\tilde{W}'''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{U}'''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Phi}'''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{D}'''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Q}'''(0, p) = 0$ ,  $\tilde{\Omega}'''(0, p) = 1$ .

Для любого значения параметра преобразования Лапласа задачи Коши решаются численно методом Рунге-Кутты. Далее составляют выражения:

$$\tilde{U} = \eta_1 \tilde{U}' + \eta_2 \tilde{U}'' + \eta_3 \tilde{U}''', \quad \tilde{\Omega} = \eta_1 \tilde{\Omega}' + \eta_2 \tilde{\Omega}'' + \eta_3 \tilde{\Omega}''', \quad \tilde{\Phi} = \eta_1 \tilde{\Phi}' + \eta_2 \tilde{\Phi}'' + \eta_3 \tilde{\Phi}''',$$

$$\tilde{D} = \eta_1 \tilde{D}' + \eta_2 \tilde{D}'' + \eta_3 \tilde{D}''', \quad \tilde{W} = \eta_1 \tilde{W}' + \eta_2 \tilde{W}'' + \eta_3 \tilde{W}''', \quad \tilde{Q} = \eta_1 \tilde{Q}' + \eta_2 \tilde{Q}'' + \eta_3 \tilde{Q}'''.$$

Неизвестные константы  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3$  определяются из решения системы трех уравнений для функций  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{\Omega}$ , которая получается путем удовлетворения граничных условий при  $z = 1$ .

Обращение трансформант осуществляется на основе метода разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра.

### 1.7.3 Результаты расчетов

В случае однородного стержня после исключения электрического потенциала, задача термоэлектроупругости сводится к задаче термоупругости с модифицированными коэффициентами  $c_{33}^* = c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}}$ ,

$\gamma_3^* = \gamma_3 - \frac{e_{33}g_3}{\vartheta_3}$ ,  $c_\varepsilon^* = c_\varepsilon - \frac{T_0 g_3^2}{\vartheta_3}$ . Проведена верификация предложенного метода решения нестационарной задачи путем сравнения с аналитическим решением задачи для однородного термоупругого стержня, полученным в п. 1.2.2, в случае модифицированных модулей. Термомеханические расчеты проведены для пироматериала, изготовленного на основе представителя пьезокерамики класса *btt* – титаната бария  $BaTiO_3$ . Для нахождения безразмерных параметров связанности воспользуемся значениями физических постоянных титаната бария [52]:  $c_{33} = 16.2 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}$ ,  $e_{33} = 18.6 \frac{Kл}{M^2}$ ,  $\vartheta_{33} = 12.57 \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{M}$ ,  $k_{33} = 0.036 \frac{Bm}{M \cdot K}$ ,  $\gamma_{33} = 3.94 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2 \cdot K}$ ,  $g_3 = 2 \cdot 10^{-4} \frac{Kл}{M^2 \cdot K}$ ,  $c_\varepsilon = 3 \cdot 10^6 \frac{Дж}{M^3 \cdot K}$ ,  $\rho = 4.5 \cdot 10^3 \frac{кг}{M^3}$ .

В табл. 1.5 приведены значения смещения в точке  $z=1$  при механической нагрузке  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$ , полученные аналитически и предложенным методом при различных значениях параметра  $s_1$  в ряду (1.3.26). В вычислениях принято:  $\beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = 0.2$ ,  $\delta_2 = 0.02$ ,  $\delta_3 = 0.035$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ .

Таблица 1.5

Моменты времени $\tau_2$	Аналитическое решение	Метод пристрелки			
		$s_1 = 43$	Относительная погрешность, %	$s_1 = 102$	Относительная погрешность, %
0.001	0.000019	0.000013	31.6	0.0000192	1
0.01	0.001973	0.001699	13.89	0.001987	0.71
0.1	0.099967	0.093993	5.98	0.100578	0.61
0.5	0.499993	0.488055	2.39	0.498773	0.24
1	0.999654	1.010468	1.08	0.999738	0.01

Из табл. 1.5 следует, что точность вычисления температуры и смещения зависит от числа членов  $s_1$  в формуле (1.3.26). При механическом способе нагружения на временах  $\tau_2 > 10^{-3}$  для того, чтобы относительная

погрешность решения была менее 1%, необходимо удерживать порядка 100 членов разложения в (1.3.26).

Под действием механической или тепловой нагрузки наблюдается деформация пьезокерамического стержня, что приводит к образованию электрического поля с потенциалом, распределение которого по длине стержня в силу граничных условий имеет нелинейный характер.

Используя значения параметров связанности титаната бария рассмотрим изменение электрического потенциала от времени в середине неоднородного стержня  $z = 0.5$  при тепловом нагружении.

На рис. 1.15 сплошной линией изображены графики электрического потенциала в случае тепловой нагрузки: а)  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ; б)  $\varphi(\tau_1) = \delta(\tau_1)$ . При этом сплошной линией изображено изменение потенциала при  $\bar{k}(z) = 1$ , точками – при  $\bar{k}(z) = 1.5 - z^2$ , пунктиром – при  $\bar{k}(z) = \cos(z)$ . Остальные безразмерные термомеханические характеристики полагались равными 1. В расчетах принято:  $\beta_1 = 1$ ,  $\delta_1 = 0.2$ ,  $\delta_2 = 0.02$ ,  $\delta_3 = 0.035$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ .

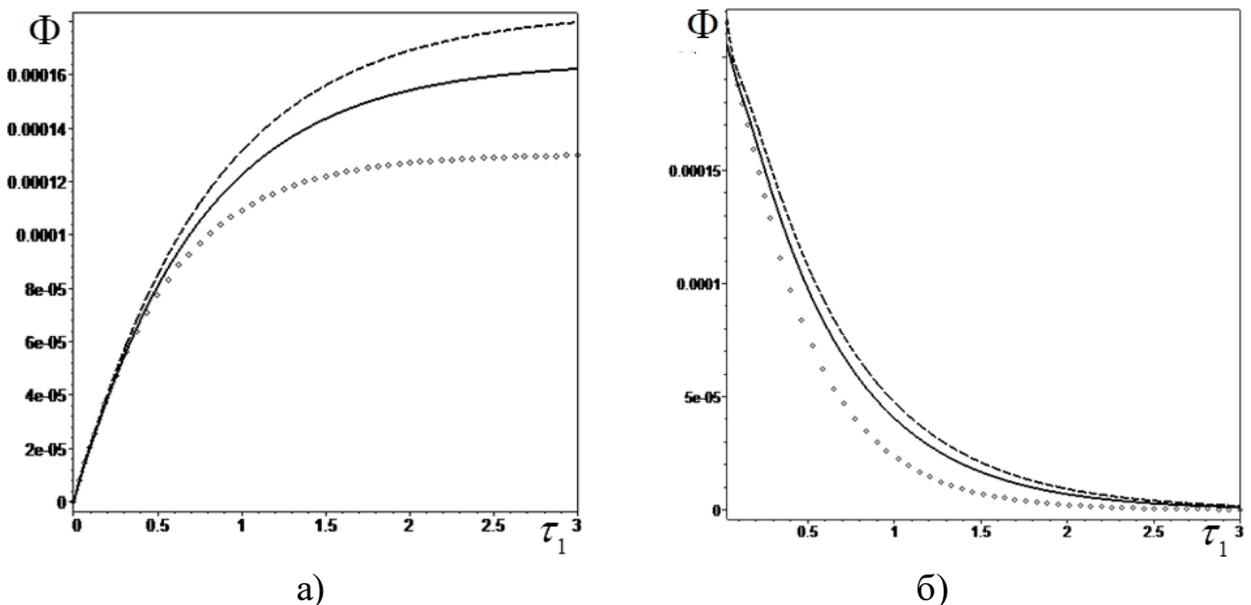


Рисунок 1.15 – Графики изменения потенциала от времени в точке  $z = 0.5$  при различных законах неоднородности и торцевой нагрузки.

Из рис. 1.15 следует, что на характер изменения от времени индуцируемого электрического потенциала существенное влияние

оказывают, как тип тепловой нагрузки, так и законы неоднородности коэффициента теплопроводности. Так, для первого типа нагрузки потенциал монотонно растет от нуля и со временем выходит на некоторое предельное значение; для второго типа – потенциал экспоненциально убывает со временем.

## **1.8 Динамическая связанная задача термоэлектроупругости для неоднородного цилиндра.**

### **1.8.1 Постановка задачи термоэлектроупругости для цилиндра**

Рассмотрим динамическую связанную задачу термоэлектроупругости для длинного полого радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра, внутренняя поверхность которого  $r = r_1$  заземлена, свободна от напряжений и поддерживается при нулевой температуре, а на внешней поверхности  $r = r_2$ , действует один из видов нестационарной нагрузки: 1)

$$-k_3(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = q_0 \varphi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = 0, \quad \varphi(r_2, t) = 0; \quad 2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = p_0 \phi(t),$$

$$\varphi(r_2, t) = 0.$$

Постановка задачи термоэлектроупругости для длинного цилиндра при тепловом способе нагружения имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1.8.1)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} = 0, \quad (1.8.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_3(r) r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - c_\varepsilon(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} - T_0 \gamma_3 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) + T_0 g_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} = 0, \quad (1.8.3)$$

$$\sigma_{rr}(r_1, t) = \theta(r_1, t) = \varphi(r_1, t) = 0, \quad (1.8.4)$$

$$\sigma_{rr}(r_2, t) = 0, \quad \varphi(r_2, t) = 0, \quad -k_3(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = q_0 \varphi(t), \quad (1.8.5)$$

$$\theta(r, 0) = \varphi(r, 0) = u_r(r, 0) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, 0) = 0. \quad (1.8.6)$$

$\sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \gamma_3 \theta$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \gamma_1 \theta$  – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений,

$D_r = -\varepsilon_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{31} \frac{u_r}{r} + g_3 \theta$  – радиальная компонента вектора электрической индукции.

Обезразмеривание задачи (1.8.1)-(1.8.6) осуществляется по формулам параграфа 1.6, приняв за характерный размерный параметр внешний радиус цилиндра  $r_2$ , а также введя  $\xi = \frac{r}{r_2}$ ,  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $U_r = \frac{u_r}{r_2}$ .

Обезразмеренная постановка задачи (1.8.1)-(1.8.6) имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.8.7)$$

$$\frac{\partial \bar{D}_r}{\partial \xi} + \frac{\bar{D}_r}{\xi} = 0, \quad (1.8.8)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau_1} - \delta_2 \bar{\gamma}_3 \left( \frac{\partial^2 U_r}{\partial \xi \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1} \right) + \delta_3 \bar{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \tau_1} = 0, \quad (1.8.9)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \tau_1) = W(\xi_0, \tau_1) = \Phi(\xi_0, \tau_1) = 0, \quad (1.8.10)$$

$$\Omega_{rr}(1, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial \xi}(1, \tau_1) = \beta_1 \varphi(\tau_1), \quad \Phi(1, \tau_1) = 0, \quad (1.8.11)$$

$$W(\xi, 0) = \Phi(\xi, 0) = U_r(\xi, 0) = \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1}(\xi, 0) = 0. \quad (1.8.12)$$

Обезразмеренная постановка задачи термоэлектроупругости для цилиндра в случае механического нагружения имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \tau_2^2}, \quad (1.8.13)$$

$$\frac{\partial \bar{D}_r}{\partial \xi} + \frac{\bar{D}_r}{\xi} = 0, \quad (1.8.14)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau_2} - \delta_2 \bar{\gamma}_3 \left( \frac{\partial^2 U_r}{\partial \xi \partial \tau_2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_r}{\partial \tau_2} \right) + \delta_3 \bar{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \tau_2} = 0, \quad (1.8.15)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \tau_2) = W(\xi_0, \tau_2) = \Phi(\xi_0, \tau_2) = 0, \quad (1.8.16)$$

$$\Omega_{rr}(1, \tau_2) = -\beta_2 \phi(\tau_2), \quad \frac{\partial W}{\partial \xi}(1, \tau_2) = 0, \quad \Phi(1, \tau_2) = 0, \quad (1.8.17)$$

$$W(\xi, 0) = \Phi(\xi, 0) = U_r(\xi, 0) = \frac{\partial U_r}{\partial \tau_1}(\xi, 0) = 0. \quad (1.8.18)$$

$$\text{Здесь } \Omega_{rr} = \bar{c}_{33} \frac{\partial U_r}{\partial \xi} + \bar{c}_{13} \frac{U_r}{\xi} + \delta_1 \bar{e}_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \delta_2 \bar{\gamma}_3 W, \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \bar{c}_{13} \frac{\partial U_r}{\partial \xi} + \bar{c}_{11} \frac{U_r}{\xi} + \delta_1 \bar{e}_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \delta_2 \bar{\gamma}_1 W,$$

$$\bar{D}_r = -\bar{\varepsilon}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \delta_1 \bar{e}_{33} \frac{\partial U_r}{\partial \xi} + \delta_1 \bar{e}_{31} \frac{U_r}{\xi} + \delta_3 \bar{g} W.$$

Задачи (1.8.7)-(1.8.12) и (1.8.13)-(1.8.18) при произвольных законах неоднородности можно решить лишь численно, например, методом пристрелки.

### 1.8.2 Решение задачи термоэлектроупругости для цилиндра

Применив к дифференциальным уравнениям (1.8.7)-(1.8.9) преобразование Лапласа, после некоторых преобразований получим следующую каноническую систему ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{d\tilde{U}_r}{d\xi} = \frac{\bar{\varepsilon}_3}{\Delta_2} \tilde{\Omega}_{rr} - \frac{\bar{\varepsilon}_3 \bar{c}_{13} + \delta_1 \bar{e}_{31} \bar{e}_{33}}{\Delta_2 \xi} \tilde{U}_r + \frac{\delta_1 \bar{e}_{33}}{\Delta_2} \tilde{D}_r + \frac{\delta_2 \bar{\gamma}_3 \bar{\varepsilon}_3}{\Delta_2} \tilde{W}, \quad (1.8.19)$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{rr}}{d\xi} = \frac{1}{\xi} \left( \frac{\bar{c}_{13} \bar{\varepsilon}_3}{\Delta_2} - 1 \right) \tilde{\Omega}_{rr} + \left( \frac{\bar{c}_{11} + \bar{c}_{13}}{\xi^2} + \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \right) \tilde{U}_r +$$

$$+ \frac{\delta_1 \bar{c}_{13} \bar{e}_{33} - \delta_1 \bar{c}_{33} \bar{e}_{31}}{\Delta_2} \tilde{D}_r + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\delta_1^2 \bar{e}_{31} \bar{e}_{33}}{\Delta_2} - \delta_2 \bar{\gamma}_1 \right) \tilde{W}, \quad (1.8.20)$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{d\xi} = \frac{\delta_1 \bar{e}_{33}}{\Delta_2} \tilde{\Omega}_{rr} + \frac{\delta_1 \bar{c}_{33} \bar{e}_{31} - \delta_1 \bar{c}_{13} \bar{e}_{13}}{\Delta_2 \xi} \tilde{U}_r - \frac{\bar{c}_{33}}{\Delta_2} \tilde{D}_r + \frac{\delta_3 \bar{c}_{33} \bar{g} + \delta_1 \delta_2 \bar{e}_{33} \bar{\gamma}_3}{\Delta_2} \tilde{W}, \quad (1.8.21)$$

$$\frac{d\tilde{D}_r}{d\xi} = -\frac{\tilde{D}_r}{\xi}, \quad (1.8.22)$$

$$\frac{d\tilde{W}}{d\xi} = -\frac{\tilde{Q}}{k(\xi)}, \quad (1.8.23)$$

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\xi} = -\frac{\tilde{Q}}{\xi} + p \left( \bar{c} - \frac{\delta_3^2 \bar{c}_{33} \bar{g}^2}{\Delta_2} \right) \tilde{W} + \frac{\delta_1 \delta_2 \bar{\gamma}_3 \bar{e}_{33} + \delta_3 \bar{c}_{33} \bar{g}}{\Delta_2} \tilde{D}_r -$$

$$- p \frac{\delta_2 \bar{\gamma}_3 \bar{\varepsilon}_3 - \delta_1 \delta_3 \bar{e}_{33} \bar{g}}{\Delta_2} \tilde{\Omega}_{rr} + p \frac{\delta_2 \bar{\gamma}_3 \bar{\varepsilon}_3 - \delta_1 \bar{c}_{33} \bar{e}_{31}}{\xi \Delta_2} \tilde{U}_r, \quad (1.8.24)$$

где  $\Delta_2 = \bar{\epsilon}_3 \bar{c}_{33} + \delta_1^2 \bar{e}_{33}^2$ .

Согласно методу пристрелки далее составляются три вспомогательные задачи Коши, состоящие из канонической системы ОДУ (1.8.19)-(1.8.24) и трех наборов условий при  $\xi = \xi_0$ . После решения задач Коши составляют выражения в виде  $\tilde{U}_r = p_1 \tilde{U}_r' + p_2 \tilde{U}_r'' + p_3 \tilde{U}_r'''$ , а неизвестные константы  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  определяются из решения системы трех уравнений для функций  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{\Omega}_{rr}$ , которая получается путем удовлетворения граничных условий при  $\xi = 1$ .

Нахождение оригиналов функций осуществляется методом разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра.

### 1.8.3 Численные результаты

Проведена верификация предложенного метода решения задачи в случае однородного цилиндра, изготовленного из PZT-4, путем сопоставления с результатами, полученными другими учеными в [186] для механического нагружения по законам  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$  и  $\phi(\tau_2) = \sin(5\tau_2)$  при  $\xi_0 = 0.5$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = 0$ . Выяснено, что для того, чтобы относительная погрешность вычисления термонапряженного состояния предложенным методом не превосходила 1% достаточно ограничиться 120 слагаемыми в (1.3.26).

Далее рассмотрим результаты вычислений термонапряженного состояния ФГ пьезоцилиндра, внутренняя поверхность которого изготовлена из титаната циркония, а внешняя поверхность – из селенида кадмия. Безразмерные материальные характеристики пьезоцилиндра определяются по правилу:

$$\bar{a}(\xi) = \bar{a}^{(1)} + (\bar{a}^{(2)} - \bar{a}^{(1)}) \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, \quad n_3 = 1, 2, \dots \quad (1.8.25)$$

Здесь  $\bar{a}^{(1)}$  – безразмерные свойства титаната циркония,  $\bar{a}^{(2)}$  – безразмерные свойства селенида кадмия.

Для получения конкретных законов неоднородности (1.8.25) используем значения физических характеристик композиции [172]:

$$\begin{aligned}
e_{31}^{(1)} &= -6.5 \frac{Kл}{M^2}, & e_{33}^{(1)} &= 23.3 \frac{Kл}{M^2}, & \vartheta_3^{(1)} &= 1.3 \cdot 10^{-8} \frac{\Phi}{M}, & c_{11}^{(1)} &= 12.6 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, & c_{13}^{(1)} &= 5.3 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, \\
c_{33}^{(1)} &= 11.7 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, & \gamma_1^{(1)} &= 1.6 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2 \cdot K}, & \gamma_3^{(1)} &= 1.9 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2 \cdot K}, & g_3^{(1)} &= 5 \cdot 10^{-4} \frac{Kл}{M^2 \cdot K}, \\
c_\varepsilon^{(1)} &= 3.3 \cdot 10^6 \frac{Джс}{M^3 \cdot K}, & k_3^{(1)} &= 50 \frac{Вт}{M \cdot K}, & \rho^{(1)} &= 7.87 \cdot 10^3 \frac{кг}{M^3}, & e_{31}^{(2)} &= -0.2 \frac{Kл}{M^2}, & e_{33}^{(2)} &= 4 \frac{Kл}{M^2}, \\
\vartheta_3^{(2)} &= 0.9 \cdot 10^{-8} \frac{\Phi}{M}, & c_{11}^{(2)} &= 7.4 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, & c_{13}^{(2)} &= 3.9 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, & c_{33}^{(2)} &= 8.4 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, \\
\gamma_1^{(2)} &= 0.55 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2 \cdot K}, & \gamma_3^{(2)} &= 0.6 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2 \cdot K}, & g_3^{(2)} &= 3 \cdot 10^{-4} \frac{Kл}{M^2 \cdot K}, & c_\varepsilon^{(2)} &= 4.6 \cdot 10^6 \frac{Джс}{M^3 \cdot K}, \\
k_3^{(2)} &= 13 \frac{Вт}{M \cdot K}, & \rho^{(2)} &= 5.68 \cdot 10^3 \frac{кг}{M^3}, & T_0 &= 293 K.
\end{aligned}$$

Подставляя в (1.8.25) значения материальных характеристик титаната циркония и селенида кадмия, получим следующие законы неоднородности:

$$\begin{aligned}
\bar{k}(\xi) &= 1 - 0.74 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{\rho}(\xi) &= 1 - 0.25 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{c}(\xi) &= 0.72 + 0.28 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, \\
\bar{g}(\xi) &= 1 - 0.4 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{\gamma}_3(\xi) &= 1 - 0.68 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{\gamma}_1(\xi) &= 0.84 - 0.55 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, \\
\bar{\vartheta}_3(\xi) &= 1 - 0.31 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{e}_{31}(\xi) &= -0.03 + 0.02 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{e}_{33}(\xi) &= 1 - 0.82 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, \\
\bar{c}_{33}(\xi) &= 1 - 0.25 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{c}_{13}(\xi) &= 0.45 - 0.12 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}, & \bar{c}_{11}(\xi) &= 1.07 - 0.44 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{n_3}.
\end{aligned}$$

В ходе вычислений выяснено, что в случае теплового способа нагружения соразмерное влияние на изменение температуры на внешней поверхности цилиндра оказывает изменение характеристик  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{c}(\xi)$ . При механическом способе нагружения соразмерное влияние на изменение радиального смещения на внешней поверхности цилиндра оказывают характеристики  $\bar{c}_{11}(\xi)$ ,  $\bar{c}_{33}(\xi)$ ,  $\bar{\rho}(\xi)$ , влияние коэффициента  $\bar{c}_{13}(\xi)$  существенно ниже.

Проведено исследование влияние параметров связанности  $\delta_1$  и  $\delta_3$  на граничные физические поля ФГ цилиндра, если в степенных законах

неоднородности (1.8.25) положить  $n_3 = 1$ . На рис. 1.16а представлены результаты влияния параметра  $\delta_3$  на зависимость температуры от времени на внешней поверхности цилиндра при тепловом нагружении  $\phi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ; при этом сплошной линией изображен график температуры при  $\delta_3 = 0$ , точками – при  $\delta_3 = 0.05$ , пунктиром – при  $\delta_3 = 0.5$ . На рис. 1.16б изображены результаты влияния параметра  $\delta_1$  на зависимость радиального смещения от времени на внешней поверхности цилиндра при механическом нагружении  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$ ; при этом сплошной линией изображен график смещения при  $\delta_1 = 0$ , точками – при  $\delta_1 = 0.05$ , пунктиром – при  $\delta_1 = 0.5$ .

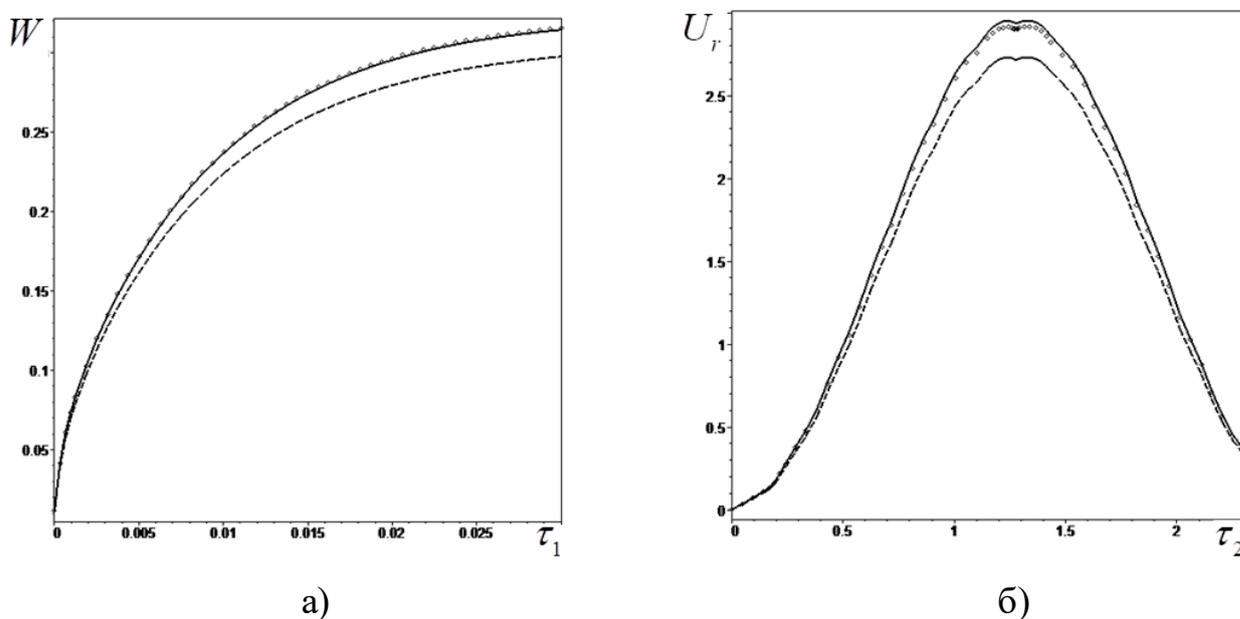


Рисунок 1.16 – Влияние параметров связанности на изменение:

а)  $W$ ; б)  $U_r$  от времени.

Из рис. 1.16 следует, что только большие значения параметров  $\delta_1$  и  $\delta_3$  могут оказывать существенное влияние на граничные физические поля.

Исследовано влияние различных степенных законов неоднородности в (1.8.25) на физические поля. На рис. 1.17 представлены распределения по координате  $\xi$ : а) температуры  $W$ ; б) радиального смещения  $U_r$ ; в) напряжения  $\Omega_{rr}$ ; г) потенциала  $\Phi$  в момент времени  $\tau_1 = 0.036$  при  $\xi_0 = 0.8$ ,

$\beta_1 = 1$ ,  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\delta_1 = 0.59$ ,  $\delta_2 = 0.005$ ,  $\delta_3 = 0.035$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ . При этом сплошной линией изображены физические поля, при  $n_3 = 1$  в (1.8.25), точками – при  $n_3 = 3$ .

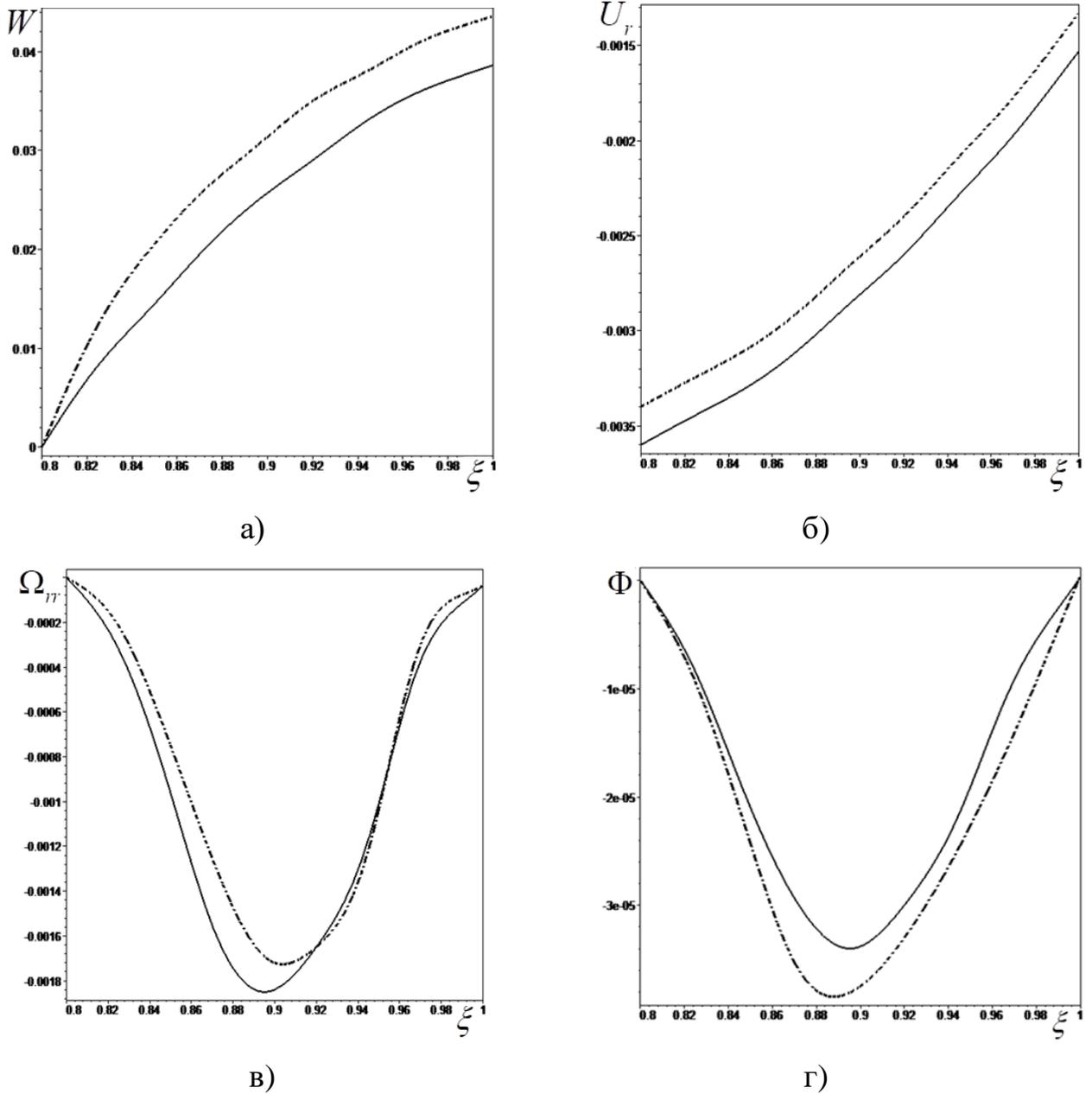


Рисунок. 1.17 – Графики изменения по радиальной координате:

а)  $W$ ; б)  $U_r$ ; в)  $\Omega_{rr}$ ; г)  $\Phi$ .

Из рис. 1.17 следует, что законы неоднородности материальных характеристик оказывают большое влияние на радиальное распределение температуры, смещения, напряжений и потенциала.

## **ГЛАВА 2.**

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ И СЛОИСТЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОЙ МЕХАНИКИ**

Когда размеры образцов соизмеримы с характерным размером структуры материала при деформировании тела могут проявляться масштабные эффекты. Для описания масштабных эффектов используются различные неклассические теории механики сплошной среды, например, градиентная теория упругости. Решения задач градиентной теории упругости получены в основном для однородных тел.

В настоящей главе получены постановки статических задач градиентной механики для ряда составных тел и тел с покрытиями. Получены точные аналитические решения и приближенные асимптотические решения поставленных задач при малых значениях масштабных параметров.

Проведен сравнительный анализ НДС тел, рассчитанный в рамках классической постановки и градиентной постановки.

### **Часть 1.**

#### **Решение статических задач градиентной теории упругости и термоупругости для составных и слоистых тел**

В первой части главы 2 рассмотрены основные положения градиентной теории упругости. Получены постановки задач градиентной теории упругости для составного стержня и балки, а также слоистого цилиндра и полосы. Для нахождения напряжений Коши составного стержня, изгибающих моментов составной балки при малых значений масштабного параметра применяется асимптотический метод Вишика-Люстерника. Для нахождения радиальных смещений слоистого цилиндра применяется асимптотический метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ).

## 2.1 Основные положения градиентной теории упругости.

Рассмотрим упругое тело, занимающее объем  $V$  с поверхностью  $S = S_u \cup S_t$ , где на границе  $S_u$  заданы компоненты вектора перемещения, на  $S_t$  – компоненты вектора силы.

Рассмотрим однопараметрический вариант градиентной теории упругости (ГТУ), предложенный Айфантисом [165], в котором плотность энергии деформации  $w$  зависит от тензора деформации и его градиента :

$$w = \tau_{ij} \varepsilon_{ij} + l_M^2 \tau_{ij,k} \varepsilon_{ij,k}, \quad (2.1.1)$$

где  $l_M$  – градиентный параметр размерности длины, характеризующий протяженность градиентных эффектов.

В ГТУ вводятся следующие величины:  $\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} u_{k,l}$  – компоненты тензора напряжений Коши,  $m_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = l_M^2 \tau_{ij,k}$  – компоненты тензора моментных напряжений,  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}$  – компоненты тензора полных напряжений.

Постановка задачи ГТУ для однородного тела, полученная в результате применения вариационного принципа Лагранжа, имеет вид [165]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2.1.2)$$

$$m_{ijk,k} n_j n_k = r_i, \quad \tau_{ij} n_j - m_{ijk,k} n_j - (m_{ijk,k} n_k)_{,j} + (m_{ijk,k} n_k)_{,s} n_s = t_i, \quad (2.1.3)$$

$$u_i = v_i, \quad u_{i,l} n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n}. \quad (2.1.4)$$

В градиентной постановке уравнения равновесия (2.1.2) в перемещениях или напряжениях Коши имеют повышенный порядок по сравнению с классической постановкой и представляют собой дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной.

Уравнения равновесия (2.1.2), записанные в терминах перемещений, можно представить в виде:

$$(1 - l_M^2 L_{grad}) L_{clas} u = 0, \quad (2.1.5)$$

где  $L_{grad}$  – дифференциальный оператор второго порядка, обусловленный использованием градиентной модели,  $L_{clas}$  – дифференциальный оператор, отвечающий классической постановке.

Важной задачей градиентной механики является построение асимптотических решений при малых значениях градиентного параметра. В этом случае решение уравнений (2.1.5) представляется в виде суперпозиции решений в классической постановке при  $l_M = 0$  и погранслойных решений.

Построение асимптотических решений дифференциальных уравнений вида (2.1.5) возможно с позиции нескольких подходов, каждый из которых эффективно применяется для определенного класса задач. Так, в случае задачи деформирования составного стержня, изгиба составной балки, которые описываются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, удобно применять асимптотический метод Вишика-Люстерника [89]. В случае деформирования слоистого цилиндра, которое описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, удобно применять метод ВКБ [130].

## ***2.2 Градиентная модель деформирования составного изотропного стержня.***

В этом параграфе в соответствии с [257] на основе градиентной модели рассматривается задача о деформировании составного стержня.

### **2.2.1 Постановка задачи градиентной механики для составного изотропного стержня**

Рассмотрим равновесие составного стержня длиной  $L$  с местом стыка в точке  $x = L_0$ . Один торец стержня  $x = 0$  жестко закреплён и поддерживается при нулевой температуре, а на другом торце  $x = L$  действует один из видов нагрузки: 1) силовая  $\sigma_{11}(L) = p_0, T(l) = 0$ ; 2) температурная  $\sigma_{11}(L) = 0, T(l) = T^*$ .

Рассмотрим сначала случай механической нагрузки. Для получения уравнений равновесия и расширенного списка граничных условий применим вариационный принцип Лагранжа. Ненулевые компоненты тензоров деформации, градиентов деформации, напряжений Коши, моментных и полных напряжений в случае стержня имеют вид:  $\varepsilon_{11} = u'$ ,  $\varepsilon_{11,1} = u''$ ,  $\tau_{11} = Eu'$ ,  $m_{111} = l^2 \tau'_{11}$ ,  $\sigma_{11} = \tau_{11} - m'_{111}$ . Знак «штрих» обозначает производную по координате  $x$ .

В формулах ниже обозначим индексами «1» и «2» функции и параметры, соответствующие первому и второму стержню соответственно. Тогда выражение для потенциальной энергии составного стержня найдем по формуле:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} (\tau_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + m_{111}^{(1)} \varepsilon_{11,1}^{(1)}) dx + \frac{1}{2} \int_{L_0}^L (\tau_{11}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + m_{111}^{(2)} \varepsilon_{11,1}^{(2)}) dx. \quad (2.2.1)$$

Далее находим работу внешних сил:

$$A = p_0 u. \quad (2.2.2)$$

Выражение для первой вариации потенциальной энергии (2.2.1) имеет вид:

$$\delta W_0 = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} (\tau_{11}^{(1)} \delta u'^{(1)} + m_{111}^{(1)} \delta u''^{(1)}) dx + \frac{1}{2} \int_{L_0}^L (\tau_{11}^{(2)} \delta u'^{(2)} + m_{111}^{(2)} \delta u''^{(2)}) dx. \quad (2.2.3)$$

Согласно вариационному принципу Лагранжа имеем:

$$\delta W_0 - \delta A = 0. \quad (2.2.4)$$

Полагая в (2.2.3)  $\tau_{11}^{(i)} \delta u'^{(i)} = (\tau_{11}^{(i)} \delta u^{(i)})' - \tau_{11}^{(i)} \delta u^{(i)}$ ,

$$m_{111}^{(i)} \delta u''^{(i)} = (m_{111}^{(i)} \delta u'^{(i)})' - (m_{111}^{(i)} \delta u^{(i)})' + m_{111}^{(i)} \delta u^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

выполняя условие принципа Лагранжа (2.2.4), и, учитывая при этом, что вариация от работы внешних сил равна  $\delta A = p_0 \delta u(L)$ , получим:

$$(\tau_{11}^{(1)} - m_{111}^{(1)}) \delta u^{(1)} \Big|_0^{L_0} - \int_0^{L_0} (\tau_{11}^{(1)} - m_{111}^{(1)}) \delta u^{(1)} dx + m_{111}^{(1)} \delta u'^{(1)} \Big|_0^{L_0} +$$

$$+(\tau_{11}^{(2)} - m_{111}^{(2)})\delta u^{(2)}|_{L_0}^L - \int_{L_0}^L (\tau_{11}^{(2)} - m_{111}^{(2)})\delta u^{(2)} dx + m_{111}^{(2)}\delta u'^{(2)}|_{L_0}^L = p_0\delta u^{(2)}(L). \quad (2.2.5)$$

Из (2.2.5) следуют:

уравнения равновесия

$$\sigma_{11}^{(i)} = \tau_{11}^{(i)} - m_{111}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.2.6)$$

граничные условия при  $x = 0$

$$\sigma_{11}^{(1)}(0) = 0 \text{ или } u^{(1)}(0) = 0, \quad (2.2.7)$$

$$m_{111}^{(1)}(0) = 0 \text{ или } u'^{(1)}(0) = 0; \quad (2.2.8)$$

граничные условий при  $x = L$

$$\sigma_{11}^{(2)}(L) = p_0 \text{ или } u^{(2)}(L) = 0, \quad (2.2.9)$$

$$m_{111}^{(2)}(L) = 0 \text{ или } u'^{(2)}(L) = 0; \quad (2.2.10)$$

условия сопряжения при  $x = L_0$

$$u^{(1)}(L_0) = u^{(2)}(L_0), \quad u'^{(1)}(L_0) = u'^{(2)}(L_0), \quad \sigma_{11}^{(1)}(L_0) = \sigma_{11}^{(2)}(L_0), \quad m_{111}^{(1)}(L_0) = m_{111}^{(2)}(L_0). \quad (2.2.11)$$

Исходя из (2.2.6)-(2.2.11), постановка задачи ГТУ для стержня состоит из уравнения равновесия (2.2.6), классических граничных условий  $u^{(1)}(0) = 0$ ,  $\sigma_{11}^{(2)}(L) = p_0$ , а также двух дополнительных граничных условий, например,  $u'^{(1)}(0) = 0$ ,  $m_{111}^{(2)}(L) = 0$ . Обозначим:  $\tau_{11} = \tau$ ,  $\sigma_{11} = \sigma$ ,  $m_{111} = m$ . Тогда постановка задачи ГТУ для составного стержня примет вид:

$$\sigma'_i = \tau'_i - m'_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.12)$$

$$u_1(0) = 0, \quad u'_1(0) = 0, \quad (2.2.13)$$

$$m_2(L) = 0, \quad \sigma_2(L) = p_0, \quad (2.2.14)$$

$$u_1(L_0) = u_2(L_0), \quad u'_1(L_0) = u'_2(L_0), \quad \sigma_1(L_0) = \sigma_2(L_0), \quad m_1(L_0) = m_2(L_0). \quad (2.2.15)$$

Исходя из граничных условий, задачу удобно решать в терминах напряжений Коши. Для этого выразим полные напряжения, моментные напряжения и градиенты перемещений через напряжения Коши. Для упрощения расчетов примем градиентный параметр  $l_m$  одинаковым для каждого стержня.

Постановка задачи ГТУ для составного стержня в напряжениях Коши имеет вид:

$$\tau'_i - l_M^2 \tau_i''' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.16)$$

$$\tau_1(0) = 0, \quad (2.2.17)$$

$$\tau'_2(L) = 0, \quad \tau_2(L) - l_M^2 \tau_2''(L) = p_0, \quad (2.2.18)$$

$$\frac{\tau_1(L_0)}{E_1(L_0)} = \frac{\tau_2(L_0)}{E_2(L_0)}, \quad \tau'_1(L_0) = \tau'_2(L_0), \quad \tau_1(L_0) - l_M^2 \tau_1''(L_0) = \tau_2(L_0) - l_M^2 \tau_2''(L_0). \quad (2.2.19)$$

Обезразмерим задачу (2.2.16)-(2.2.19) по формулам:  $z = \frac{x}{L}$ ,  $z_0 = \frac{L_0}{L}$ .

$\alpha = \frac{l_M}{L}$ ,  $P_0 = \frac{p_0}{E_0}$ ,  $S_{z_i} = \frac{\tau_i}{E_0}$ ,  $M_i = \frac{m_i}{E_0 L}$ ,  $s_i = \frac{E_i}{E_0}$ ,  $i = 1, 2$ . Здесь  $E_0$  – максимальное

значение модуля Юнга.

Обезразмеренная постановка краевой задачи (2.2.16)-(2.2.19) имеет вид:

$$S'_{z_i} - \alpha^2 S_{z_i}''' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.20)$$

$$S_{z_1}(0) = 0, \quad (2.2.21)$$

$$S'_{z_2}(1) = 0, \quad S_{z_2}(1) - \alpha^2 S_{z_2}''(1) = P_0, \quad (2.2.22)$$

$$\frac{S_{z_1}(z_0)}{\bar{s}_1(z_0)} = \frac{S_{z_2}(z_0)}{\bar{s}_2(z_0)}, \quad S'_{z_1}(z_0) = S'_{z_2}(z_0), \quad S_{z_1}(z_0) - \alpha^2 S_{z_1}''(z_0) = S_{z_2}(z_0) - \alpha^2 S_{z_2}''(z_0). \quad (2.2.23)$$

## 2.2.2 Получение асимптотического решения методом Вишика-Люстерника

Найденное точное решение задачи (2.2.20)-(2.2.23) имеет громоздкий вид и здесь не приводится.

Задача (2.2.20)-(2.2.23) содержит дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной, т.е. является сингулярно возмущенной. Получим ее асимптотическое решение при малых значениях масштабного параметра на основе метода Вишика-Люстерника.

Согласно схеме метода Вишика-Люстерника построим первый итерационный процесс. Для этого представим решения для каждого из уравнений (2.2.20) в виде разложения по малому параметру  $\alpha$ :

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong G_1(z, \alpha) = g_1^{(0)}(z) + \alpha g_1^{(1)}(z) + \alpha^2 g_1^{(2)}(z) + \dots, \quad (2.2.24)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong G_2(z, \alpha) = g_2^{(0)}(z) + \alpha g_2^{(1)}(z) + \alpha^2 g_2^{(2)}(z) + \dots \quad (2.2.25)$$

Подставляя разложения (2.2.24), (2.2.25) в (2.2.20) и, производя расщепление по степеням  $\alpha$ , получаем последовательность краевых задач:

$$\begin{cases} g_1^{(0)'}(z) = 0, g_2^{(0)'}(z) = 0, g_2^{(0)}(1) = 1, g_1^{(0)}(z_0) = g_2^{(0)}(z_0), \\ g_1^{(1)'}(z) = 0, g_2^{(1)'}(z) = 0, g_2^{(1)}(1) = 0, g_1^{(1)}(z_0) = g_2^{(1)}(z_0), \\ \dots \end{cases} \quad (2.2.26)$$

Очевидно, что за счет решений каждой из задач (2.2.26) нельзя удовлетворить всем граничным условиям и условиям сопряжения. Необходимо достраивать дополнительные погранслоиные решения, которые должны быстро затухать с удалением от границы.

Согласно схеме метода Вишика-Люстерника, построим второй итерационный процесс. Вычисления по точным аналитическим формулам показали наличие пограничных слоев. Для первого стержня пограничные слои локализованы в окрестностях точки закрепления  $z=0$  и точки сопряжения со вторым стержнем  $z=z_0$ . Для второго стержня пограничные слои находятся в окрестностях  $z=z_0$  и  $z=1$ . Введем в рассмотрение растягивающие координаты в окрестности границ  $\eta_1 = \frac{z}{\alpha}$ ,  $\eta_2 = \frac{z-z_0}{\alpha}$ ,

$\eta_3 = \frac{z_0-z}{\alpha}$ ,  $\eta_4 = \frac{z-1}{\alpha}$ . Тогда выражения для напряжений Коши каждого из

стержней можно представить в виде:

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong G_1(z, \alpha) + Z_1\left(\frac{z}{\alpha}, \alpha\right) + Z_2\left(\frac{z-z_0}{\alpha}, \alpha\right), \quad (2.2.27)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong G_2(z, \alpha) + Z_3\left(\frac{z_0-z}{\alpha}, \alpha\right) + Z_4\left(\frac{z-1}{\alpha}, \alpha\right), \quad (2.2.28)$$

где  $Z_1\left(\frac{z}{\alpha}, \alpha\right) = S_1^{(0)}\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \alpha S_1^{(1)}\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \alpha^2 S_1^{(2)}\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \dots$ ,

$Z_2\left(\frac{z-z_0}{\alpha}, \alpha\right) = S_2^{(0)}\left(\frac{z-z_0}{\alpha}\right) + \alpha S_2^{(1)}\left(\frac{z-z_0}{\alpha}\right) + \alpha^2 S_2^{(2)}\left(\frac{z-z_0}{\alpha}\right) + \dots$ ,

$$Z_3\left(\frac{z_0-z}{\alpha}, \alpha\right) = S_3^{(0)}\left(\frac{z_0-z}{\alpha}\right) + \alpha S_3^{(1)}\left(\frac{z_0-z}{\alpha}\right) + \alpha^2 S_3^{(2)}\left(\frac{z_0-z}{\alpha}\right) + \dots,$$

$$Z_4\left(\frac{z-1}{\alpha}, \alpha\right) = S_4^{(0)}\left(\frac{z-1}{\alpha}\right) + \alpha S_4^{(1)}\left(\frac{z-1}{\alpha}\right) + \alpha^2 S_4^{(2)}\left(\frac{z-1}{\alpha}\right) + \dots$$

Ограничимся в разложениях (2.2.27), (2.2.28) только нулевыми приближениями. Тогда приближенные решения можно представить в виде:

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong g_1^{(0)}(z) + S_1^{(0)}\left(\frac{z}{\alpha}\right) + S_2^{(0)}\left(\frac{z-z_0}{\alpha}\right), \quad (2.2.29)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong g_2^{(0)}(z) + S_3^{(0)}\left(\frac{z_0-z}{\alpha}\right) + S_4^{(0)}\left(\frac{z-1}{\alpha}\right). \quad (2.2.30)$$

Функции  $g_1^{(0)}(z)$ ,  $g_2^{(0)}(z)$  совпадают с решением задачи для составного стержня, полученным на основе классической модели теории упругости и имеют вид:

$$g_1^{(0)}(z) = g_2^{(0)}(z) = P_0. \quad (2.2.31)$$

Для нахождения  $S_1^{(0)}(\eta_1)$ , учитывая, что  $\frac{d}{dz} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\eta_1}$ ,  $\frac{d^3}{dz^3} = \frac{1}{\alpha^3} \frac{d^3}{d\eta_1^3}$ ,

получим уравнение

$$S_1^{(0)'} - S_1^{(0)'''} = 0, \quad (2.2.32)$$

решение которого имеет вид:

$$S_1^{(0)} = C_1 + C_2 e^{\eta_1} + C_3 e^{-\eta_1}. \quad (2.2.33)$$

Так как погранслоное решение  $S_1^{(0)}(\eta_1)$  должно асимптотически стремиться к нулю при  $\eta_1 \rightarrow \infty$ , то полагаем в (2.2.33)  $C_1 = C_2 = 0$ . Итак,

$S_1^{(0)} = C_3 e^{-\frac{z}{\alpha}}$ . Неизвестную  $C_3$  находим из граничных условий на левом торце стержня:  $\Omega_1(0) = g_1^{(0)}(0) + S_1^{(0)}(0) = P_0 + C_3 = 0$ . Отсюда  $C_3 = -P_0$ .

Для нахождения  $S_2^{(0)}(\eta_2)$  имеем уравнение:

$$S_2^{(0)'} - S_2^{(0)'''} = 0, \quad (2.2.34)$$

решение которого имеет вид

$$S_2^{(0)} = C_4 + C_5 e^{\eta_2} + C_6 e^{-\eta_2}. \quad (2.2.35)$$

Так как погранслоное решение  $S_2^{(0)}(\eta_2)$  должно асимптотически стремиться к нулю при  $\eta_2 \rightarrow -\infty$ , то полагаем в (2.2.35)  $C_4 = C_6 = 0$ . Итак,

$S_2^{(0)} = C_5 e^{\frac{z-z_0}{\alpha}}$ . Выражения для напряжения в первом стержне примет вид:

$$S_{z_1}(z, \alpha) = P_0 \left( 1 - e^{-\frac{z}{\alpha}} \right) + C_5 e^{\frac{z-z_0}{\alpha}}. \quad (2.2.36)$$

Аналогичным образом определяем, что  $S_3^{(0)} = C_7 e^{\frac{z_0-z}{\alpha}}$ ,  $S_4^{(0)} = C_8 e^{\frac{z-1}{\alpha}}$ . Из условия  $\Omega_2'(1) = 0$  следует связь между константами  $C_7$  и  $C_8$  в виде  $C_8 = C_7 e^{\frac{z_0-1}{\alpha}}$ .

Выражения для напряжения во втором стержне примет вид:

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong P_0 + C_7 \left( e^{\frac{z_0-z}{\alpha}} + e^{\frac{z_0-1}{\alpha}} e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right). \quad (2.2.37)$$

Неизвестные  $C_5$  и  $C_7$  определим из условий (2.2.23), полагая в расчетах  $1 - e^{-\frac{z_0}{\alpha}} \cong 1$ . Тогда выражения для напряжений, обозначив через  $\chi_0 = 1 - z_0$  относительную длину второго стержня, можно представить в виде:

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong P_0 \left( 1 - e^{-\frac{z}{\alpha}} \right) + K_M \left( 1 - e^{-\frac{-2\chi_0}{\alpha}} \right) e^{\frac{z-z_0}{\alpha}}, \quad (2.2.38)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong P_0 - K_M \left( e^{\frac{z_0-z}{\alpha}} + e^{\frac{\chi_0}{\alpha}} e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right), \quad (2.2.39)$$

$$\text{где } K_M = P_0 \frac{\bar{s}_1(z_0) - \bar{s}_2(z_0)}{\bar{s}_1(z_0) + \bar{s}_2(z_0) + (\bar{s}_1(z_0) - \bar{s}_2(z_0)) e^{\frac{-2\chi_0}{\alpha}}}. \quad (2.2.40)$$

Из формул (2.2.38), (2.2.39) следует, что в точке  $z = z_0$  возникает скачок напряжений, равный:

$$\Delta S_z = S_{z_1} - S_{z_2} = 2K_M - P_0 e^{\frac{\chi_0-1}{\alpha}}. \quad (2.2.41)$$

Если положить в (2.2.38), (2.2.39)  $\alpha = 0$ , то получаем выражения для напряжений, соответствующие классической теории упругости:  $S_{z_1} = S_{z_2} = P_0$ .

При  $\alpha \neq 0$  необходимо учитывать дополнительный параметр  $\eta_0 = \frac{\chi_0}{\alpha}$  — отношение длины второго стержня и градиентного параметра  $\alpha$ . С учетом

введенного обозначения выражения для безразмерных напряжений Коши примут вид:

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong P_0 \left( 1 - e^{-\frac{z}{\alpha}} \right) + K_M \left( e^{\eta_0} - e^{-\eta_0} \right) e^{\frac{z-1}{\alpha}}, \quad (2.2.42)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong P_0 - K_M e^{-\eta_0} \left( e^{\frac{1-z}{\alpha}} + e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right), \quad (2.2.43)$$

где  $K_M = P_0 \frac{\bar{s}_1(z_0) - \bar{s}_2(z_0)}{\bar{s}_1(z_0) + \bar{s}_2(z_0) + (\bar{s}_1(z_0) - \bar{s}_2(z_0))e^{-2\eta_0}}$ .

Величина скачка напряжений в точке  $z = z_0$  будет определяться формулой:

$$\Delta S_z = 2K_M - P_0 e^{\left( \eta_0 - \frac{1}{\alpha} \right)}. \quad (2.2.44)$$

Рассмотрим, какой вид будут иметь выражения для напряжений Коши в зависимости от величины  $\eta_0$ . Рассмотрим три случая: 1)  $\eta_0 \gg 1$ ; 2)  $\eta_0 \sim 1$ ; 3)  $\eta_0 \ll 1$ .

При  $\eta_0 \gg 1$  (относительная длина второго стержня намного больше градиентного параметра  $\alpha$ ), экспоненты  $e^{-\eta_0}$  являются очень малыми величинами. Тогда в выражениях для напряжений (2.2.42), (2.2.43), используя эквивалентности  $e^{\eta_0} - e^{-\eta_0} \cong e^{\eta_0}$ ,  $e^{-\eta_0} e^{\frac{z-1}{\alpha}} \cong 0$ , получим:

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong P_0 \left( 1 - e^{-\frac{z}{\alpha}} \right) + K_M e^{\eta_0} e^{\frac{z-1}{\alpha}}, \quad (2.2.45)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong P_0 - K_M e^{-\eta_0} e^{\frac{1-z}{\alpha}}. \quad (2.2.46)$$

При этом в знаменателе выражения для коэффициента  $K_M$  следует положить  $\bar{s}_1(z_0) + \bar{s}_2(z_0) + (\bar{s}_1(z_0) - \bar{s}_2(z_0))e^{-2\eta_0} \cong \bar{s}_1(z_0) + \bar{s}_2(z_0)$ . В этом случае величина скачка напряжений определяется только механической нагрузкой  $P_0$  и соотношением между упругими модулями и не зависит от относительной длины второго стержня.

При  $\eta_0 \sim 1$  (относительная длина второго стержня сопоставима с величиной градиентного параметра  $\alpha$ ) для нахождения напряжений необходимо использовать формулы (2.2.42), (2.2.43) без упрощений.

При  $\eta_0 \ll 1$  (относительная длина второго стержня намного меньше градиентного параметра  $\alpha$ ), параметр  $\eta_0$  будет являться малым параметром. Выполним разложения в ряд Тейлора по малому параметру  $\eta_0$  выражений:

$$e^{-\eta_0} \cong 1 - \eta_0 + \frac{\eta_0^2}{2} - \dots, \quad e^{\eta_0} \cong 1 + \eta_0 + \frac{\eta_0^2}{2} + \dots \quad (2.2.47)$$

Ограничившись в разложениях (2.2.47) величинами первого параметра малости, получим выражения для напряжений Коши:

$$S_{z_1}(z, \alpha) \cong P_0 \left( 1 - e^{-\frac{z}{\alpha}} \right) + 2\eta_0 K_M e^{\frac{z-1}{\alpha}}, \quad (2.2.48)$$

$$S_{z_2}(z, \alpha) \cong P_0 - (1 - \eta_0) K_M \left( e^{\frac{1-z}{\alpha}} + e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right). \quad (2.2.49)$$

Далее вычисляются моментные напряжения, которые в общем виде имеют представление:

$$M_1(z, \alpha) \cong \alpha \left( P_0 e^{-\frac{z}{\alpha}} + K_M (e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}) e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right), \quad (2.2.50)$$

$$M_2(z, \alpha) \cong \alpha K_M e^{-\eta_0} \left( e^{\frac{z-1}{\alpha}} - e^{\frac{1-z}{\alpha}} \right). \quad (2.2.51)$$

В случае теплового нагружения стержня вначале решается задача теплопроводности в классической постановке:

$$\left( \bar{k}_i(z) W_i' \right)' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.52)$$

$$W_1(0) = 0, \quad W_2(1) = 1, \quad (2.2.53)$$

$$W_1(z_0) = W_2(z_0), \quad \bar{k}_1(z_0) W_1'(z_0) = \bar{k}_2(z_0) W_2'(z_0), \quad (2.2.54)$$

где  $W_i = \frac{T_i}{T_*}$ ,  $\bar{k}_i = \frac{k_i}{k_0}$ ,  $\bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}$ ,  $i = 1, 2$ .

Решение задачи теплопроводности (2.2.52)-(2.2.54) имеет вид:

$$W_1(z) = \frac{w_1(z)}{w_1(z_0) + w_2(1)}, \quad W_2(z) = \frac{w_1(z_0) + w_2(z)}{w_1(z_0) + w_2(1)}, \quad w_1(z) = \int_0^z \frac{d\eta}{\bar{k}_1(\eta)}, \quad w_2(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\eta}{\bar{k}_2(\eta)}. \quad (2.2.55)$$

В этом случае выражения для безразмерных напряжений Коши вместо (2.2.42), (2.2.43) примут вид:

$$S_{z_1} \cong K_T (e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}) e^{\frac{z-1}{\alpha}}, \quad S_{z_2} \cong -K_T e^{-\eta_0} \left( e^{\frac{1-z}{\alpha}} + e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right), \quad (2.2.56)$$

где 
$$K_T = W_1(z_0) \frac{\bar{s}_1(z_0)\bar{\gamma}_2(z_0) - \bar{s}_2(z_0)\bar{\gamma}_1(z_0)}{\bar{s}_1(z_0) + \bar{s}_2(z_0) + (\bar{s}_1(z_0) - \bar{s}_2(z_0))e^{-2\eta_0}}.$$

### 2.2.3 Результаты вычислений напряженно-деформированного состояния составного стержня

В качестве первого примера рассмотрим случай механического нагружения составного стержня силой  $P_0 = 0.1$ . При этом части стержня имеют следующие характеристики:  $\eta_0 = 5$ ,  $\bar{s}_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ . Выяснено, что погрешность вычисления напряжений Коши по асимптотическим формулам (2.2.42), (2.2.43) не превосходит 1% при  $\alpha \leq 0.03$ .

На рис. 2.1 представлено распределение по  $z$  напряжения Коши и моментного напряжения при  $\alpha = 0.01$ .

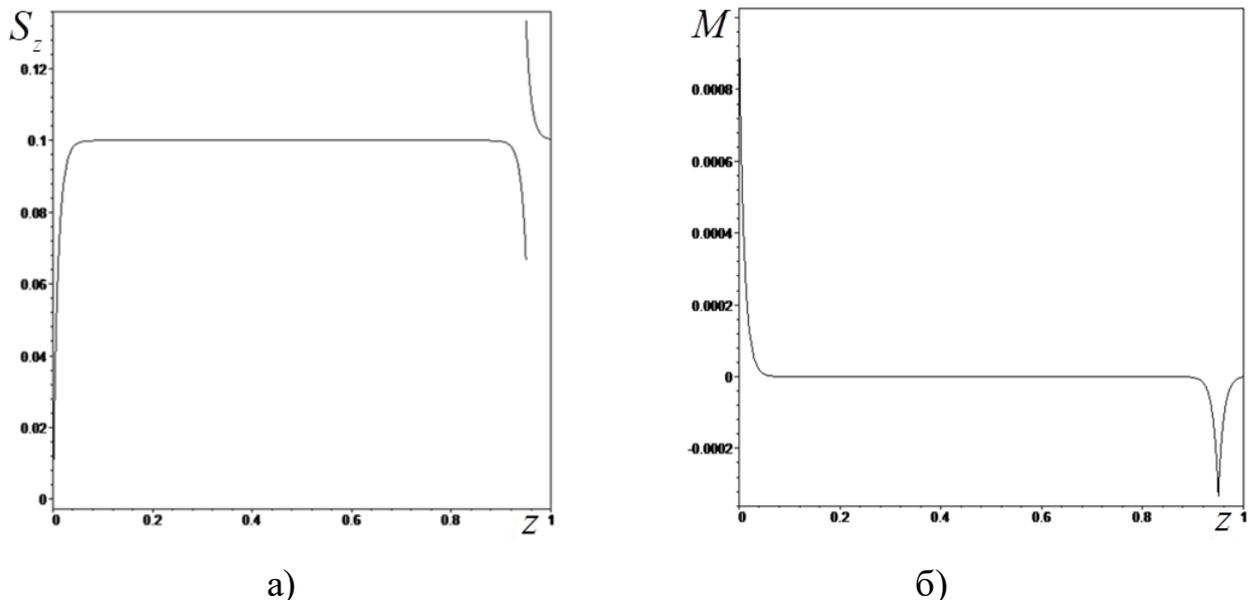


Рисунок 2.1 – Распределение по координате  $z$ : а) напряжения Коши; б) моментного напряжения.

На рис. 2.2 представлено распределение по  $z$  деформации и смещения при  $\alpha = 0.01$ .

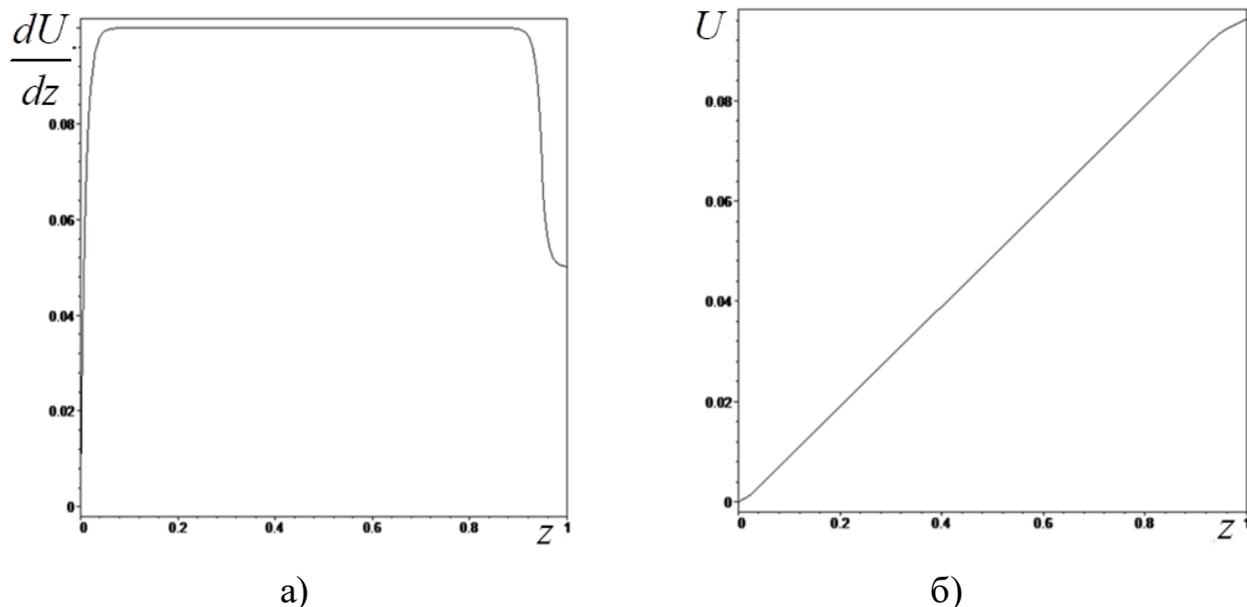
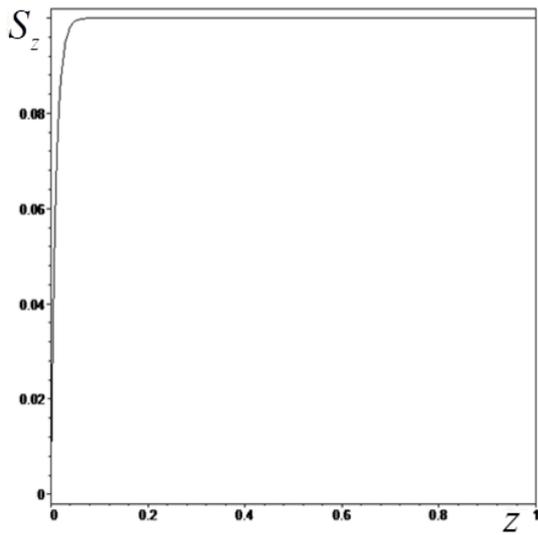


Рисунок 2.2 – Распределение по координате  $z$ : а) деформаций; б) смещений.

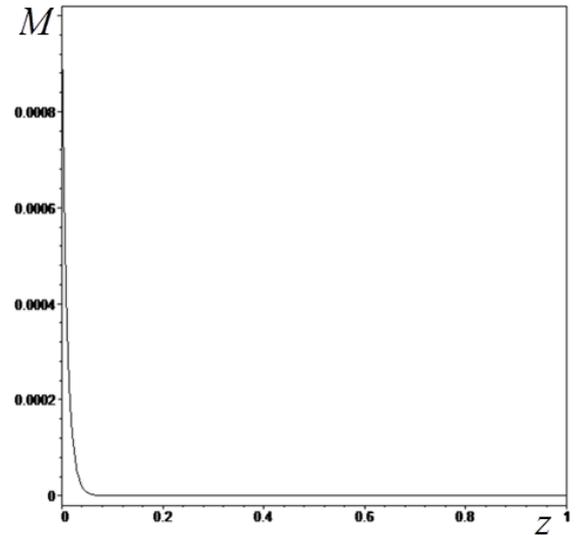
Из рис. 2.1, 2.2 следует, что напряжения Коши: 1) вблизи торца  $z = 0$  экспоненциально затухают до нуля и испытывают скачок в точке  $z = z_0$ ; 2) моментные напряжения непрерывны, равны нулю по координате  $z$ , кроме окрестностей точек закрепления и сопряжения и достигают пика в точке сопряжения стержней; 3) деформации непрерывны в точке сопряжения стержней.

В качестве второго примера рассмотрим случай механического нагружения составного стержня силой  $P_0 = 0.1$ , когда первый стержень однородный, а второй изготовлен из ФГМ. В расчетах принято:  $\alpha = 0.01$ ,  $\eta_0 = 5$ ,  $\bar{s}_1 = 1$ ,  $\bar{s}_2 = 1 - \frac{(z - z_0)^2}{2}$ .

На рис. 2.3 представлены изображения распределения: а) напряжений Коши; б) моментных напряжений в случае, если второй стержень изготовлен из ФГМ.



а)

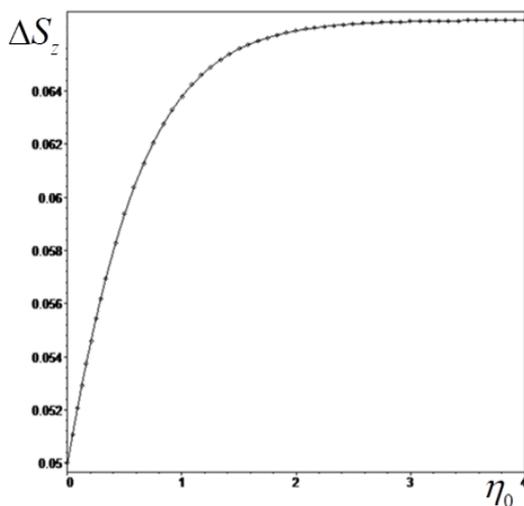


б)

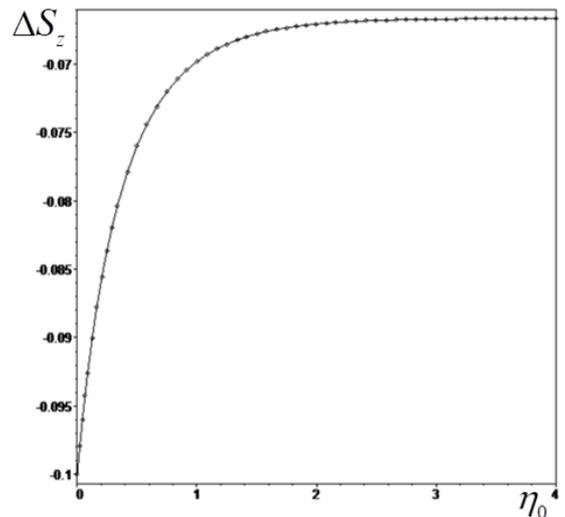
Рисунок 2.3 – Распределение по координате  $z$ : а) напряжений Коши; б) моментных напряжений в случае ФГМ.

Исследуем зависимость скачка напряжений Коши  $\Delta S_z$  в точке  $z = z_0$  от значения параметра  $\eta_0$ .

На рис. 2.4 изображена зависимость скачка напряжений от параметра  $\eta_0$  при: а)  $\bar{s}_1 = 1, s_2 = 0.5$ ; б)  $\bar{s}_1 = 1, s_2 = 2$ . При этом сплошной линией изображена зависимость  $\Delta S_z(\eta_0)$ , полученная аналитически, точками – на основе формул (2.2.45), (2.2.46).



а)



б)

Рисунок 2.4 – График зависимости скачка напряжений Коши от  $\eta_0$ .

Из рис. 2.4 следует, что минимальный скачок напряжений Коши возникает тогда, когда  $\eta_0 \ll 1$ , т.е. когда длина второго стержня намного меньше градиентного параметра  $\alpha$ . По мере увеличения  $\eta_0$ , т.е. длины второго стержня, скачок напряжений увеличивается экспоненциально. Начиная с  $\eta_0 > 3$ , т.е. когда длина второго стержня становится в 3 раза больше градиентного параметра  $\alpha$ , он выходит на стационарное значение.

В качестве третьего примера рассмотрим случай теплового нагружения составного стержня, части которого изготовлены из однородных материалов со следующими характеристиками:  $\alpha = 0.01$ ,  $\eta_0 = 8$ ,  $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 1$ ,  $\bar{k}_1 = 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0.25$ ,  $\bar{\gamma}_1 = 1$ ,  $\bar{\gamma}_2 = 2$ .

На рис. 2.5, 2.6 представлены изображения распределения безразмерных функций: напряжений Коши (рис. 2.5а), моментных напряжений (рис. 2.5б), деформаций (рис. 2.6а) и смещений (рис. 2.6б).

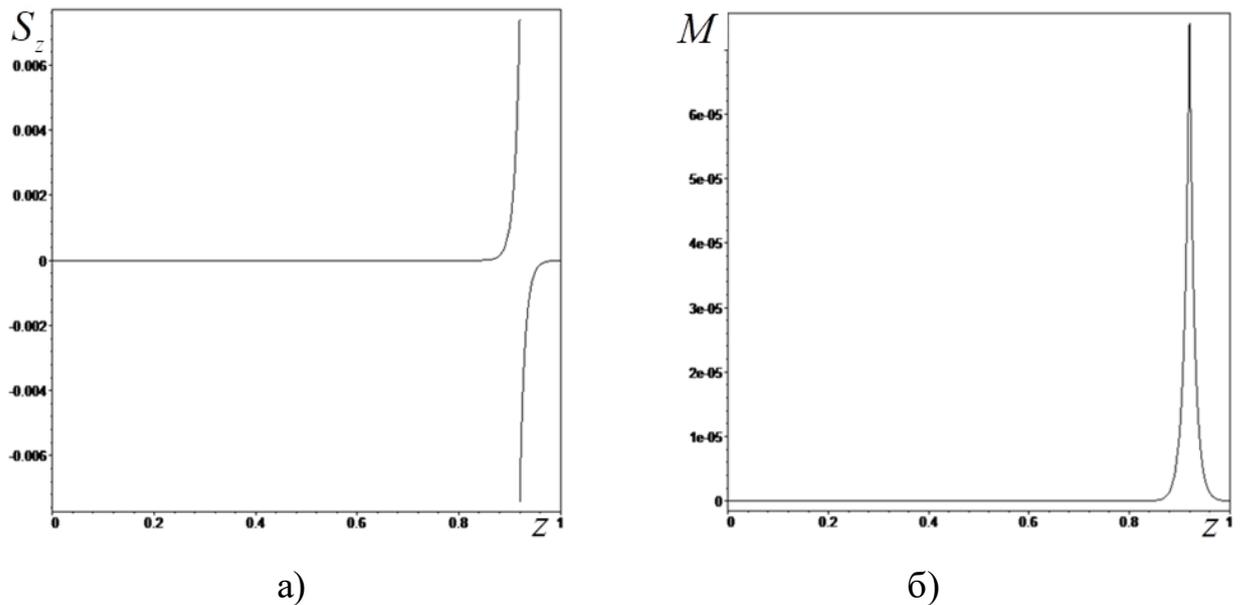


Рисунок 2.5 – Распределение по координате  $z$ : а) напряжений Коши; б) моментных напряжений при тепловом нагружении.

Из рис. 2.5 следует, что: 1) напряжения Коши равны нулю, за исключением окрестности стыка стержней, где возникает скачок напряжений; 2) моментные напряжения равны нулю, за исключением

окрестности стыка стержней и достигают пика в точке сопряжения стержней;  
 3) градиенты смещений непрерывны в окрестности стыка стержней.

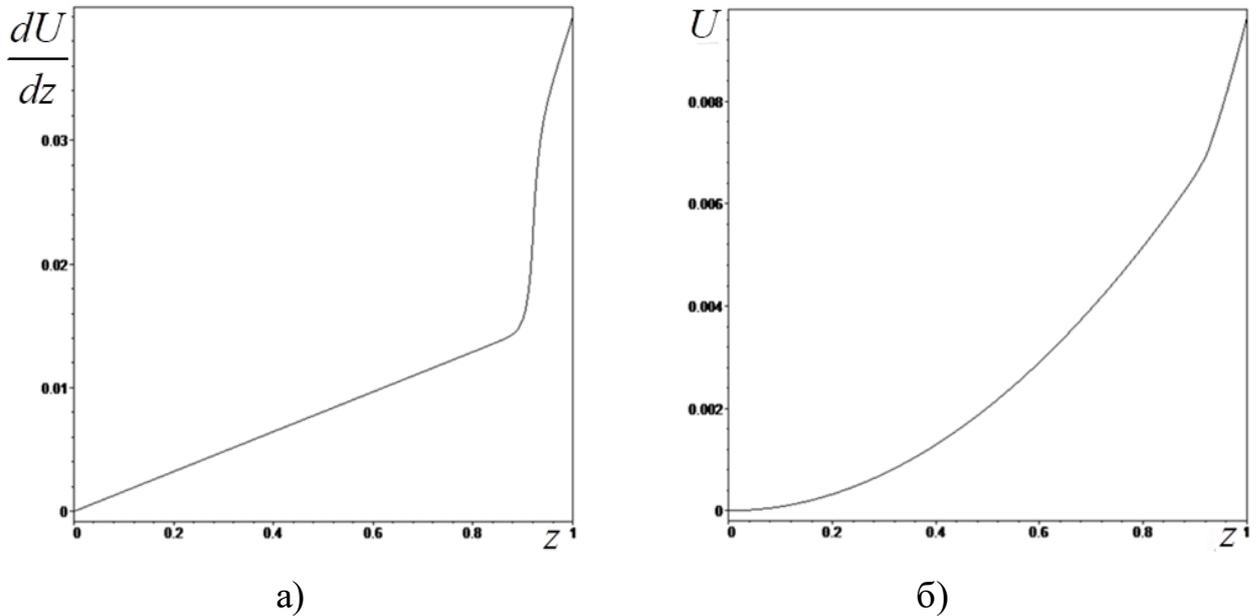


Рисунок 2.6 – Распределение по координате  $z$ : а) деформаций; б) смещений при тепловом нагружении.

### 2.3 Градиентная модель изгиба составной балки Эйлера-Бернулли.

В настоящем параграфе в соответствии с [83] представлены результаты исследования изгиба составной балки Эйлера-Бернулли.

#### 2.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим составную балку длиной  $L$  с границей сопряжения  $x_1 = L_0$ . Левый конец балки  $x_1 = 0$  жестко закреплён. На балку действует один из трех видов механической нагрузки: 1) равномерно распределенная нагрузка  $F$ ; 2) на конце  $x = L$  действует момент  $M_0$ ; 3) на конце  $x = L$  действует поперечная сила  $N_0$ .

Введем следующие величины:  $w(x_1)$  – прогиб срединной линии балки,  $I_0$  – момент инерции,  $M = I_0 E(x_1) w''$  – изгибающий момент,  $M_h = -I_M^2 (I_0 E(x_1) w'')$  – градиентный момент.

Рассмотрим случай действия равномерно распределенной нагрузки. Обезразмеренная градиентная постановка задачи изгиба составной балки Эйлера-Бернулли имеет вид [83]:

$$\bar{m}^{(i)}(z) - \bar{m}_h^{(i)}(z) + \bar{F} = 0, \quad i=1,2, \quad (2.3.1)$$

$$W^{(1)}(0) = W'^{(1)}(0) = m_h^{(1)}(0) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\bar{m}_h^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{m}^{(2)}(1) - \bar{m}_h^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{m}'^{(2)}(1) - \bar{m}_h'^{(2)}(1) = 0, \quad (2.3.3)$$

$$\Pi^{(1)}(z_0) = \Pi^{(2)}(z_0), \quad \Pi'^{(1)}(z_0) = \Pi'^{(2)}(z_0), \quad \Pi''^{(1)}(z_0) = \Pi''^{(2)}(z_0),$$

$$\bar{m}_h^{(1)}(z_0) = \bar{m}_h^{(2)}(z_0), \quad \bar{m}^{(1)}(z_0) - \bar{m}_h^{(1)}(z_0) = \bar{m}^{(2)}(z_0) - \bar{m}_h^{(2)}(z_0),$$

$$\bar{m}'^{(1)}(z_0) - \bar{m}_h'^{(1)}(z_0) = \bar{m}'^{(2)}(z_0) - \bar{m}_h'^{(2)}(z_0). \quad (2.3.4)$$

Здесь  $z = \frac{x_1}{L}$ ,  $z_0 = \frac{L_0}{L}$ ,  $\alpha = \frac{l_M}{L}$ ,  $\Pi_i = \frac{w_i}{L}$ ,  $v_i = \frac{D_i}{E_0 I_0}$ ,  $\bar{m}_i = \frac{M_i L}{E_0 I_0}$ ,  $\bar{F} = \frac{FL^3}{E_0 I_0}$ ,  $m_0 = \frac{M_0 L}{E_0 I_0}$ ,

$$\bar{N}_0 = \frac{N_0 L^2}{E_0 I_0}, \quad i=1,2, \quad E_0 = \max_{x_1 \in [0, L]} E(x_1).$$

Получено точное аналитическое решение задачи (2.3.1)-(2.3.4), в котором выражения для изгибающих моментов  $\bar{m}^{(i)}(z, \alpha)$  имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

В случае малых значений масштабного параметра на основе метода Вишика-Люстерника, ограничившись в разложениях только нулевыми приближениями, получены приближенные асимптотические решения, вид которых зависит от типа механической нагрузки.

Так, в случае действия на балку равномерно распределенной нагрузки  $\bar{F}$  асимптотические формулы для нахождения распределения изгибающих моментов имеют вид:

$$\bar{m}^{(1)}(z, \alpha) \cong -\frac{\bar{F}}{2}(z-1)^2 + \bar{F}\alpha e^{-\frac{z}{\alpha}} + P_1 \left( e^{\frac{2(z_0-1)}{\alpha}} - 1 \right) e^{\frac{z-z_0}{\alpha}}, \quad (2.3.5)$$

$$\bar{m}^{(2)}(z, \alpha) \cong -\frac{\bar{F}}{2}(z-1)^2 + P_1 \left( e^{\frac{z_0-z}{\alpha}} + e^{\frac{z_0-1}{\alpha}} e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right). \quad (2.3.6)$$

где  $P_1 = -\frac{\bar{F}}{2}(z_0 - 1)^2 Y_0$ ,  $Y_0 = \frac{v_2(z_0) - v_1(z_0)}{v_1(z_0) + v_2(z_0) + (v_1(z_0) - v_2(z_0)) e^{-\frac{2(z_0-1)}{\alpha}}}$ .

В случае действия на торец балки  $z=1$  поперечной силы  $N_0$  имеем:

$$\bar{m}^{(1)}(z, \alpha) \cong N_0(z-1) + N_0 \alpha e^{-\frac{z}{\alpha}} + P_2 \left( \left( e^{\frac{2(z_0-1)}{\alpha}} - 1 \right) - \alpha e^{\frac{z_0-1}{\alpha}} \right) e^{\frac{z-z_0}{\alpha}}, \quad (2.3.7)$$

$$\bar{m}^{(2)}(z, \alpha) \cong N_0(z-1) + P_2 e^{\frac{z_0-z}{\alpha}} + P_2 \left( e^{\frac{z_0-1}{\alpha}} - \alpha \right) e^{\frac{z-1}{\alpha}}, \quad (2.3.8)$$

где  $P_2 = N_0 \left( z_0 - 1 - \alpha e^{\frac{z_0-1}{\alpha}} \right) Y_0$ .

После нахождения изгибающих моментов далее находятся прогибы срединной линии балки по формуле:

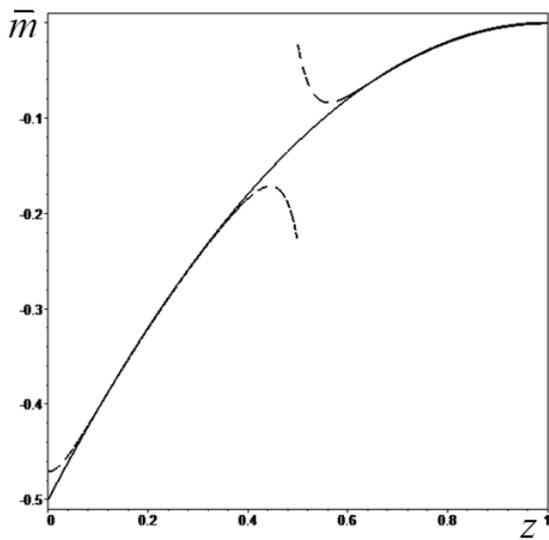
$$\Pi(z) = -\int_0^z (z-\eta) \frac{\bar{m}(\eta)}{v(\eta)} d\eta. \quad (2.3.9)$$

### 2.3.2 Результаты вычислений

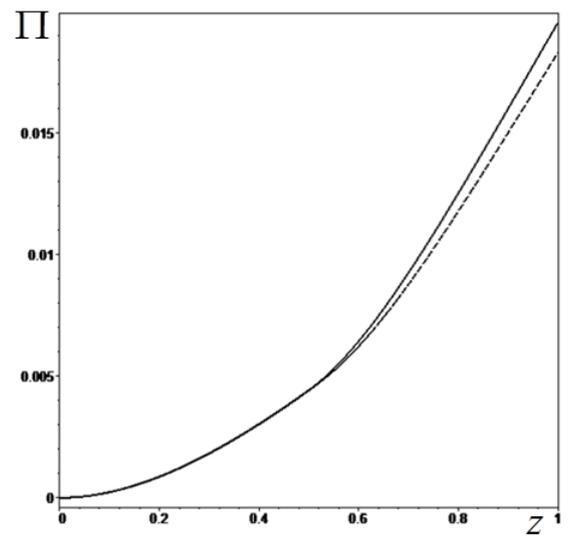
При сравнении точного аналитического решения и приближенного асимптотического решения выяснено, что погрешность вычисления моментов по асимптотическим формулам (2.3.5), (2.3.6) и (2.3.7), (2.3.8) не превосходит 1% при  $\alpha \leq 0.035$ .

На рис. 2.7 представлены распределения по координате  $z$ : а) изгибающих моментов; б) прогибов в случае действия равномерно распределенной нагрузки по длине балки при  $\alpha = 0.02$ ,  $\bar{F} = 1$ ,  $z_0 = 0.5$ ,  $v_1 = 10$ ,  $v_2 = 1$ . Сплошной линией изображено классическое решение, пунктиром – асимптотическое.

Рис. 2.8 показывает распределение: а) изгибающих моментов; б) прогибов в случае действия на торец балки  $z=1$  поперечной силы при  $\alpha = 0.02$ ,  $\bar{N}_0 = 1$ ,  $z_0 = 0.5$ ,  $v_1 = 10$ ,  $v_2 = 1$ .

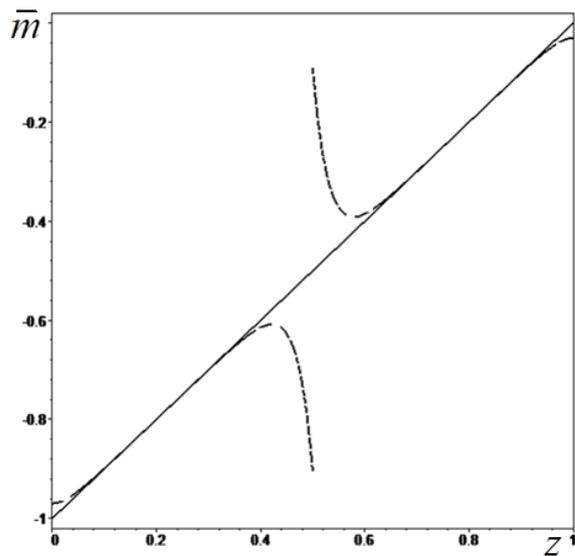


а)

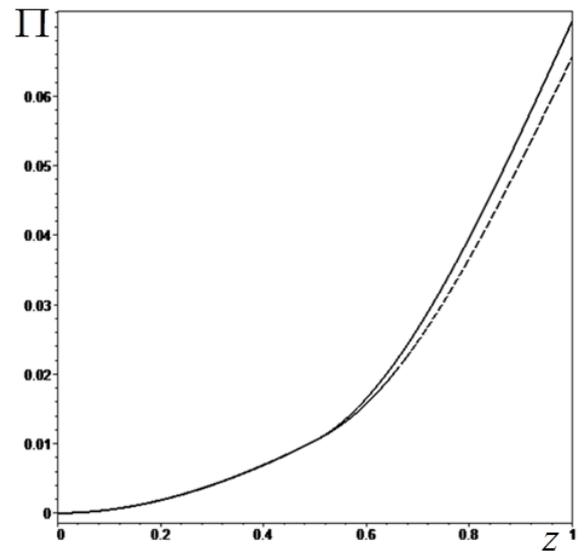


б)

Рисунок 2.7 – Распределение по координате  $z$ : а) изгибающих моментов; б) прогибов в случае действия равномерно распределенной поперечной нагрузки.



а)



б)

Рисунок 2.8 – Распределение по координате  $z$ : а) изгибающих моментов; б) прогибов в случае действия на торец балки  $z = 1$  поперечной силы.

Из рис. 2.7, 2.8 следует, что изгибающие моменты испытывают скачок при  $z = z_0$ , обусловленный разностью изгибных жесткостей балок и непрерывностью прогибов, их первых и вторых производных.

## 2.4 Градиентная модель деформирования изотропного полого слоистого цилиндра.

В настоящем параграфе исследуется деформирование слоистого цилиндра на основе градиентной модели [77, 78].

### 2.4.1 Постановка задачи для изотропного слоистого цилиндра

Рассмотрим равновесие бесконечного изотропного полого двухслойного цилиндра, имеющего поверхность сопряжения  $r = r_0$  под действием одного из видов нагрузки: 1) внутренняя поверхность  $r = r_1$  находится под действием внутреннего давления  $p_0$ , внешняя поверхность  $r = r_2$  свободна от напряжений, тепловое воздействие отсутствует; 2) температурная нагрузка  $T(r_1) = 0$ ,  $T(r_2) = T_*$ , боковые поверхности свободны от напряжений.

Рассмотрим сначала случай механического нагружения цилиндра. В этом случае для получения уравнений равновесия, граничных условий и условий сопряжения применим вариационный принцип Лагранжа.

Составим выражения для потенциальной энергии и работе внешних сил [78]:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{rr} \varepsilon_{rr} + \tau_{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + m_{rrr} \chi_{rrr} + m_{\varphi\varphi r} \chi_{\varphi\varphi r} + m_{\varphi r\varphi} \chi_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi} \chi_{r\varphi\varphi}) dV, \quad A = \int_S f_i u_i dS. \quad (2.4.1)$$

В (2.4.1) выражения для ненулевых компонент тензоров градиентов деформации, напряжений Коши, моментных напряжений, полных напряжений и радиальной компоненты вектора нагрузки имеют вид:

$$\chi_{rrr} = \frac{d^2 u}{dr^2}, \quad \chi_{\varphi\varphi r} = \chi_{r\varphi\varphi} = \chi_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right), \quad \tau_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r},$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{du}{dr} + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r}, \quad m_{rrr} = l_M^2 \frac{d\tau_{rr}}{dr}, \quad m_{\varphi\varphi r} = l_M^2 \frac{d\tau_{\varphi\varphi}}{dr},$$

$$m_{r\varphi\varphi} = m_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{2} l_M^2 \frac{(\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi})}{r} = 2\mu l_M^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{rr} = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi r} + m_{r\varphi\varphi}),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{\varphi\varphi r}) - \frac{1}{r} (m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}), \quad t_r = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi r} + m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}).$$

Первая вариация потенциальной энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta W_0 = & \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left( \tau_{rr}^{(1)} \delta \frac{du^{(1)}}{dr} + \tau_{\varphi\varphi}^{(1)} \delta \frac{u^{(1)}}{r} + m_{rr}^{(1)} \delta \frac{d^2 u^{(1)}}{dr^2} + (m_{\varphi\varphi r}^{(1)} + m_{\varphi r\varphi}^{(1)} + m_{r\varphi\varphi}^{(1)}) \delta \frac{d}{dr} \left( \frac{u^{(1)}}{r} \right) \right) r d\varphi dr + \\ & + \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left( \tau_{rr}^{(2)} \delta \frac{du^{(2)}}{dr} + \tau_{\varphi\varphi}^{(2)} \delta \frac{u^{(2)}}{r} + m_{rr}^{(2)} \delta \frac{d^2 u^{(2)}}{dr^2} + (m_{\varphi\varphi r}^{(2)} + m_{\varphi r\varphi}^{(2)} + m_{r\varphi\varphi}^{(2)}) \delta \frac{d}{dr} \left( \frac{u^{(2)}}{r} \right) \right) r d\varphi dr. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Полагая в (2.4.2)  $\delta \frac{d}{dr} \left( \frac{u^{(i)}}{r} \right) = \frac{1}{r} \left( \delta \frac{du^{(i)}}{dr} - \delta \frac{u^{(i)}}{r} \right)$ ,

$$\tau_{rr}^{(i)} \delta \frac{du^{(i)}}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \tau_{rr}^{(i)} \delta u^{(i)} \right) - \frac{d\tau_{rr}^{(i)}}{dr} \delta u^{(i)},$$

$$m_{rr}^{(i)} \delta \frac{d^2 u^{(i)}}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( m_{rr}^{(i)} \delta \frac{du^{(i)}}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left( \frac{dm_{rr}^{(i)}}{dr} \delta u^{(i)} \right) + \frac{d^2 m_{rr}^{(i)}}{dr^2} \delta u^{(i)}, \quad i=1,2 \text{ и, выполняя условия}$$

принципа Лагранжа  $\delta W_0 = \delta A$ , после некоторых преобразований, получим:

1) уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} = 0, \quad i=1,2; \quad (2.4.3)$$

2) граничные условия при  $r = r_1$

$$t_r^{(1)}(r_1) = p_0 \text{ или, } u^{(1)}(r_1) = 0; \quad (2.4.4)$$

$$m_{rr}^{(1)}(r_1) = 0 \text{ или } u'^{(1)}(r_1) = 0; \quad (2.4.5)$$

3) граничные условия при  $r = r_2$

$$t_r^{(2)}(r_2) = 0 \text{ или } u^{(1)}(r_2) = 0; \quad (2.4.6)$$

$$m_{rr}^{(2)}(r_2) = 0 \text{ или } u'^{(1)}(r_2) = 0; \quad (2.4.7)$$

4) условия сопряжения при  $r = r_0$

$$u^{(1)}(r_0) = u^{(2)}(r_0), \quad \frac{du^{(1)}}{dr}(r_0) = \frac{du^{(2)}}{dr}(r_0), \quad t_r^{(1)}(r_0) = t_r^{(2)}(r_0), \quad m_{rr}^{(1)}(r_0) = m_{rr}^{(2)}(r_0). \quad (2.4.8)$$

Исходя из (2.4.3)-(2.4.8), постановка задачи ГТУ для слоистого цилиндра состоит из уравнения равновесия (2.4.3), граничных условий  $t_r^{(1)}(r_1) = p_0$ ,  $t_r^{(2)}(r_2) = 0$ , двух дополнительных граничных условий, например,  $m_{rr}^{(1)}(r_1) = 0$ ,  $m_{rr}^{(2)}(r_2) = 0$  и условий сопряжения (2.4.8).

Обезразмеренная постановка задачи о деформировании слоистого цилиндра имеет вид:

$$\frac{d\Omega_{rr}^{(i)}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr}^{(i)} - \Omega_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.4.9)$$

$$\bar{t}_r^{(1)}(\xi_0) = P, \quad M_{rr}^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad (2.4.10)$$

$$\bar{t}_r^{(2)}(1) = 0, \quad M_{rr}^{(2)}(1) = 0, \quad (2.4.11)$$

$$U^{(1)}(R_0) = U^{(2)}(R_0), \quad \frac{dU^{(1)}}{d\xi}(R_0) = \frac{dU^{(2)}}{d\xi}(R_0), \quad \bar{t}_r^{(1)}(R_0) = \bar{t}_r^{(2)}(R_0),$$

$$M_{rr}^{(1)}(R_0) = M_{rr}^{(2)}(R_0), \quad (2.4.12)$$

где  $\xi = \frac{r}{r_2}$ ,  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $R_0 = \frac{r_0}{r_2}$ ,  $U = \frac{u}{r_2}$ ,  $S_{rr} = \frac{\tau_{rr}}{\mu_0}$ ,  $S_{\varphi\varphi} = \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{\mu_0}$ ,  $\Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\mu_0}$ ,  $\Omega_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu_0}$ ,

$$M_{rr} = \frac{m_{rrr}}{\mu_0 r_2}, \quad M_{\varphi\varphi r} = \frac{m_{\varphi\varphi r}}{\mu_0 r_2}, \quad M_{r\varphi\varphi} = \frac{m_{r\varphi\varphi}}{\mu_0 r_2}, \quad \bar{t}_r = \frac{t_r}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad \alpha = \frac{l_M}{r_2},$$

$$P = \frac{P_0}{\mu_0}.$$

## 2.4.2 Асимптотическое решение задачи методом Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна

Исходя из граничных условий, задачу (2.4.9)-(2.4.12) удобно решать в терминах радиальных смещений. Для упрощения расчетов примем градиентный параметр одинаковым для каждого слоя цилиндра.

Путем введения модифицированных функций Бесселя 1-го порядка  $I_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ ,  $K_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$  в [78] получены точные аналитические решения задачи (2.4.9)-(2.4.12) в перемещениях, которые имеют вид:

$$U^{(1)}(\xi) = A_1 \xi + \frac{A_2}{\xi} + A_3 I_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + A_4 K_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \quad \xi \in [\xi_0, R_0], \quad (2.4.13)$$

$$U^{(2)}(\xi) = A_5 \xi + \frac{A_6}{\xi} + A_7 I_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + A_8 K_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \quad \xi \in [R_0, 1], \quad (2.4.14)$$

где константы интегрирования  $A_1, \dots, A_8$  определяются путем удовлетворения граничных условий (2.4.10), (2.4.11), условий сопряжения (2.4.12) и имеют довольно громоздкий вид.

В случае малых значений масштабного параметра построим асимптотическое решение задачи (2.4.9)-(2.4.12). Для этого уравнения равновесия (2.4.9) запишем в виде:

$$(1 - \alpha^2 L_{grad}) L_{clas} U_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.4.15)$$

$$\text{где } L_{clas} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2}, \quad L_{grad} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right).$$

Так как уравнение (2.4.15) является дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, то его асимптотическое решение удобно строить с помощью метода квазиклассического приближения Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) [77, 130].

Решение уравнения (2.4.15) в классической постановке имеет вид:

$$U_{clas}^{(1)}(\xi) = G_1 \xi + \frac{G_2}{\xi}, \quad U_{clas}^{(2)}(\xi) = G_3 \xi + \frac{G_4}{\xi}. \quad (2.4.16)$$

Погранслоиные решения будем искать в виде:

$$U_{grad}(\xi) = H(\xi) e^{\frac{g(\xi)}{\alpha}}. \quad (2.4.17)$$

Выполним разложение по параметру  $\alpha$  функций  $H(\xi)$  и  $g(\xi)$  в виде:

$$H(\xi) = H_0(\xi) + \alpha H_1(\xi) + \dots, \quad g(\xi) = g_0(\xi) + \alpha g_1(\xi) + \dots \quad (2.4.18)$$

Подставим (2.4.17) с учетом разложений (2.4.18) в уравнение

$$(1 - \alpha^2 L_{grad}) U_{grad} = 0. \quad (2.4.19)$$

После группировки слагаемых при одинаковых степенях  $\alpha$  в (2.4.19), получим последовательность задач, решением которых является  $H_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$  и два значения  $g_0(\xi)$  в виде  $\xi$  и  $-\xi$ .

Вычисления по точным аналитическим формулам (2.4.13), (2.4.14) показали наличие пограничных слоев в окрестностях  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi = R_0$  и  $\xi = 1$ .

Поэтому выражения для  $U_{grad}$  в силу линейности задачи можно представить в виде линейной комбинации двух ВКБ-решений:

$$U_{grad}^{(1)}(\xi) \cong \frac{C_1}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_1}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - R_0}{\alpha}}, \quad U_{grad}^{(2)}(\xi) \cong \frac{C_2}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{R_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_2}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - 1}{\alpha}}. \quad (2.4.20)$$

Тогда асимптотические выражения для радиальных смещений цилиндра и покрытия имеют вид:

$$U^{(1)}(\xi) \cong G_1 \xi + \frac{G_2}{\xi} + \frac{C_1}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_1}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - R_0}{\alpha}}, \quad \xi \in [\xi_0, R_0], \quad (2.4.21)$$

$$U^{(2)}(\xi) \cong G_3 \xi + \frac{G_4}{\xi} + \frac{C_2}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{R_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_2}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - 1}{\alpha}}, \quad \xi \in [R_0, 1]. \quad (2.4.22)$$

В формулах (2.4.21), (2.4.22) константы  $G_1, G_2, G_3, G_4, C_1, C_2, D_1, D_2$ , найденные путем удовлетворения граничных условий (2.4.10), (2.4.11) и условий сопряжения (2.4.12), имеют вид [78]:

$$G_1 = \frac{(\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1 + R_0^2) + \bar{\mu}_1 \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (R_0^2 - 1))}{2Y} \xi_0^2 P, \quad G_3 = \frac{\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) R_0^2}{2Y} \xi_0^2 P,$$

$$G_2 = \frac{\bar{\mu}_2 ((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) (1 + R_0^2) + (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (1 - R_0^2)) + \bar{\lambda}_2 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1)}{2Y} \xi_0^2 R_0^2 P,$$

$$G_4 = \frac{(\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)}{2Y} \xi_0^2 R_0^2 P, \quad D_2 = 2\alpha^2 R_0^2 P \bar{\mu}_2 \xi_0^2 \frac{(\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)}{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) Y},$$

$$Y = (\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_1) (\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_2 (\xi_0^2 - 1) (R_0^2 - 1) + (\bar{\lambda}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_2) - \bar{\mu}_1 \bar{\lambda}_2 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1)) (R_0^2 - 1) -$$

$$- (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (R_0^4 - 1) + (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) \bar{\mu}_1 (\xi_0^2 - 1),$$

$$C_1 = -2\alpha^2 R_0^2 P \bar{\mu}_1 \frac{\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (R_0^2 - 1) + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)}{\sqrt{\xi_0} (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) Y},$$

$$D_1 = C_2 = -\alpha P \xi_0^2 \sqrt{R_0} \frac{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) (\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (R_0^2 - 1) + \bar{\lambda}_1 \bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_1)}{(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) Y}.$$

В случае теплового способа нагружения вначале решается задача теплопроводности в классической постановке:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \bar{k}_i(\xi) \frac{dW^{(i)}}{d\xi} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.4.23)$$

$$W^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad W^{(2)}(1) = 1, \quad (2.5.24)$$

$$W^{(1)}(R_0) = W^{(2)}(R_0), \quad k_1(R_0) \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \xi}(R_0) = k_2(R_0) \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \xi}(R_0). \quad (2.4.25)$$

Решение задачи (2.4.23)-( 2.4.25) в случае однородных слоев цилиндра и покрытия имеет вид:

$$W^{(1)} = \frac{\bar{k}_2 \ln \frac{\xi}{\xi_0}}{\bar{k}_2 \ln \frac{R_0}{\xi_0} - \bar{k}_1 \ln R_0}, \quad W^{(2)} = \frac{\bar{k}_1 \ln \frac{\xi}{R_0} + \bar{k}_2 \ln \frac{R_0}{\xi_0}}{\bar{k}_2 \ln \frac{R_0}{\xi_0} - \bar{k}_1 \ln R_0}. \quad (2.4.26)$$

Далее определяются радиальные смещения слоистого цилиндра, которые имеют вид [78]:

$$U^{(1)}(\xi) = G_5 \xi + \frac{G_6}{\xi} + \frac{\bar{\gamma}_1}{(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} \eta W^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{C_3}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_3}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - R_0}{\alpha}}, \quad \xi \in [\xi_0, R_0], \quad (2.4.27)$$

$$U^{(2)}(\xi) = G_7 \xi + \frac{G_8}{\xi} + \frac{\bar{\gamma}_2}{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)\xi} \int_{R_0}^{\xi} \eta W^{(2)}(\eta) d\eta + \frac{C_4}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{R_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_4}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - 1}{\alpha}}, \quad \xi \in [R_0, 1]. \quad (2.4.28)$$

В формулах (2.4.27), (2.4.28) константы  $G_5, G_6, G_7, G_8, C_3, C_4, D_3, D_4$  имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся.

### 2.4.3 Численные результаты

Исследованы границы применимости асимптотических формул (2.4.21), (2.4.22) путем сравнения с точным аналитическим решением по формулам (2.4.13), (2.4.14) при  $\xi_0 = 0.6, R_0 = 0.9, P = -1, \bar{\lambda}_1 = 1, \bar{\mu}_1 = 0.8, \bar{\lambda}_2 = 2, \bar{\mu}_2 = 1.6$ .

На рис. 2.9 изображена зависимость смещения на внутренней поверхности  $\xi = \xi_0$  от  $\alpha$ . При этом сплошной линией изображено точное решение, штрихами – приближенное решение.

Расчеты показали, что приближенные формулы (2.4.21), (2.4.22) имеют погрешность, не превосходящую 1%, при  $\alpha \leq 0.03$ .

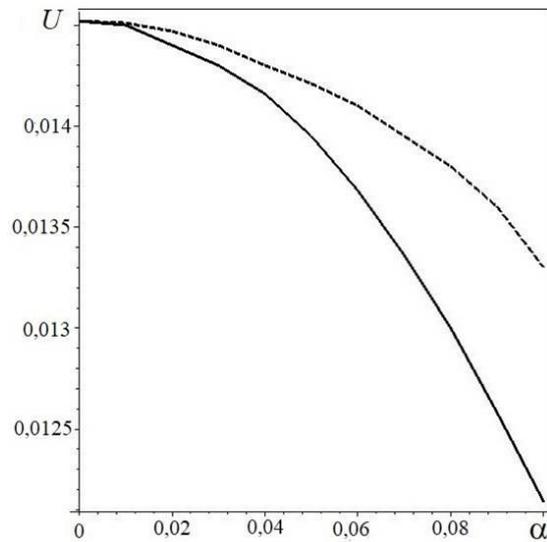


Рисунок 2.9 – Зависимость смещения на внутренней поверхности от  $\alpha$ .

Рассмотрим результаты вычисления НДС цилиндра. При механическом нагружении в расчетах полагаем:  $P = -1$ ,  $\xi_0 = 0.6$ ,  $R_0 = 0.7$ ,  $\bar{\lambda}_1 = 1$ ,  $\bar{\mu}_1 = 0.8$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_2 = 0.4$ ; при тепловом –  $\xi_0 = 0.6$ ,  $R_0 = 0.9$ ,  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 1$ ,  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0.8$ ,  $\bar{\gamma}_1 = 0.7$ ,  $\bar{\gamma}_2 = 1$ ,  $\bar{k}_1 = 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.03$ . В случае механического нагружение покрытие расположено на внутренней поверхности, в случае теплового нагружения – на внешней поверхности. На рис. 2.10, 2.11 изображено распределение напряжений Коши по координате  $\xi$  и моментных напряжений  $M_{rr}$  в случае: а) механического нагружения; б) теплового нагружения.

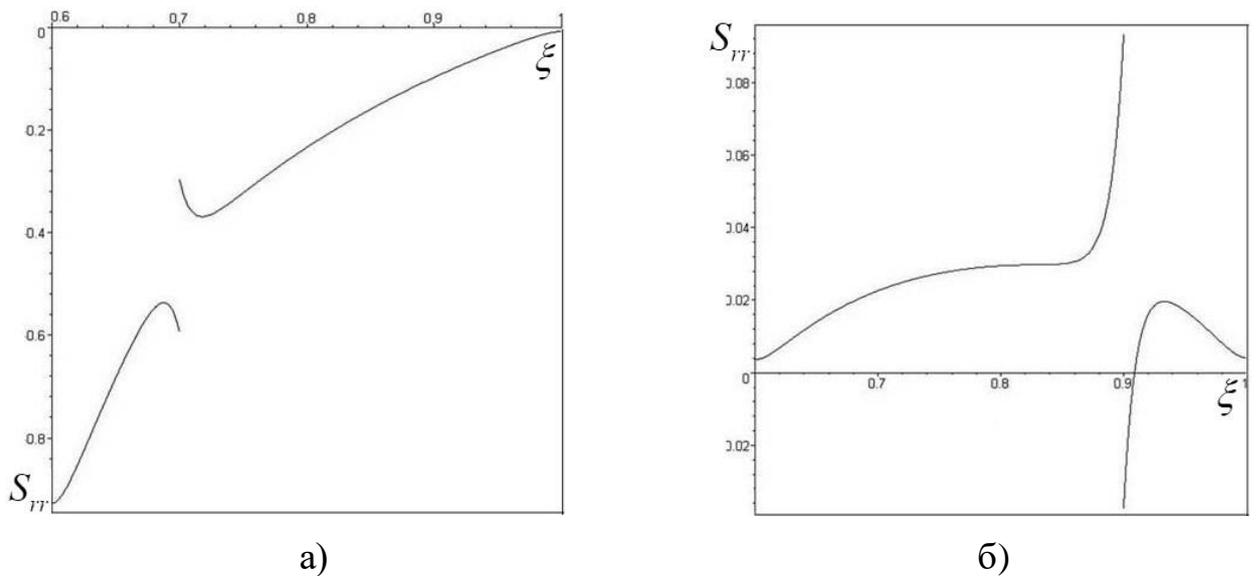
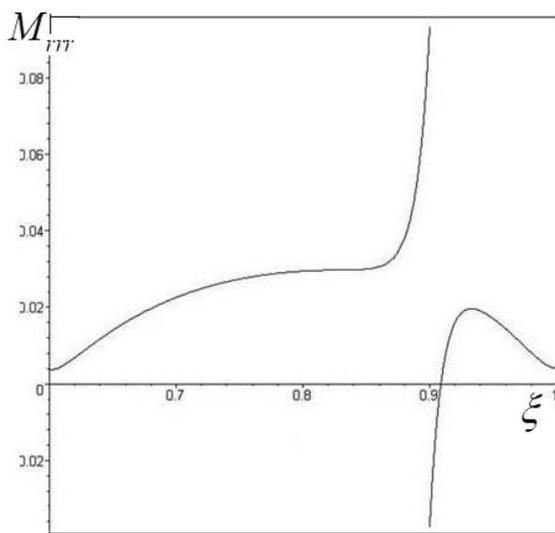
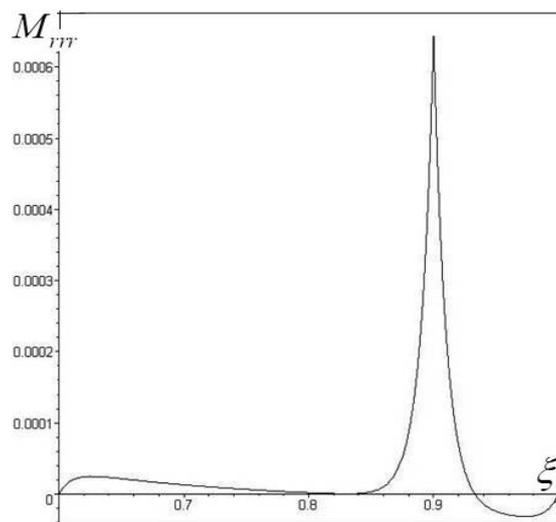


Рисунок 2.10 – Распределение напряжений Коши  $S_{rr}$  по координате  $\xi$ .



а)

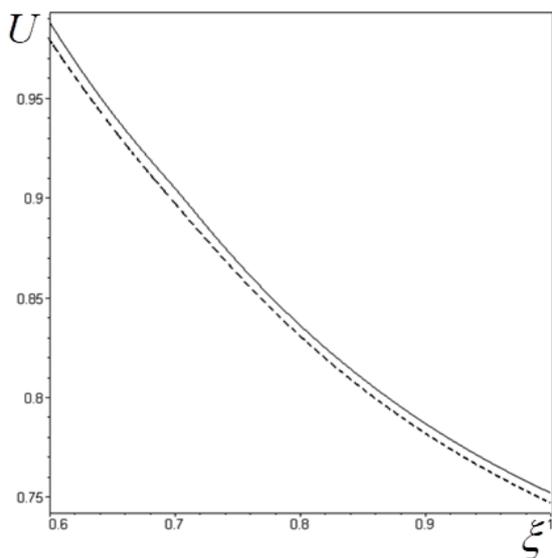


б)

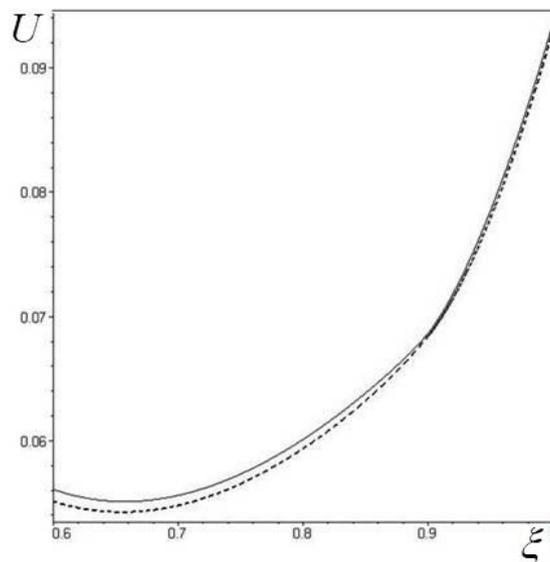
Рисунок 2.11 – Радиальное распределение моментных напряжений  $M_{rrr}$ .

Из рис. 2.10, 2.11 следует, что напряжения Коши терпят скачок, а моментные напряжения  $M_{rrr}$  принимают пиковое значение на  $\xi = R_0$ .

На рис. 2.12-2.14 изображено радиальное распределение смещения и полных напряжений в случае: а) механического нагружения; б) теплового нагружения. При этом сплошной линией изображено решение задач при  $\alpha = 0$ , пунктиром – при  $\alpha = 0.03$ .



а)



б)

Рисунок 2.12 – Распределение радиальных смещений по координате  $\xi$ .

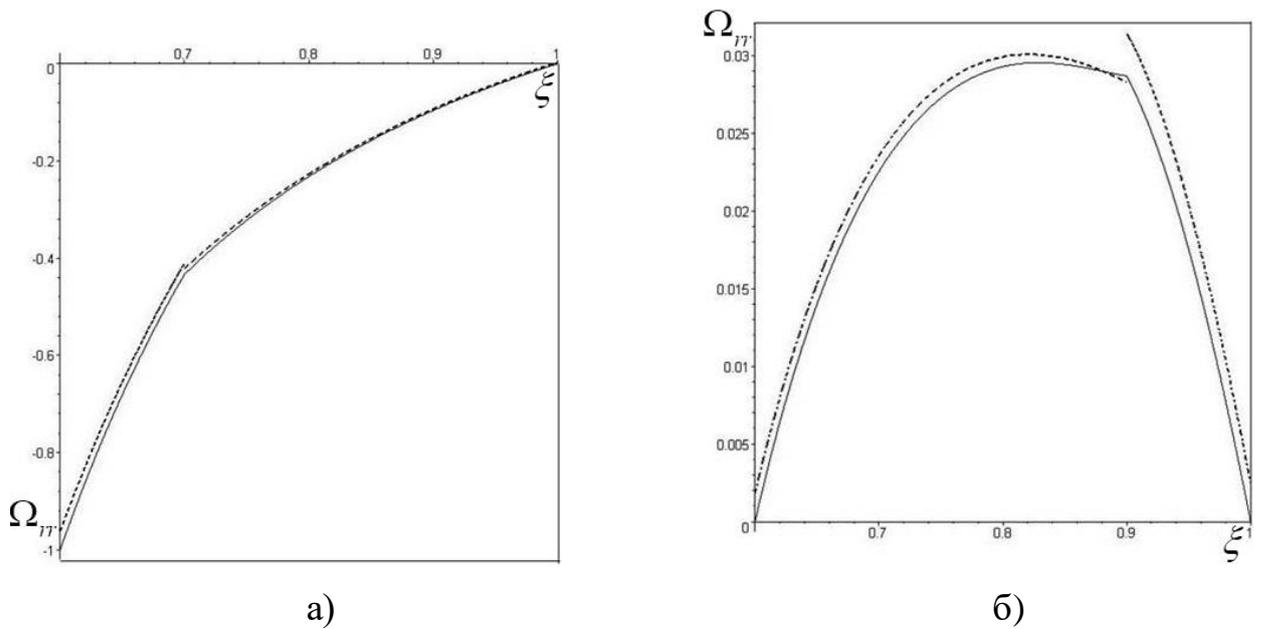


Рисунок 2.13 – Распределение полных радиальных напряжений по координате  $\xi$ .

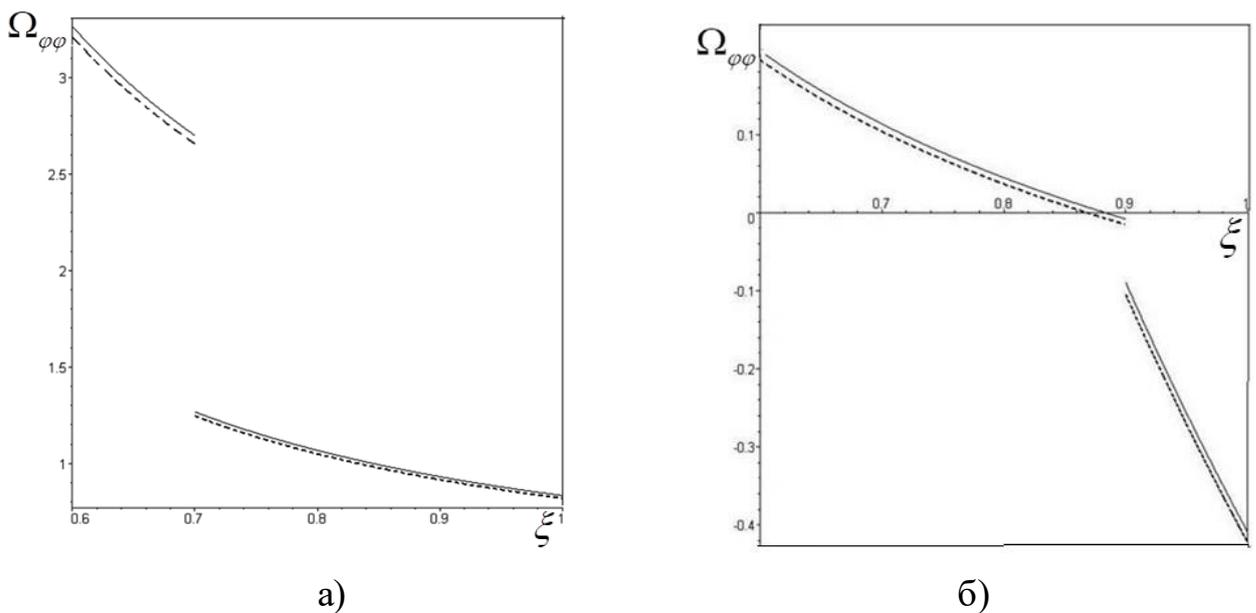


Рисунок 2.14 – Радиальное распределение полных окружных напряжений.

Из рис. 2.12-2.14 следует, что: 1) с увеличением масштабного параметра радиальные смещения и полные окружные напряжения уменьшаются, а полные радиальные напряжения увеличиваются; 2) полные радиальные напряжения испытывают скачок на поверхности  $\xi = R_0$ . Скачок полных радиальных напряжений обусловлен, как разностью термомеханических характеристик, так и непрерывностью компоненты  $\bar{t}_r$ .

## 2.5 Градиентная модель термоупругого деформирования слоистой полосы.

В данном параграфе в соответствии с [76, 258] построена градиентная модель термоупругого деформирования слоистой полосы.

### 2.5.1 Постановка задачи для слоистой полосы

Рассмотрим равновесие бесконечной термоупругой слоистой полосы (поверхность сопряжения  $x_3 = h_1$ ), нижняя поверхность  $x_3 = 0$  которой жестко закреплена, а на свободной от напряжений верхней поверхности  $x_3 = h$  на отрезке  $x_1 \in [a_0, b_0]$  действует тепловой поток  $q(x_1, h) = q_0 f(x_1)$ , при этом остальная часть верхней границы теплоизолирована.

Полагаем, что распространение тепла в слоистой полосе подчиняется классическому уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y_3^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad y_1 \in (-\infty, \infty), \quad y_3 \in [0, 1], \quad (2.5.1)$$

$$W_1(y_1, 0) = 0, \quad -\bar{k}_2 \frac{\partial W_2}{\partial y_3}(y_1, 1) = f(y_1), \quad y_1 \in [\bar{a}_0, \bar{b}_0], \quad \frac{\partial W_2}{\partial y_3}(y_1, 1) = 0, \quad y_1 \notin [\bar{a}_0, \bar{b}_0], \quad (2.5.2)$$

$$W_1(y_1, \bar{h}_1) = W_2(y_1, \bar{h}_1), \quad \bar{k}_1 \frac{\partial W_1}{\partial y_3}(y_1, \bar{h}_1) = \bar{k}_2 \frac{\partial W_2}{\partial y_3}(y_1, \bar{h}_1), \quad y_1 \in (-\infty, \infty), \quad (2.5.3)$$

где  $y_i = \frac{x_i}{h}$ ,  $W_i = \frac{k_0 T_i}{q_0 h}$ ,  $\bar{a}_0 = \frac{a_0}{h}$ ,  $\bar{b}_0 = \frac{b_0}{h}$ ,  $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{h}$ .

В работе [126] были получены уравнения равновесия, механические граничные условия и условия сопряжения задачи ГТУ для слоистой полосы.

При этом неклассические условия имеют вид: 1) на нижней границе

$$\frac{\partial U_1}{\partial y_3}(y_1, 0) = \frac{\partial U_3}{\partial y_3}(y_1, 0) = 0; \quad 2) \text{ на верхней границе } M_{133}(y_1, 1) = M_{333}(y_1, 1) = 0; \quad 3) \text{ на}$$

поверхности сопряжения полос  $y_3 = \bar{h}_1$  – непрерывность по градиентам

перемещений  $\frac{\partial U_1}{\partial y_3}$ ,  $\frac{\partial U_3}{\partial y_3}$  и компонентам моментных напряжений  $M_{133}$ ,  $M_{333}$ .

Здесь  $U_1^{(i)} = \frac{u_1^{(i)}}{h}$ ,  $U_3^{(i)} = \frac{u_3^{(i)}}{h}$ ,  $\Omega_{kl}^{(i)} = \frac{\sigma_{kl}^{(i)}}{\mu_0}$ ,  $S_{kl}^{(i)} = \frac{\tau_{kl}^{(i)}}{\mu_0}$ ,  $M_{skl}^{(i)} = \frac{m_{skl}^{(i)}}{\mu_0 h}$ ,  $\alpha = \frac{l}{h}$ .

После нахождения температуры из решения (2.5.1)-(2.5.3) далее находятся перемещения из решения следующей безразмерной задачи [258]:

$$\frac{\partial \Omega_{11}^{(i)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{13}^{(i)}}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{31}^{(i)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{33}^{(i)}}{\partial y_3} = 0, \quad i = 1, 2, \quad y_1 \in (-\infty, \infty), \quad y_3 \in [0, 1], \quad (2.5.4)$$

$$U_1^{(1)}(y_1, 0) = U_3^{(1)}(y_1, 0) = \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_3}(y_1, 0) = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y_3}(y_1, 0) = 0, \quad y_1 \in (-\infty, \infty), \quad (2.5.5)$$

$$\bar{t}_1^{(2)}(y_1, 1) = \bar{t}_3^{(2)}(y_1, 1) = M_{133}^{(2)}(y_1, 1) = M_{333}^{(2)}(y_1, 1) = 0, \quad y_1 \in (-\infty, \infty), \quad (2.5.6)$$

$$U_1^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = U_1^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad U_3^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = U_3^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_3}(y_1, \bar{h}_1) = \frac{\partial U_1^{(2)}}{\partial y_3}(y_1, \bar{h}_1),$$

$$\frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y_3}(y_1, \bar{h}_1) = \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial y_3}(y_1, \bar{h}_1), \quad \bar{t}_3^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = \bar{t}_3^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad \bar{t}_1^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = \bar{t}_1^{(2)}(y_1, \bar{h}_1),$$

$$M_{133}^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = M_{133}^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad M_{333}^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = M_{333}^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad y_1 \in (-\infty, \infty). \quad (2.5.7)$$

## 2.5.2 Решение задачи для слоистой полосы

Метод решения задачи для слоистой полосы основан на применении к задачам (2.5.1)-(2.5.3), (2.5.4)-(2.5.7) интегрального преобразования Фурье по координате  $y_1$

$$\hat{F}(\omega, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1, y_3) e^{i\omega y_1} dy_1, \quad (2.5.8)$$

где  $\omega$  – параметр преобразования Фурье.

Постановка задачи теплопроводности (2.5.1)-(2.5.3) в трансформантах Фурье имеет вид:

$$-\omega^2 \hat{W}_i + \hat{W}_i'' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.9)$$

$$\hat{W}_1(\omega, 0) = 0, \quad -\bar{k}_2 \hat{W}_2'(\omega, 1) = \hat{f}(\omega), \quad (2.5.10)$$

$$\hat{W}_1(\omega, \bar{h}_1) = \hat{W}_2(\omega, \bar{h}_1), \quad \bar{k}_1 \hat{W}_1'(\omega, \bar{h}_1) = \bar{k}_2 \hat{W}_2'(\omega, \bar{h}_1). \quad (2.5.11)$$

Решая (2.5.9)-(2.5.11), найдем выражения для трансформант температуры подложки и покрытия в виде:  $\hat{W}_1(\omega, y_3) = D_1(\omega) (e^{|\omega| y_3} - e^{-|\omega| y_3})$ ,

$\widehat{W}_2(\omega, y_3) = D_2(\omega)e^{\omega y_3} + D_3(\omega)e^{-\omega y_3}$ , где неизвестные  $D_1(\omega)$ ,  $D_2(\omega)$ ,  $D_3(\omega)$  находят из условий (2.5.10), (2.5.11).

Постановка задачи градиентной механики в перемещениях (2.5.4)-(2.5.7) после применения преобразования Фурье примет вид:

$$-\alpha^2 \bar{\mu}_i \widehat{U}_1^{(i)IV} + (\bar{\mu}_i(1 + \alpha^2 \omega^2) + (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_1^{(i)''} - \omega^2 (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)(1 + \alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_1^{(i)} + i\omega (\alpha^2 (\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) \widehat{U}_3^{(i)''} - ((\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) + \alpha^2 \omega^2 (\bar{\lambda}_i - \bar{\mu}_i)) \widehat{U}_3^{(i)'}) = -i\omega \beta \bar{\gamma}_i \widehat{W}_i, \quad i=1,2, \quad (2.5.12)$$

$$i\alpha^2 \omega (\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) \widehat{U}_1^{(i)''} - i\omega ((\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) + \alpha^2 \omega^2 \bar{\lambda}_i) \widehat{U}_1^{(i)'} - \alpha^2 (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) U_3^{IV(i)} + ((\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)(1 + \alpha^2 \omega^2) + \bar{\mu}_i \alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_3^{(i)''} - \bar{\mu}_i \omega^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_3^{(i)} = \beta \bar{\gamma}_i \widehat{W}_i', \quad i=1,2, \quad (2.5.13)$$

$$\widehat{U}_1^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{U}_3^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{U}_1^{(1)'}(\omega, 0) = \widehat{U}_3^{(1)'}(\omega, 0) = 0, \quad (2.5.14)$$

$$\widehat{t}_1^{(2)}(\omega, 1) = \widehat{t}_3^{(2)}(\omega, 1) = \widehat{M}_{133}^{(2)}(\omega, 1) = \widehat{M}_{333}^{(2)}(\omega, 1) = 0, \quad (2.5.15)$$

$$\widehat{U}_1^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_1^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{U}_3^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_3^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{U}_1^{(1)'}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_1^{(2)'}(\omega, \bar{h}_1),$$

$$\widehat{U}_3^{(1)'}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_3^{(2)'}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{t}_1^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{t}_1^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{t}_3^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{t}_3^{(2)}(\omega, \bar{h}_1),$$

$$\widehat{M}_{133}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{M}_{133}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{M}_{333}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{M}_{333}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad (2.5.16)$$

где  $\widehat{M}_{133}^{(i)} = \alpha^2 \bar{\mu}_i (\widehat{U}_1^{(i)''} - i\omega \widehat{U}_3^{(i)'})$ ,  $\widehat{M}_{333}^{(i)} = \alpha^2 ((\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \widehat{U}_3^{(i)''} - i\omega \bar{\lambda}_i \widehat{U}_1^{(i)'} - \beta \bar{\gamma}_i \widehat{W}_i')$ ,

$$\widehat{t}_1^{(i)} = -\alpha^2 \bar{\mu}_i \widehat{U}_1^{(i)''} + \alpha^2 \bar{\mu}_i i\omega \widehat{U}_3^{(i)''} + (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{\mu}_i \widehat{U}_1^{(i)'} - (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{\mu}_i i\omega \widehat{U}_3^{(i)'},$$

$$\widehat{t}_3^{(i)} = -\alpha^2 (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \widehat{U}_3^{(i)''} + \alpha^2 \bar{\lambda}_i i\omega \widehat{U}_1^{(i)''} + (1 + \alpha^2 \omega^2) (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \widehat{U}_3^{(i)'} - (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{\lambda}_i i\omega \widehat{U}_1^{(i)'} - (1 + \alpha^2 \omega^2) \beta \bar{\gamma}_i \widehat{W}_i'.$$

Решение задачи (2.5.12)-(2.5.16) состоит из двух этапов. На первом этапе находят частное решение системы неоднородных уравнений (2.5.12), (2.5.13), для чего вводятся трансформанты термоупругого потенциала  $\widehat{\mathcal{G}}_i$ ,  $i=1,2$ . Трансформанты  $\widehat{\mathcal{G}}_i$ , согласно методу Гудьера [13], находятся из решения дифференциальных уравнений для каждого слоя полосы

$$\alpha^2 \widehat{\mathcal{G}}_i^{IV} - (1 + 2\alpha^2 \omega^2) \widehat{\mathcal{G}}_i'' + \omega^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) \widehat{\mathcal{G}}_i = \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i} ((1 + \alpha^2 \omega^2) \widehat{W}_i - \alpha^2 \widehat{W}_i'), \quad i=1,2, \quad (2.5.17)$$

например, методом вариации произвольных постоянных.

Трансформанты перемещений находятся по формулам:  $\widehat{U}_1^{(i)} = -i\omega \widehat{\mathcal{G}}_i$ ,  $\widehat{U}_3^{(i)} = \widehat{\mathcal{G}}_i'$ ,  $i=1,2$ .

На втором этапе, на решения  $\bar{U}_1^{(i)}$ ,  $\bar{U}_3^{(i)}$ ,  $i=1,2$ , найденные на первом этапе, накладываются решения соответствующей краевой задачи изотермической теории упругости:

$$-\alpha^2 \bar{\mu} \bar{U}_1^{IV(i)} + (\bar{\mu}(1 + \alpha^2 \omega^2) + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha^2 \omega^2) \bar{U}_1^{''(i)} - \omega^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{U}_1^{(i)} - \omega(\bar{\lambda} + \bar{\mu})(1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{U}_3^{'(i)} - \alpha^2 \bar{U}_3^{''(i)} = 0, \quad (2.5.18)$$

$$-\omega(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left( (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{U}_1^{'(i)} - \alpha^2 \bar{U}_1^{''(i)} \right) + \alpha^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \bar{U}_3^{IV(i)} - \left( (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \omega^2) + \bar{\mu} \alpha^2 \omega^2 \right) \bar{U}_3^{''(i)} + \bar{\mu} \omega^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{U}_3^{(i)} = 0. \quad (2.5.19)$$

Приведем систему (2.5.18), (2.5.19) к виду, аналогичному [126] по формулам:

$$R_{11} \bar{U}_1 + R_{12} \bar{U}_3 = 0, \quad R_{21} \bar{U}_1 + R_{22} \bar{U}_3 = 0. \quad (2.5.20)$$

$$\text{Здесь } R_{11} = -\alpha^2 \bar{\mu} \frac{d^4}{dy_3^4} + (\bar{\mu}(1 + \alpha^2 \omega^2) + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha^2 \omega^2) \frac{d^2}{dy_3^2} - \omega^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \omega^2),$$

$$R_{12} = R_{21} = -\omega(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{d}{dy_3} \left( (1 + \alpha^2 \omega^2) - \alpha^2 \frac{d^2}{dy_3^2} \right),$$

$$R_{22} = \alpha^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{d^4}{dy_3^4} - \left( (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \omega^2) + \bar{\mu} \alpha^2 \omega^2 \right) \frac{d^2}{dy_3^2} + \bar{\mu} \omega^2 (1 + \alpha^2 \omega^2).$$

Для решения системы (2.5.20) согласно [126] введем упругий потенциал перемещений  $\hat{\varphi}_i$ , такой, что  $\bar{U}_1^{(i)} = R_{12} \hat{\varphi}_i$ ,  $\bar{U}_3^{(i)} = -R_{11} \hat{\varphi}_i$ ,  $i=1,2$ . В этом случае приходим к дифференциальному уравнению 8-го порядка относительно введенного потенциала, характеристическое уравнение которого содержит двукратные корни: 1)  $\pm |\omega|$ , соответствующие задачи в классической постановке; 2)  $\pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2}$ , отвечающие за градиентные эффекты.

Потенциалы для каждого слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 = & C_1 e^{|\omega| y_3} + C_2 y_3 e^{|\omega| y_3} + C_3 e^{-|\omega| y_3} + C_4 y_3 e^{-|\omega| y_3} + \\ & + C_5 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3} + C_6 y_3 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3} + C_7 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3} + C_8 y_3 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3}, \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_2 = & C_9 e^{|\omega|y_3} + C_{10} y_3 e^{|\omega|y_3} + C_{11} e^{-|\omega|y_3} + C_{12} y_3 e^{-|\omega|y_3} + \\ & + C_{13} e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3} + C_{14} y_3 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3} + C_{15} e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3} + C_{16} y_3 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2} y_3}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Константы интегрирования определяются путем удовлетворения граничных условий (2.5.14), (2.4.15) и условий сопряжения (2.5.16) при  $\widehat{U}_1 = \bar{U}_1 + \bar{\bar{U}}_1$ ,  $\widehat{U}_3 = \bar{U}_3 + \bar{\bar{U}}_3$ .

Обращение трансформант Фурье осуществляется по следующей формуле:

$$F(y_1, y_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\omega, y_3) e^{-i\omega y_1} d\omega. \quad (2.5.23)$$

Т.к. трансформанты температуры и перемещений быстро убывают при  $|\omega| \rightarrow \infty$ , то интеграл (2.5.23) можно вычислить в конечных пределах  $[-R, R]$ :

$$F(y_1, y_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \widehat{F}(\omega, y_3) e^{-i\omega y_1} d\omega + \delta_R. \quad (2.5.24)$$

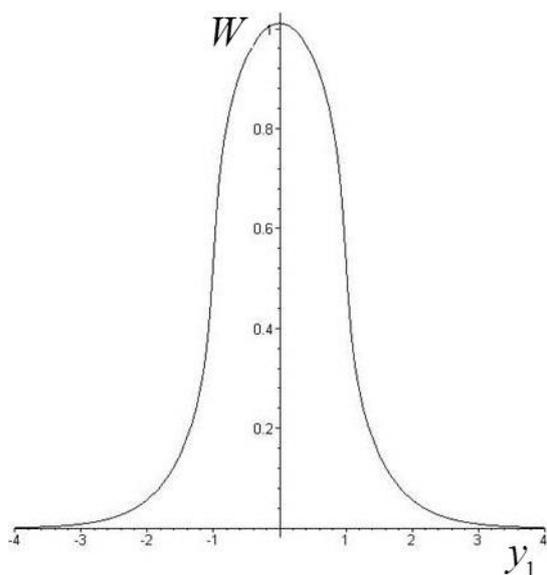
Для вычисления интеграла в выражении (2.4.24) отрезок интегрирования  $[-R, R]$  разбивается на  $n_3$  подотрезков  $[c_0, d_0]$ , к каждому из которых применяется формула Филона согласно [195].

### 2.5.3 Результаты вычислений.

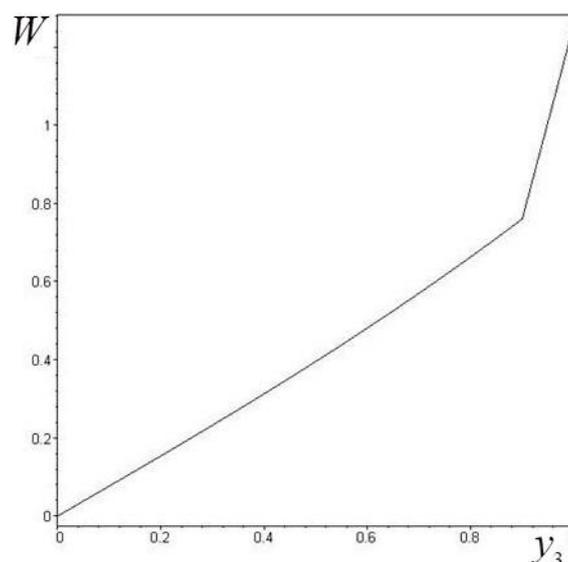
Рассмотрим результаты вычисления температуры, перемещений, полных напряжений и моментных напряжений слоистой термоупругой полосы. В вычислениях принято:  $\bar{h}_1 = 0.9$ ,  $\bar{k}_1 = 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0.2$ ,  $\bar{\lambda}_1 = 1$ ,  $\bar{\mu}_1 = 0.8$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0.25$ ,  $\bar{\mu}_2 = 0.2$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ ,  $f(y_1) = 1$ ,  $[\bar{a}_0, \bar{b}_0] = [-1, 1]$ ,  $[-R, R] = [-40, 40]$ ,  $n_3 = 120$ .

На рис. 2.15 представлено распределение температуры  $W$  по координатам: а)  $y_1$  при  $y_3 = 0.95$ ; б)  $y_3$  при  $y_1 = 0.1$ .

Из рис. 2.15 следует, что температура максимальна в области теплового нагружения, а затем быстро убывает по мере удаления от источника, что соответствует физическому смыслу задачи.



а)

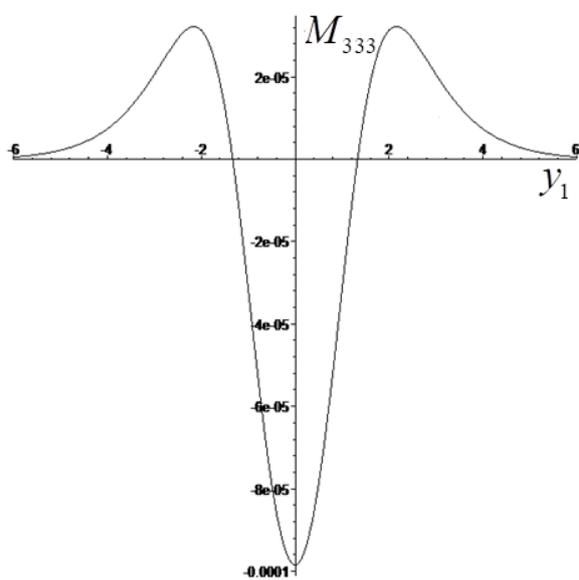


б)

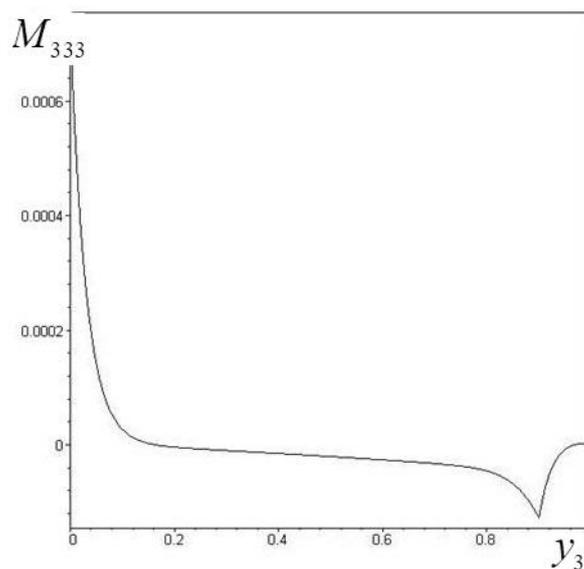
Рисунок 2.15 – График распределения температуры  $W$  по координатам:

а)  $y_1$ ; б)  $y_3$ .

На рис. 2.16 изображено распределение компоненты моментного напряжения  $M_{333}$  по координатам: а)  $y_1$  при  $y_3 = 0.95$ ; б)  $y_3$  при  $y_1 = 0.1$ .



а)



б)

Рисунок 2.16 – График распределения  $M_{333}$  по координатам: а)  $y_1$ ; б)  $y_3$ .

Из рис. 2.16 следует, что компонента тензора моментных напряжений  $M_{333}$  непрерывна и достигает пика на линии сопряжения материалов.

На рис. 2.17, 2.18 представлены распределения горизонтального перемещения  $U_1$  (рис. 2.17) и вертикального перемещения  $U_3$  (рис. 2.18) по координатам: а)  $y_1$  при  $y_3 = 0.95$ ; б)  $y_3$  при  $y_1 = 0.1$ . При этом сплошной линией изображено решение при  $\alpha = 0$ , точками – при  $\alpha = 0.03$ .

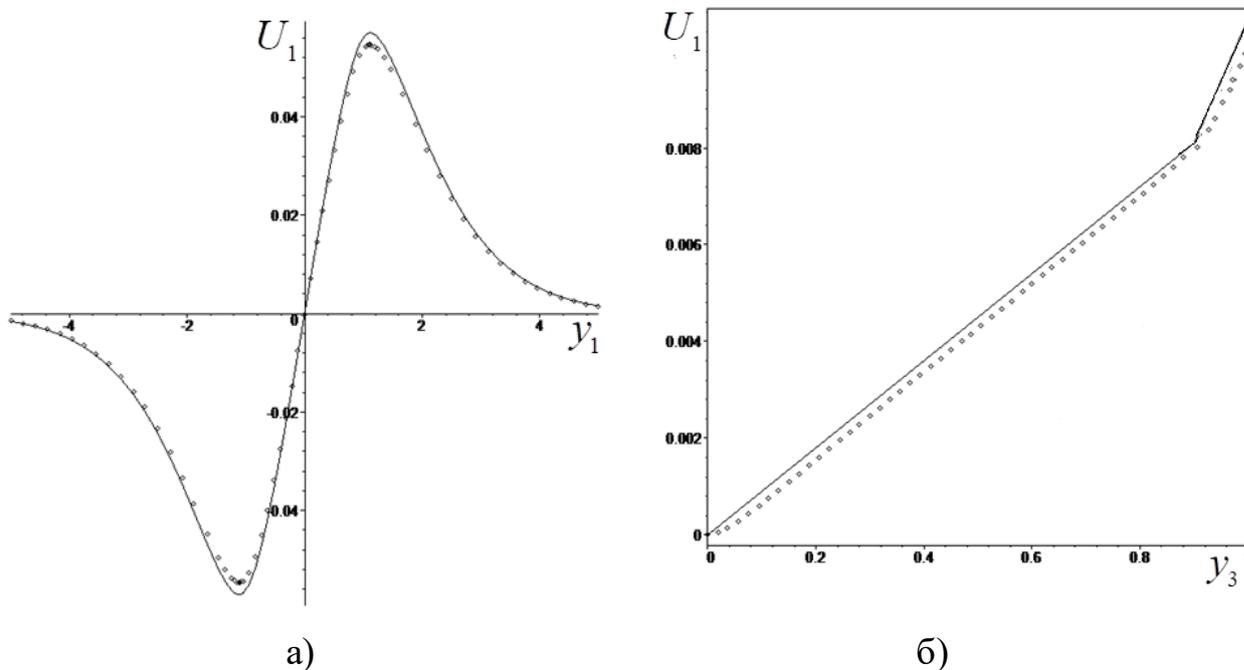


Рисунок 2.17 – График распределения перемещения  $U_1$  по координатам:

а)  $y_1$ ; б)  $y_3$ .

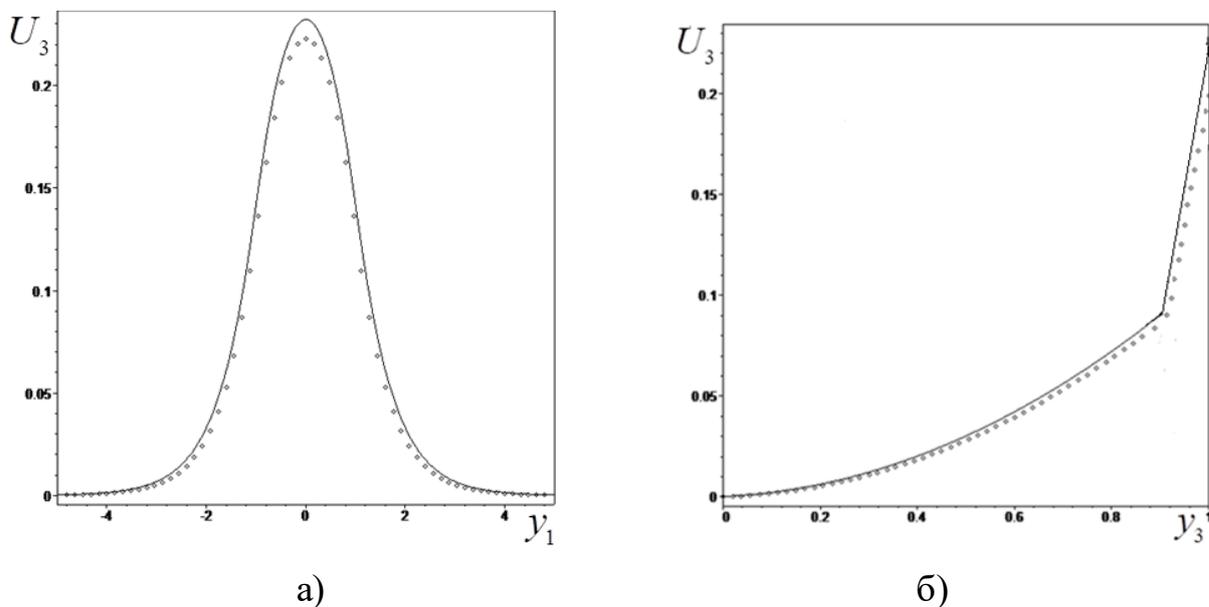


Рисунок 2.18 – График распределения  $U_3$  по координатам: а)  $y_1$ ; б)  $y_3$ .

Из рис. 2.17, 2.18 следует, что значения  $U_1$ ,  $U_3$  с увеличением масштабного параметра уменьшаются, а также осуществляется более плавный переход на  $y_3 = \bar{h}_1$  по сравнению с классическим решением.

На рис. 2.19 изображено распределение по координате  $y_3$  при  $y_1 = 0.1$  полных нормальных напряжений: а)  $\Omega_{33}$ ; б)  $\Omega_{11}$ .

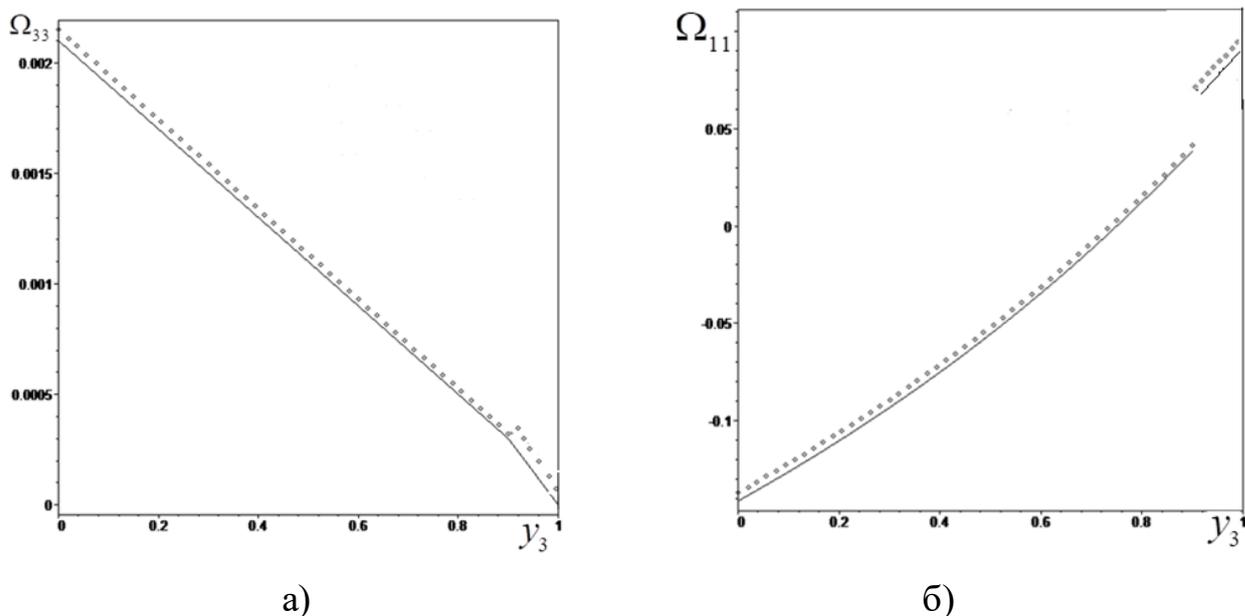


Рисунок 2.19 – График распределения по  $y_3$  напряжений: а)  $\Omega_{33}$ ; б)  $\Omega_{11}$ .

Из рис. 2.19 следует, что увеличение масштабного параметра приводит к увеличению полных напряжений.

## Часть 2.

### Решение статических задач градиентной теории электроупругости для составных и слоистых тел

По сравнению с классической теорией градиентные модели электроупругости дают возможность уточненной оценки электромеханических полей для тел, характерные размеры которых соизмеримы с масштабными параметрами материала, характеризующими его микроструктурное строение.

Во второй части главы 2 рассмотрены основные положения градиентной теории электроупругости. В качестве примеров рассмотрены

задачи деформирования составного продольно поляризованного пьезоупругого стержня и сплошного двухслойного радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра. Получены аналитические решения поставленных задач, проведен сравнительный анализ с решениями в классической постановке.

## 2.6 Основные положения градиентной теории электроупругости.

Рассмотрим электроупругое тело, занимающее объем  $V$  с поверхностью  $S = S_u \cup S_t = S_\phi \cup S_q$ , где на границе  $S_u$  заданы перемещения, на  $S_t$  – компоненты вектора силы, на  $S_\phi$  – электрический потенциал, на  $S_q$  – поверхностный заряд. В градиентной теории линейной электроупругости плотность полной электрической энтальпии зависит не только от деформации и напряженности электрического поля, но и от их градиентов [85, 246]:

$$G(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, E_i, E_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} - \frac{1}{2} \beta_{ijkl} E_{i,j} E_{k,l}. \quad (2.6.1)$$

Здесь  $E_i = -\varphi_{,i}$  – компоненты вектора напряженности электрического поля,  $c_{ijkl}$  и  $A_{ijklmn}$  – компоненты тензоров модулей упругости 4-го и 6-го порядка,  $e_{kij}$  – компоненты тензора пьезомодулей 3-го порядка,  $\varepsilon_{ij}$  и  $\beta_{ijkl}$  – компоненты тензоров коэффициентов диэлектрической проницаемости 2-го и 4-го порядка соответственно.

Математическая постановка задачи, полученная путем применения вариационного принципа градиентной электроупругости, состоит из уравнений равновесия, электростатики, механических и электростатических граничных условий и имеет вид [246]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2.6.2)$$

$$P_{i,i} = 0, \quad (2.6.3)$$

$$m_{ijk,k} n_j n_k = r_i, \quad \tau_{ij} n_j - m_{ijk,k} n_j - (m_{ijk,k} n_k)_{,j} + (m_{ijk,k} n_k)_{,s} n_s = t_i, \quad (2.6.4)$$

$$u_i = v_i, \quad u_{i,l} n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n}, \quad (2.6.5)$$

$$q_{ij} n_i n_j = 0, \quad (D_j - q_{jk,k}) n_j - (q_{jk} n_k)_{,j} + (q_{jk,k} n_k n_l)_{,l} n_j = g, \quad (2.6.6)$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad E_i n_i = 0. \quad (2.6.7)$$

Здесь  $\tau_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k$  – компоненты тензора напряжений Коши,

$m_{ijk} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$  – компоненты тензора моментных напряжений,

$D_i = -\frac{\partial G}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \vartheta_{ij} E_j$  – компоненты вектора электрической индукции,

$q_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial E_{i,j}} = \beta_{ijkl} E_{k,l}$  – компоненты тензора квадрупольного момента,  $P_i = D_i - q_{ij,j}$

– компоненты вектора полной электрической индукции,  $t_i, r_i$  – векторы заданных сил на поверхности тела,  $g$  – плотность поверхностного заряда,  $n_i$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

## 2.7 Градиентная модель деформирования составного электроупругого стержня.

### 2.7.1 Постановка задачи для составного электроупругого стержня

В качестве первого примера рассмотрим градиентную модель равновесия составного продольно поляризованного пьезоупругого стержня длины  $L$  с местом стыка в точке  $x_3 = L_0$ . Один торец стержня  $x_3 = 0$  жестко защемлен, закорочен, а на другом торце действует нагрузка, одного из следующих видов: 1) механическая нагрузка  $\sigma_{33}(L) = p_0, \quad \varphi(L) = 0$ ; 2) электростатическая нагрузка  $\sigma_{33}(L) = 0, \quad \varphi(L) = \varphi_0$ .

Используя обозначения Фойгта для ненулевых компонент тензоров  $c_{3333} = c_{33}, \quad e_{333} = e_{33}, \quad \vartheta_{33} = \vartheta_3$ , и, принимая следующие упрощения  $A_{333333} = l_m^2 c_{33}$ ,

$\beta_{33333} = l_9^2 \vartheta_3$  [246], получим выражение для плотности полной энтальпии стержня:

$$G = \frac{1}{2} c_{33} u_{,3}^2 + e_{33} u_{,3} \varphi_{,3} - \frac{1}{2} \vartheta_3 \varphi_{,3}^2 + \frac{1}{2} l_m^2 c_{33} u_{,33}^2 - \frac{1}{2} l_9^2 \vartheta_3 \varphi_{,33}^2, \quad (2.7.1)$$

где  $l_m$  – механический градиентный параметр,  $l_9$  – электростатический градиентный параметр. В этом случае ненулевые компоненты механических и электростатических полей имеют вид:  $\tau_{33} = c_{33} u_{,3,3} + e_{33} \varphi_{,3}$ ,  $m_{333} = l_m^2 c_{33} u_{,3,33}$ ,

$$\sigma_{33} = \tau_{33} - m_{333,3}, \quad D_3 = e_{33} u_{,3,3} - \vartheta_3 \varphi_{,3}, \quad q_{33} = -l_9^2 \vartheta_3 \varphi_{,33}, \quad P_3 = D_3 - q_{33}.$$

Постановка задачи градиентной электроупругости для составного стержня имеет вид:

$$\sigma_{3,3}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7.2)$$

$$P_{3,3}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7.3)$$

$$u_3^{(1)}(0) = 0, \quad u_{3,3}^{(1)}(0) = 0, \quad \varphi^{(1)}(0) = 0, \quad \varphi_{,3}^{(1)}(0) = 0, \quad (2.7.4)$$

$$m_{333}^{(2)}(L) = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)}(L) = p_0, \quad \varphi^{(2)}(L) = \varphi_0, \quad q_{33}^{(2)}(L) = 0, \quad (2.7.5)$$

$$u_3^{(1)}(L_0) = u_3^{(2)}(L_0), \quad u_{3,3}^{(1)}(L_0) = u_{3,3}^{(2)}(L_0), \quad m_{333}^{(1)}(L_0) = m_{333}^{(2)}(L_0),$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(L_0) = \sigma_{33}^{(2)}(L_0), \quad \varphi^{(1)}(L_0) = \varphi^{(2)}(L_0), \quad \varphi_{,3}^{(1)}(L_0) = \varphi_{,3}^{(2)}(L_0),$$

$$q_{33}^{(1)}(L_0) = q_{33}^{(2)}(L_0), \quad P_3^{(1)}(L_0) = P_3^{(2)}(L_0). \quad (2.7.6)$$

Обезразмерим задачу (2.7.2)-(2.7.6) по формулам  $\alpha_1 = \frac{l_m}{L}$ ,  $\alpha_2 = \frac{l_9}{L}$ ,

$$U_3^{(i)} = \frac{u_3^{(i)}}{L}, \quad M^{(i)} = \frac{m_{333}^{(i)}}{c_{33}^0 L}, \quad S_{33}^{(i)} = \frac{\tau_{33}^{(i)}}{c_{33}^0}, \quad \Omega_{33}^{(i)} = \frac{\sigma_{33}^{(i)}}{c_{33}^0}, \quad \bar{P}_3^{(i)} = \frac{P_3^{(i)}}{\sqrt{\vartheta_3^0 c_{33}^0}}, \quad Q_{33}^{(i)} = \frac{q_{33}^{(i)}}{\sqrt{\vartheta_3^0 c_{33}^0} L}, \quad i = 1, 2.$$

Обезразмеренная постановка задачи (2.7.2)-(2.7.6) в развернутом виде имеет вид:

$$\bar{c}_{33}^{(i)} U_{3,33}^{(i)} + \delta_1 \bar{e}_{33}^{(i)} \Phi_{,33}^{(i)} - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(i)} U_{3,3333}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7.7)$$

$$\delta_1 \bar{e}_{33}^{(i)} U_{3,33}^{(i)} - \bar{\vartheta}_3^{(i)} \Phi_{,33}^{(i)} + \alpha_2^2 \bar{\vartheta}_3^{(i)} \Phi_{,3333}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7.8)$$

$$U_3^{(1)}(0) = 0, \quad U_{3,3}^{(1)}(0) = 0, \quad \Phi^{(1)}(0) = 0, \quad \Phi_{,3}^{(1)}(0) = 0, \quad (2.7.9)$$

$$U_{3,33}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,3}^{(2)}(1) + \delta_1 \bar{e}_{33}^{(2)} \Phi_{,3}^{(2)}(1) - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,3333}^{(2)}(1) = P_0,$$

$$\Phi^{(2)}(1) = V_0, \quad \Phi_{,33}^{(2)}(1) = 0, \quad (2.7.10)$$

$$\begin{aligned} U_3^{(1)}(z_0) &= U_3^{(2)}(z_0), \quad U_{3,3}^{(1)}(z_0) = U_{3,3}^{(2)}(z_0), \quad \bar{c}_{33}^{(1)} U_{3,33}^{(1)}(z_0) = \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,33}^{(2)}(z_0), \\ \bar{c}_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)}(z_0) + \delta_1 \bar{e}_{33}^{(1)} \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(1)} U_{3,333}^{(1)}(z_0) &= \\ = \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,3}^{(2)}(z_0) + \delta_1 \bar{e}_{33}^{(2)} \Phi_{,3}^{(2)}(z_0) - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,333}^{(2)}(z_0), \\ \Phi^{(1)}(z_0) &= \Phi^{(2)}(z_0), \quad \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) = \Phi_{,3}^{(2)}(z_0), \quad \bar{\varepsilon}_3^{(1)} \Phi_{,33}^{(1)}(z_0) = \bar{\varepsilon}_3^{(2)} \Phi_{,33}^{(2)}(z_0), \\ \delta_1 \bar{e}_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)}(z_0) - \bar{\varepsilon}_3^{(1)} \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) + \alpha_2^2 \bar{\varepsilon}_3^{(1)} \Phi_{,333}^{(1)}(z_0) &= \\ \delta_1 \bar{e}_{33}^{(2)} U_{3,3}^{(2)}(z_0) - \bar{\varepsilon}_3^{(2)} \Phi_{,3}^{(2)}(z_0) + \alpha_2^2 \bar{\varepsilon}_3^{(2)} \Phi_{,333}^{(2)}(z_0). \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

## 2.7.2 Решение упрощенных задач

Рассмотрим несколько упрощенных постановок задачи (2.7.7)- (2.7.11), когда учитывается только один из градиентных эффектов и один из типов торцевой нагрузки.

В первом случае рассматривается механическое нагружение  $\Omega_{33}^{(2)}(1) = P_0$ ,  $\Phi^{(2)}(1) = 0$  и учитывается влияние градиента деформации, но не учитывается влияние градиента электрического поля. Тогда, полагая  $\alpha_2 = 0$ , после исключения потенциала из уравнений электростатики (2.7.8), получим следующую задачу ГТУ с ужесточенным модулем упругости  $\bar{c}_{33}^* = \bar{c}_{33} + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\varepsilon}_3}$ :

$$\bar{c}_{33}^{*(i)} U_{3,33}^{(i)} - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(i)} U_{3,3333}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7.12)$$

$$U_3^{(1)}(0) = 0, \quad U_{3,3}^{(1)}(0) = 0, \quad (2.7.13)$$

$$U_{3,33}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{c}_{33}^{*(2)} U_{3,3}^{(2)}(1) - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,3333}^{(2)}(1) = P_0, \quad (2.7.14)$$

$$\begin{aligned} U_3^{(1)}(z_0) &= U_3^{(2)}(z_0), \quad U_{3,3}^{(1)}(z_0) = U_{3,3}^{(2)}(z_0), \quad \bar{c}_{33}^{(1)} U_{3,33}^{(1)}(z_0) = \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,33}^{(2)}(z_0), \\ \bar{c}_{33}^{*(1)} U_{3,3}^{(1)}(z_0) - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(1)} U_{3,3333}^{(1)}(z_0) &= \bar{c}_{33}^{*(2)} U_{3,3}^{(2)}(z_0) - \alpha_1^2 \bar{c}_{33}^{(2)} U_{3,3333}^{(2)}(z_0). \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Решение задачи (2.7.12)-(2.7.15) имеет вид:

$$U_3^{(1)} = A_1 + A_2 z + A_3 e^{\frac{\chi_1 z}{\alpha_1}} + A_4 e^{-\frac{\chi_1 z}{\alpha_1}}, \quad U_3^{(2)} = A_5 + A_6 z + A_7 e^{\frac{\chi_2 z}{\alpha_1}} + A_8 e^{-\frac{\chi_2 z}{\alpha_1}}, \quad (2.7.16)$$

$$\text{где } \chi_1 = \sqrt{1 + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^{(1)}}{\bar{\varepsilon}_3^{(1)} \bar{c}_{33}^{(1)}}}, \quad \chi_2 = \sqrt{1 + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^{(2)}}{\bar{\varepsilon}_3^{(2)} \bar{c}_{33}^{(2)}}}.$$

В выражениях (2.7.16) константы интегрирования  $A_1, \dots, A_8$  определяются путем удовлетворения условий (2.7.13)-(2.7.15).

Во втором случае рассматривается электростатическое нагружение  $\Phi^{(2)}(1) = V_0$ ,  $\Omega_{33}^{(2)}(1) = 0$  и учитывается влияние градиента электрического поля, но не учитывается влияние градиента деформации. Тогда, полагая  $\alpha_1 = 0$ , после исключения смещения из уравнений равновесия (2.7.7), получим следующую задачу градиентной электростатики с модифицированным коэффициентом диэлектрической проницаемости  $\bar{\epsilon}_3^* = \bar{\epsilon}_3 + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^{-2}}{\bar{c}_{33}}$ :

$$-\bar{\epsilon}_3^{*(i)} \Phi_{,33}^{(i)} + \alpha_2^2 \bar{\epsilon}_3^{(i)} \Phi_{,3333}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7.17)$$

$$\Phi^{(1)}(0) = 0, \quad \Phi_{,3}^{(1)}(0) = 0, \quad (2.7.18)$$

$$\Phi^{(2)}(1) = V_0, \quad \Phi_{,33}^{(2)}(1) = 0, \quad (2.7.19)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(z_0) = \Phi^{(2)}(z_0), \quad \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) = \Phi_{,3}^{(2)}(z_0), \quad \bar{\epsilon}_3^{(1)} \Phi_{,33}^{(1)}(z_0) = \bar{\epsilon}_3^{(2)} \Phi_{,33}^{(2)}(z_0), \\ -\bar{\epsilon}_3^{*(1)} \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) + \alpha_2^2 \bar{\epsilon}_3^{(1)} \Phi_{,3333}^{(1)}(z_0) = -\bar{\epsilon}_3^{*(2)} \Phi_{,3}^{(2)}(z_0) + \alpha_2^2 \bar{\epsilon}_3^{(2)} \Phi_{,3333}^{(2)}(z_0). \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

Решение задачи (2.7.17)-(2.7.20) имеет вид:

$$\Phi^{(1)} = A_9 + A_{10}z + A_{11}e^{\frac{\chi_1 z}{\alpha_2}} + A_{12}e^{-\frac{\chi_1 z}{\alpha_2}}, \quad \Phi^{(2)} = A_{13} + A_{14}z + A_{15}e^{\frac{\chi_2 z}{\alpha_2}} + A_{16}e^{-\frac{\chi_2 z}{\alpha_2}}. \quad (2.7.21)$$

В выражении (2.7.21) константы интегрирования  $A_9, \dots, A_{16}$  определяются путем удовлетворения условий (2.7.18)-(2.7.20).

### 2.7.3 Численные результаты

Рассмотрим результаты вычисления НДС составного электроупругого стержня в рамках градиентной модели. В расчетах принято:  $\delta_1 = 0.6$ ,  $z_0 = 0.8$ ,  $\bar{e}_{33}^{(1)} = \bar{e}_{33}^{(2)} = 1$ .

На рис. 2.20а показано распределение вдоль стержня смещения  $U_3$  в случае механического нагружения при  $\bar{c}_{33}^{(1)} = 0.5$ ,  $\bar{c}_{33}^{(2)} = 1$ ,  $\bar{\epsilon}_3^{(1)} = \bar{\epsilon}_3^{(2)} = 1$ ,  $P_0 = 1$ .

На рис. 2.20б изображено распределение электрического потенциала  $\Phi$  в случае электростатического нагружения при  $\bar{c}_{33}^{(1)} = \bar{c}_{33}^{(2)} = 1$ ,  $\bar{\epsilon}_3^{(1)} = 1$ ,  $\bar{\epsilon}_3^{(2)} = 0.5$ ,

$V_0 = 1$ . При этом сплошной линией изображены решения задач в классической постановке, пунктиром – в градиентной постановке, полагая  $\alpha_1 = 0.1$  в задаче (2.7.12)-(2.7.15) и  $\alpha_2 = 0.1$  в задаче (2.7.17)-(2.7.20).

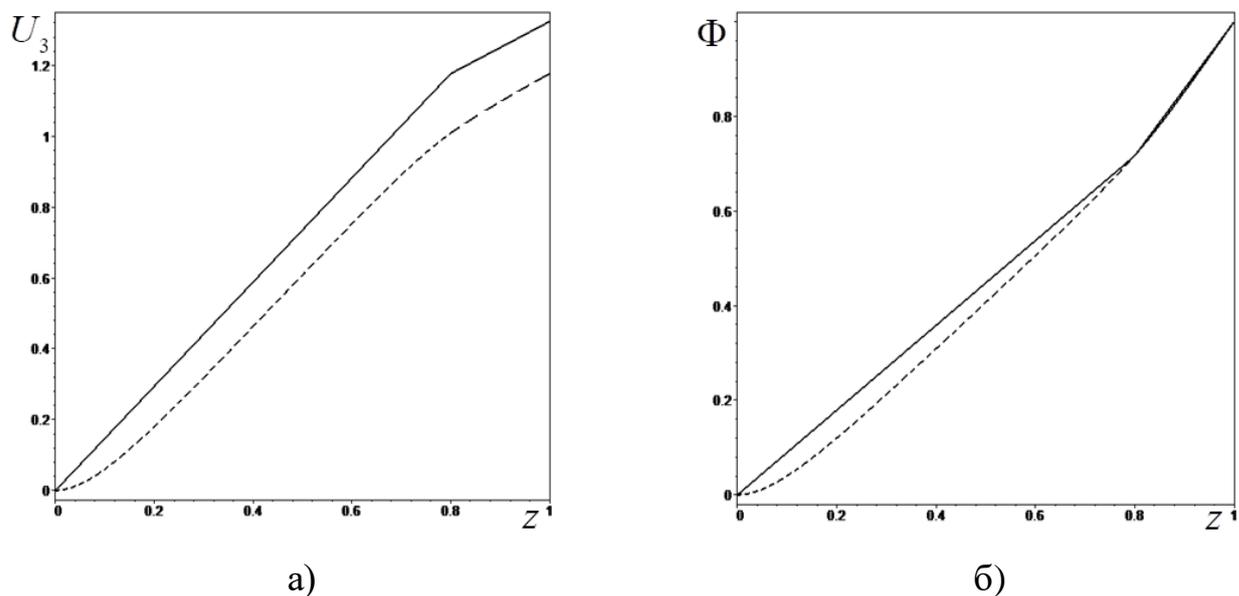
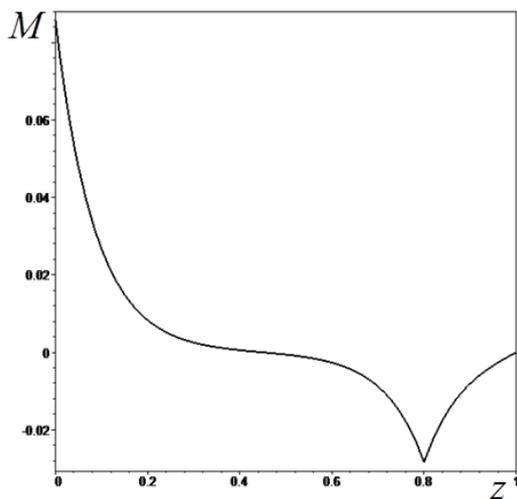


Рисунок 2.20 – Распределение по координате  $z$ : а)  $U_3$ ; б)  $\Phi$ .

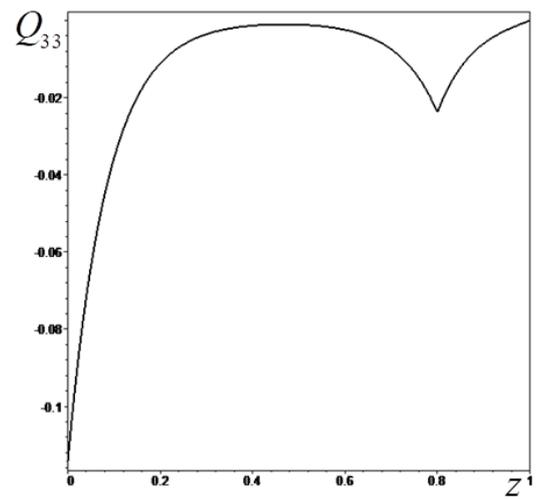
Из рис. 2.20 следует, что: 1) с увеличением механического масштабного параметра значения смещений уменьшаются; 2) с увеличением электростатического масштабного параметра значения электрического потенциала уменьшаются; 3) по сравнению с классической теорией в окрестности стыка стержней наблюдается более плавное изменение смещения и потенциала.

На рис. 2.21а изображено распределение по координате  $z$  моментного напряжения  $M$  в случае механического нагружения, а на рис. 2.21б – квадрупольного момента  $Q_{33}$  в случае электростатического нагружения.

На рис. 2.22а представлено распределение по координате  $z$  напряжения Коши  $S_{33}$ , а на рис. 2.22б – электрической индукции  $\bar{D}_3$ .

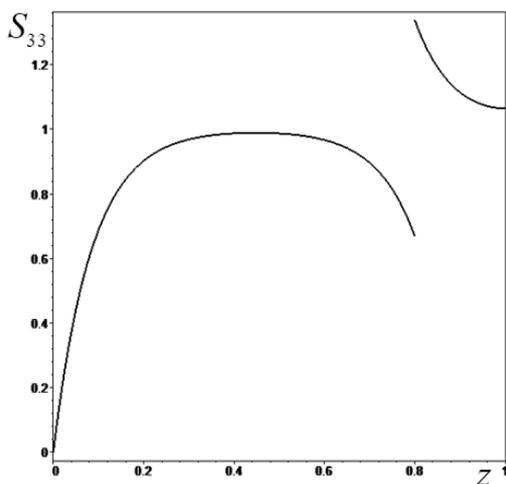


а)

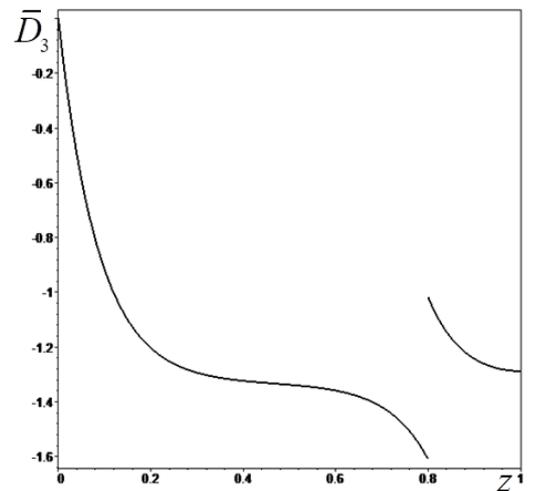


б)

Рисунок 2.21 – Распределение по координате  $z$ : а)  $M$ ; б)  $Q_{33}$ .



а)



б)

Рисунок 2.22 – Распределение по координате  $z$ : а)  $S_{33}$ ; б)  $\bar{D}_3$ .

Из рис. 2.21 следует, что моментные напряжения  $M$  и квадрупольный момент  $Q_{33}$  непрерывны в точке  $z = z_0$ .

Из рис. 2.22 следует, что компонента тензора напряжений Коши и вектора электрической индукции: 1) вблизи торца  $z = 0$  экспоненциально стремятся к нулю; 2) в точке  $z = z_0$  испытывают скачок. Скачок компоненты вектора электрической индукции обусловлен разностью коэффициентов диэлектрической проницаемости и непрерывностью электрического потенциала и его первой производной.

## 2.8 Градиентная модель деформирования сплошного двухслойного пьезокерамического цилиндра.

### 2.8.1 Постановка задачи для сплошного электроупругого цилиндра

В качестве второго примера исследуем задачу о деформировании сплошного двухслойного неэлектродированного радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра радиуса  $R$ , имеющего поверхность сопряжения  $r = r_0$ . К внешней боковой поверхности  $r = R$  цилиндра приложена нормальная механическая нагрузка  $p_0$ .

Рассмотрим упрощенную постановку задачи градиентной электроупругости для двухслойного цилиндра, учитывая влияние градиента деформации, но, не учитывая влияние градиента электрического поля:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.8.1)$$

$$\frac{dD_r^{(i)}}{dr} + \frac{D_r^{(i)}}{r} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.8.2)$$

$$m_{rrr}^{(2)}(R) = 0, \quad t_r^{(2)}(R) = p_0, \quad D_r^{(2)}(R) = 0, \quad (2.8.3)$$

$$u_r^{(1)}(R_0) = u_r^{(2)}(R_0), \quad \frac{du_r^{(1)}}{dr}(R_0) = \frac{du_r^{(2)}}{dr}(R_0), \quad t_r^{(1)}(R_0) = t_r^{(2)}(R_0), \quad m_{rrr}^{(1)}(R_0) = m_{rrr}^{(2)}(R_0). \quad (2.8.4)$$

$$\text{Здесь} \quad \sigma_{rr} = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rm_{rrr}) + \frac{1}{r}(m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rm_{\varphi\varphi r}) - \frac{1}{r}(m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}),$$

$$t_r = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rm_{rrr}) + \frac{1}{r}(m_{\varphi r\varphi} + m_{\varphi\varphi r} + m_{r\varphi\varphi}), \quad \tau_{rr} = c_{33} \frac{du_r}{dr} + c_{13} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{d\varphi}{dr},$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = c_{13} \frac{du_r}{dr} + c_{11} \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{d\varphi}{dr}, \quad m_{rrr} = l_m^2 \frac{d}{dr} \left( c_{33} \frac{du_r}{dr} + c_{13} \frac{u_r}{r} \right), \quad m_{\varphi\varphi r} = l_m^2 \frac{d}{dr} \left( c_{13} \frac{du_r}{dr} + c_{11} \frac{u_r}{r} \right),$$

$$m_{r\varphi\varphi} = m_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{2} l_m^2 \left( (c_{33} - c_{13}) \frac{du_r}{dr} + (c_{13} - c_{11}) \frac{u_r}{r} \right), \quad D_r = -\varepsilon_3 \frac{d\varphi}{dr} + e_{31} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{du_r}{dr}.$$

### 2.8.2 Решение задачи

После обезразмеривания, выполненного по формулам п. 2.4.1, и исключения потенциала из уравнения электростатики [12], задача (2.8.1)-(2.8.4) сводится к задаче ГТУ для анизотропного цилиндра с

модифицированными модулями упругости:  $\bar{c}_{11}^* = \bar{c}_{11} + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\vartheta}_3}$ ,  $\bar{c}_{13}^* = \bar{c}_{13} + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{31}\bar{e}_{33}}{\bar{\vartheta}_3}$ ,

$\bar{c}_{33}^* = \bar{c}_{33} + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\vartheta}_3}$ . При этом выражения для безразмерных компонент тензора

напряжений Коши примут вид:  $S_{rr} = \bar{c}_{33}^* \frac{dU_r}{d\xi} + \bar{c}_{13}^* \frac{U_r}{\xi}$ ,  $S_{\varphi\varphi} = \bar{c}_{13}^* \frac{dU_r}{d\xi} + \bar{c}_{11}^* \frac{U_r}{\xi}$ .

Постановка задачи ГТУ для сплошного слоистого цилиндра имеет вид:

$$\frac{d\Omega_{rr}^{(i)}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr}^{(i)} - \Omega_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\xi} = 0, \quad i=1,2, \quad (2.8.5)$$

$$M_{rr}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{t}_r^{(2)}(1) = P_0, \quad (2.8.6)$$

$$U_r^{(1)}(R_0) = U_r^{(2)}(R_0), \quad \frac{dU_r^{(1)}}{d\xi}(R_0) = \frac{dU_r^{(2)}}{d\xi}(R_0),$$

$$\bar{t}_r^{(1)}(R_0) = \bar{t}_r^{(2)}(R_0), \quad M_{rr}^{(1)}(R_0) = M_{rr}^{(2)}(R_0). \quad (2.8.7)$$

Решение задачи (2.8.5)-(2.8.7) для анизотропного сплошного слоистого цилиндра содержит модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка. С учетом ограниченности при  $\xi=0$  решение задачи (2.8.5)-(2.8.7) имеет вид:

$$U_r^{(1)} = C_1 \xi^{z_1} + C_2 I_1 \left( \frac{z_1 \xi}{\alpha_1} \right), \quad \xi \in [0, R_0],$$

$$U_r^{(2)} = C_3 \xi^{z_2} + C_4 \xi^{-z_2} + C_5 I_1 \left( \frac{z_2 \xi}{\alpha_1} \right) + C_6 K_1 \left( \frac{z_2 \xi}{\alpha_1} \right), \quad \xi \in [R_0, 1], \quad (2.8.8)$$

$$\text{где } z_1 = \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}^{*(1)}}{\bar{c}_{33}^{*(1)}}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}^{*(2)}}{\bar{c}_{33}^{*(2)}}}.$$

В выражениях (2.8.8) константы интегрирования  $C_1, \dots, C_6$  определяются путем удовлетворения граничных условий (2.8.6) и условий сопряжения (2.8.7), выраженных через радиальные смещения.

### 2.8.3 Численные результаты

Рассмотрим результаты вычисления распределения смещений и напряжений по координате  $\xi$ . В вычислениях принято:  $P_0 = -1$ ,  $R_0 = 0.7$ ,  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\delta_1 = 0.6$ ,  $\bar{c}_{11}^{(1)} = 1$ ,  $\bar{c}_{13}^{(1)} = 0.5$ ,  $\bar{c}_{33}^{(1)} = 0.8$ ,  $\bar{c}_{11}^{(2)} = 0.4$ ,  $\bar{c}_{13}^{(2)} = 0.25$ ,  $\bar{c}_{33}^{(2)} = 0.3$ .

На рис. 2.23 показано радиальное распределение: а) смещений  $U_r$ ; б) моментных напряжений  $M_{rr}$  сплошного двухслойного цилиндра. При этом на рис. 4.23а сплошной линией изображено распределение радиального смещения при классическом решении задачи, пунктиром – при решении задачи в градиентной постановке при  $\alpha_1 = 0.05$ .

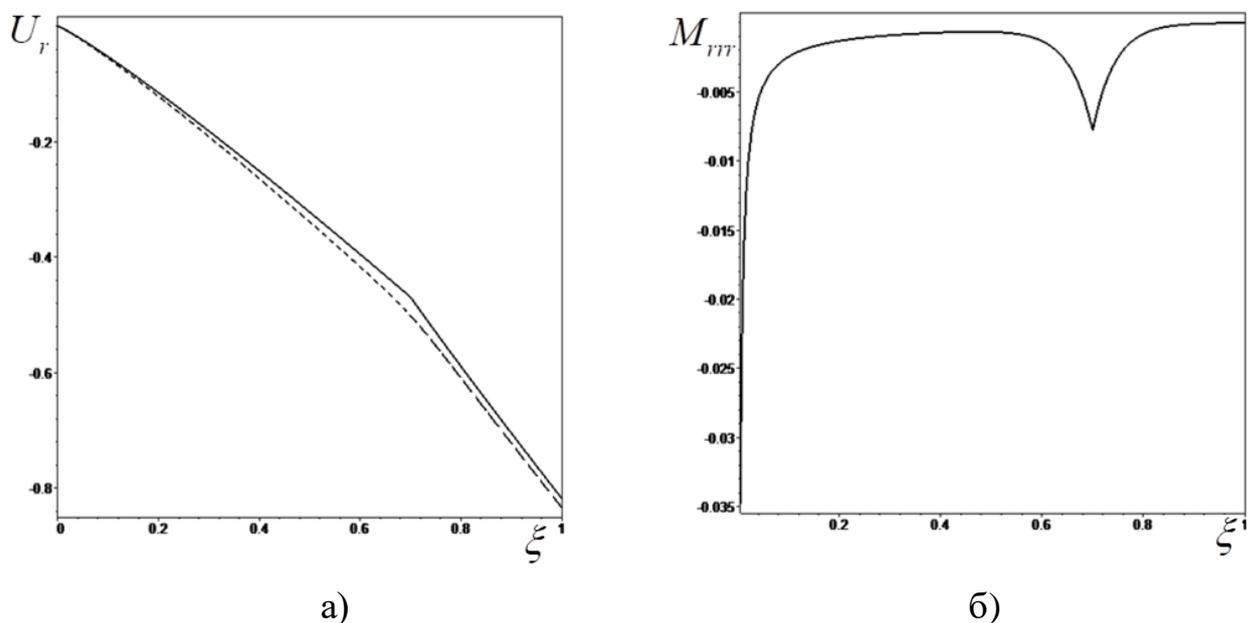
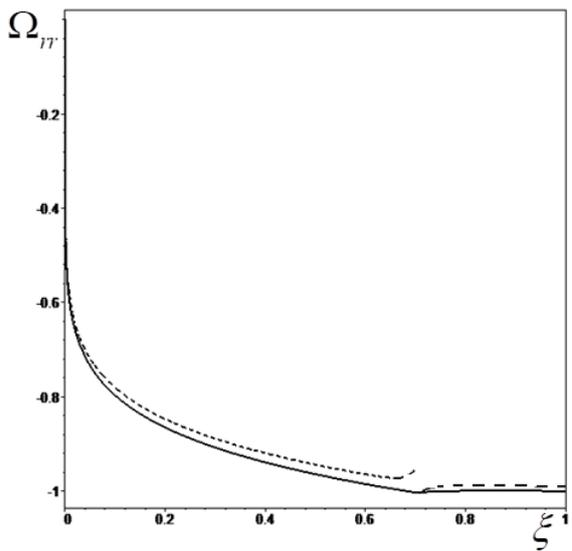


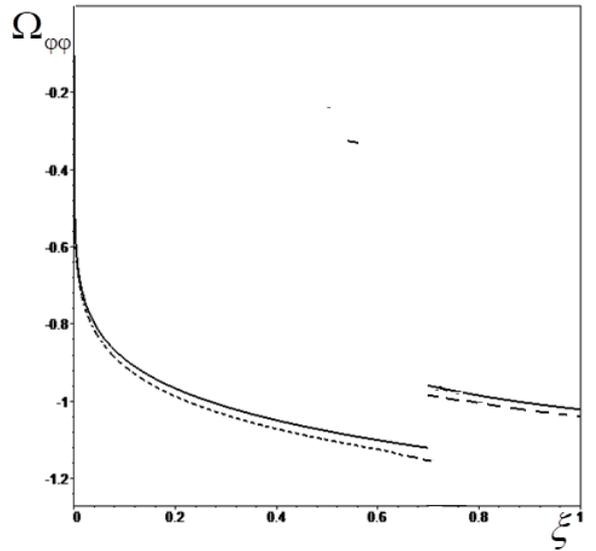
Рисунок 2.23 – Распределение по координате  $\xi$ : а)  $U_r$ ; б)  $M_{rr}$ .

На рис. 2.24 показано распределение по координате  $\xi$  полных напряжений слоистого цилиндра: а) радиальных; б) окружных.

Из рис. 2.24 следует, что при учете масштабного параметра полные радиальные напряжения увеличиваются в отличие от классической теории, а также терпят небольшой скачок на поверхности сопряжения, обусловленный тем, что на поверхности сопряжения согласно (2.8.7) должны быть непрерывны не полные напряжения, а компонента вектора  $\bar{t}_r$ .



а)



б)

Рисунок 2.24 – Распределение по  $\xi$  полных напряжений сплошного слоистого цилиндра: а) радиальных; б) окружных.

## ГЛАВА 3.

### КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПЕРВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Термомеханические характеристики тел, изготовленных из неоднородных материалов, в силу переменности свойств не могут быть определены из простых макроэкспериментов. Идентификация переменных характеристик возможна только методами неразрушающего контроля, теоретически опирающегося на аппарат коэффициентных обратных задач термоупругости.

Если дополнительная информация известна на всем полубесконечном временном интервале, то обратную задачу можно сформулировать в пространстве трансформант Лапласа. Основной проблемой при решении обратных задач является составление операторных соотношений, связывающих переменные физические характеристики с компонентами физических полей на части границы тела.

В этой главе приведены постановки КОЗ термоупругости в пространстве трансформант и несколькими способами (на основе обобщенного соотношения взаимности, слабой постановке прямой задачи и линеаризации) получены операторные уравнения для их решения. Сформулирован итерационный подход по идентификации одномерных термомеханических характеристик. Получены операторные уравнения и проведены вычислительная идентификация термомеханических характеристик стержня, трубы, конечного цилиндра и прямоугольника.

#### *3.1 Первая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для неоднородных тел.*

Рассмотрим термоупругое тело, занимающее объем  $V$  и ограниченное кусочно-гладкой поверхностью  $S = S_u \cup S_\sigma = S_T \cup S_q$ . В случае, если

дополнительная информация известна на всем полубесконечном временном интервале, обратную задачу можно сформулировать в пространстве трансформант (первая постановка КОЗ), как при тепловом, так и при механическом способах нагружения.

Применив к задаче (1.1.1)-(1.1.4) преобразование Лапласа по времени, с учетом начальных условий (1.1.5), получим:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = p^2 \rho \tilde{u}_i, \quad (3.1.1)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} \tilde{u}_{k,l} - \gamma_{ij} \tilde{\theta}, \quad (3.1.2)$$

$$(k_{ij} \tilde{\theta}_{,j})_{,i} - p c_\varepsilon \tilde{\theta} - p T_0 \gamma_{ij} \tilde{u}_{i,j} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\tilde{\theta}|_{S_\tau} = 0, \quad -k_{ij} \tilde{\theta}_{,i} n_j|_{S_q} = \tilde{q}, \quad (3.1.4)$$

$$\tilde{u}_i|_{S_u} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_\sigma} = \tilde{p}_i. \quad (3.1.5)$$

*Первая постановка КОЗ* термоупругости при тепловом нагружении тела состоит в нахождении теплофизических характеристик  $(c_\varepsilon, k, \gamma_{ij})$  при известных остальных из (3.1.1)-(3.1.5) при  $\tilde{p}_i = 0$  по информации о трансформанте температуры:

$$\tilde{\theta}|_{S_q} = \tilde{f}(x, p), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.1.6)$$

*Первая постановка КОЗ* термоупругости при механическом нагружении тела состоит в нахождении механических характеристик  $(c_{ijkl}, \rho, \gamma_{ij})$  при известных остальных из (3.1.1)-(3.1.5) при  $\tilde{q} = 0$  по информации о трансформанте компонент вектора перемещения:

$$\tilde{u}_i|_{S_\sigma} = \tilde{g}_i(x, p), \quad i = 1, 2, 3, \quad p \in [0, \infty). \quad (3.1.7)$$

### **3.2 Операторные уравнения для решения обратной задачи термоупругости в трансформантах Лапласа.**

В настоящем параграфе в соответствии с [25, 32, 68] несколькими способами получены операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости в первой постановке.

### 3.2.1 Обобщенное соотношение взаимности

Рассмотрим получение операторных уравнений первым способом на основе обобщенного соотношения взаимности для термоупругих тел [25, 68].

Обратимся к общей постановке задачи термоупругости в трансформантах (3.1.1)-(3.1.5). Рассмотрим два состояния: первое состояние с компонентами тензоров  $c_{ijkl}^{(1)}$ ,  $k_{ij}^{(1)}$ ,  $\gamma_{ij}^{(1)}$ ,  $\rho^{(1)}$ ,  $c_\varepsilon^{(1)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(1)}(x,t)$ ,  $\tilde{u}_i^{(1)}(x,t)$ , второе – соответственно  $c_{ijkl}^{(2)}$ ,  $k_{ij}^{(2)}$ ,  $\rho^{(2)}$ ,  $\gamma_{ij}^{(2)}$ ,  $c_\varepsilon^{(2)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(2)}(x,t)$  и  $\tilde{u}_i^{(2)}(x,t)$ . Краевые задачи термоупругости (3.1.1)-(3.1.5) для двух состояний имеют вид:

$$(c_{ijkl}^{(1)} \tilde{u}_{k,l}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)})_{,j} = p^2 \rho^{(1)} \tilde{u}_i^{(1)}, \quad (3.2.1)$$

$$(c_{ijkl}^{(2)} \tilde{u}_{k,l}^{(2)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)})_{,j} = p^2 \rho^{(2)} \tilde{u}_i^{(2)}, \quad (3.2.2)$$

$$(k_{ij}^{(1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(1)})_{,i} - p c_\varepsilon^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)} - p T_0 \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} = 0, \quad (3.2.3)$$

$$(k_{ij}^{(2)} \tilde{\theta}_{,j}^{(2)})_{,i} - p c_\varepsilon^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)} - p T_0 \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\tilde{\theta}^{(m)}|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}^{(m)} \tilde{\theta}_{,j}^{(m)} n_j|_{S_q} = \tilde{q}, \quad m=1,2, \quad (3.2.5)$$

$$\tilde{u}_i^{(m)}|_{S_u} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^{(m)} n_j|_{S_\sigma} = \tilde{p}_i, \quad m=1,2. \quad (3.2.6)$$

Выполним последовательно следующие действия: 1) умножим (3.2.1) на  $\tilde{u}_i^{(2)}$ , а (3.2.2) на  $\tilde{u}_i^{(1)}$  и найдем их разность; 2) умножим (3.2.3) на  $\tilde{\theta}^{(2)}$ , а (3.2.4) на  $\tilde{\theta}^{(1)}$  и найдем их разность; 3) проинтегрируем полученные соотношения по области  $V$ , применяя теорему Остроградского – Гаусса, а также граничные условия (3.2.5), (3.2.6) и симметрию тензоров физических характеристик. В результате получим:

$$\int_V (c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)}) \tilde{u}_{k,l}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} dV + p^2 \int_V (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) \tilde{u}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} dV + \int_V (\gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)}) dV + \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{u}_i^{(2)} - \tilde{u}_i^{(1)}) dS = 0, \quad (3.2.7)$$

$$\int_V (k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}) \tilde{\theta}_{,i}^{(1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(2)} dV + p \int_V (c_\varepsilon^{(2)} - c_\varepsilon^{(1)}) \tilde{\theta}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} dV + p T_0 \int_V (\gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)}) dV - \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{\theta}^{(2)} - \tilde{\theta}^{(1)}) dS = 0. \quad (3.2.8)$$

Проведем линеаризацию соотношений (3.2.7), (3.2.8). Положим  $\tilde{\theta}^{(1)} = \tilde{\theta}^{(n-1)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(2)} = \tilde{\theta}^{(n-1)} + \delta\tilde{\theta}^{(n-1)}$ ,  $\tilde{u}_i^{(1)} = \tilde{u}_i^{(n-1)}$ ,  $\tilde{u}_i^{(2)} = \tilde{u}_i^{(n-1)} + \delta\tilde{u}_i^{(n-1)}$ ,  $k_{ij}^{(1)} = k_{ij}^{(n-1)}$ ,  $k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(n-1)} + \delta k_{ij}^{(n-1)}$ ,  $c_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl}^{(n-1)}$ ,  $c_{ijkl}^{(2)} = c_{ijkl}^{(n-1)} + \delta c_{ijkl}^{(n-1)}$ ,  $\rho^{(1)} = \rho^{(n-1)}$ ,  $\rho^{(2)} = \rho^{(n-1)} + \delta\rho^{(n-1)}$ ,  $c_\varepsilon^{(1)} = c_\varepsilon^{(n-1)}$ ,  $c_\varepsilon^{(2)} = c_\varepsilon^{(n-1)} + \delta c_\varepsilon^{(n-1)}$ ,  $\gamma_{ij}^{(1)} = \gamma_{ij}^{(n-1)}$ ,  $\gamma_{ij}^{(2)} = \gamma_{ij}^{(n-1)} + \delta\gamma_{ij}^{(n-1)}$ . Подставим эти соотношения в (3.2.7), (3.2.8) и, сохраняя в полученных выражениях только линейные слагаемые, с учетом дополнительной информации (3.1.6), (3.1.7), получим [25]:

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV - \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.9)$$

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV + p \int_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV + p T_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty). \quad (3.2.10)$$

Соотношения (3.2.9), (3.2.10) являются интегральными уравнениями Фредгольма (ИУФ) 1-го рода для нахождения поправок  $\delta k_{ij}^{(n-1)}$ ,  $\delta c_\varepsilon^{(n-1)}$ ,  $\delta \rho^{(n-1)}$ ,  $\delta c_{ijkl}^{(n-1)}$ ,  $\delta \gamma_{ij}^{(n-1)}$  в итерационном процессе.

### 3.2.2 Слабая постановка прямой задачи

Операторные соотношения (3.2.9), (3.2.10) можно получить другим способом, основанным на применении слабой постановки прямой задачи [32].

Введем пробные функции  $\tilde{v}_i$  и  $\tilde{g}$ , удовлетворяющие главным граничным условиям  $\tilde{v}_i|_{S_u} = 0$ ,  $\tilde{g}|_{S_T} = 0$ .

Умножим уравнение (3.1.1) скалярно на  $\tilde{v}_i$ , а уравнение (3.1.3) на  $\tilde{g}$  и проинтегрируем результат по объему  $V$ :

$$\int_V (c_{ijkl} \tilde{u}_{k,l})_{,j} \tilde{v}_i dV - \int_V (\gamma_{ij} \tilde{\theta})_{,j} \tilde{v}_i dV - p^2 \int_V \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i dV = 0, \quad (3.2.11)$$

$$\int_V (k_{ij} \tilde{\theta}_{,j})_{,i} \tilde{g} dV - p \int_V c_\varepsilon \tilde{\theta} \tilde{g} dV - p T_0 \int_V \gamma_{ij} \tilde{u}_{i,j} \tilde{g} dV = 0. \quad (3.2.12)$$

Далее, воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса и, учитывая граничные условия (3.1.4), (3.1.5), получим:

$$-\int_V c_{ijkl} \tilde{u}_{i,j} \tilde{v}_{k,l} dV - p^2 \int_V \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i dV + \int_V \gamma_{ij} \tilde{\theta} \tilde{v}_{i,j} dV + \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i \tilde{v}_i dS = 0, \quad (3.2.13)$$

$$-\int_V k_{ij} \tilde{\theta}_{,i} \tilde{\mathcal{G}}_{,j} dV - p \int_V c_\varepsilon \tilde{\theta} \tilde{\mathcal{G}} dV - pT_0 \int_V \gamma_{ij} \tilde{u}_{i,j} \tilde{\mathcal{G}} dV - \int_{S_q} \tilde{q} \tilde{\mathcal{G}} dS = 0. \quad (3.2.14)$$

Будем различать два состояния. В области  $V$  для каждого состояния выполнены соотношения (3.2.13), (3.2.14):

$$\int_V c_{ijkl}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{v}_{k,l}^{(1)} dV + p^2 \int_V \rho^{(1)} \tilde{u}_i^{(1)} \tilde{v}_i^{(1)} dV - \int_V \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{v}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i \tilde{v}_i^{(1)} dS, \quad (3.2.15)$$

$$\int_V c_{ijkl}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{v}_{k,l}^{(2)} dV + p^2 \int_V \rho^{(2)} \tilde{u}_i^{(2)} \tilde{v}_i^{(2)} dV - \int_V \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{v}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i \tilde{v}_i^{(2)} dS, \quad (3.2.16)$$

$$\int_V k_{ij}^{(1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(1)} \tilde{\mathcal{G}}_{,j}^{(1)} dV + p \int_V c_\varepsilon^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)} \tilde{\mathcal{G}}^{(1)} dV + pT_0 \int_V \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\mathcal{G}}^{(1)} dV = - \int_{S_q} \tilde{q} \tilde{\mathcal{G}}^{(1)} dS, \quad (3.2.17)$$

$$\int_V k_{ij}^{(2)} \tilde{\theta}_{,i}^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_{,j}^{(2)} dV + p \int_V c_\varepsilon^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}^{(2)} dV + pT_0 \int_V \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}^{(2)} dV = - \int_{S_q} \tilde{q} \tilde{\mathcal{G}}^{(2)} dS. \quad (3.2.18)$$

Составим разности соотношений (3.2.16) и (3.2.15), (3.2.18) и (3.2.17).

Положив в этих разностях  $\tilde{v}_i^{(1)} = \tilde{u}_i^{(2)}$ ,  $\tilde{v}_i^{(2)} = \tilde{u}_i^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}^{(1)} = \tilde{\theta}^{(2)}$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}^{(2)} = \tilde{\theta}^{(1)}$ , получим:

$$\int_V (c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)}) \tilde{u}_{k,l}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} dV + p^2 \int_V (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) \tilde{u}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} dV + \int_V (\gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)}) dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{u}_i^{(2)} - \tilde{u}_i^{(1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.19)$$

$$\int_V (k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}) \tilde{\theta}_{,i}^{(1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(2)} dV + p \int_V (c_\varepsilon^{(2)} - c_\varepsilon^{(1)}) \tilde{\theta}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)} dV + pT_0 \int_V (\gamma_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{\theta}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \tilde{\theta}^{(2)}) dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{\theta}^{(2)} - \tilde{\theta}^{(1)}) dS, \quad p \in [0, \infty). \quad (3.2.20)$$

Выражения (3.2.19), (3.2.20) совпадают с выражениями (3.2.7), (3.2.8), полученными в п. 3.2.1. Выполняя линеаризацию (3.2.19), (3.2.20), получены линейные операторные уравнения, совпадающие с (3.2.9), (3.2.10).

Из операторных уравнений (3.2.9), (3.2.10) можно получить упрощенные операторные уравнения в случае, если неизвестна только одна из термомеханических характеристик. В этом случае, полагая в (3.2.9) и

(3.2.10) равными нулю поправки всех характеристик кроме искомой, получим следующие ИУФ 1-го рода с гладкими ядрами:

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.21)$$

$$p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.22)$$

$$\int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.23)$$

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.24)$$

$$p \int_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.2.25)$$

$$p T_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty). \quad (3.2.26)$$

Решение интегральных уравнений вида (3.2.21) представляет собой некорректную задачу, регуляризованные решения которой строятся на базе метода А.Н. Тихонова [158].

### 3.3 Итерационная схема решения обратных задач термомеханики.

Рассмотрим общую итерационную схему идентификации одномерных законов неоднородности термомеханических характеристик  $\bar{a}$ .

На 1-м этапе определяется начальное приближение  $\bar{a}^{(0)}$  в классе линейных функций.

Первый способ нахождения коэффициентов линейной функции состоит в использовании априорной информации о граничных значениях термомеханических характеристик ( $a^-$ ,  $a^+$ ). Так, в случае стержня, начальное приближение строится в виде  $\bar{a}^{(0)} = (a^+ - a^-)z + a^-$ ; в случае трубы – в виде

$$\bar{a}^{(0)}(\xi) = \frac{a^- - a^+}{\xi_0 - 1} (\xi - 1) + a^+.$$

Второй способ основан на минимизации функционала невязки. Функционал невязки имеет вид:

а) при тепловом способе нагружения

$$J_1 = \int_{a_1}^{a_2} (f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1))^2 d\tau_1; \quad (3.3.1)$$

б) при механическом способе нагружения

$$J_2 = \int_{b_1}^{b_2} (g(\tau_2) - U^{(n-1)}(1, \tau_2))^2 d\tau_2. \quad (3.3.2)$$

В вычислениях интегральные операторы в правой части (3.3.1), (3.3.2) заменяются на конечные суммы, далее вычисляются их значения для каждой точки на сетке, полученной при разбиении компактных множеств. Эти множества строятся по априорной информации о положительности и ограниченности восстанавливаемых функций. Подходящей точке соответствует наименьшее значение функционала (3.3.1) или (3.3.2).

2 этап. Путем решения соответствующего операторного уравнения вычисляются поправки реконструируемых функций  $\delta\bar{a}^{(n-1)}$ , и строится новое приближение  $\bar{a}^{(n)} = \bar{a}^{(n-1)} + \delta\bar{a}^{(n-1)}$ . Далее решается прямая задача с характеристиками  $\bar{a}^{(n)}$ .

3 этап. Проверяется условие окончания итерационного процесса и, если оно не удовлетворено, итерационный процесс продолжается.

В качестве условий выхода из итерационного процесса выступают:

- 1) ограничение по количеству итераций ( $n = 20$ );
- 2) достижение предельного значения соответствующего функционала невязки  $J_1$  или  $J_2$ , равного  $10^{-6}$ .

### ***3.4 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного стержня в первой постановке.***

В данном параграфе представлены результаты исследования обратной задачи термоупругости для неоднородного стержня в пространстве трансформант [229].

### 3.4.1 Первая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для стержня. Операторные уравнения в трансформантах

Сформулируем обезразмеренные постановки КОЗ термоупругости для стержня, как при тепловом, так и при механическом нагружении.

*Обратная задача термоупругости для стержня при тепловом нагружении* состоит в определении законов изменения безразмерных теплофизических характеристик  $(\bar{c}(z), \bar{k}(z), \bar{\gamma}(z))$  из (1.2.16)-(1.2.18) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте температуры на торце стержня  $z=1$ :

$$\tilde{W}(1, p) = \tilde{f}(p), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.4.1)$$

*Обратная задача термоупругости для стержня при механическом нагружении* состоит в определении законов изменения безразмерных механических характеристик  $(\bar{\rho}(z), \bar{E}(z), \bar{\gamma}(z))$  из (1.2.16), (1.2.17), (1.2.19) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте смещения на торце стержня  $z=1$ :

$$\tilde{U}(1, p) = \tilde{g}(p), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.4.2)$$

Из общих операторных уравнений (3.2.21)-(3.2.26) можно получить операторные уравнения для стержня, полагая в них, вследствие отсутствия эффекта Пуассона,  $c_{ijkl} = E\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $k_{ij} = k\delta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij} = \gamma\delta_{ij}$ , и, учитывая геометрию задачи. Тогда после обезразмеривания, выполненного по формулам параграфа 1.2, операторные уравнения для стержня примут вид [25, 32, 68]:

$$\frac{1}{\beta_1 \tilde{\varphi}(p)} \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.4.3)$$

$$\frac{p}{\beta_1 \tilde{\varphi}(p)} \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{W}^{(n-1)} \right)^2 dz = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.4.4)$$

$$\frac{\delta_0 p}{\beta_1 \tilde{\varphi}(p)} \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.4.5)$$

$$\frac{p^2}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}^{(n-1)})^2 dz = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.4.6)$$

$$\frac{1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_0^1 \delta \bar{E}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.4.7)$$

Следует отметить, что при  $p=0$  ядра уравнений (3.4.4)-(3.4.6) обращаются в нуль при любом законе нагружения, а ядра (3.4.3), (3.4.7) – при торцевых нагрузках вида  $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\phi}(p) = \frac{1}{p}$ . Это обстоятельство налагает ограничения на применение операторных соотношений. В пространстве трансформант реконструкция возможна только для коэффициента теплопроводности и модуля Юнга.

### 3.4.2 Метод линеаризации

Рассмотрим получение операторного уравнения для нахождения поправок  $\bar{k}(z)$  методом линеаризации [24, 68].

Для получения операторного уравнения обратимся к задаче (1.2.16)-(1.2.18). Рассмотрим состояние  $\tilde{W}^{(n+1)}(1, p)$ ,  $\tilde{U}^{(n+1)}(z, p)$ ,  $\tilde{\Omega}^{(n+1)}(z, p)$ ,  $\bar{c}(z)$ ,  $\bar{\rho}(z)$ ,  $\bar{E}(z)$ ,  $\bar{k}^{(n+1)}(z)$ ,  $\bar{\gamma}(z)$  для которого известно  $\tilde{W}_T(1, p) = \tilde{W}^{(n-1)}(1, p) + \eta \tilde{W}^{(n)}(1, p)$ , где  $\eta$  – формальный параметр,  $\tilde{W}_T(1, p)$  – трансформанта температуры на торце стержня, вычисленная для точного закона  $\bar{k}(z)$ . Положим:  $\bar{k}^{(n+1)}(z) = \bar{k}^{(n-1)}(z) + \eta \bar{k}^{(n)}(z)$ ,  $\tilde{W}^{(n+1)}(z, p) = \tilde{W}^{(n-1)}(z, p) + \eta \tilde{W}^{(n)}(z, p)$ ,  $\tilde{U}^{(n+1)}(z, p) = \tilde{U}^{(n-1)}(z, p) + \eta \tilde{U}^{(n)}(z, p)$ ,  $\tilde{\Omega}^{(n+1)}(z, p) = \tilde{\Omega}^{(n-1)}(z, p) + \eta \tilde{\Omega}^{(n)}(z, p)$ , где  $\eta$  – формальный малый параметр.

Подставляя полученное представление в (1.2.16)-(1.2.18) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\eta$ , получим следующие краевые задачи.

При  $\eta^0$ :

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{E}(z) \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} - \bar{\gamma}(z) \tilde{W}^{(n-1)} \right) = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho}(z) \tilde{U}^{(n-1)}, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{k}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right) = p\bar{c}(z)\tilde{W}^{(n-1)}(z, p) + \delta_0 p \bar{\gamma}(z) \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}, \quad (3.4.9)$$

$$\tilde{W}^{(n-1)}(0, p) = 0, \quad -\bar{k}^{(n-1)}(1) \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz}(1, p) = \beta_1 \tilde{\varphi}(p), \quad (3.4.10)$$

$$\tilde{U}^{(n-1)}(0, p) = 0, \quad \bar{E}(1) \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}(1, p) - \bar{\gamma}(1) \tilde{W}^{(n-1)}(1, p) = 0. \quad (3.4.11)$$

При  $\eta^1$ :

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{E}(z) \frac{d\tilde{U}^{(n)}}{dz} \right) - \frac{d}{dz} (\bar{\gamma}(z) \tilde{W}^{(n)}) = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho}(z) \tilde{U}^{(n)}, \quad (3.4.12)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{k}^{(n-1)}(z) \frac{d\tilde{W}^{(n)}}{dz} + \bar{k}^{(n)}(z) \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right) = p\bar{c}(z)\tilde{W}^{(n)}(z, p) + \delta_0 p \bar{\gamma}(z) \frac{d\tilde{U}^{(n)}}{dz}(z, p), \quad (3.4.13)$$

$$\tilde{W}^{(n)}(0, p) = 0, \quad - \left( \bar{k}^{(n-1)}(1) \frac{d\tilde{W}^{(n)}}{dz}(1, p) + \bar{k}^{(n)}(1) \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz}(1, p) \right) = 0, \quad (3.4.14)$$

$$\tilde{U}^{(n)}(0, p) = 0, \quad \bar{E}(1) \frac{d\tilde{U}^{(n)}}{dz}(1, p) - \bar{\gamma}(1) \tilde{W}^{(n)}(1, p) = 0. \quad (3.4.15)$$

Далее скалярно умножим (3.4.8) на  $\tilde{U}^{(n)}$ , (3.4.12) на  $\tilde{U}^{(n-1)}$ , (3.4.9) на  $\tilde{W}^{(n)}$ , (3.4.13) на  $\tilde{W}^{(n-1)}$ , вычтем одно из другого, а результат проинтегрируем по отрезку  $[0, 1]$ . Тогда, интегрируя по частям, с учетом граничных условий (3.4.10), (3.4.11), (3.4.14), (3.4.15) и дополнительной информации (3.4.1) получим ИУФ 1-го рода:

$$\frac{1}{\beta_1 \tilde{\varphi}(p)} \int_0^1 \bar{k}^{(n)} \left( \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.4.16)$$

которое совпадает с ранее полученным уравнением (3.4.3).

### 3.4.3 Решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова А.Н.

Представим ИУФ 1-го рода в трансформантах в виде:

$$K\bar{a} = \tilde{f}, \quad (3.4.17)$$

где  $K$  – вполне непрерывный оператор,  $\bar{a}$  – неизвестная термомеханическая характеристика.

Конечномерная аппроксимация уравнения (3.4.17) приводит к необходимости решать плохообусловленную СЛАУ. К основным методам решения плохообусловленной СЛАУ относятся метод Пейджа-Саундерса [237] и метод Тихонова А.Н. [158].

Регуляризованное решение уравнения (3.4.17) по Тихонову А.Н. [67, 158] состоит в минимизации стабилизирующего функционала

$$M^\alpha[\bar{a}] = \|K\bar{a} - \tilde{f}\|^2 + \alpha_0 \|\bar{a}\|^2, \quad \alpha_0 > 0. \quad (3.4.18)$$

Здесь  $\alpha_0 > 0$  – параметр регуляризации.

Конечномерная аппроксимация (3.4.18) основана на применении метода коллокаций. Отрезок  $[0,1]$  разбивается на  $n_3$  отрезков точками  $z_i = \frac{i-1}{n_3}$ ,  $i=1..n_3+1$ . Строится набор параметров  $p_j$ ,  $j=1..m_2$  таким образом: 1) множество  $p \in [0, \infty)$  отображается в отрезок  $s_3 \in [0,1]$  по правилу  $s_3^2 = \frac{p^2}{1+p^2}$ ; 2) отрезок  $s_3 \in [\kappa, 1-\kappa]$  равномерно разбивается точками  $s_{3j}$ ,  $j=1..m_2$ ; 3) с помощью обратного отображения набора  $s_{3j}$ ,  $j=1..m_2$  вычисляются  $p_j$ .

Результат аппроксимации уравнения (3.4.17) представим в матричном виде:

$$Ay = b. \quad (3.4.19)$$

Здесь  $A_{ji} = \Delta z C_i K(p_j, z_i)$ ,  $y_i = \bar{a}(z_i)$ ,  $b_j = \tilde{f}(p_j)$ ,  $i=1..n_3+1$ ,  $j=1..m_2$ ,  $C_i$  – коэффициенты квадратурной формулы трапеций.

Согласно методу Тихонова решение (3.4.19) сводится к решению регуляризованной системы линейных алгебраических уравнений:

$$(A^T A + \alpha_0 C_0) y = A^T b, \quad (3.4.20)$$

$$\text{где } C_0 = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{h_0^2} & -\frac{1}{h_0^2} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{h_0^2} & 1 + \frac{2}{h_0^2} & -\frac{1}{h_0^2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{h_0^2} & 1 + \frac{1}{h_0^2} \end{vmatrix}, \quad h_0 = \frac{1}{n_3}.$$

Параметр регуляризации  $\alpha_0$  находится в соответствии с принципом обобщенной невязки [158].

### 3.4.4 Результаты идентификации термомеханических характеристик стержня

Рассмотрим результаты реконструкции функций  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{E}(z)$ . Поправки термомеханических характеристик в итерационном процессе находились по формулам (3.4.3), (3.4.7). В вычислениях принято:  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\psi}(p) = 1$ .

Погрешность реконструкции в точках  $z_i$ ,  $i = 1..n_3 + 1$  вычислялась по формуле:

$$\delta(z_i) = \frac{|\bar{a}(z_i) - \bar{a}_{rec}(z_i)|}{\bar{a}(z_i)} \cdot 100\%, \quad (3.4.21)$$

где  $\bar{a}(z_i)$  – точное значение характеристики в точке  $z_i$ ,  $\bar{a}_{rec}(z_i)$  – восстановленное значение.

Выяснено, что погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 5%, а немонотонных – 9%.

На рис. 3.1 представлены результаты реконструкции функций: а)  $\bar{k}(z) = 2(1 - 0.1e^{2z})$ ; б)  $\bar{E}(z) = 1.2 - 0.5z^3$ , где сплошной линией обозначено точное решение, точками – восстановленное.

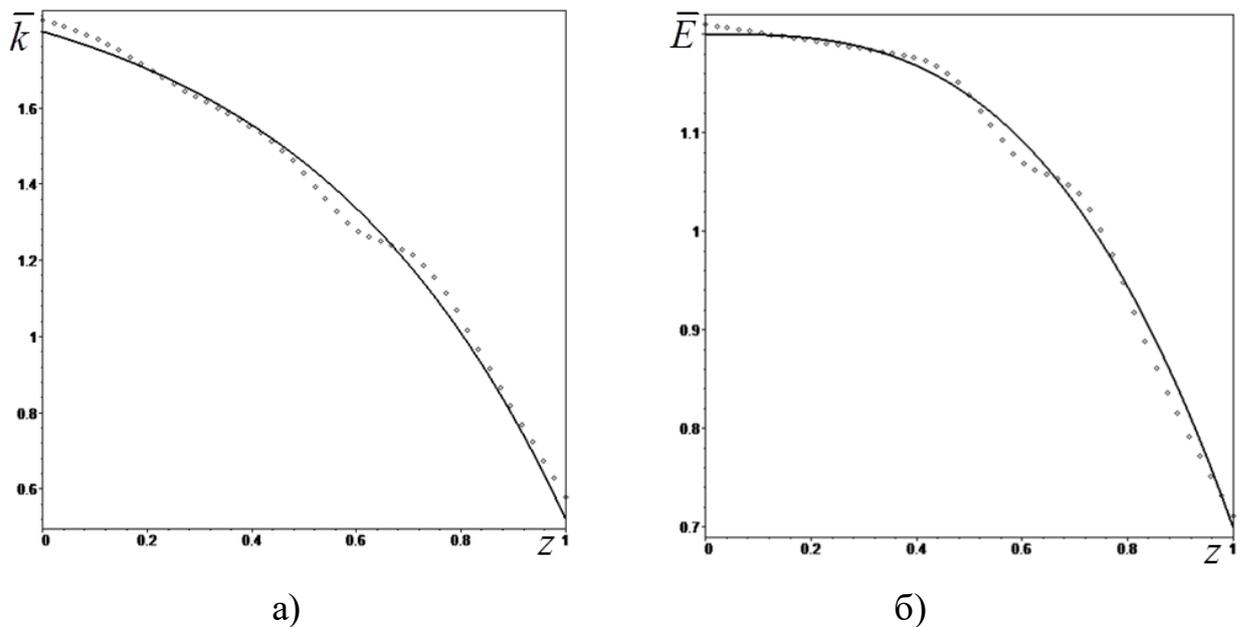


Рисунок 3.1 – Результат восстановления термомеханических характеристик стержня: а)  $\bar{k}(z) = 2(1 - 0.1e^{2z})$ ; б)  $\bar{E}(z) = 1.2 - 0.5z^3$ .

### 3.5 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородной трубы в первой постановке.

Исследуем КОЗ термоупругости для трубы в пространстве трансформант.

#### 3.5.1 Первая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для трубы. Операторные уравнения в трансформантах

Обратная задача термоупругости для трубы при тепловом способе нагружения состоит в определении законов изменения безразмерных теплофизических характеристик  $(\bar{c}(\xi), \bar{k}(\xi), \bar{\gamma}(\xi))$  из (1.3.16)-(1.3.19) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте температуры на внешней поверхности трубы  $\xi = 1$ :

$$\tilde{W}(1, p) = \tilde{f}(p), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.5.1)$$

Обратная задача термоупругости для трубы при механическом способе нагружения состоит в определении законов изменения

безразмерных механических характеристик  $(\bar{\rho}(\xi), \bar{\lambda}(\xi), \bar{\mu}(\xi), \bar{\gamma}(\xi))$  из (1.3.16)-(1.3.18), (1.3.20) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте смещения на внешней поверхности трубы  $\xi = 1$ :

$$\tilde{U}_r(1, p) = \tilde{g}(p), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.5.2)$$

Для получения операторных уравнений для трубы необходимо перейти в интегралах (3.2.9), (3.2.10) к цилиндрической системе координат, полагая при этом  $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ ,  $k_{ij} = k \delta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}$ . После обезразмеривания система операторных уравнений для трубы имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + p \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}^{(n-1)})^2 \xi d\xi + \delta_0 p \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right) \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi = \\ & = \beta_1 \tilde{\phi}(p) (\tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \xi d\xi + \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \right) \xi d\xi + \\ & + p^2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}_r^{(n-1)})^2 \xi d\xi - \delta_0 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right) \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi = \\ & = -\beta_2 \tilde{\phi}(p) (\tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Рассмотрим случай, когда требуется восстановить только одну характеристику трубы при известных остальных. Так, для нахождения модулей Ламе, имеем следующие ИУФ 1-го рода [43, 253]:

$$\frac{1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \xi d\xi = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.5.5)$$

$$\frac{1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \right) \xi d\xi = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.5.6)$$

### 3.5.2 Результаты идентификации характеристик трубы

В экспериментах принято:  $\tilde{\phi}(p) = \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.03$ .

Выяснено, что погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 4%, а немонотонных – 10%.

На рис. 3.2 представлен график реконструкции функции  $\bar{k}(\xi) = 1.5 + \cos(10(\xi - \xi_0))$ .

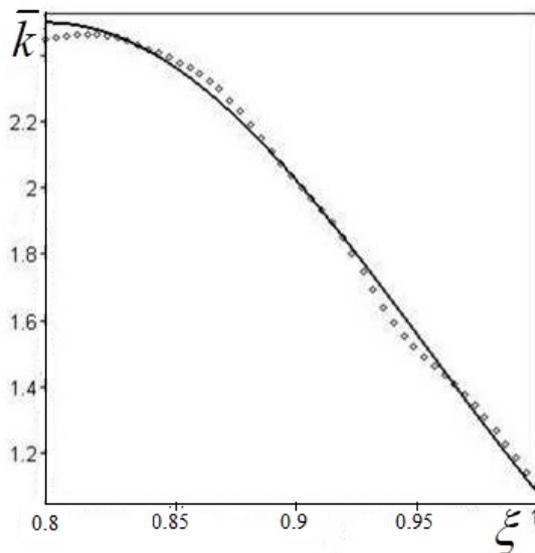
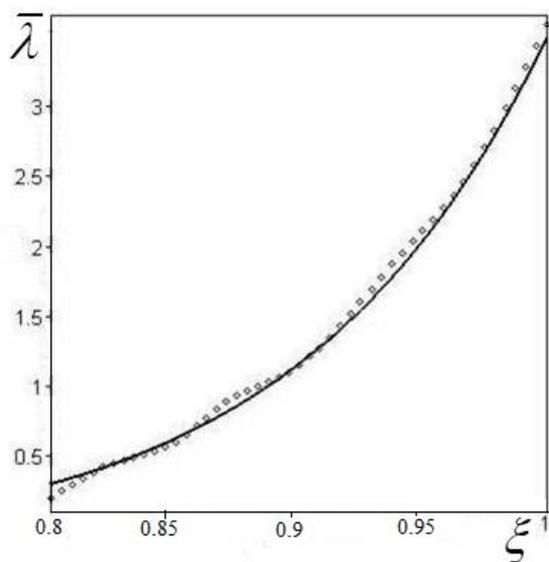
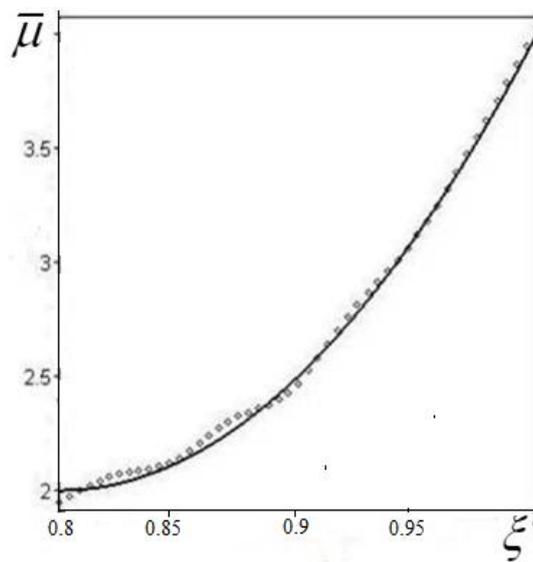


Рисунок 3.2 – Результат реконструкции  $\bar{k}(\xi) = 1.5 + \cos(10(\xi - \xi_0))$ .

На рис. 3.3 представлены графики восстановления коэффициентов Ламе: а)  $\bar{\lambda}(\xi) = 0.5e^{10(\xi - \xi_0)} - 0.2$ , б)  $\bar{\mu}(\xi) = 50(\xi - \xi_0)^2 + 2$ .



а)



б)

Рисунок 3.3 – Результаты реконструкции: а)  $\bar{\lambda}(\xi)$  ; б)  $\bar{\mu}(\xi)$ .

### 3.6 Коэффициентная обратная задачи термоупругости для неоднородного конечного цилиндра в первой постановке.

В соответствии с [74] рассмотрим КОЗ термоупругости для неоднородного конечного цилиндра в пространстве трансформант.

#### 3.6.1 Первая постановка и операторные уравнения коэффициентной обратной задачи термоупругости для конечного цилиндра

Обратная задача термоупругости для конечного цилиндра при тепловом нагружении состоит в определении теплофизических характеристик  $(\bar{c}(\xi_1), \bar{k}(\xi_1), \bar{\gamma}(\xi_1))$  из (1.4.20)-(1.4.23), (1.4.25) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте температуры на наружной поверхности цилиндра  $\xi_1 = 1$ :

$$\tilde{W}(1, \xi_2, p) = \tilde{f}(\xi_2, p), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad p \in [0, \infty). \quad (3.6.1)$$

Обратная задача термоупругости для конечного цилиндра при механическом нагружении состоит в определении механических характеристик  $(\bar{\rho}(\xi_1), \bar{\lambda}(\xi_1), \bar{\mu}(\xi_1), \bar{\gamma}(\xi_1))$  из (1.4.20)-(1.4.24) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте радиального смещения на наружной поверхности цилиндра  $\xi_1 = 1$ :

$$\tilde{U}_r(1, \xi_2, p) = \tilde{g}(\xi_2, p), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad p \in [0, \infty). \quad (3.6.2)$$

После перехода в интегралах в левой и правой частях соотношений (3.2.9) и (3.2.10) к цилиндрической системе координат, с учетом изотропии материала операторные уравнения в размерном виде примут вид [74, 75]:

$$\int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left( \delta\lambda^{(n-1)} \left( \tilde{u}_{r,r}^{(n-1)} + \frac{\tilde{u}_r^{(n-1)}}{r} + \tilde{u}_{z,z}^{(n-1)} \right)^2 + \delta\mu^{(n-1)} \left( \left( \tilde{u}_{r,r}^{(n-1)} \right)^2 + 0.5 \left( \tilde{u}_{r,z}^{(n-1)} + \tilde{u}_{z,r}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{u}_r^{(n-1)}}{r} \right)^2 + \left( \tilde{u}_{z,z}^{(n-1)} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + p^2 \delta\rho^{(n-1)} \left( \left( \tilde{u}_r^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{u}_z^{(n-1)} \right)^2 - \delta\gamma^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} \left( \tilde{u}_{r,r}^{(n-1)} + \frac{\tilde{u}_r^{(n-1)}}{r} + \tilde{u}_{z,z}^{(n-1)} \right) \right) \right) r dr d\varphi dz =$$

$$= - \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \tilde{P}(\tilde{g} - \tilde{u}_r^{(n-1)}) r_2 d\varphi dz, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.6.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left( \delta k^{(n-1)} \left( (\tilde{\theta}_{,r}^{(n-1)})^2 + (\tilde{\theta}_{,z}^{(n-1)})^2 \right) + p \delta c^{(n-1)} \tilde{\theta}^2 + p T_0 \delta \gamma^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} \left( \tilde{u}_{r,r}^{(n-1)} + \frac{\tilde{u}_r^{(n-1)}}{r} + \tilde{u}_{z,z}^{(n-1)} \right) \right) r dr d\varphi dz = \\ & = \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \tilde{q}(\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) r_2 d\varphi dz, \quad p \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Предположим, что функции  $\tilde{f}(\xi_2, p)$ ,  $\tilde{g}(\xi_2, p)$ , в формулах (3.6.3), (3.6.4)

допускают разложения в ряды:  $\tilde{f}(\xi_2, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{f}_{N_1}(p) \cos(\nu_{N_1} \xi_2)$ ,

$\tilde{g}(\xi_2, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{g}_{N_1}(p) \cos(\nu_{N_1} \xi_2)$ , тогда операторные уравнения можно

сформулировать для гармоник  $N_1 = 0$ ,  $N_1 = 1$  и т.д.

После подстановки разложений для трансформант (1.4.25) в (3.6.3), (3.6.4) и обезразмеривания получим следующий набор ИУФ 1-го рода для гармоник.

При  $N_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \left( \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_0^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1} \right)^2 + 2 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( (\tilde{a}_0^{(n-1)})^2 + \left( \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1} \right)^2 \right) + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{a}_0^{(n-1)})^2 \right) - \\ & - \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_0^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1} \right) \tilde{a}_0^{(n-1)} \xi_1 d\xi_1 = -g_{20} \beta_2 \tilde{\phi}(p) (\tilde{g}_0(p) - \tilde{a}_0^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} (\tilde{a}'_0^{(n-1)})^2 + p \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{a}_0^{(n-1)})^2 + p \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_0^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1} \right) \tilde{a}_0^{(n-1)} \right) \xi_1 d\xi_1 = \\ & = g_{10} \beta_1 \tilde{\phi}(p) (\tilde{f}_0(p) - \tilde{a}_0^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

При  $N_1 = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \left( \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_{N_1}^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}}{\xi_1} + \nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( (\tilde{a}'_{N_1}^{(n-1)})^2 + \left( \frac{\tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}}{\xi_1} \right)^2 + (\nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)})^2 + \frac{1}{2} (\tilde{b}'_{N_1}^{(n-1)} - \nu_{N_1} \tilde{a}'_{N_1}^{(n-1)})^2 \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 \right) - 2 \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_{N_1}{}^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}}{\xi_1} + \nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right) \tilde{d}_{N_1}^{(n-1)} \xi_1 d \xi_1 = \\
& = -g_{2N_1} \beta_2 \tilde{\phi}(p) \left( \tilde{g}_{N_1}(p) - \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \tag{3.6.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi_0}^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{d}'_{N_1}{}^{(n-1)} \right)^2 + \nu_{N_1}^2 \left( \tilde{d}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 \right) + p \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{d}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2 p \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_{N_1}{}^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}}{\xi_1} + \nu_{N_1} \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right) \tilde{d}_{N_1}^{(n-1)} \right) \xi_1 d \xi_1 = \\
& = g_{1N_1} \beta_1 \tilde{\varphi}(p) \left( \tilde{f}_{N_1}(p) - \tilde{d}_{N_1}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \tag{3.6.8}
\end{aligned}$$

### 3.6.2 Результаты поэтапного восстановления двух термомеханических характеристик конечного цилиндра

Рассмотрим схему идентификации коэффициентов Ламе  $\bar{\lambda}(\xi_1)$  и  $\bar{\mu}(\xi_1)$ .

Для одновременного нахождения поправок  $\delta \bar{\lambda}^{(n-1)}$  и  $\delta \bar{\mu}^{(n-1)}$  необходимо решить систему, состоящую из двух ИУФ 1-го рода. Первое уравнение получается, если в уравнении (3.6.5) положить  $\delta \bar{\gamma}^{(n-1)} = \delta \bar{\rho}^{(n-1)} = 0$ . Второе уравнение получается, если в уравнении (3.6.7) положить  $N_1 = 1$  и  $\delta \bar{\gamma}^{(n-1)} = \delta \bar{\rho}^{(n-1)} = 0$ . На практике реконструкция двух характеристик становится невозможной, т.к. значения ядер при поправке  $\delta \bar{\mu}^{(n-1)}$  значительно больше, чем при  $\delta \bar{\lambda}^{(n-1)}$ . Для решения этой проблемы рассмотрим двухэтапный процесс реконструкции. На первом этапе полагается поправка  $\delta \bar{\mu}^{(n-1)} = 0$  и определяются поправки  $\delta \bar{\lambda}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода, полученного из (3.6.5) при  $\delta \bar{\gamma}^{(n-1)} = \delta \bar{\rho}^{(n-1)} = \delta \bar{\mu}^{(n-1)} = 0$ :

$$\int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \tilde{a}'_0{}^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1} \right)^2 \xi_1 d \xi_1 = -g_{20} \beta_2 \left( \tilde{g}_0(p) - \tilde{a}_0^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \tag{3.6.9}$$

На втором этапе функция  $\bar{\lambda}(\xi_1)$  полагается известной. При этом на каждой итерации определяются поправки  $\delta \bar{\mu}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}'_0{}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1} \right)^2 \right) \xi_1 d \xi_1 = -g_{20} \beta_2 \left( \tilde{g}_0(p) - \tilde{a}_0^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \tag{3.6.10}$$

На рис. 3.4 представлены результаты реконструкции функций: а)

$$\bar{\lambda}(\xi_1) = -8.83\xi_1^2 + 12.64\xi_1 - 3.56; \quad \text{б) } \bar{\mu}(\xi_1) = -3.64\xi_1^2 + 5\xi_1 - 1.23 \quad \text{при } g_2(\xi_2) = 1 - \left(\frac{\xi_2}{\beta_0}\right)^2,$$

$$\tilde{\phi}(p) = 1, \quad \xi_0 = 0.8, \quad \delta_0 = 0.05, \quad \bar{h} = 2, \quad \beta_2 = 1.$$

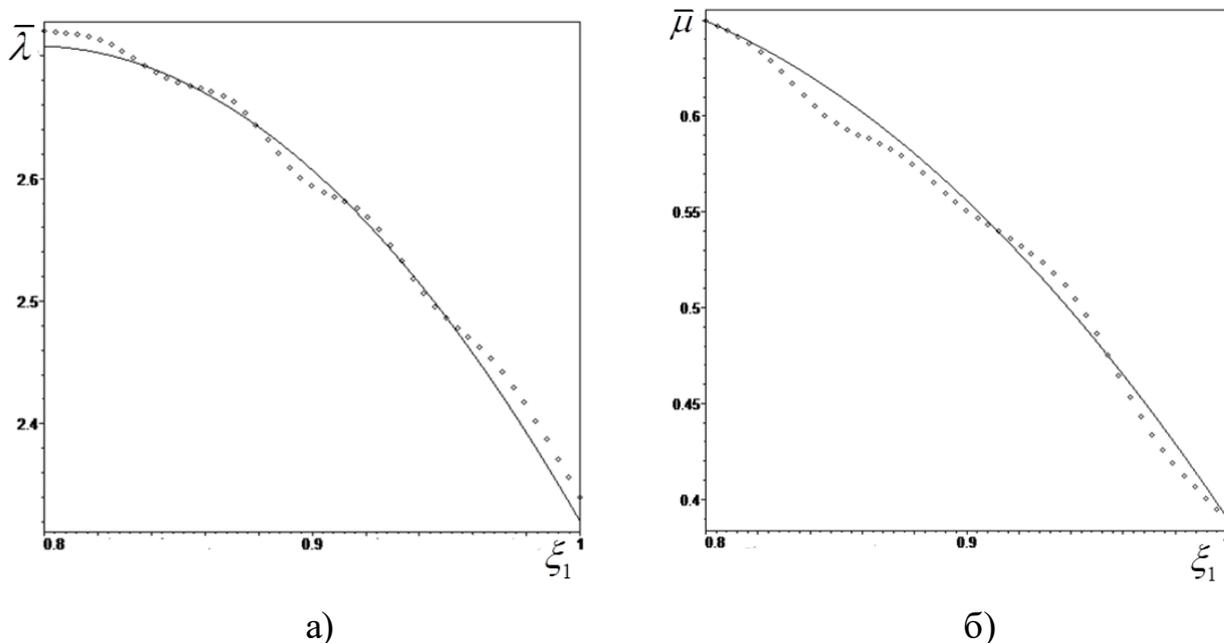


Рисунок 3.4 – Результаты реконструкции механических характеристик цилиндра: а)  $\bar{\lambda}(\xi_1) = -8.83\xi_1^2 + 12.64\xi_1 - 3.56$ ; б)  $\bar{\mu}(\xi_1) = -3.64\xi_1^2 + 5\xi_1 - 1.23$ .

### 3.7 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника в первой постановке.

#### 3.7.1 Постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для прямоугольника. Операторные уравнения в трансформантах

Обратная задача термоупругости для прямоугольника при тепловом нагружении состоит в определении законов изменения безразмерных теплофизических характеристик из (1.5.20)-(1.5.24) при известных остальных характеристиках по информации о трансформанте приращения температуры на верхней грани прямоугольника:

$$\tilde{W}(y_1, 1, p) = \tilde{f}_1(y_1, p), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad p \in [0, \infty). \quad (3.7.1)$$

Обратная задача термоупругости для прямоугольника при механическом нагружении состоит в определении законов изменения безразмерных механических характеристик из (1.5.20)-(1.5.23), (1.5.25) при известных остальных характеристиках по дополнительной информации о трансформантах горизонтального и вертикального перемещений на верхней грани прямоугольника:

$$\tilde{U}_1(y_1, 1, p) = \tilde{f}_2(y_1, p), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad p \in [0, \infty), \quad (3.7.2)$$

$$\tilde{U}_3(y_1, 1, p) = \tilde{f}_3(y_1, p), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad p \in [0, \infty). \quad (3.7.3)$$

Для получения операторных уравнений для изотропного прямоугольника полагаем в соотношениях (3.2.9), (3.2.10)

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad k_{ij} = k \delta_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij} \text{ и учитываем геометрию задачи.}$$

В случае действия на верхней грани прямоугольника только касательной нагрузки, получаем следующее обезразмеренное операторное уравнение:

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 \right) dy_3 dy_1 + p^2 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \tilde{U}_1^{(n-1)} \right)^2 dy_3 dy_1 =$$

$$-\beta_3 \tilde{\psi}(p) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_3(y_1) \left( \tilde{f}_2(y_1, p) - \tilde{U}_1^{(n-1)}(y_1, 1, p) \right) dy_1, \quad p \in [0, \infty). \quad (3.7.4)$$

В случае действия на верхней грани прямоугольника нормальной механической нагрузки или теплового потока получаем следующие обезразмеренные операторные уравнения:

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \left( \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 + 2 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_3} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 \right) \right) dy_3 dy_1 +$$

$$+ \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \left( p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{U}_1^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{U}_3^{(n-1)} \right)^2 \right) - \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right) \tilde{W}^{(n-1)} \right) dy_3 dy_1 =$$

$$= -\beta_2 \tilde{\phi}(p) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_1(y_1) \left( \tilde{f}_3(y_1, p) - \tilde{U}_3^{(n-1)}(y_1, 1, p) \right) dy_1, \quad p \in [0, \infty), \quad (3.7.5)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{W}^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{W}^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 \right) + p \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{W}^{(n-1)} \right)^2 \right) dy_3 dy_1 + \\
& + p \delta_0 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right) \tilde{W}^{(n-1)} dy_3 dy_1 = \\
& = \beta_1 \tilde{\varphi}(p) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_2(y_1) \left( \tilde{f}_1(y_1, p) - \tilde{W}^{(n-1)}(y_1, 1, p) \right) dy_1, \quad p \in [0, \infty). \tag{3.7.6}
\end{aligned}$$

Предположим, что функции  $\tilde{f}_1(y_1, p)$ ,  $\tilde{f}_2(y_1, p)$  и  $\tilde{f}_3(y_1, p)$  допускают разложения в ряды:  $\tilde{f}_1(\xi_1, p) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{\chi}_{N_2}(p) \cos(\nu_{N_2} \xi_1)$ ,  $\tilde{f}_2(\xi_1, p) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{\vartheta}_{N_2}(p) \sin(\nu_{N_2} \xi_1)$ ,

$\tilde{f}_3(\xi_1, p) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \tilde{w}_{N_2}(p) \cos(\nu_{N_2} \xi_1)$ . Тогда для каждой гармоники  $N_2 = 0$ ,  $N_2 = 1$  и т.д.

можно записать следующие операторные уравнения.

При  $N_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( \delta \bar{s}^{(n-1)} \left( \tilde{b}_0^{(n-1)} \right)^2 + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( b_0^{(n-1)} \right)^2 - \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{d}_0^{(n-1)} \tilde{b}_0^{(n-1)} \right) dy_3 = \\
& = -\beta_2 \tilde{\phi}(p) r_0 \left( \tilde{w}_0(p) - \tilde{b}_0^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \tag{3.7.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \tilde{d}_0^{(n-1)} \right)^2 + p \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{d}_0^{(n-1)} \right)^2 + p \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{d}_0^{(n-1)} \tilde{b}_0^{(n-1)} \right) dy_3 = \\
& = \beta_1 \tilde{\varphi}(p) g_0 \left( \tilde{\chi}_0(p) - \tilde{d}_0^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \tag{3.7.8}
\end{aligned}$$

При  $N_2 = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}'_{N_2} \right)^2 + \left( \nu_{N_2} \tilde{a}_{N_2} \right)^2 \right) + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \tilde{a}_{N_2} \right)^2 \right) dy_3 = \\
& = -\beta_3 \tilde{\psi}(p) \zeta_{N_2} \left( \tilde{\vartheta}_{N_2}(p) - \tilde{a}_{N_2}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \tag{3.7.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \nu_{N_2} \tilde{a}_{N_2} + \tilde{b}'_{N_2} \right)^2 + \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \nu_{N_2} \tilde{a}_{N_2} \right)^2 + \left( \tilde{b}'_{N_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \tilde{a}'_{N_2} - \nu_{N_2} \tilde{b}_{N_2} \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}_{N_2} \right)^2 + \left( b_{N_2} \right)^2 \right) - \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{d}_{N_2}^{(n-1)} \left( \nu_{N_2} \tilde{a}_{N_2} + \tilde{b}'_{N_2} \right) \right) dy_3 = \\
& = -\beta_2 \tilde{\phi}(p) r_{N_2} \left( \tilde{w}_{N_2}(p) - \tilde{b}_{N_2}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \tag{3.7.10}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \left( v_{N_2} \tilde{d}_{N_2}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{d}_{N_2}'^{(n-1)} \right)^2 \right) + p \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{d}_{N_2}^{(n-1)} \right)^2 + p \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{d}_{N_2}^{(n-1)} \left( v_{N_2} \tilde{d}_{N_2}^{(n-1)} + b_{N_2}'^{(n-1)} \right) \right) dy_3 =$$

$$= \beta_1 \tilde{\varphi}(p) g_{N_2} \left( \tilde{\chi}_{N_2}(p) - \tilde{d}_{N_2}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.7.11)$$

Здесь  $\bar{s} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}$ .

В правые части выражений (3.7.7), (3.7.8) и (3.7.9)-(3.7.11) входят гармоники трансформант вертикального перемещения и температуры,

$$\text{которые имеют вид: } \tilde{\chi}_0(p) = \frac{1}{2\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1(y_1, p) dy_1, \quad \tilde{w}_0(p) = \frac{1}{2\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_3(y_1, p) dy_1$$

$$\tilde{\chi}_{N_2}(p) = \frac{1}{\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1(\xi_1, p) \cos(v_{N_2} \xi_1) d\xi_1, \quad \tilde{g}_{N_2}(p) = \frac{1}{\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2(\xi_1, p) \sin(v_{N_2} \xi_1) d\xi_1,$$

$$\tilde{w}_{N_2}(p) = \frac{1}{\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_3(\xi_1, p) \cos(v_{N_2} \xi_1) d\xi_1.$$

### 3.7.2 Результаты вычислительных экспериментов

Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции одной из характеристик неоднородного прямоугольника при известных остальных на примере реконструкции коэффициента теплопроводности и упругого модуля  $\bar{s} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}$ .

Операторные уравнения для нахождения поправок коэффициента теплопроводности и упругого модуля  $\bar{s}$  имеют вид:

$$\int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \tilde{d}_0'^{(n-1)} \right)^2 dy_3 = \beta_1 \tilde{\varphi}(p) g_0 \left( \tilde{\chi}_0(p) - \tilde{d}_0^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \quad (3.7.12)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{s}^{(n-1)} \left( \tilde{b}_0'^{(n-1)} \right)^2 dy_3 = -\beta_2 \tilde{\varphi}(p) r_0 \left( \tilde{w}_0(p) - \tilde{b}_0^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \quad (3.7.13)$$

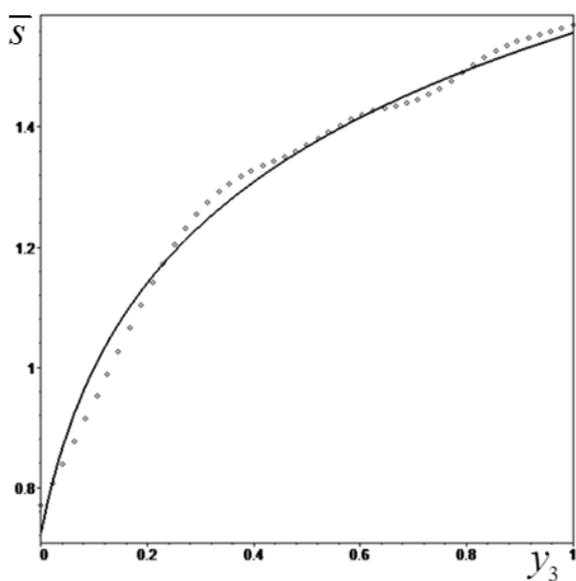
В вычислительных экспериментах принято:  $\beta_0 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,

$$R_1(y_1) = R_2(y_1) = 1 - \frac{y_1^2}{2}, \quad \tilde{\varphi}(p) = \tilde{\psi}(p) = 1. \quad \text{Выяснено, что погрешность}$$

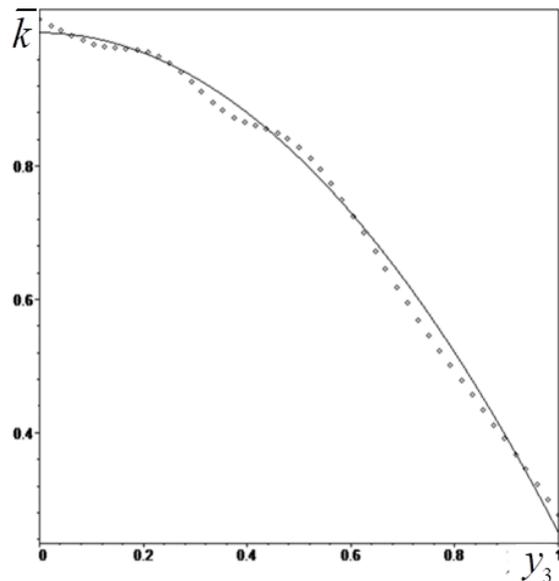
реконструкции монотонных законов коэффициента теплопроводности и упругого модуля прямоугольника не превосходит 5%, а немонотонных – 9%.

На рис. 3.5 представлены результаты восстановления:

а)  $\bar{s}(y_3) = 1 + 0.3 \ln(0.4 + 6y_3)$ ; б)  $\bar{k}(y_3) = 1 - 0.75y_3^2$ .



а)



б)

Рисунок 3.5 – Результаты реконструкции характеристик прямоугольника:

а)  $\bar{s}(y_3) = 1 + 0.3 \ln(0.4 + 6y_3)$ ; б)  $\bar{k}(y_3) = 1 - 0.75y_3^2$ .

## ГЛАВА 4.

### КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ВО ВТОРОЙ ПОСТАНОВКЕ

При решении КОЗ термоупругости в первой постановке (в трансформантах) необходимо знать дополнительную информацию в любой момент времени. Для экспериментальной реализации более подходящей является вторая постановка КОЗ термоупругости, при которой дополнительная информация измеряется на конечном временном интервале.

В данной главе представлены вторые постановки обратных задач термоупругости для неоднородных тел (стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра и прямоугольника). Решение обратных задач строится на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого решается операторное уравнение или система уравнений 1-го рода, полученные путем обращения уравнений в трансформантах.

#### *4.1 Вторая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для неоднородных тел.*

Рассмотрим термоупругое тело, имеющее объем  $V$  и кусочно-гладкую поверхность  $S = S_u \cup S_\sigma = S_T \cup S_q$ . Сформулируем вторые постановки (в оригиналах) обратных задач для термоупругого тела, как при тепловом, так и при механическом способах нагружения.

*Вторая постановка* КОЗ термоупругости при тепловом нагружении тела состоит в нахождении теплофизических характеристик  $(\bar{c}, \bar{k}_{ij}, \bar{\gamma}_{ij})$  при известных остальных из (1.1.8)-(1.1.12) по информации о приращении температуры:

$$W|_{S_q} = f(\bar{x}, \tau_1), \tau_1 \in [a_1, a_2]. \quad (4.1.1)$$

*Вторая постановка* КОЗ термоупругости при механическом нагружении тела состоит в нахождении механических характеристик  $(\bar{c}_{ijkl},$

$\bar{\rho}$ ) при известных остальных из (1.1.13)-(1.1.17) по информации о компонентах вектора перемещения:

$$U_i|_{s_\sigma} = g_i(\bar{x}, \tau_2), \quad i=1,2,3, \quad \tau_2 \in [b_1, b_2]. \quad (4.1.2)$$

Решение нелинейных обратных задач термоупругости на конечном временном интервале построено на основе итерационного процесса, общая схема построения которого в случае восстановления одной термомеханической характеристики при известных остальных, изложена в параграфе 3.3. Операторные уравнения в оригиналах получают путем обращения операторных уравнений в трансформантах (3.2.21)-(3.2.26) на основе теорем операционного исчисления.

#### ***4.2 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного стержня во второй постановке.***

В настоящем параграфе представлены результаты исследования КОЗ для термоупругого стержня [38, 229].

##### **4.2.1 Вторая постановка обратной задачи для стержня. Операторные уравнения для стержня в оригиналах**

Сформулируем вторые постановки КОЗ термоупругости для стержня, как при тепловом, так и при механическом способе нагружения.

*Обратная задача термоупругости для стержня при тепловом нагружении* состоит в определении законов изменения безразмерных теплофизических характеристик  $(\bar{c}(z), \bar{k}(z), \bar{\gamma}(z))$  из (1.2.6)-(1.2.10) при известных остальных характеристиках по информации о температуре на торце стержня:

$$W(1, \tau_1) = f(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2]. \quad (4.2.1)$$

*Обратная задача термоупругости для стержня при механическом нагружении* состоит в определении законов изменения безразмерных механических характеристик  $(\bar{\rho}(z), \bar{E}(z), \bar{\gamma}(z))$  из (1.2.11)-(1.2.15) при

известных остальных характеристиках по информации о смещении на торце стержня:

$$U(1, \tau_2) = g(\tau_2), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2]. \quad (4.2.2)$$

Операторные уравнения в оригиналах для нахождения поправок коэффициента теплопроводности и модуля Юнга после обращения операторных уравнений в трансформантах (3.4.4), (3.4.8) в случае законов изменения торцевой нагрузки  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$  имеют вид [38, 229]:

$$\int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} R_1(z, \tau_1) dz = f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2], \quad (4.2.3)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{E}^{(n-1)} R_2(z, \tau_2) dz = -(g(\tau_2) - U_2^{(n-1)}(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2]. \quad (4.2.4)$$

Здесь ядра уравнений (4.2.3), (4.2.4) имеют вид:

$$R_1(z, \tau_1) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau_1 - \tau)}{\partial z} d\tau,$$

$$R_2(z, \tau_2) = \frac{1}{\beta_2} \int_0^{\tau_2} \frac{\partial^2 U^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau_2 - \tau)}{\partial z} d\tau.$$

Следует отметить, что ядра  $R_1(z, \tau_1)$ ,  $R_2(z, \tau_2)$  являются неотрицательными. Регуляризация ИУФ 1-го рода (4.2.3), (4.2.4) осуществляется на основе метода А.Н. Тихонова.

#### 4.2.2 Результаты решения обратной задачи для стержня

Рассмотрим результаты реконструкции термомеханических характеристик стержня. В вычислениях принято:  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.05$ .

Вначале рассмотрим тепловое нагружение торца стержня. Исследуем влияние выбора временного интервала съема дополнительной информации и количества точек наблюдения внутри него на точность реконструкции на примерах: 1) монотонно возрастающей функции  $\bar{c}(z) = 0.6 + 2z^2$ ; 2) немонотонной функции  $\bar{c}(z) = 1 + (1 - 2z)^2$ .

Временные интервалы съема дополнительной информации определим путем анализа чувствительности к изменению идентифицируемых

характеристик. На рис. 4.1 показаны графики изменения температуры в точке  $z=1$  от времени при следующих законах тепловой нагрузки: а)  $\varphi(\tau_1) = \tau_1 e^{-\tau_1}$ ; б)  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ . При этом сплошной линией изображена температура при  $\bar{c}(z) = 0.6 + 2z^2$ , точками – при  $\bar{c}(z) = 1 + (1 - 2z)^2$ .

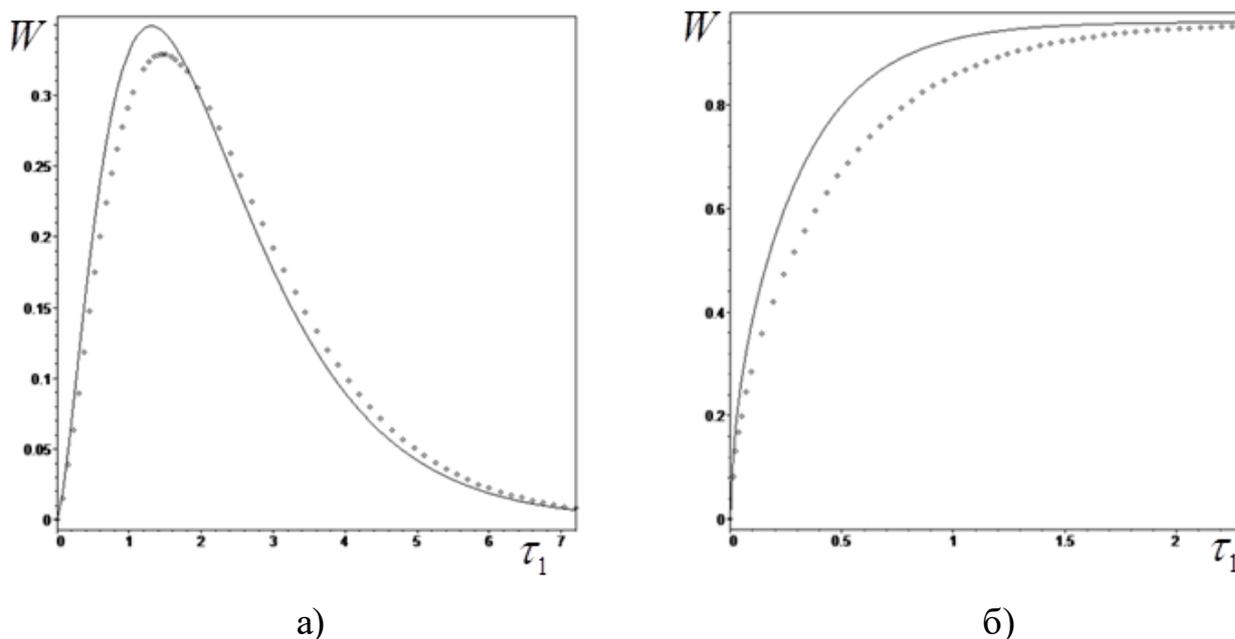


Рисунок 4.1 – Влияние различных законов неоднородности и тепловой нагрузки на изменение торцевой температуры от времени.

На рис. 4.2 показаны результаты реконструкции функции  $\bar{c}(z) = 0.6 + 2z^2$  при нагрузке  $\varphi(\tau_1) = \tau_1 e^{-\tau_1}$  в зависимости от выбора временных отрезков съема дополнительной информации: 1)  $[a_1, a_2] = [0.03, 0.78]$ ; 2)  $[a_1, a_2] = [1.38, 2.98]$ . Первый отрезок выбирался на интервале быстрого увеличения температуры от 0 до максимального значения; второй отрезок – на интервале убывания температуры от максимального значения до нуля. Измерения температуры проводились в 10 точках внутри выбранных отрезков. На рис. 4.2 сплошной линией изображена точная функция, точками – восстановленная функция при выборе первого диапазона, штрихпунктиром – при выборе второго диапазона. В случае решения обратной задачи, когда дополнительная информация снималась на первом отрезке, погрешность реконструкции на 20-й итерации не превышала 3%, а на втором отрезке – 7%.

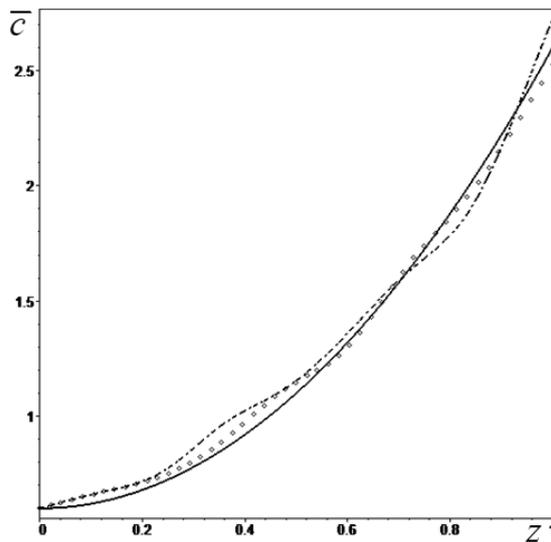


Рисунок 4.2 – Влияние выбора съема временного диапазона дополнительной информации на результаты реконструкции  $\bar{c}(z) = 0.6 + 2z^2$ .

В случае нагрузки  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$  для исследования были выбраны два интервала съема дополнительной информации: 1)  $[a_1, a_2] = [0.04, 0.34]$ ; 2)  $[a_1, a_2] = [0.46, 0.84]$ . Первый отрезок соответствует наиболее быстрому росту температуры, второй – переходному процессу перед выходом на установившийся режим. В первом случае погрешность реконструкции на 20-й итерации не превысила 3%, а во втором – 8%.

Исходя из результатов исследования, следует, что наиболее информативными являются те интервалы, на которых скорость изменения дополнительной информации максимальна и которые находятся в зоне наиболее близкой к началу отчета времени.

В табл. 4.1, 4.2 представлены результаты вычисления невязки (3.3.1) и погрешности реконструкции функций в зависимости от выбора количества точек внутри выбранных диапазонов. Так, в табл. 4.1 представлены данные для монотонной функции  $\bar{c}(z) = 0.6 + 2z^2$  при  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $[a_1, a_2] = [0.04, 0.34]$ ; в табл. 4.2 – для немонотонной функции  $\bar{c}(z) = 1 + (1 - 2z)^2$  при  $\varphi(\tau_1) = \tau_1 e^{\tau_1}$  и  $[a_1, a_2] = [0.03, 0.78]$ .

Таблица 4.1

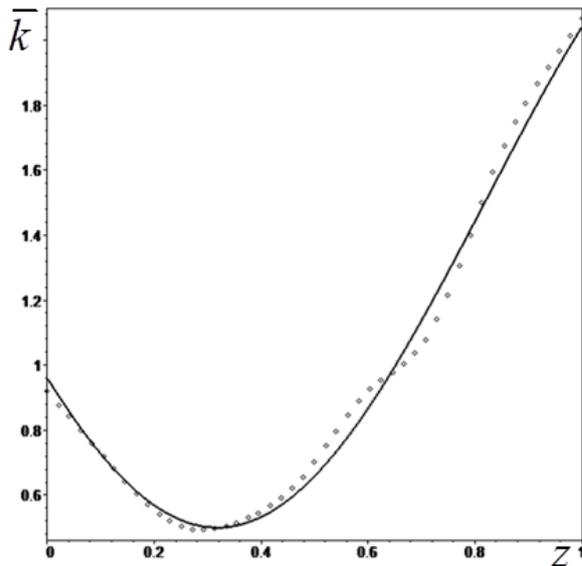
Количество точек	Невязка $J_1$	Относительная погрешность, %
2	0.0010942	8.65
3	0.0000753	3.95
4	0.0000019	1.84
5	0.00000093	1.49
6	0.00000087	1.35

Таблица 4.2

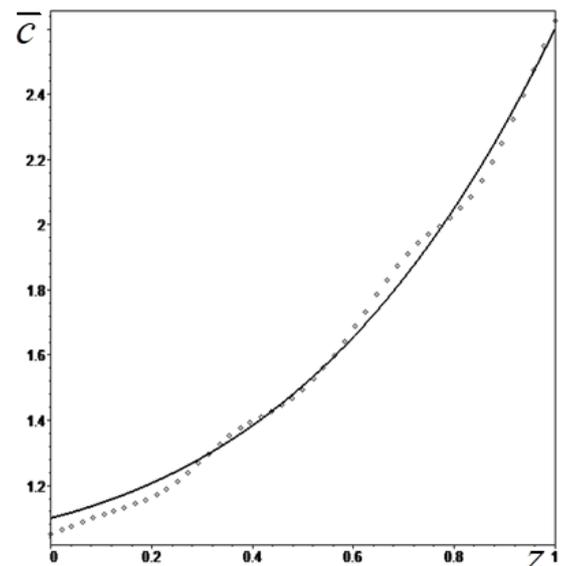
Количество точек	Невязка $J_1$	Относительная погрешность, %
2	0.00083630	13.65
3	0.00023432	10.85
4	0.00008164	7.44
5	0.00001268	5.29
6	0.00000137	3.76
7	0.00000096	3.36
8	0.00000076	3.28

Из табл. 4.1 и 4.2 следует, что выбор числа точек съема дополнительной информации зависит от монотонности восстанавливаемых функций. Так, для монотонной функции для достижения предельного значения невязки (3.3.1) достаточно 5 точек, а для немонотонной – 7 точек.

Рассмотрим результаты реконструкции монотонных и немонотонных функций. На рис. 4.3 изображены результаты реконструкции теплофизических характеристик стержня: а) немонотонной функции  $\bar{k}(z) = 1.5 - \cos(\pi z - 1)$ ; б) возрастающей функции  $\bar{c}(z) = 1 + 0.1(z+1)^4$  при  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.04$ ,  $[a_1, a_2] = [0.04, 0.34]$ .



а)



б)

Рисунок 4.3 – Результат реконструкции:

а)  $\bar{k}(z) = 1.5 - \cos(\pi z - 1)$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1 + 0.1(z+1)^4$ .

Исследован выбор закона теплового нагружения на относительную погрешность реконструкции. В табл. 4.3 представлены значения максимальной относительной погрешности реконструкции функций при тепловых нагрузках: а)  $\varphi(\tau_1) = \tau_1 e^{-\tau_1}$ ; б)  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ; в)  $\varphi(\tau_1) = \delta(\tau_1)$ .

Таблица 4.3

Функции	Относительная погрешность реконструкции		
	$\varphi(\tau_1) = \tau_1 e^{-\tau_1}$	$\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$	$\varphi(\tau_1) = \delta(\tau_1)$
$\bar{k}(z) = 1.5 - \cos(\pi z - 1)$	5.4	5.9	5.7
$\bar{c}(z) = 1 + 0.1(z+1)^4$	2.9	2.8	3.1
$\bar{c}(z) = 0.6 + 2z^2$	1.6	1.4	1.3
$\bar{c}(z) = 1 + (1 - 2z)^2$	3.3	3.7	3.5

Исходя из табл. 4.3 следует, что максимальная относительная погрешность реконструкции функций при различных тепловых нагрузках отличается не более, чем на 0.5%.

Проведено исследование сходимости итерационного процесса реконструкции. В табл. 4.4 представлены значения функционала невязки и относительной погрешности реконструкции функции  $\bar{k}(z) = 1.5 - \cos(\pi z - 1)$ .

Таблица 4.4

Номер итерации $n$	Невязка $J_1$	Относительная погрешность, %
1	0.00296596	19.8
2	0.00024487	15.4
3	0.00001750	10.7
4	00.00000288	7.2
5	0.00000094	6.0
6	0.00000080	5.9

Из табл. 4.4 следует, что итерационный процесс реконструкции  $\bar{k}(z)$  быстро сходится, т.к. функционал невязки  $J_1$  на пятой итерации достигает порогового значения, а дальнейшее увеличение числа итераций практически не увеличивает точность реконструкции. При этом увеличиваются затраты машинного времени.

Рассмотрим теперь случай механического нагружения торца стержня. При исследовании выбора числа временных точек съема дополнительной информации на результаты реконструкции выяснено, для реконструкции монотонных функций достаточно взять 6 точек, а для немонотонных – 10 точек внутри выбранных информативных временных отрезков.

На рис. 4.4 показан пример реконструкции механических характеристик в виде монотонных функций: а)  $\bar{E}(z) = 2.5 - z^2$ ; б)  $\bar{\rho}(z) = 1.2 + \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$  при  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$  и 6 точках наблюдения внутри отрезка  $[b_1, b_2] = [0.02, 0.75]$ . Погрешность реконструкции не превысила 4%.

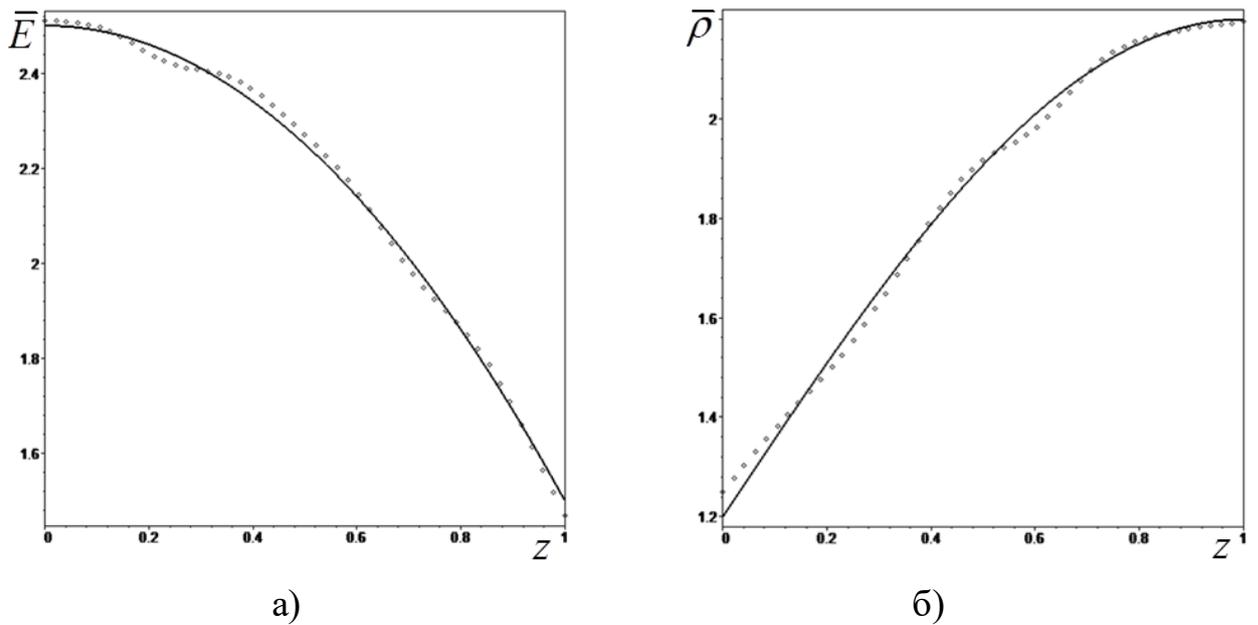


Рисунок 4.4 – Результат восстановления возрастающих функций:

$$\text{а) } \bar{E}(z) = 2.5 - z^2; \text{ б) } \bar{\rho}(z) = 1.2 + \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

Проведено сравнение результатов реконструкции механических характеристик в первой постановке (в пространстве трансформант) и во второй постановке (на конечном временном интервале).

На рис. 4.5 изображен результат реконструкции немонотонной функции  $\bar{E}(z) = -2z^3 + 2.2z^2 + 0.3$ . При этом штрихпунктиром изображено решение в 1-й постановке, точками – во второй постановке. В вычислениях принято:  $\bar{E}_0(z) = 0.4 + 0.1z$ ,  $\phi(\tau_2) = \tau_2 e^{-\tau_2}$  при 10 точках наблюдения внутри отрезка  $[b_1, b_2] = [0.07, 0.67]$ .

Выяснено, что погрешность реконструкции модуля Юнга в рассмотренных постановках отличается друг от друга на 1%. Так, в первой постановке погрешность не превышает 8%, а во второй – 7%.

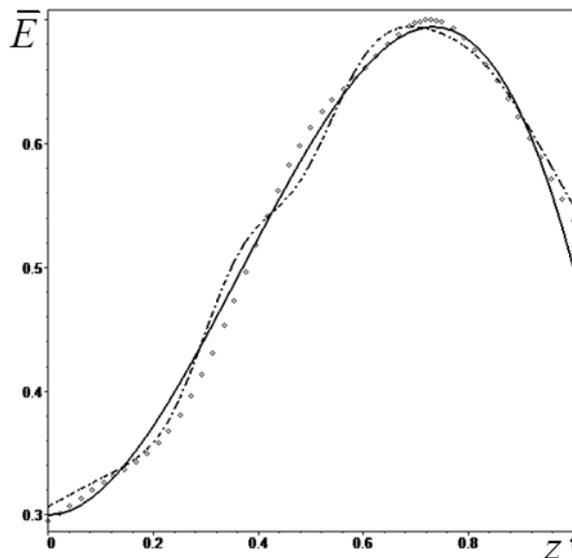


Рисунок 4.5 – Результат восстановления немонотонной функции

$$\bar{E}(z) = -2z^3 + 2.2z^2 + 0.3.$$

Для оценки устойчивости предложенного подхода решения КОЗ к измерительной ошибке съема дополнительной информации, проведено ее зашумление по формуле:

$$f_{\beta}(\tau_1) = f(\tau_1)(1 + \beta\gamma_0), \quad (4.2.5)$$

где  $\beta$  – амплитуда зашумления,  $\gamma_0$  – случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке  $[-1, 1]$ .

В табл. 4.5 представлены результаты идентификации функции  $\bar{E}(z) = 2.5 - z^2$ , как при отсутствии, так и при наличии 1%-го зашумления входной информации.

Таблица 4.5

Координата $z$	Точное значение $\bar{E}(z)$	Восстановленное значение $\bar{E}(z)$		Относительная погрешность реконструкции, %	
		$\beta = 0$	$\beta = 0.01$	$\beta = 0$	$\beta = 0.01$
0	2.50	2.54	2.63	1.61	5.20
0.1	2.49	2.52	2.61	1.22	4.81
0.2	2.46	2.42	2.59	1.62	5.28
0.3	2.41	2.39	2.46	0.83	2.07
0.4	2.34	2.37	2.40	1.28	2.56
0.5	2.25	2.27	2.35	0.89	4.44

Продолжение табл. 4.5

0.6	2.14	2.16	2.23	0.93	2.76
0.7	2.01	1.98	2.08	1.49	3.48
0.8	1.86	1.90	1.95	2.15	4.84
0.9	1.69	1.70	1.78	0.59	5.33
1.0	1.50	1.46	1.60	2.67	6.67

На рис. 4.6 представлен результат восстановления  $\bar{k}(z) = 3 - \ln(1 + 7z)$ , как при отсутствии зашумления (точки), так и при 1%-м шуме (штрихпунктир), которым обычно моделируют реальную измерительную ошибку.

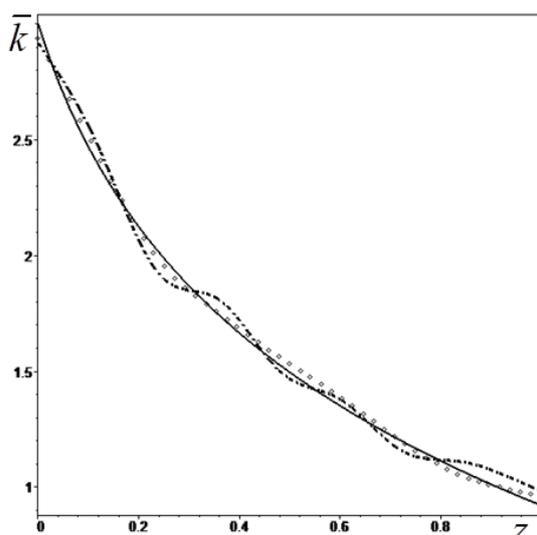


Рисунок 4.6 – Результат реконструкции функции  $\bar{k}(z) = 3 - \ln(1 + 7z)$  при отсутствии и наличии зашумления входной информации.

Из рис. 4.6 и табл. 4.5 следует, что при 1%-м шуме погрешность реконструкции функции характеристик не превышает 9%, что означает устойчивость схемы идентификации к зашумлению входной информации.

Проведена также реконструкция термомеханических характеристик составного стержня, одна часть которого изготовлена из ФГМ. На рис. 4.7

изображены результаты реконструкции: 
$$\bar{c}(z) = \begin{cases} 0.02 + \cos(z), & z \in [0, 0.2] \\ 1, & z \in [0.2, 1] \end{cases},$$

$$\bar{E}(z) = \begin{cases} 0.2 + z^2, & z \in [0, 0.3] \\ 1, & z \in [0.3, 1] \end{cases}.$$
 Точка сопряжения стержней полагается известной.

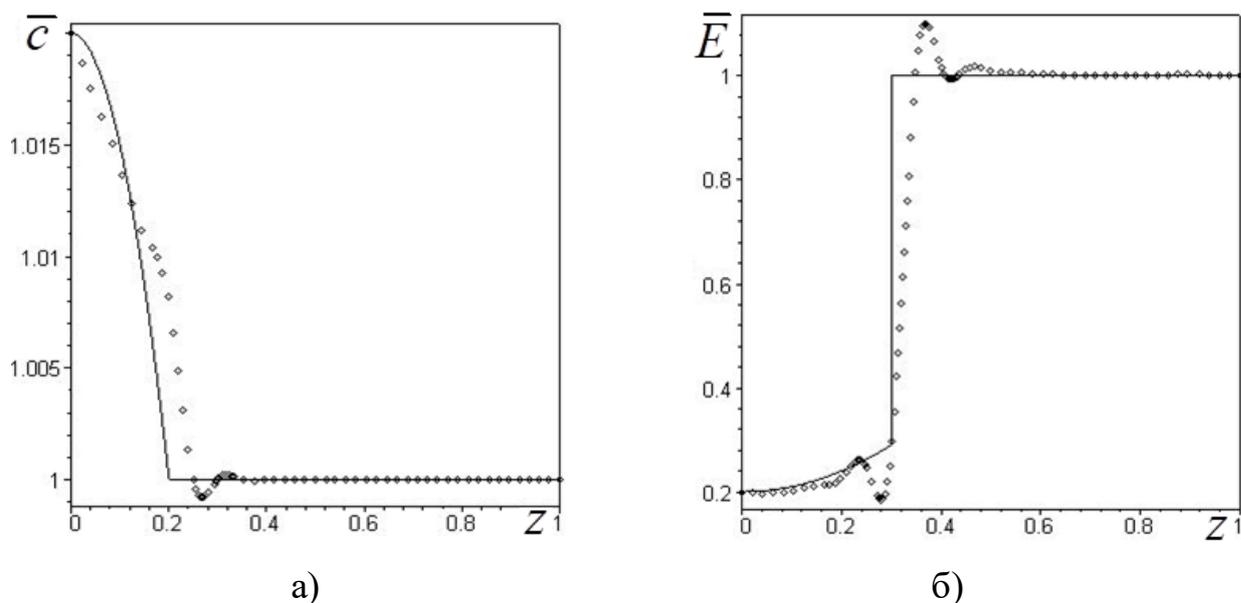


Рисунок 4.7 – Результаты реконструкции термомеханических характеристик составного стержня.

Из рис. 4.7 следует, что 1) наибольшая погрешность реконструкции возникает в окрестности сопряжения стержней; 2) при увеличении скорости изменения термомеханической характеристики погрешность ее реконструкции возрастает.

#### 4.2.3 Постановка задачи об одновременной идентификации двух характеристик стержня. Итерационная схема решения

В соответствии с [81] рассмотрим процедуру реконструкции двух материальных характеристик неоднородного стержня. В этом случае одного операторного уравнения недостаточно, нужно получить второе уравнение, рассмотрев задачу термоупругости с другими граничными условиями.

Рассмотрим постановку КОЗ термоупругости при тепловом нагружении стержня в квазистатической постановке и два типа тепловой нагрузки на торце  $z = 1$ : 1) тепловой поток, 2) температура, изменяющаяся по закону  $\tau_1 e^{-\tau_1}$ .

Обезразмеренная постановка задачи 1 совпадает с (1.2.6)-(1.2.10) при  $\beta_1 = 1, \varepsilon_0 = 0$ .

В качестве дополнительной информации выступает торцевая температура:

$$W_I(1, \tau_1) = f_I(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (4.2.6)$$

Обезразмеренная постановка задачи 2 имеет вид [68, 81]:

$$\frac{\partial \Omega_{II}}{\partial z} = 0, \quad z \in [0, 1], \quad (4.2.7)$$

$$\Omega_{II} = \bar{E}(z) \frac{\partial U_{II}}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W_{II}, \quad (4.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial W_{II}}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W_{II}}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U_{II}}{\partial z \partial \tau_1}, \quad (4.2.9)$$

$$W_{II}(0, \tau_1) = U_{II}(0, \tau_1) = 0, \quad \Omega_{II}(1, \tau_1) = 0, \quad W_{II}(1, \tau_1) = \tau_1 e^{-\tau_1}, \quad (4.2.10)$$

$$W_{II}(z, 0) = U_{II}(z, 0) = \frac{\partial U_{II}}{\partial \tau_1}(z, 0) = 0. \quad (4.2.11)$$

В качестве дополнительной информации выступает тепловой поток на торце  $z=1$ :

$$Q_{II}(1, \tau_1) = f_{II}(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_2, b_2]. \quad (4.2.12)$$

Итерационный процесс идентификации двух функций состоит из следующих этапов.

1) Нахождение начальных приближений в виде линейных функций на основе минимизации функционала невязки:

$$J = \int_{a_1}^{b_1} (f_I(\tau_1) - W_I(1, \tau_1))^2 d\tau_1 + \int_{a_2}^{b_2} (f_{II}(\tau_1) - Q_{II}(1, \tau_1))^2 d\tau_1. \quad (4.2.13)$$

2) Корректировка законов неоднородности путем нахождения поправок  $\delta \bar{a}_1^{(n-1)}$ ,  $\delta \bar{a}_2^{(n-1)}$  из решения системы 2-х ИУФ 1-го рода.

Строятся новые приближения  $\bar{a}_1^{(n)} = \bar{a}_1^{(n-1)} + \delta \bar{a}_1^{(n-1)}$ ,  $\bar{a}_2^{(n)} = \bar{a}_2^{(n-1)} + \delta \bar{a}_2^{(n-1)}$ .

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто одно из условий останова; 1) ограничение по количеству итераций, равное  $n=20$ ; 2) достижение предельного значения функционала невязки  $J$ , равного  $10^{-4}$ .

#### 4.2.4 Результаты идентификации двух характеристик стержня

Для реконструкции теплофизических характеристик, исходя из постановки задачи, получена система двух операторных уравнений 1-го рода:

$$p \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz + \\ + \delta_0 p^2 \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_I^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}_I^{(n-1)} dz = \tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (4.2.14)$$

$$(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz + \\ + \delta_0 p(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_{II}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}_{II}^{(n-1)} dz = \tilde{f}_{II}(p) - \tilde{Q}_{II}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty). \quad (4.2.15)$$

Ограничимся идентификацией  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{c}(z)$  при известной  $\bar{\gamma}(z)$ . В этом случае, полагая в (4.2.14), (4.2.15)  $\delta \bar{\gamma}^{(n-1)} = 0$ , получим:

$$p \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz = \tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p), \quad (4.2.16)$$

$$(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz = \tilde{f}_{II}(p) - \tilde{Q}_{II}^{(n-1)}(1, p). \quad (4.2.17)$$

Система операторных уравнений в оригиналах получается путем обращения системы в трансформантах (4.2.16), (4.2.17).

Для регуляризации решения системы ИУФ 1-го рода применяется метод Тихонова А.Н. Для этого вводятся равномерные разбиения: 1) отрезка

$z \in [0, 1]$  на  $n_4$  отрезков точками  $z_j = \frac{j-1}{n_3-1}$ ,  $j=1..n_4$ ; 2) временных отрезков

$[a_1, b_1]$  и  $[a_2, b_2]$  на  $m_4$  отрезков точками  $\eta_{1i} = \frac{b_1 - a_1}{m_4 - 1}(i-1)$ ,  $\eta_{2i} = \frac{b_2 - a_2}{m_4 - 1}(i-1)$ ,

$i=1..m_4$ . Решение КОЗ сводится к решению регуляризованной системы уравнений, которая имеет вид:

$$B_\alpha y_0 = F_\alpha, \quad (4.2.18)$$

где  $B_\alpha = B + \alpha_0 \Phi_0$ ,  $B = \Lambda^T \Lambda$ ,  $F_\alpha = \Lambda^T b_0$ ,  $\Phi_0 = E + \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_0 \end{pmatrix}$ ,  $E$  – единичная матрица,

$C_0$  – матрица, введенная в п. 3.4.3. Компоненты матрицы  $\Lambda$  и векторов  $y_0$ ,  $b_0$

ИМЕЮТ ВИД:

$$y_j = \begin{cases} \bar{a}_1(z_j), j = 1 \dots n_4 \\ \bar{a}_2(z_{j-n_4}), j = n_4 + 1 \dots 2n_4 \end{cases}, \quad b_{0i} = \begin{cases} f_I(\eta_{1i}), i = 1 \dots m_4 \\ f_{II}(\eta_{2i-m_4}), i = m_4 + 1 \dots 2m_4 \end{cases},$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} R_{11}(z_j, \eta_{1i}), i = 1 \dots m_4, j = 1 \dots n_4 \\ R_{12}(z_{j-n_4}, \eta_{1i}), i = 1 \dots m_4, j = n_4 + 1 \dots 2n_4 \\ R_{21}(z_j, \eta_{2i-m_4}), i = m_4 + 1 \dots 2m_4, j = 1 \dots n_4 \\ R_{22}(z_{j-n_4}, \eta_{2i-m_4}), i = m_4 + 1 \dots 2m_4, j = n_4 + 1 \dots 2n_4 \end{cases}.$$

Параметр регуляризации  $\alpha_0$  выбирается согласно принципу обобщенной невязки.

На рис. 4.8 изображены результаты восстановления функций: а)  $\bar{k}(z) = 1 - 0.5(z-1)^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 0.5(1+z^2)$  при  $\bar{\gamma}(z) = \bar{\rho}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2z$ ,  $\delta_0 = 0.03$  и  $[a_1, b_1] = [0.04, 0.72]$ ,  $[a_2, b_2] = [0.006, 0.08]$ . Максимальная погрешность реконструкции 2-х функций не превысила 7%.

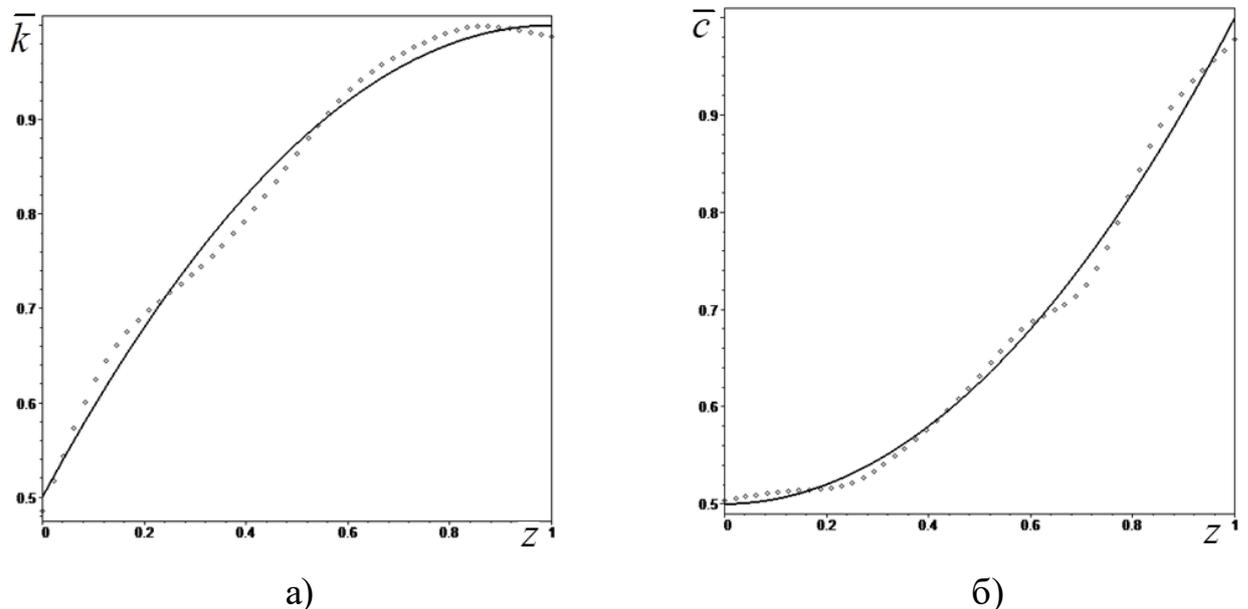


Рисунок 4.8 – Результаты реконструкции двух характеристик стержня:

а)  $\bar{k}(z) = 1 - 0.5(z-1)^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 0.5(1+z^2)$ .

### 4.3 Коэффициентная обратная задача термоупругости для поперечно неоднородного слоя.

В данном параграфе в соответствии с [47, 53, 67] представлено решение задачи об идентификации материальных характеристик неоднородного слоя.

#### 4.3.1 Постановка коэффициентной обратной задачи для слоя на конечном временном отрезке

Рассмотрим термоупругий слой  $(x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h])$ , нижняя грань которого  $x_3 = 0$  жестко закреплена, а на верхней грани  $x_3 = h$  приложена нестационарная нагрузка. Постановка задачи в случае неустановившихся колебаний поперечно неоднородного термоупругого слоя имеет вид [47]:

$$(\lambda + 2\mu)u_{1,11} + (\lambda u_{3,3})_{,1} + (\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,3} - (\gamma\theta)_{,1} = \rho\ddot{u}_1, \quad (4.3.1)$$

$$((\lambda + 2\mu)u_{3,3})_{,3} + (\lambda u_{1,1})_{,3} + (\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,1} - (\gamma\theta)_{,3} = \rho\ddot{u}_3, \quad (4.3.2)$$

$$k\theta_{,11} + (k\theta_{,3})_{,3} = c_\epsilon \dot{\theta} + T_0 \gamma (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{3,3}), \quad (4.3.3)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = 0, \quad (4.3.4)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = F_1(x_1, t), \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = F_2(x_1, t), \quad q(x_1, h, t) = F_3(x_1, t), \quad (4.3.5)$$

$$\theta(x_1, x_3, 0) = u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_1(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_3(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (4.3.6)$$

КОЗ термоупругости состоит в определении термомеханических характеристик слоя по дополнительной информации о полях температуры и перемещений, измеренных на его верхней границе:

$$\theta(x_1, h, t) = f(x_1, t), \quad t \in [T_1, T_2], \quad (4.3.7)$$

$$u_i(x_1, h, t) = g_i(x_1, t), \quad i = 1, 3, \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (4.3.8)$$

#### 4.3.2 Получение упрощенных задач

Применив к (4.3.1)-(4.3.8) преобразование Фурье по продольной координате, получим:

$$-\omega^2(\lambda + 2\mu)\hat{u}_1 - i\omega\lambda\hat{u}_{3,3} + (\mu(\hat{u}_{1,3}) - i\omega\hat{u}_{3,3})_{,3} + i\omega\gamma\hat{\theta} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (4.3.9)$$

$$\left((\lambda + 2\mu)\hat{u}_{3,3}\right)_{,3} - i\omega\lambda\hat{u}_{1,3} - i\omega\mu\hat{u}_{1,3} - \omega^2\mu\hat{u}_3 - (\gamma\hat{\theta})_{,3} = \rho\frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial t^2}, \quad (4.3.10)$$

$$-\omega^2k\hat{\theta} + (k\hat{\theta}_{,3})_{,3} - c\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial t} - T_0\gamma\left(-i\omega\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial x_3\partial t}\right) = 0, \quad (4.3.11)$$

$$\hat{u}_1(0,t) = \hat{u}_3(0,t) = \hat{\theta}(0,t) = 0, \quad (4.3.12)$$

$$\hat{\sigma}_{33}(h,t) = \hat{F}_1(t), \quad \hat{\sigma}_{13}(h,t) = \hat{F}_2(t), \quad \hat{q}(h,t) = \hat{F}_3(t), \quad (4.3.13)$$

$$\hat{\theta}(x_3,0) = \hat{u}_1(x_3,0) = \hat{u}_3(x_3,0) = \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial t}(x_3,0) = \frac{\partial\hat{u}_3}{\partial t}(x_3,0) = 0, \quad (4.3.14)$$

$$\hat{\theta}(h,t) = \hat{f}(t), \quad t \in [T_1, T_2], \quad (4.3.15)$$

$$\hat{u}_i(h,t) = \hat{g}_i(t), \quad t \in [T_3, T_4], \quad i = 1, 3. \quad (4.3.16)$$

Если положить в (4.3.9)-(4.3.15)  $\omega = 0$ , то получим две упрощенные несвязанные задачи относительно усредненных по  $x_1$  компонент полей, в одну из которых входят функции  $\mu(x_3)$  и  $\rho(x_3)$ , а в другую —  $\lambda(x_3)$ ,  $\gamma(x_3)$ ,  $k(x_3)$ ,  $c(x_3)$ .

Идентификация термомеханических характеристик сводится к последовательному решению двух одномерных КОЗ.

*Постановка обратной задачи 1:*

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial x_3}\right) = \rho(x_3)\frac{\partial^2\hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (4.3.17)$$

$$\hat{u}_1(0,t) = 0, \quad \mu\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h} = \hat{F}_2(t), \quad (4.3.18)$$

$$\hat{u}_1(x_3,0) = 0, \quad (4.3.19)$$

$$\hat{u}_1(h,t) = \hat{g}_1(t), \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (4.3.20)$$

*Постановка обратной задачи 2:*

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial\hat{u}_3}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\gamma\hat{\theta}) = \rho\frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial t^2}, \quad (4.3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k(x_3)\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_3}\right) - c(x_3)\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial t} - T_0\gamma\frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial x_3\partial t} = 0, \quad (4.3.22)$$

$$\hat{u}_3(0,t) = \hat{\theta}(0,t) = 0, \quad (4.3.23)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} - \gamma \hat{\theta} \Big|_{x_3=h} = \hat{F}_1(t), \quad -k(x_3) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} = \hat{F}_3(t), \quad (4.3.24)$$

$$\hat{\theta}(x_3, 0) = \hat{u}_3(x, 0) = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}(x_3, 0) = 0, \quad (4.3.25)$$

$$\hat{\theta}(h,t) = \hat{f}(t), \quad t \in [T_1, T_2], \quad (4.3.26)$$

$$\hat{u}_3(h,t) = \hat{g}_3(t), \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (4.3.27)$$

*Задача 1* аналогична обратной задаче для упругого стержня, а *задача 2* – для термоупругого стержня. Проведем обезразмеривание поставленных задач как в задаче для термоупругого стержня, введя дополнительно функции

$$\text{и параметры: } \bar{U}_1 = \frac{\hat{u}_1}{h}, \quad \bar{U}_3 = \frac{\hat{u}_3}{h}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \bar{s} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu_0}, \quad \bar{F}_2 = \frac{F_2}{\mu_0}.$$

*Постановка обезразмеренной обратной задачи 1:*

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z} \right) = \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \tau_2^2}, \quad (4.3.28)$$

$$\bar{U}_1(0, \tau_2) = 0, \quad \bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z}(1, \tau_2) = \bar{F}_2(\tau_2), \quad (4.3.29)$$

$$\bar{U}_1(z, 0) = 0, \quad (4.3.30)$$

$$\bar{U}_1(1, \tau_2) = g_1(\tau_2), \quad \tau_2 \in [a_1, b_1]. \quad (4.3.31)$$

*Постановка обезразмеренной обратной задачи 2:*

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{s}(z) \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z) \bar{W}) = \varepsilon_0^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial \tau_1^2}, \quad (4.3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial z \partial \tau_1}, \quad (4.3.33)$$

$$\bar{U}_3(0, \tau_1) = \bar{W}(0, \tau_1) = 0, \quad (4.3.34)$$

$$\bar{s}(z) \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial z}(0, \tau_1) - \bar{\gamma} \bar{W}(0, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}(z) \frac{\partial \bar{W}}{\partial z}(0, \tau_1) = \bar{F}_3(\tau_1), \quad (4.3.35)$$

$$\bar{W}(z, 0) = \bar{U}_3(z, 0) = \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \tau_1}(z, 0) = 0, \quad (4.3.36)$$

$$\bar{W}(1, \tau_1) = f(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_3, b_3]. \quad (4.3.37)$$

Нелинейные обратные задачи (4.3.28)-(4.3.31) и (4.3.32)-(4.3.37) решаются на основе построения итерационного процесса по схеме, предложенной в параграфе 3.3.

В ходе решения *обратной задачи 1*, полагая известной плотность  $\bar{\rho}(z)$ , методом линеаризации получено операторное уравнение для нахождения поправок модуля сдвига  $\bar{\mu}(z)$  при механической нагрузке  $\bar{F}_2(\tau_2) = H(\tau_2)$ :

$$\int_0^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} L_1(z, \tau_2) dz = -(g_1(\tau_2) - \bar{U}_1(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [a_1, b_1], \quad (4.3.38)$$

$$\text{где } L_1(z, \tau_2) = \int_0^{\tau_2} \frac{\partial^2 \bar{U}_1(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial \bar{U}_1(z, \tau - \tau_2)}{\partial z} d\tau.$$

При этом прямая задача (4.3.28)-(4.3.31) после применения преобразования Лапласа сводится к ИУФ 2-го рода:

$$\tilde{U}_1(z, p) = \int_0^1 K_5(z, \eta, p) \tilde{U}_1(\eta, p) d\eta + \int_0^z \frac{d\eta}{\bar{\mu}(\eta)}, \quad (4.3.39)$$

$$\text{где } K_5(z, \eta, p) = p^2 \bar{\rho}(\eta) \int_0^{\min\{\eta, z\}} \frac{d\zeta}{\bar{\mu}(\zeta)}.$$

Если известен модуль сдвига, то для уточнения функции  $\bar{\rho}(z)$  в ходе итерационного процесса необходимо решать операторное уравнение:

$$\int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} L_2(z, \tau_2) dz = -(g_1(\tau_2) - \bar{U}_1(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [a_1, b_1], \quad (4.3.40)$$

$$\text{где } L_2(z, \tau_2) = \int_0^{\tau_2} \frac{\partial \bar{U}_1(z, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{U}_1(z, \tau - \tau_2)}{\partial \tau} d\tau.$$

Далее, в ходе решения *обратной задачи 2*, используя операторные уравнения, полученные в параграфе 4.2, находятся либо теплофизические характеристики ( $\bar{c}(z)$ ,  $\bar{k}(z)$ ,  $\bar{\gamma}(z)$ ), либо упругий модуль  $\bar{s}(z)$ .

### 4.3.3 Результаты идентификация свойств слоя

Сначала рассмотрим результаты решения *обратной задачи 1*.

На рис. 4.9 представлены результаты реконструкции неоднородных законов плотности: а)  $\bar{\rho}(z) = 0.6 + \sin(1.6z)$ ; б)  $\bar{\rho}(z) = \frac{2}{\sqrt{3-z^2}}$  на временном отрезке  $[a_1, b_1] = [0.12, 0.72]$ .

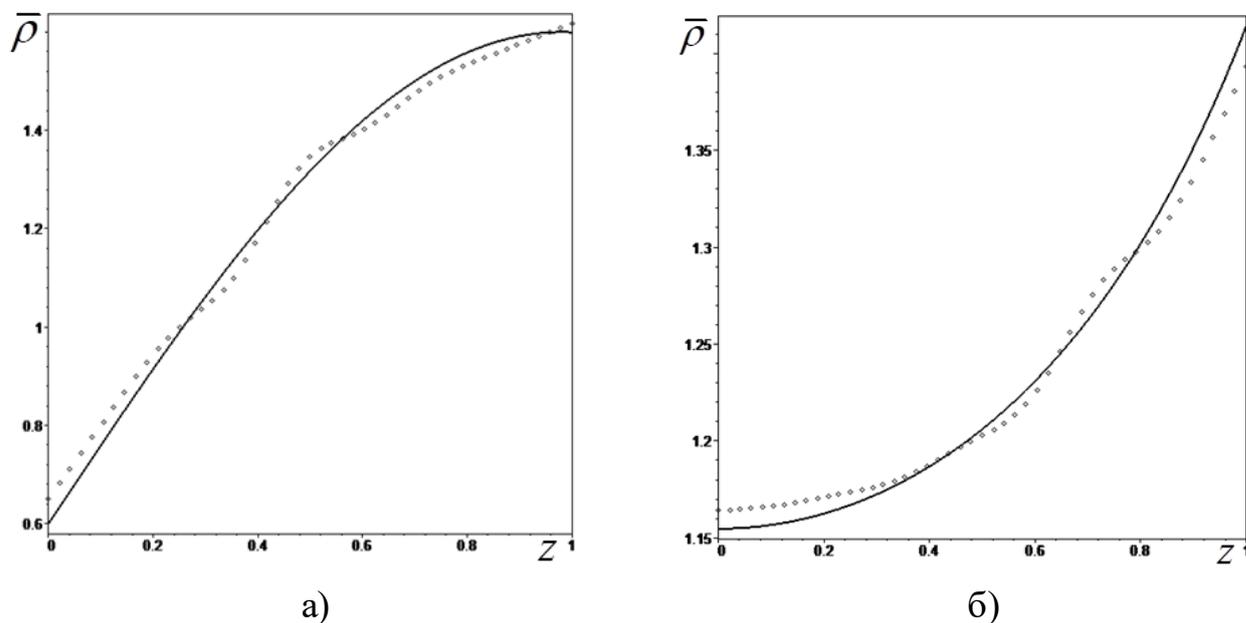


Рисунок 4.9 – Результаты реконструкции плотности слоя: а)

$$\bar{\rho}(z) = 0.6 + \sin(1.6z); \text{ б) } \bar{\rho}(z) = \frac{2}{\sqrt{3-z^2}}.$$

На рис. 4.10 показан результат реконструкции модуля сдвига  $\bar{\mu}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.45)^4}$ , который показывает наличие зоны локальной неоднородности внутри слоя.

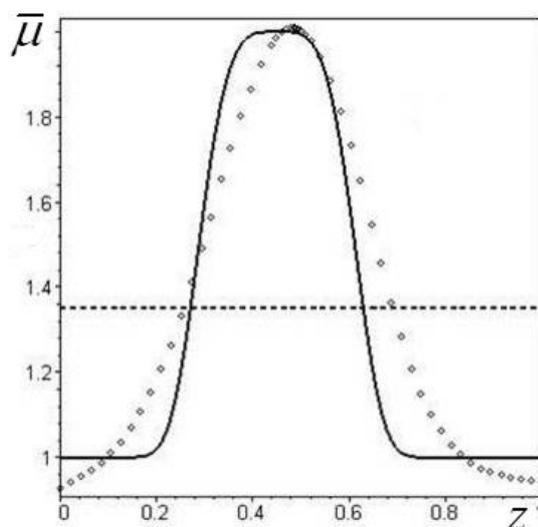


Рисунок 4.10 – Результат реконструкции модуля сдвига слоя.

Из рис. 4.10 следует, что погрешность реконструкции  $\bar{\mu}(z)$  достаточно большая, как из-за немонотонности функции, так и ее быстрого изменения на небольшом интервале.

Далее рассмотрим результаты решения *обратной задачи 2* на примере реконструкции коэффициента теплопроводности кожной ткани.

Поправки для  $\bar{k}(z)$  в итерационном процессе идентификации при  $\bar{F}_3(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\beta_1 = 1$  находились путем решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} L_3(z, \tau_1) dz = f(\tau_1) - \bar{W}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_3, b_3], \quad (4.3.41)$$

$$\text{где } L_3(z, \tau_1) = \int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 \bar{W}(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial \bar{W}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau.$$

На рис. 4.11 показаны результаты реконструкции коэффициента теплопроводности: а) нормальной; б) патологически измененной кожи,

$$\text{который моделируется в виде } \bar{k}(z) = \begin{cases} 0.14 + 0.3z^2, & 0 \leq z \leq 0.6 \\ 0.5, & 0.6 < z \leq 0.8 \\ 0.23, & 0.8 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad \text{при } \delta_0 = 0.05 \text{ и}$$

$[a_3, b_3] = [0.04, 0.48]$ . Поверхности сопряжения слоев полагаются известными.

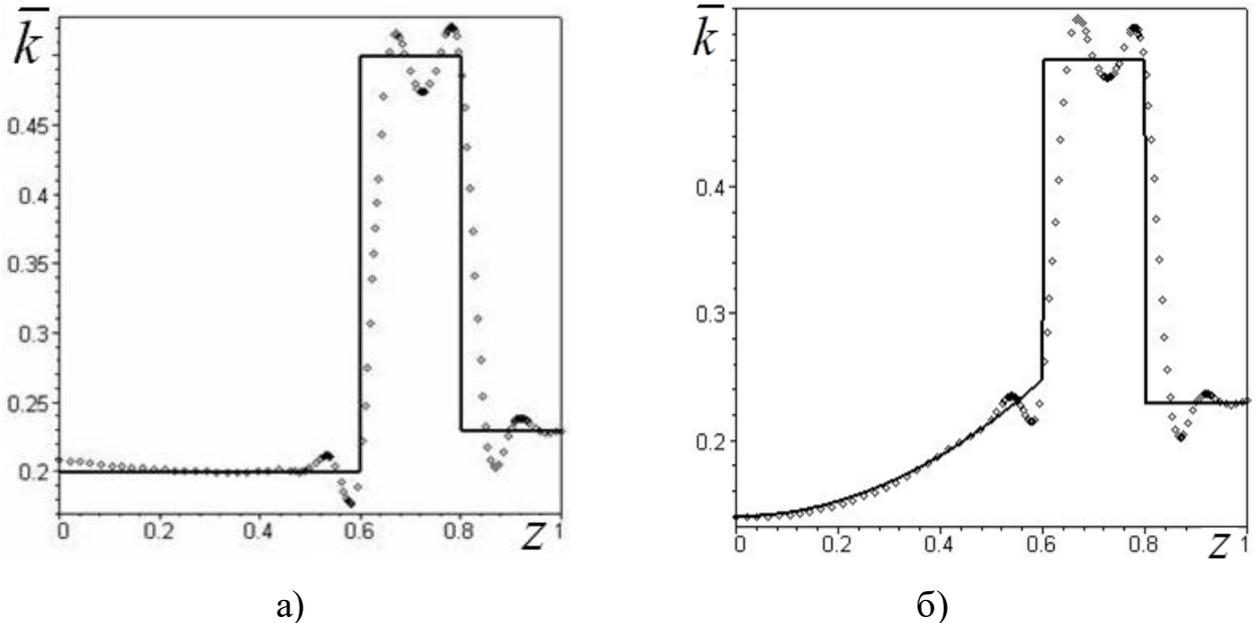


Рисунок 4.11 – Результаты реконструкции  $\bar{k}(z)$ : а) для нормальной кожи; б) для измененной кожи.

Из рис. 4.11 следует, что: 1) наибольшая погрешность реконструкции возникает в окрестностях соединения слоев; 2) с уменьшением толщины слоев результаты реконструкции ухудшаются.

#### **4.4 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородной трубы во второй постановке.**

В данном параграфе рассмотрены особенности реконструкции термомеханических характеристик неоднородной трубы [43, 68].

##### **4.4.1 Вторая постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для трубы. Операторные уравнения в оригиналах**

*Обратная задача термоупругости для трубы при тепловом нагружении* состоит в определении законов изменения безразмерных теплофизических характеристик  $(\bar{c}(\xi), \bar{k}(\xi), \bar{\gamma}(\xi))$  из (1.3.6)-(1.3.10) при известных остальных характеристиках по информации о температуре, измеренной на внешней поверхности трубы:

$$W(1, \tau_1) = f(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2]. \quad (4.4.1)$$

*Обратная задача термоупругости для трубы при механическом нагружении* состоит в определении законов изменения механических характеристик  $(\bar{\rho}(\xi), \bar{\lambda}(\xi), \bar{\mu}(\xi), \bar{\gamma}(\xi))$  из (1.3.11)-(1.3.15) по информации о радиальном смещении, измеренном на внешней поверхности трубы:

$$U_r(1, \tau_2) = g(\tau_2), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2]. \quad (4.4.2)$$

Операторные уравнения в оригиналах находятся путем обращения операторных уравнений в трансформантах, полученных в параграфе 3.5. Так, для нахождения поправок модулей Ламе имеем:

$$\int_0^1 \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} M_1(\xi, \tau_2) d\xi = -(g(\tau_2) - U_2^{(n-1)}(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2], \quad (4.4.3)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} M_2(\xi, \tau_2) d\xi = -(g(\tau_2) - U_2^{(n-1)}(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2], \quad (4.4.4)$$

где ядра уравнений (4.4.3), (4.4.4) имеют вид:

$$M_1(\xi, \tau_2) = \frac{1}{\beta_2} \int_0^{\tau_2} \left( \frac{\partial^2 U_r^{(n-1)}(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \left( \frac{\partial U_r^{(n-1)}(\xi, \tau_2 - \tau)}{\partial \xi} + \frac{2}{\xi} U_r^{(n-1)}(\xi, \tau_2 - \tau) \right) \right) d\tau,$$

$$M_2(\xi, \tau_2) = \frac{2}{\beta_2} \int_0^{\tau_2} \left( \frac{\partial^2 U_r^{(n-1)}(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial U_r^{(n-1)}(\xi, \tau_2 - \tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial U_r^{(n-1)}(\xi, \tau)}{\partial \tau} U_r^{(n-1)}(\xi, \tau_2 - \tau) \right) d\tau.$$

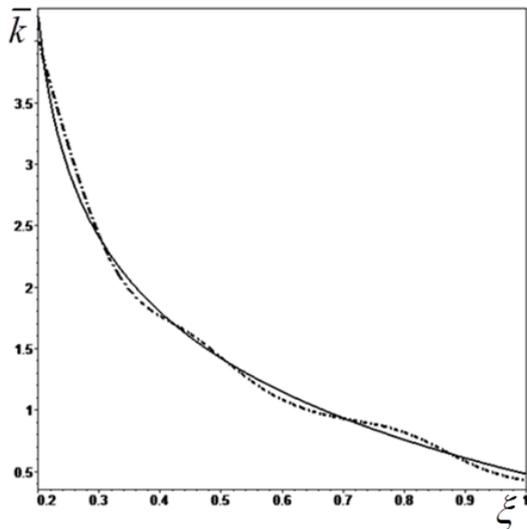
#### 4.4.2 Результаты идентификации термомеханических характеристик трубы

Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции неоднородных свойств трубы при  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.04$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ .

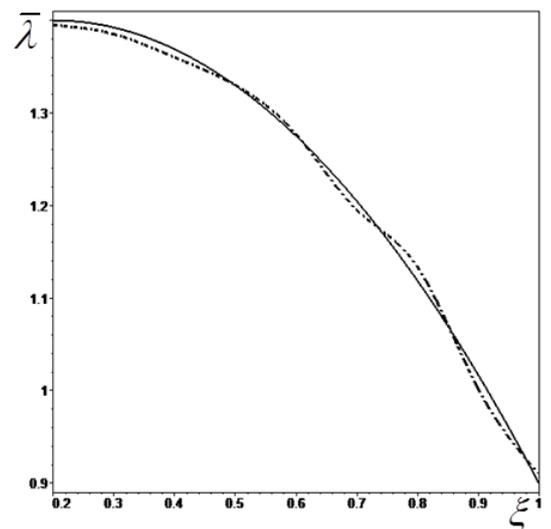
Выяснено, что 1) погрешность реконструкции монотонных законов изменения  $\bar{k}(\xi)$  толстостенной трубы ( $\xi_0 = 0.2$ ) не превышает 3%, а тонкостенной ( $\xi_0 = 0.8$ ) – 5%; 2) наибольшая погрешность реконструкции  $\bar{c}(\xi)$  и  $\bar{\gamma}(\xi)$  возникает в окрестности  $\xi = \xi_0$ .

На рис. 4.12 представлены графики восстановления характеристик толстостенной трубы: а)  $\bar{k}(\xi) = 3.5 - \ln(0.5 + 25(\xi - \xi_0))$  при  $[a_1, a_2] = [0.003, 0.012]$ ;

б)  $\bar{\lambda}(\xi) = 1.4 - 0.5 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^2$  при  $[b_1, b_2] = [0.03, 0.68]$ .



а)



б)

Рисунок 4.12 – Результат восстановления характеристик

толстостенной трубы: а)  $\bar{k}(\xi) = 3.5 - \ln(0.5 + 25(\xi - \xi_0))$ ; б)  $\bar{\lambda}(\xi) = 1.4 - 0.5 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^2$ .

В табл. 4.6 отражены результаты исследования сходимости итерационного процесса реконструкции  $\bar{k}(\xi) = 3.5 - \ln(0.5 + 25(\xi - \xi_0))$ .

Таблица 4.6

Номер итерации $n$	Невязка $J_1$	Относительная погрешность, %
1	0.00352801	14.2
2	0.00045276	10.3
3	0.00003729	8.6
4	0.00001295	6.1
5	0.00000206	4.5
6	0.00000095	3.3
7	0.000000079	2.9

Из табл. 4.6 следует, что итерационный процесс реконструкции коэффициента теплопроводности сходится на 6-й итерации.

Исследовано влияние зашумления на результаты реконструкции характеристик трубы. В табл. 4.7 представлены результаты реконструкции функции  $\bar{\mu}(\xi) = 3 - \ln(1 + 36(\xi - \xi_0))$  при отсутствии и наличии зашумления входной информации.

Таблица 4.7

Координата $\xi$	Точное значение $\bar{\mu}(\xi)$	Восстановленное значение $\bar{\mu}(\xi)$		Относительная погрешность реконструкции, %	
		$\beta = 0$	$\beta = 0.01$	$\beta = 0$	$\beta = 0.01$
0.80	3	2.91	2.84	3.0	5.33
0.82	2.458	2.422	2.272	1.46	7.56
0.84	2.108	2.118	2.228	0.47	5.69
0.86	1.849	1.874	1.936	1.35	4.71
0.88	1.644	1.640	1.605	0.24	2.37
0.90	1.474	1.453	1.411	1.42	4.27
0.92	1.329	1.301	1.281	2.10	3.61
0.94	1.202	1.198	1.189	0.33	1.08
0.96	1.089	1.121	1.152	2.94	5.79
0.98	0.988	0.960	0.941	2.83	4.76
1.0	0.896	0.864	0.831	3.57	7.25

На рис. 4.13 изображены результаты реконструкции функции  $\bar{k}(\xi) = 2 \sin\left(1.3\pi\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right)\right) - 1$  как при отсутствии зашумления входной информации (точки), так и при наличии 1%-го шума (штрихпунктир).

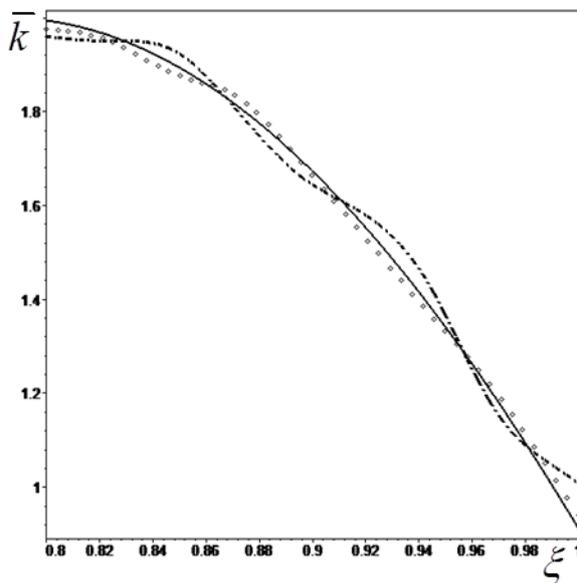
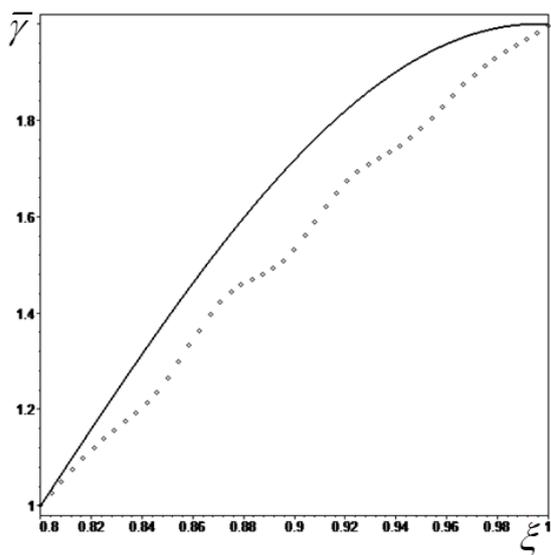
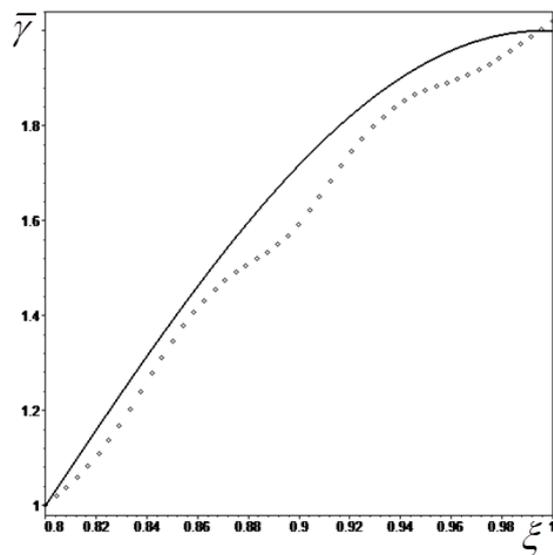


Рисунок 4.13 – Результаты реконструкции  $\bar{k}(\xi) = 2 \sin\left(1.3\pi\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right)\right) - 1$  при отсутствии и наличии зашумления входной информации.

На рис. 4.14 проведено исследование влияние параметра связанности на результаты реконструкции  $\bar{\gamma}(\xi) = 1 + \sin(10(\xi - \xi_0))$ .



а)



б)

Рисунок 4.14 – Результаты реконструкции  $\bar{\gamma}(\xi)$  при: а)  $\delta_0 = 0.15$ ; б)  $\delta_0 = 0.4$ .

Из рис. 4.14 следует, что с увеличением параметра термомеханической связанности погрешность реконструкции уменьшается.

#### 4.4.3 Постановка и решение обратной задачи об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик трубы

Рассмотрим постановку КОЗ термоупругости о реконструкции двух термомеханических характеристик трубы [232]. Для этого рассмотрим две квазистатические задачи термоупругости для радиально неоднородной трубы с разной нагрузкой на ее поверхностях. В обеих задачах на внутренней поверхности трубы  $r = r_1$ , свободной от напряжений, поддерживается постоянная температура. На внешней поверхности трубы  $r = r_2$ , свободной от напряжений, в первой задаче действует тепловой поток, а во второй – задается температура, изменяющаяся по закону  $te^{-t}$ .

Постановка безразмерной задачи 1 совпадает с (1.3.6)-(1.3.10) при  $\varepsilon_0 = 0$ .

Постановка безразмерной задачи 2 имеет вид [232]:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}''}{\partial \xi} + \frac{\Omega_{rr}'' - \Omega_{\varphi\varphi}''}{\xi} = 0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1, \quad (4.4.5)$$

$$\Omega_{rr}'' = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial U_{II}}{\partial \xi} + \bar{\lambda} \frac{U_{II}}{\xi} - \bar{\gamma} W_{II}, \quad \Omega_{\varphi\varphi}'' = \bar{\lambda} \frac{\partial U_{II}}{\partial \xi} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{U_{II}}{\xi} - \bar{\gamma} W_{II}, \quad (4.4.6)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W_{II}}{\partial \xi}) = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W_{II}}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial^2 U_{II}}{\partial \xi \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_{II}}{\partial \tau_1} \right), \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau_1 \geq 0, \quad (4.4.7)$$

$$\Omega_{rr}''(\xi_0, \tau_1) = 0, \quad \Omega_{rr}''(1, \tau_1) = 0, \quad (4.4.8)$$

$$W_{II}(\xi_0, \tau_1) = 0, \quad W_{II}(1, \tau_1) = \beta_2 \tau_1 e^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0, \quad (4.4.9)$$

$$W_{II}(\xi, 0) = U_{II}(\xi, 0) = \frac{\partial U_{II}}{\partial \tau}(\xi, 0) = 0. \quad (4.4.10)$$

В качестве дополнительной информации на внешней поверхности трубы выступают:

а) температура для задачи 1

$$W_I(1, \tau_1) = f_I(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]; \quad (4.4.11)$$

б) тепловой поток для задачи 2

$$Q_{II}(1, \tau_1) = f_{II}(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_2, b_2]. \quad (4.4.12)$$

В обратной задаче требуется восстановить две термомеханические характеристики при известных остальных из (1.3.6)-(1.3.10) и (4.4.5)-(4.4.10) по дополнительной информации (4.5.11), (4.5.12).

Итерационная схема решения КОЗ по восстановлению двух характеристик трубы построена аналогично схеме реконструкции двух характеристик термоупругого стержня.

Ограничимся идентификацией двух пар термомеханических характеристик: 1)  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{c}(\xi)$  при известной  $\bar{\gamma}(\xi)$ ; 2)  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{\gamma}(\xi)$  при известной  $\bar{c}(\xi)$ .

1) Пусть  $\bar{\gamma}(\xi)$  известна. Необходимо восстановить  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{c}(\xi)$ .

Система операторных уравнений в оригиналах для нахождения поправок  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  и  $\delta\bar{c}^{(n-1)}$  имеет вид аналогичный, как в задаче о реконструкции 2-х характеристик стержня в п. 4.2.4.

2) Пусть  $\bar{c}(\xi)$  известна. Необходимо определить  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{\gamma}(\xi)$ .

Система операторных уравнений в оригиналах для нахождения поправок  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  и  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$  имеет вид:

$$\int_{\xi_0}^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} M_{11}(\xi, \tau) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_{12}(\xi, \tau)) \xi d\xi = f_I(\tau) - W_I^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (4.4.13)$$

$$\int_{\xi_0}^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} M_{21}(\xi, \tau) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_{22}(\xi, \tau)) \xi d\xi = f_{II}(\tau) - Q_{II}^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (4.4.14)$$

Здесь ядра уравнений (4.4.13), (4.4.14) имеют вид:

$$M_{11}(\xi, \tau) = R_{11}(\xi, \tau), \quad M_{21}(\xi, \tau) = R_{21}(\xi, \tau),$$

$$M_{12}(\xi, \tau) = \frac{\delta_0}{\beta_1} \int_0^\tau \left( \frac{\partial^2 U_I^{(n-1)}(\xi, \tau_1)}{\partial \xi \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_I^{(n-1)}(\xi, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right) \frac{\partial W_I^{(n-1)}(\xi, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1,$$

$$M_{22}(\xi, \tau) = \frac{\delta_0}{\beta_2} \int_0^\tau A_1(\xi, \tau_1) A_2(\xi, \tau_1) d\tau_1, \quad A_1(\xi, \tau_1) = \left( \frac{\partial^2 U_{II}^{(n-1)}(\xi, \tau_1)}{\partial \xi \partial \tau_1} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_{II}^{(n-1)}(\xi, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right),$$

$$A_2(\xi, \tau_1) = \left( \frac{\partial^2 W_{II}^{(n-1)}(\xi, \tau_1)}{\partial \tau_1^2} + 2 \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(\xi, \tau_1)}{\partial \tau_1} + W_{II}^{(n-1)}(\xi, \tau_1) \right).$$

#### 4.4.4 Результаты идентификации двух термомеханических характеристик трубы

В настоящем пункте представлены результаты реконструкции 2-х термомеханических характеристик трубы при  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\xi_0 = 0.8$ .

На рис. 4.15 представлены результаты реконструкции убывающих функций: а)  $\bar{k}(\xi) = 4e^{-8(\xi-\xi_0)}$ ; б)  $\bar{c}(\xi) = 2e^{-6(\xi-\xi_0)}$ . Съём дополнительной информации происходит в 10 равноотстоящих точках внутри выбранных информативных отрезков  $[a_1, b_1] = [0.005, 0.019]$ ,  $[a_2, b_2] = [0.001, 0.016]$ .

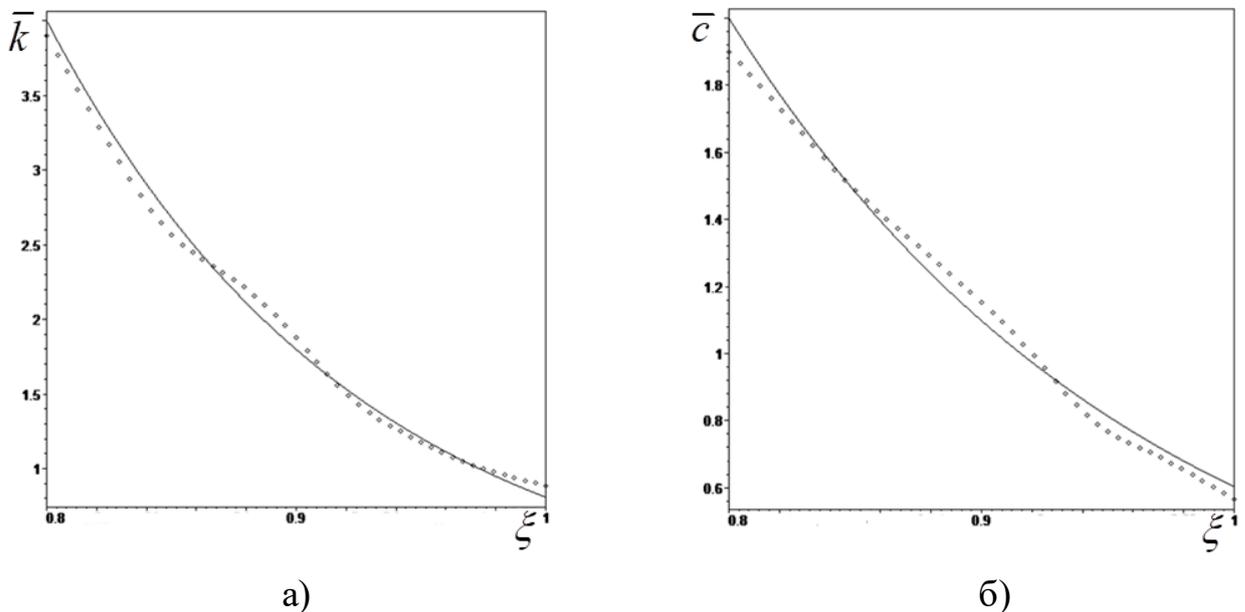
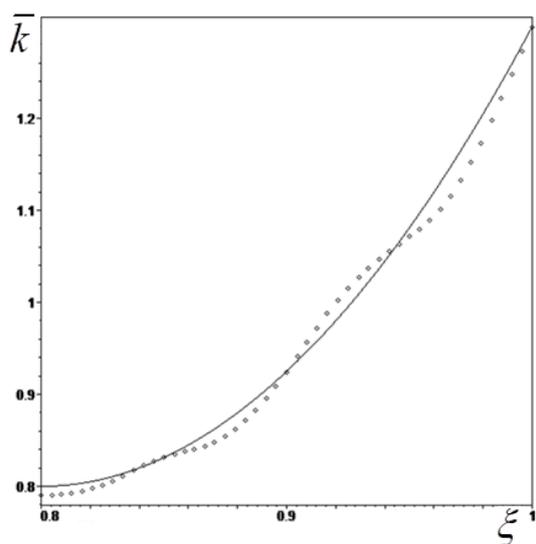


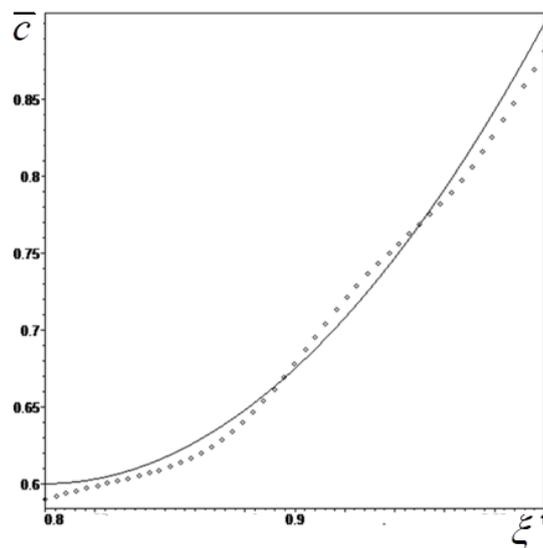
Рисунок 4.15 – Результаты реконструкции убывающих функций:

$$\text{а) } \bar{k}(\xi) = 4e^{-8(\xi-\xi_0)}; \text{ б) } \bar{c}(\xi) = 2e^{-6(\xi-\xi_0)}.$$

На рис. 4.16 изображены результаты реконструкции возрастающих функций: а)  $\bar{k}(\xi) = 0.8 + 0.5 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^2$ ; б)  $\bar{c}(\xi) = 0.6 + 0.3 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^2$ . Погрешность реконструкции не превысила 6%.



а)

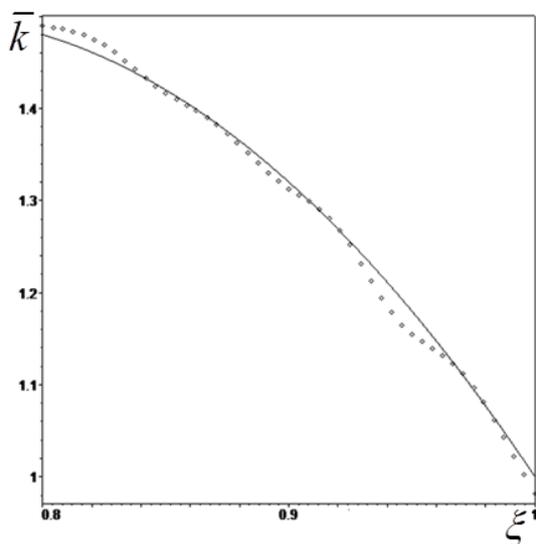


б)

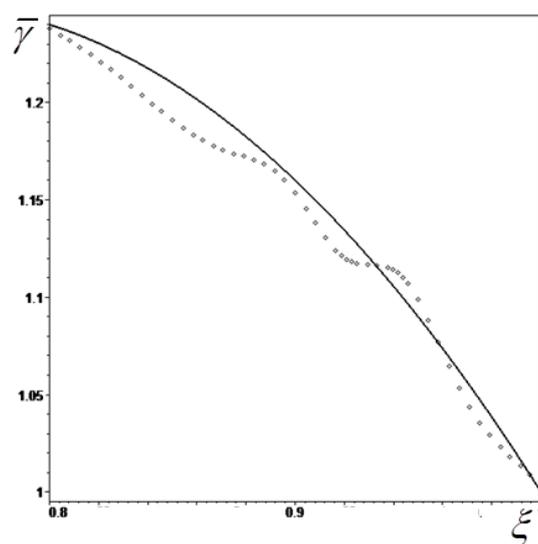
Рисунок 4.16 – Результаты реконструкции возрастающих функций:

а)  $\bar{k}(\xi)$ ; б)  $\bar{c}(\xi)$ .

На рис. 4.17 представлены результаты восстановления функций: а)  $\bar{k}(\xi) = -8\xi^2 + 12\xi - 3$ ; б)  $\bar{\gamma}(\xi) = -4\xi^2 + 6\xi - 1$  при  $\delta_0 = 0.4$ . Съём дополнительной информации происходил в 10 равноотстоящих точках внутри отрезков  $[a_1, b_1] = [0.004, 0.017]$ ,  $[a_2, b_2] = [0.002, 0.012]$ .



а)



б)

Рисунок 4.17 – Результаты восстановления функций:

а)  $\bar{k}(\xi) = -8\xi^2 + 12\xi - 3$ ; б)  $\bar{\gamma}(\xi) = -4\xi^2 + 6\xi - 1$ .

## 4.5 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного конечного цилиндра во второй постановке.

В данном параграфе в соответствии с [75] представлены результаты решения КОЗ термоупругости для конечного цилиндра.

### 4.5.1 Вторая постановка и схема решения коэффициентной обратной задачи термоупругости для конечного цилиндра

Вторая постановка обратной задачи термоупругости для конечного цилиндра при тепловом нагружении состоит в нахождении теплофизических характеристик  $(\bar{c}(\xi_1), \bar{k}(\xi_1), \bar{\gamma}(\xi_1))$  из (1.4.8)-(1.4.13) при известных остальных по информации о температуре на наружной поверхности цилиндра:

$$W(1, \xi_2, \tau_1) = f(\xi_2, \tau_1), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad \tau_1 \in [a, b]. \quad (4.5.1)$$

Вторая постановка обратной задачи термоупругости для конечного цилиндра при механическом нагружении состоит в нахождении механических характеристик  $(\bar{\rho}(\xi_1), \bar{\lambda}(\xi_1), \bar{\mu}(\xi_1))$  из (1.4.14)-(1.4.19) при известных остальных по информации о радиальном смещении на наружной поверхности цилиндра;

$$U_r(1, \xi_2, \tau_2) = g(\xi_2, \tau_2), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad \tau_2 \in [c, d]. \quad (4.5.2)$$

Предположим, что функции  $f(\xi_2, \tau_2)$ ,  $g(\xi_2, \tau_1)$  в формулах (4.5.1), (4.5.2) допускают разложения в ряды:

$$f(\xi_2, \tau_1) = \sum_{N_1=0}^{\infty} f_{N_1}(\tau_1) \cos(\nu_{N_1} \xi_2),$$

$g(\xi_2, \tau_2) = \sum_{N_1=0}^{\infty} g_{N_1}(\tau_2) \cos(\nu_{N_1} \xi_2)$ . Тогда обратную задачу можно сформулировать для гармоник  $N_1 = 0, N_1 = 1$  и т.д.

Рассмотрим реконструкцию пары функций  $\bar{k}(\xi_1)$  и  $\bar{c}(\xi_1)$ .

Для нахождения поправок  $\delta\bar{c}^{(n-1)}$  и  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  положим в (3.6.6) и (3.6.8) при  $N_1 = 1$   $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)} = 0$  и обратим их. В результате вычислений выяснено, что ядра полученной системы интегральных уравнений сильно различаются друг

от друга. Это приводит к сильному вырождению СЛАУ, полученной после дискретизации интегральных уравнений. Для преодоления этой проблемы применим поэтапный процесс идентификации.

На первом этапе, полагая  $\delta\bar{k}^{(n-1)} = 0$ , определяются поправки  $\delta\bar{c}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода, полученного путем обращения уравнения в трансформантах (3.6.6) при  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)} = \delta\bar{k}^{(n-1)} = 0$ :

$$\int_{\xi_0}^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} P_1(\xi_1, \tau_1) \xi_1 d\xi_1 = f_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [c, d], \quad (4.5.3)$$

$$\text{где } P_1(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{g_{10}\beta_1} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(\xi_1, \tau_1 - \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

На втором этапе, полагая  $\delta\bar{c}^{(n-1)} = 0$ , находим поправки  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода, полученного путем обращения уравнения в трансформантах (3.6.6) при  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)} = \delta\bar{c}^{(n-1)} = 0$ :

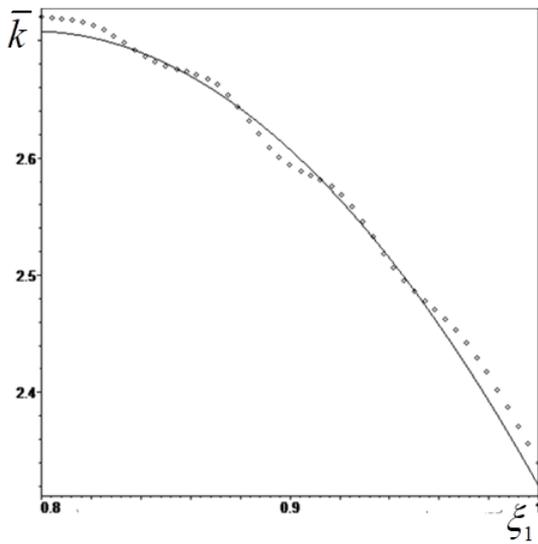
$$\int_{\xi_0}^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} P_2(\xi_1, \tau_1) \xi_1 d\xi_1 = f_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [c, d], \quad (4.5.4)$$

$$\text{где } P_2(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{g_{10}\beta_1} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(\xi_1, \tau)}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 d_0^{(n-1)}(\xi_1, \tau_1 - \tau)}{\partial \xi_1 \partial \tau} d\tau.$$

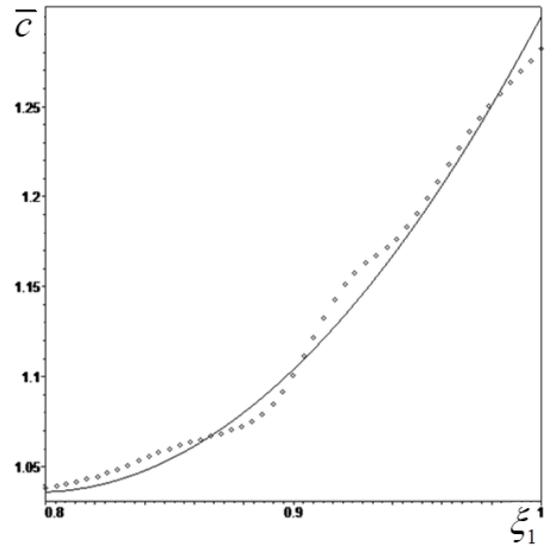
#### 4.5.2 Результаты поэтапной идентификации термомеханических характеристик конечного цилиндра

Рассмотрим результаты реконструкции двух термомеханических характеристик конечного цилиндра  $\bar{k}(\xi_1)$  и  $\bar{c}(\xi_1)$  при  $\xi_0 = 0.8$ ,  $\delta_0 = 0.05$ ,  $\bar{h}_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ .

На рис. 4.18 представлены результаты реконструкции теплофизических характеристик: а)  $\bar{k}(\xi_1) = -9.3\xi_1^2 + 14.8\xi_1 - 3.18$ ; б)  $\bar{c}(\xi_1) = 6.4\xi_1^2 - 10.2\xi_1 + 5.1$  при  $[c, d] = [0.004, 0.018]$ . Погрешность реконструкции не превысила 8%.



а)

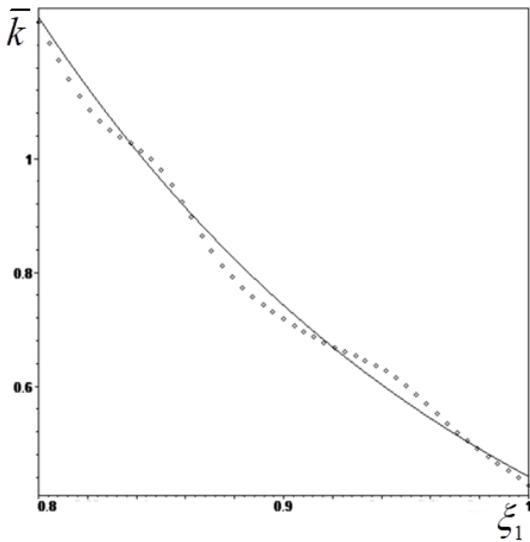


б)

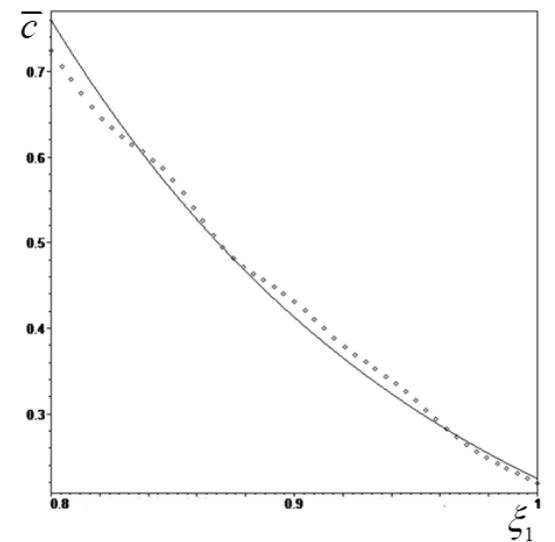
Рисунок 4.18 – Результаты восстановления функций:

а)  $\bar{k}(\xi_1) = -9.3\xi_1^2 + 14.8\xi_1 - 3.18$ ; б)  $\bar{c}(\xi_1) = 6.4\xi_1^2 - 10.2\xi_1 + 5.1$ .

На рис. 4.19 изображены результаты реконструкции теплофизических характеристик: а)  $\bar{k}(\xi_1) = 80e^{-5.2\xi_1}$ ; б)  $\bar{c}(\xi_1) = 100e^{-6.1\xi_1}$  при  $\bar{k}^{(0)}(\xi_1) = -4.05\xi_1 + 4.5$ ,  $\bar{c}^{(0)}(\xi_1) = -2.87\xi_1 + 3.12$ . Погрешность реконструкции не превысила 9%.



а)



б)

Рисунок 4.19 – Результаты реконструкции а)  $\bar{k}(\xi_1) = 80e^{-5.2\xi_1}$ ; б)  $\bar{c}(\xi_1) = 100e^{-6.1\xi_1}$ .

#### 4.6 Коэффициентная обратная задача термоупругости для неоднородного прямоугольника во второй постановке.

В данном параграфе представлено решение КОЗ термоупругости для неоднородного прямоугольника во второй постановке.

##### 4.6.1 Вторая постановка и схема решения коэффициентной обратной задачи термоупругости для прямоугольника

Вторая постановка обратной задачи термоупругости для прямоугольника при тепловом нагружении состоит в определении законов изменения теплофизических характеристик из (1.5.8)-(1.5.13) при известных остальных по информации о температуре, измеренной на верхней грани прямоугольника:

$$W(y_1, 1, \tau_1) = f_1(y_1, \tau_1), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (4.6.1)$$

Вторая постановка обратной задачи термоупругости для прямоугольника при механическом нагружении состоит в нахождении механических характеристик из (1.5.14)-(1.5.19) при известных остальных по информации о компонентах вектора перемещения, измеренных на верхней грани прямоугольника:

$$U_3(y_1, 1, \tau_2) = f_3(y_1, \tau_2), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad \tau_2 \in [a_2, b_2], \quad (4.6.2)$$

$$U_1(y_1, 1, \tau_3) = f_2(y_1, \tau_3), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad \tau_3 \in [a_3, b_3]. \quad (4.6.3)$$

Предположим, что функции  $f_1(y_1, \tau_1)$ ,  $f_2(y_1, \tau_2)$  и  $f_3(y_1, \tau_2)$  в формулах (4.6.1)-(4.6.3) допускают разложения в ряды:  $f_1(y_1, \tau_1) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \chi_{N_2}(\tau_1) \cos(\nu_{N_2} y_1)$ ,  $f_2(y_1, \tau_3) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \vartheta_{N_2}(\tau_3) \sin(\nu_{N_2} y_1)$ ,  $f_3(y_1, \tau_2) = \sum_{N_2=0}^{\infty} w_{N_2}(\tau_2) \cos(\nu_{N_2} y_1)$ . Тогда для каждой гармоники  $N_2 = 0$ ,  $N_2 = 1$  и т.д. можно сформулировать обратную задачу.

Рассмотрим схему нахождения нескольких пар термомеханических характеристик прямоугольника.

Сначала рассмотрим реконструкцию модуля сдвига и плотности. Для этого получим систему операторных уравнений, полагая в (3.7.10)  $N_2 = 1$  и  $N_2 = 2$ , и обращая их при нестационарной нагрузке  $\psi(\tau_2) = H(\tau_2)$ :

$$\int_0^1 (\delta\bar{\mu}^{(n-1)} R_{11}(y_3, \tau_3) + \delta\bar{\rho} R_{12}(y_3, \tau_3)) dy_3 = -(\mathcal{G}_1(\tau_3) - a_1^{(n-1)}(1, \tau_3)), \quad \tau_3 \in [a_3, b_3], \quad (4.6.4)$$

$$\int_0^1 (\delta\bar{\mu}^{(n-1)} R_{21}(y_3, \tau_3) + \delta\bar{\rho} R_{22}(y_3, \tau_3)) dy_3 = -(\mathcal{G}_2(\tau_3) - a_2^{(n-1)}(1, \tau_3)), \quad \tau_3 \in [a_3, b_3], \quad (4.6.5)$$

$$\text{где } R_{11}(y_3, \tau_3) = \frac{1}{\beta_3 \zeta_1} \int_0^{\tau_3} \left( \frac{\partial^2 a_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_3 - \tau)}{\partial y_3} + \nu_1^2 \frac{\partial a_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau} a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_3 - \tau) \right) d\tau,$$

$$R_{12}(y_3, \tau_3) = \frac{1}{\beta_3 \zeta_1} \int_0^{\tau_3} \left( \frac{\partial^2 a_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau^2} \frac{\partial a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_3 - \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau,$$

$$R_{21}(y_3, \tau_3) = \frac{1}{\beta_3 \zeta_2} \int_0^{\tau_3} \left( \frac{\partial^2 a_2^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial a_2^{(n-1)}(y_3, \tau_3 - \tau)}{\partial y_3} + \nu_1^2 \frac{\partial a_2^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau} a_2^{(n-1)}(y_3, \tau_3 - \tau) \right) d\tau,$$

$$R_{22}(y_3, \tau_3) = \frac{1}{\beta_3 \zeta_2} \int_0^{\tau_3} \left( \frac{\partial^2 a_2^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau^2} \frac{\partial a_2^{(n-1)}(y_3, \tau_3 - \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau.$$

Проведенные расчеты показали, что значение норм ядер при поправке  $\delta\bar{\mu}$  значительно больше, чем при  $\delta\bar{\rho}$ . Для решения этой проблемы построен двухэтапный процесс реконструкции, как в задаче для конечного цилиндра.

На первом этапе полагается  $\delta\bar{\rho}^{(n-1)} = 0$ . Далее на каждой итерации определялись поправки  $\delta\bar{\mu}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{\mu}^{(n-1)} R_{11}(y_3, \tau_3) dy_3 = -(\mathcal{G}_1(\tau_3) - a_1^{(n-1)}(1, \tau_3)), \quad \tau_3 \in [a_3, b_3], \quad (4.6.6)$$

На втором этапе функция  $\bar{\mu}$  полагается известной и на каждой последующей итерации определяются поправки  $\delta\bar{\rho}^{(n-1)}$  путем решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{\rho} R_{12}(y_3, \tau_3) dy_3 = -(\mathcal{G}_1(\tau_3) - a_1^{(n-1)}(1, \tau_3)), \quad \tau_3 \in [a_3, b_3]. \quad (4.6.7)$$

Далее рассмотрим реконструкцию коэффициентов теплопроводности и температурных напряжений. Для этого положим  $\delta\bar{c} = 0$  в (3.7.9), а в (3.7.11) –

$\delta\bar{c} = 0$  при  $N_2 = 1$  и обратим их. В случае нагрузки  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$  получим следующую систему ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} P_3(y_3, \tau_1) dy_3 + \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} P_4(y_3, \tau_1) dy_3 = \chi_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1], \quad (4.6.8)$$

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} P_5(y_3, \tau_1) dy_3 + \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} P_6(y_3, \tau_1) dy_3 = \chi_1(\tau_1) - d_1^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1], \quad (4.6.9)$$

где  $P_3(y_3, \tau_1) = \frac{1}{\beta_1 g_0} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3} \frac{\partial^2 d_0^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} d\tau,$

$$P_4(y_3, \tau_1) = \frac{\delta_0}{\beta_1 g_0} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau_1} \frac{\partial^2 b_0^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} d\tau,$$

$$P_5(y_3, \tau_1) = \frac{1}{\beta_1 g_1} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial d_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3} \left( \frac{\partial^2 d_1^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} + \nu_1^2 d_1^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau) \right) d\tau,$$

$$P_6(y_3, \tau_1) = \frac{\delta_0}{\beta_1 g_1} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial d_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau_1} \left( \frac{\partial^2 b_1^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} + \nu_1 a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau) \right) d\tau.$$

В ходе вычислений выяснено, что нормы ядер  $P_3(y_3, \tau_1)$  и  $P_5(y_3, \tau_1)$  значительно больше, чем нормы  $P_4(y_3, \tau_1)$  и  $P_6(y_3, \tau_1)$ . Исходя из этого, реализован двухэтапный процесс реконструкции.

На первом этапе полагая  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)} = 0$ , находим  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} P_3(y_3, \tau_1) dy_3 = \chi_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (4.6.10)$$

На втором этапе полагая  $\delta\bar{k}^{(n-1)} = 0$ , находим  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$  из решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} P_4(y_3, \tau_1) dy_3 = \chi_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (4.6.11)$$

#### 4.6.2 Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов по реконструкции 2-х характеристик прямоугольника.

В вычислениях принято:  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_3 = 1$ ,  $R_2(y_1) = 1 - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2$ ,  $R_2(y_1) = y_1$ .

На рис. 4.20 представлены результаты поэтапного восстановления 2-х механических характеристик прямоугольника: а)  $\bar{\mu}(y_3) = 1.74 + 1.08y_3^2$ ; б)  $\bar{\rho}(y_3) = 1.4 + \cos\left(\frac{\pi y_3}{2} - 3.2\right)$  при  $\delta_0 = 0.03$ ,  $[a_3, b_3] = [0.1, 1.2]$ . Погрешность реконструкции  $\bar{\mu}$  не превысила 4% а  $\bar{\rho}$  – 7%.

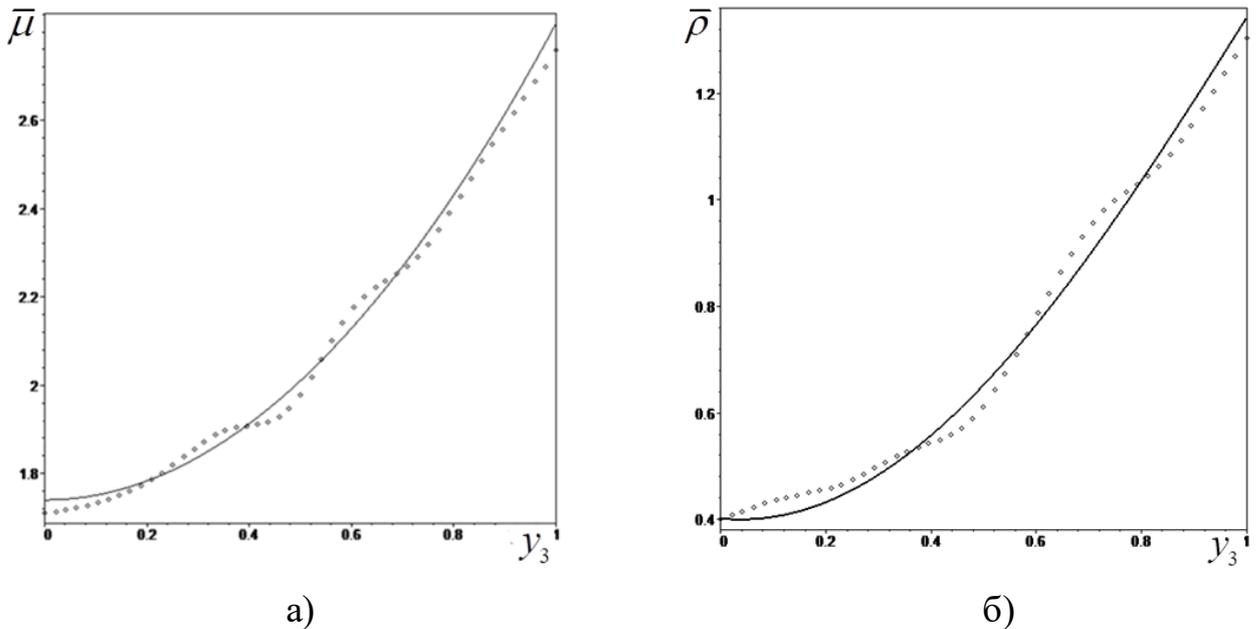
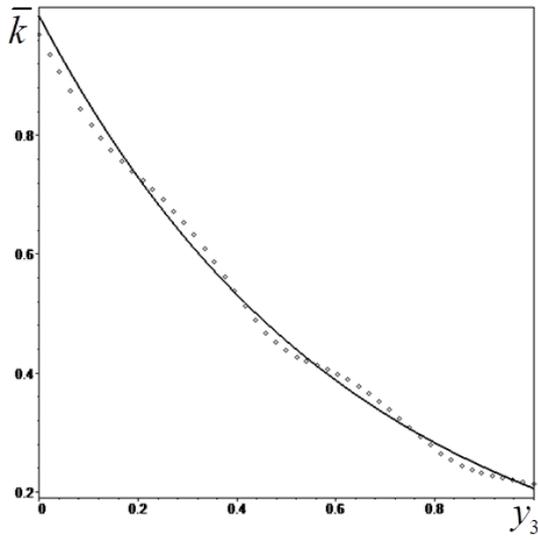


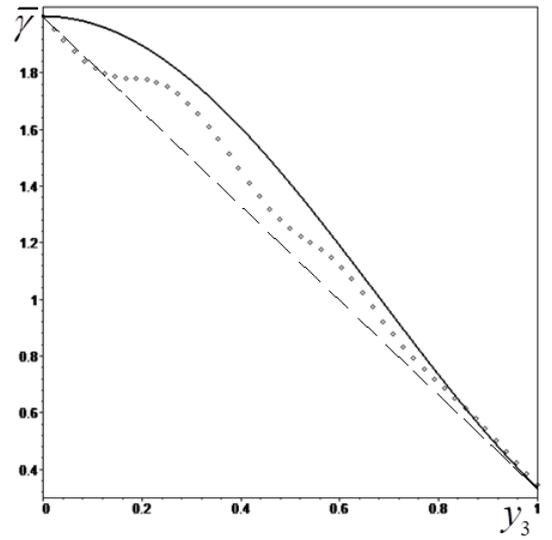
Рисунок 4.20 – Результаты реконструкции механических характеристик

прямоугольника: а)  $\bar{\mu}(y_3) = 1.74 + 1.08y_3^2$ ; б)  $\bar{\rho}(y_3) = 1.4 + \cos\left(\frac{\pi y_3}{2} - 3.2\right)$ .

На рис. 4.21 представлены результаты поэтапной реконструкции 2-х теплофизических характеристик прямоугольника: а)  $\bar{k}(y_3) = e^{-1.38y_3}$ ; б)  $\bar{\gamma}(y_3) = 0.8 + \sin(1.8y_3)$  при  $\delta_0 = 0.5$ ,  $[a_1, b_1] = [0.04, 0.48]$ . Максимальная погрешность реконструкции  $\bar{k}(y_3)$  не превысила 4% а  $\bar{\gamma}(y_3)$  – 16%. Т.о. коэффициент температурных напряжений восстанавливается с гораздо большей погрешность, чем коэффициент теплопроводности даже при больших значениях параметра термомеханической связанности.



а)



б)

Рисунок 4.21 – Результаты восстановления функций:

а)  $\bar{k}(y_3) = e^{-1.38y_3}$ ; б)  $\bar{\gamma}(y_3) = 2e^{-0.93y_3}$ .

## ГЛАВА 5.

### КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Процесс изготовления функционально-градиентных пироматериалов является достаточно сложным технологическим процессом, состоящим из нескольких этапов. При этом материальные характеристики изготовленных материалов могут сильно отличаться от проектируемых. Поэтому требуется создание эффективных методов идентификации переменных характеристик пироматериалов, теоретически опирающихся на аппарат КОЗ термоэлектроупругости.

В данной главе рассмотрена общая постановка КОЗ термоэлектроупругости на конечном временном интервале, получены операторные уравнения, устанавливающие связь между термомеханическими характеристиками и полями температур и перемещений на части границы тела. В качестве примеров исследованы обратные задачи термоэлектроупругости для продольно неоднородного стержня, поперечно неоднородного слоя и радиально неоднородного цилиндра.

#### ***5.1 Постановка коэффициентной обратной задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел. Операторные уравнения.***

Рассмотрим термоэлектроупругое тело объемом  $V$ , ограниченное поверхностью  $S = S_u \cup S_\sigma = S_T \cup S_q = S_+ \cup S_- \cup S_H$ .

Постановка КОЗ термоэлектроупругости при тепловом способе нагружения тела состоит в нахождении характеристик  $(c_\varepsilon, k_{ij}, \gamma_{ij}, g_i)$  из (1.6.1)-(1.6.7) при известных остальных по информации о температуре, измеренной на временном отрезке  $[T_1, T_2]$  на границе  $S_q$ :

$$\theta|_{S_q} = f(x, t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (5.1.1)$$

Постановка КОЗ термоэластостатики при механическом нагружении тела состоит в нахождении характеристик  $(\rho, c_{ijkl}, \gamma_{ij}, e_{kij})$  при известных остальных из (1.6.1)-(1.6.3), (1.6.6)-(1.6.9) по информации о компонентах вектора перемещения, измеренных на временном отрезке  $[T_3, T_4]$  на границе  $S_\sigma$ :

$$u_i|_{S_\sigma} = g_i(x, t), \quad i=1,2,3, \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (5.1.2)$$

Получим операторные соотношения для решения КОЗ термоэластостатики сначала в трансформантах Лапласа.

Введем пробные функции  $\tilde{v}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}$ , удовлетворяющие главным граничным условиям  $\tilde{v}_i|_{S_u} = 0, \tilde{\theta}|_{S_T} = 0, \tilde{\psi}|_{S_\pm} = 0$ . Слабая постановка задачи термоэластостатики в трансформантах Лапласа имеет вид [20, 68]:

$$\int_V (-c_{ijkl} \tilde{u}_{i,j} \tilde{v}_{k,l} - p^2 \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i - e_{kij} (\tilde{\varphi}_{,k} \tilde{v}_{i,j} + \tilde{\psi}_{,k} \tilde{u}_{i,j}) + \varepsilon_{ik} \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\psi}_{,i}) dV - \\ - \int_V \left( \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \tilde{\theta} \tilde{\theta} + \frac{1}{2pT_0} k_{ij} \tilde{\theta}_{,i} \tilde{\theta}_{,j} + \gamma_{ij} (\tilde{\theta} \tilde{u}_{i,j} - \tilde{\theta} \tilde{v}_{i,j}) + g_i \tilde{\varphi}_{,i} \tilde{\theta} \right) dV + \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i \tilde{v}_i dS - \frac{1}{pT_0} \int_{S_q} \tilde{q} \tilde{\theta} dS = 0. \quad (5.1.3)$$

В случае воздействия на тело только механической нагрузки, положив в (5.1.3)  $\tilde{\theta} = 0, \tilde{\psi} = 0$ , получим:

$$\int_V c_{ijkl} \tilde{u}_{k,l} \tilde{v}_{i,j} dV + p^2 \int_V \rho \tilde{u}_i \tilde{v}_i dV - \int_V \gamma_{ij} \tilde{\theta} \tilde{v}_{i,j} dV + \int_V e_{kij} \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{v}_{i,j} dV = \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i \tilde{v}_i dS. \quad (5.1.4)$$

В случае воздействия на тело только тепловой нагрузки, положив в (5.1.3)  $\tilde{v}_i = 0, \tilde{\psi} = 0$ , получим:

$$\int_V k_{ij} \tilde{\theta}_{,i} \tilde{\theta}_{,j} dV + p \int_V c_\varepsilon \tilde{\theta} \tilde{\theta} dV + pT_0 \int_V \gamma_{ij} \tilde{u}_{i,j} \tilde{\theta} dV + pT_0 \int_V g_i \tilde{\varphi}_{,i} \tilde{\theta} = - \int_{S_q} \tilde{q} \tilde{\theta} dS. \quad (5.1.5)$$

Применяя метод линеаризации к нелинейным операторным уравнениям (5.1.4), (5.1.5) по схеме, рассмотренной в п. 3.2.1, получим для нахождения поправок следующие операторные уравнения 1-го рода:

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV - \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV + \int_V \delta e_{kij}^{(n-1)} \tilde{\varphi}_{,k}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} dV =$$

$$= - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty), \quad (5.1.6)$$

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV + p \int_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV + p T_0 \int_V \delta g_i^{(n-1)} \tilde{\varphi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} + \\ + p T_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad p \in [0, \infty). \quad (5.1.7)$$

## 5.2 Коэффициентная обратная задача термоэластостатики для неоднородного стержня.

### 5.2.1 Обезразмеренная постановка обратной задачи для стержня.

#### Операторные уравнения

Обратная задача термоэластостатики для стержня при тепловом нагружении состоит в определении законов изменения теплоэлектрических характеристик  $(\bar{c}(z), \bar{k}(z), \bar{\gamma}(z), \bar{g}(z))$  из (1.7.1)-(1.7.6) при известных остальных по информации о температуре на торце стержня  $z=1$ :

$$W(1, \tau_1) = f(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2]. \quad (5.2.1)$$

Обратная задача термоэластостатики для стержня при механическом нагружении состоит в определении законов изменения электромеханических характеристик  $(\bar{\rho}(z), \bar{c}_{33}(z), \bar{\gamma}(z), \bar{e}(z))$  из (1.7.7)-(1.7.12) при известных остальных по информации о смещении на торце стержня  $z=1$ :

$$U(1, \tau_2) = g(\tau_2), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2]. \quad (5.2.2)$$

Операторные уравнения для термоэластостатического стержня можно получить из общих операторных уравнений (5.1.6), (5.1.7) с учетом геометрии задачи, выполняя обезразмеривание по формулам параграфа 1.6.

Выяснено, что операторные уравнения для нахождения поправок  $\delta \bar{k}$ ,  $\delta \bar{c}$ ,  $\delta \bar{c}_{33}$ ,  $\delta \bar{\rho}$ ,  $\delta \bar{\gamma}$  термоэластостатического стержня по своей структуре совпадают с операторными уравнениями для термоупругого стержня. Получены операторные уравнения для нахождения поправок пьезомодуля  $\delta \bar{e}$  и пироккоэффициента  $\delta \bar{g}$ , которые имеют вид [54]:

$$\delta_1 \int_0^1 \delta \bar{e}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{dz} dz = -\beta_2 \tilde{\phi}(p) (\tilde{g}(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.2.3)$$

$$\delta_3 p \int_0^1 \delta \bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \beta_1 \tilde{\phi}(p) (\tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (5.2.4)$$

### 5.2.2 Результаты реконструкции

В первой серии вычислительных экспериментов восстанавливались функции  $\bar{c}_{33}(z)$ ,  $\bar{e}(z)$ ,  $\bar{\rho}(z)$  при механическом нагружении. В вычислениях принято:  $\beta_2 = 1$ ,  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$ ,  $\delta_2 = 0.04$ ,  $\delta_3 = 0.01$ . Исследовано влияние значения параметра электромеханической связанности  $\delta_1$  на результаты реконструкции пьезомодуля  $\bar{e}(z)$ . Выяснено, что с увеличением параметра электромеханической связанности погрешность реконструкции  $\bar{e}(z)$  уменьшается. Так, при  $\delta_1 = 0.05$  максимальная погрешность реконструкции  $\bar{e}(z)$  составляет 31%, а при  $\delta_1 = 0.5$  – 11%.

На рис. 5.1 представлены результаты восстановления характеристик стержня: а)  $\bar{e}(z) = 2 + 0.5 \ln(0.2 + 5z)$  и б)  $\bar{c}_{33}(z) = 1.8 + e^{-5z}$  при  $\delta_1 = 0.31$ ,  $[b_1, b_2] = [0.04, 0.72]$  и  $\bar{e}^0(z) = 1.3 + 1.45z$ ,  $\bar{c}_{33}^0(z) = 2.65 - 0.8z$ .

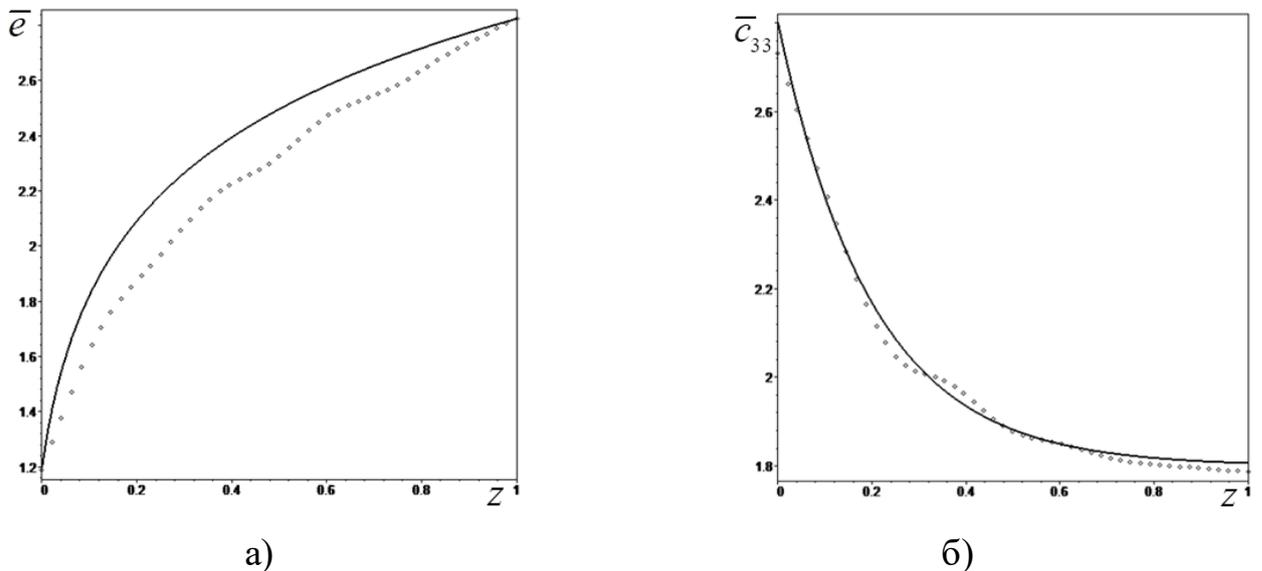


Рисунок 5.1 – Результаты реконструкции функций: а)  $\bar{e}(z)$ ; б)  $\bar{c}_{33}(z)$ .

Во второй серии вычислительных экспериментов восстанавливались функции  $\bar{k}(z)$ ,  $\bar{c}(z)$ ,  $\bar{g}(z)$ ,  $\bar{\gamma}(z)$  при тепловом нагружении. В вычислениях принято:  $\beta_1 = 1$ ,  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\delta_1 = 0.1$ ,  $\delta_2 = 0.04$ . Исследовано влияние параметра  $\delta_3$  на результаты реконструкции пироккоэффициента  $\bar{g}(z)$ . Выяснено, что с увеличением параметра теплоэлектрической связанности погрешность реконструкции  $\bar{g}(z)$  уменьшается. Так, при  $\delta_3 = 0.05$  погрешность реконструкции  $\bar{g}(z)$  составляет 38%, а при  $\delta_3 = 0.5$  – 13%.

На рис. 5.2 показан результат реконструкции: а)  $\bar{k}(z) = 3(1 - 0.1(z+1)^3)$ ; б)  $\bar{g}(z) = 2.5 - (z-1)^2$  при  $\delta_3 = 0.34$ ,  $[a_1, a_2] = [0.05, 0.45]$ .

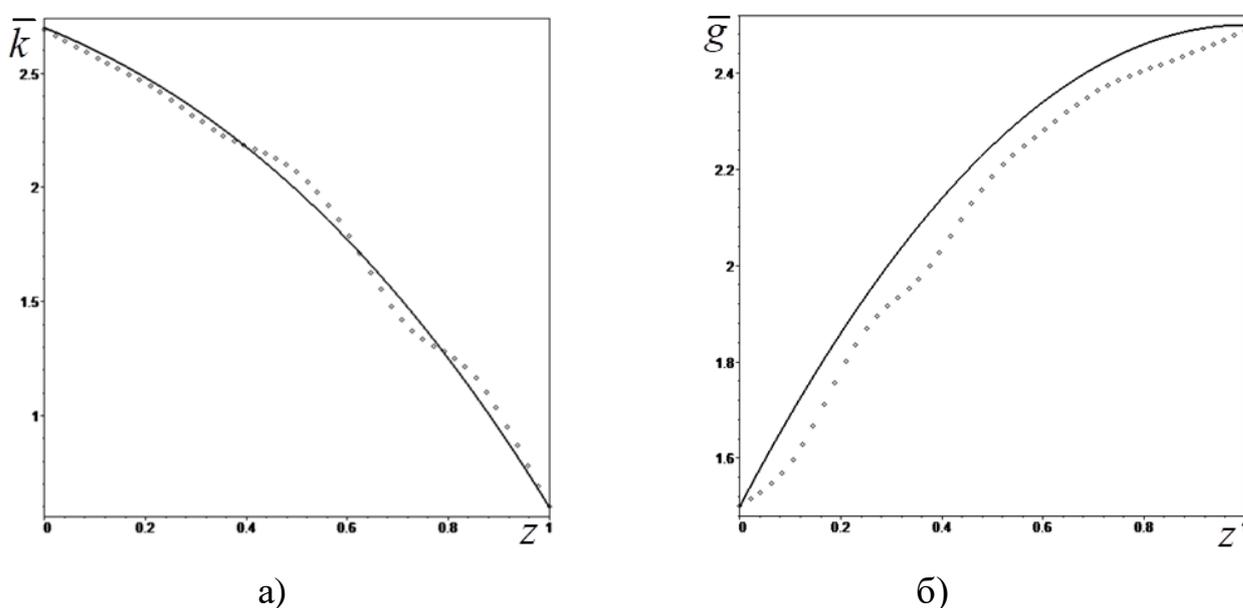


Рисунок 5.2 – Результаты реконструкции: а)  $\bar{k}(z)$ ; б)  $\bar{g}(z)$ .

### 5.3 Коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости для поперечно неоднородного слоя.

#### 5.3.1 Постановка обратной задачи для слоя

Рассмотрим неустановившиеся колебания поперечно неоднородного по толщине термоэлектроупругого слоя ( $x_1 \in (-\infty, \infty)$ ,  $x_2 \in (-\infty, \infty)$ ,  $x_3 \in [0, h]$ ), нижняя грань которого  $x_3 = 0$  жестко закреплена, закорочена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней

неэлектродированной грани  $x_3 = h$  приложена нестационарная нагрузка: 1)  $-k_3\theta_{,3}(x_1, h, t) = q$ ,  $\sigma_{13}(x_1, h, t) = \sigma_{33}(x_1, h, t) = 0$ ; 2)  $\theta_{,3}(x_1, h, t) = 0$ ,  $\sigma_{13}(x_1, h, t) = p_1$ ,  $\sigma_{33}(x_1, h, t) = 0$ ; 3)  $\theta_{,3}(x_1, h, t) = 0$ ,  $\sigma_{13}(x_1, h, t) = 0$ ,  $\sigma_{33}(x_1, h, t) = p_3$ .

При тепловом способе нагружения постановка задачи термоэлектроупругости для слоя имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0, \quad (5.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( k_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) = c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + T_0 \gamma_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 g_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial t}, \quad (5.3.3)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = \varphi(x_1, 0, t) = 0, \quad (5.3.4)$$

$$-k_3\theta_{,3}(x_1, h, t) = q, \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = \sigma_{33}(x_1, h, t) = 0, \quad D_3(x_1, h, t) = 0, \quad (5.3.5)$$

$$\theta(x_1, x_3, 0) = u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_1(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_3(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (5.3.6)$$

Здесь  $\sigma_{11} = c_{11}u_{1,1} + c_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} - \gamma_1\theta$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = c_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{15}\varphi_{,1}$ ,

$\sigma_{33} = c_{13}u_{1,1} + c_{33}u_{3,3} + e_{33}\varphi_{,3} - \gamma_3\theta$  – ненулевые компоненты тензора напряжений,

$D_1 = e_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) - \varepsilon_1\varphi_{,1}$ ,  $D_3 = e_{33}u_{3,3} + e_{13}u_{1,1} - \varepsilon_3\varphi_{,3} + g_3\theta$  – компоненты вектора

электрической индукции.

КОЗ термоэлектроупругости при тепловом способе нагружения состоит в идентификации термомеханических характеристик слоя из (5.3.1)-(5.3.6) по информации о поле температуры, измеренном на верхней границе  $x_3 = h$ :

$$\theta(x_1, h, t) = f(x_1, t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (5.3.7)$$

В случае действия на верхней грани нормальной механической нагрузки в постановке задачи (5.3.1)-(5.3.6) изменятся граничные условия (5.3.5), которые примут вид:

$$\theta_{,3}(x_1, h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, h, t) = p_3, \quad D_3(x_1, h, t) = 0. \quad (5.3.8)$$

В этом случае в качестве дополнительной информации выступают компоненты перемещений, измеренные на верхней границе слоя  $x_3 = h$ :

$$u_i(x_1, h, t) = g_i(x_1, t), \quad i = 1, 3, \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (5.3.9)$$

### 5.3.2 Упрощенные задачи

Основываясь на подходе, изложенном в [34], двумерную обратную задачу (5.3.1)-(5.3.9) можно значительно упростить, сведя ее к решению более простых одномерных задач. Для этого сначала применим к задаче (5.3.1)-(5.3.9) преобразование Фурье по координате  $x_1$ .

Постановка обратной задачи термоэлектроупругости для слоя в трансформантах Фурье имеет вид:

$$-\omega^2 c_{11} \hat{u}_1 - i\omega c_{13} \hat{u}_{3,3} - i\omega e_{31} \hat{\phi}_{,3} + i\omega \gamma_1 \hat{\theta} + (c_{44} \hat{u}_{1,3})_{,3} - i\omega (c_{44} \hat{u}_3)_{,3} - i\omega (e_{15} \hat{\phi})_{,3} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (5.3.10)$$

$$-i\omega c_{44} \hat{u}_{1,3} - \omega^2 c_{44} \hat{u}_3 - \omega^2 e_{15} \hat{\phi} - i\omega (c_{13} \hat{u}_1)_{,3} + (c_{33} \hat{u}_{3,3})_{,3} + (e_{33} \hat{\phi}_{,3})_{,3} - (\gamma_3 \theta)_{,3} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2}, \quad (5.3.11)$$

$$-\omega^2 k_{11} \hat{\theta} + (k_{33} \theta_{,3})_{,3} = c_\varepsilon \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - i\omega T_0 \gamma_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} + T_0 \gamma_3 \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 g_3 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x_3 \partial t}, \quad (5.3.12)$$

$$-i\omega e_{15} \hat{u}_{1,3} - \omega^2 e_{15} \hat{u}_3 + \omega^2 \varepsilon_1 \hat{\phi} + (e_{33} \hat{u}_{3,3})_{,3} - i\omega (e_{13} \hat{u}_1)_{,3} - (\varepsilon_3 \hat{\phi}_{,3})_{,3} + (g_3 \hat{\theta})_{,3} = 0, \quad (5.3.13)$$

$$\hat{u}_1(\omega, 0, t) = \hat{u}_3(\omega, 0, t) = \hat{\theta}(\omega, 0, t) = \hat{\phi}(\omega, 0, t) = 0, \quad (5.3.14)$$

$$-k_3 \hat{\theta}_{,3}(\omega, h, t) = \hat{q}(\omega, t), \quad c_{44}(h) (\hat{u}_{1,3}(\omega, h, t) - i\omega \hat{u}_3(\omega, h, t)) - i\omega e_{15}(h) \hat{\phi}(\omega, h, t) = 0,$$

$$-i\omega c_{13}(h) \hat{u}_1(\omega, h, t) + c_{33}(h) \hat{u}_{3,3}(\omega, h, t) + e_{33}(h) \hat{\phi}_{,3}(\omega, h, t) - \gamma_3(h) \hat{\theta}(\omega, h, t) = 0,$$

$$e_{33}(h) \hat{u}_{3,3}(\omega, h, t) - i\omega e_{13} \hat{u}_1(\omega, h, t) - \varepsilon_3(h) \hat{\phi}_{,3}(\omega, h, t) + g_3(h) \hat{\theta}(\omega, h, t) = 0, \quad (5.3.15)$$

$$\hat{\theta}(\omega, x_3, 0) = \hat{u}_1(\omega, x_3, 0) = \hat{u}_3(\omega, x_3, 0) = \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(\omega, x_3, 0) = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}(\omega, x_3, 0) = 0, \quad (5.3.16)$$

$$\hat{\theta}(\omega, h, t) = \hat{f}(\omega, t), \quad t \in [T_1, T_2], \quad (5.3.17)$$

$$\hat{u}_i(\omega, h, t) = \hat{g}_i(\omega, t), \quad i = 1, 3, \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (5.3.18)$$

Для удобства дальнейших построений обезразмерим задачу (5.3.10)-(5.3.18) по формулам параграфа 1.6, введя дополнительно:  $x = \frac{x_1}{h}$ ,  $z = \frac{x_3}{h}$ ,

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{h}, U_3 = \frac{\hat{u}_3}{h}, W = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0}, \theta_0 = \sqrt{\frac{T_0 c_{33}^0}{c_\varepsilon^0}}, \Phi = \frac{\hat{\phi}}{\phi_0}, \phi_0 = \sqrt{\frac{c_{33}^0}{\varepsilon_3^0}} h, Q = \frac{\hat{q}}{q^*}, q^* = \frac{k_3^0 c_{33}^0}{\gamma_3^0 h}, F = \frac{\hat{f}}{\theta_0},$$

$$G_i = \frac{\hat{g}_i}{c_{33}^0}, P_i = \frac{\hat{p}_i}{c_{33}^0}.$$

Функции  $U_1, U_3, W, \Phi, F, G_i$  представляют собой аналитические функции параметра преобразования Фурье  $\omega$ , поэтому при малых значениях этого параметра их можно представить в виде разложения по степеням  $\omega$ .

$$U_1(\omega, z, \tau_1) = u_0(z, \tau_1) + i\omega u_1(z, \tau_1) + \omega^2 u_2(z, \tau_1) + \dots,$$

$$U_3(\omega, z, \tau_1) = v_0(z, \tau_1) + i\omega v_1(z, \tau_1) + \omega^2 v_2(z, \tau_1) + \dots,$$

$$W(\omega, z, \tau_1) = w_0(z, \tau_1) + i\omega w_1(z, \tau_1) + \omega^2 w_2(z, \tau_1) + \dots,$$

$$\Phi(\omega, z, \tau_1) = \Phi_0(z, \tau_1) + i\omega \Phi_1(z, \tau_1) + \omega^2 \Phi_2(z, \tau_1) + \dots,$$

$$F(\omega, \tau_1) = F_0(\tau_1) + i\omega F_1(\tau_1) + \omega^2 F_2(\tau_1) + \dots,$$

$$Q(\omega, \tau_1) = Q_0(\tau_1) + i\omega Q_1(\tau_1) + \omega^2 Q_2(\tau_1) + \dots, G_i(\omega, \tau_2) = G_i^{(0)}(\tau_2) + i\omega G_i^{(1)}(\tau_2) + \omega^2 G_i^{(2)}(\tau_2) + \dots$$

$$P_i(\omega, \tau_2) = P_i^{(0)}(\tau_2) + i\omega P_i^{(1)}(\tau_2) + \omega^2 P_i^{(2)}(\tau_2) + \dots \quad (5.3.19)$$

Коэффициенты разложений в формулах (5.3.19) – это осредненные функции компонент физических полей и их моменты различных порядков,

$$\text{например, } w_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, z, \tau_1) dx, w_1 = i \int_{-\infty}^{\infty} W(x, z, \tau_1) x dx, w_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, z, \tau_1) x^2 dx.$$

Ограничимся в разложениях (5.3.19) только тремя слагаемыми. Подставим разложения (5.3.19) в безразмерную постановку задачи (5.3.10)-(5.3.18), составим начально-краевые задачи при одинаковых степенях  $\omega$  и применим к ним преобразование Лапласа по времени. Тогда получим шесть упрощенных обратных задач. *Задачи 1a, 2a, 3a* аналогичны задаче для упругого стержня, *задачи 1b, 2b, 3b* – задаче для термоупругого стержня с модифицированными коэффициентами, которые появляются после исключения электрического потенциала из постановок задач.

*Задача 1a.*

$$(\bar{c}_{44} \tilde{u}'_0)' = p^2 \bar{\rho} \tilde{u}_0, \quad (5.3.20)$$

$$\tilde{u}_0(0, p) = 0, \quad \bar{c}_{44}(1)\tilde{u}'_0(1, p) = \tilde{P}_1^{(0)}, \quad (5.3.21)$$

$$\tilde{u}_0(1, p) = \tilde{G}_1^{(0)}. \quad (5.3.22)$$

Здесь знак «штрих» обозначает производную по координате  $z$ .

### Задача 1b.

В случае теплового способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$(\bar{c}_{33}^* \tilde{v}'_0)' - \delta_2 (\bar{\gamma}_3^* \tilde{w}_0)' - \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{v}_0 = 0, \quad (5.3.23)$$

$$(\bar{k}_3 \tilde{w}'_0)' - p \bar{c}^* \tilde{w}_0 - p \delta_2 \bar{\gamma}_3^* \tilde{v}'_0 = 0, \quad (5.3.24)$$

$$\tilde{v}_0(0, p) = 0, \quad \tilde{w}_0(0, p) = 0, \quad (5.3.25)$$

$$-\bar{k}_3(1) \tilde{w}'_0(1, p) = \tilde{Q}_0(p), \quad \bar{c}_{33}^*(1) \tilde{v}'_0(1, p) - \delta_2 \bar{\gamma}_3^*(1) \tilde{w}'_0(1, p) = 0, \quad (5.3.26)$$

$$\tilde{w}_0(1, p) = \tilde{F}_0, \quad (5.3.27)$$

где  $\bar{c}_{33}^* = \bar{c}_{33} + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\vartheta}_3}$ ,  $\bar{\gamma}_3^* = \bar{\gamma}_3 - \delta_1 \delta_3 \frac{\bar{e}_{33} \bar{g}_3}{\bar{\vartheta}_3}$ ,  $\bar{c}^* = \bar{c} + \delta_3^2 \frac{\bar{g}_3^2}{\bar{\vartheta}_3}$ .

В случае механического нагружения в постановке задачи (5.3.23)-(5.3.27) изменятся граничные и дополнительные условия (5.3.26), (5.3.27), которые примут вид:

$$\tilde{w}'_0(1, p) = 0, \quad \bar{c}_{33}^*(1) \tilde{v}'_0(1, p) - \delta_2 \bar{\gamma}_3^*(1) \tilde{w}'_0(1, p) = \tilde{P}_3^{(0)}(p), \quad (5.3.28)$$

$$\tilde{v}_0(1, p) = \tilde{P}_3^{(0)}. \quad (5.3.29)$$

Если функция  $\tilde{u}_0$  известна из решения задачи 1a, а пара функций  $(\tilde{v}_0, \tilde{w}_0)$  из решения задачи 1b, тогда можно сформулировать постановки обратных задач 2a и 2b.

### Задача 2a.

$$(\bar{c}_{44} \tilde{u}'_1)' - p^2 \bar{\rho} \tilde{u}_1 = s_1, \quad (5.3.30)$$

$$\tilde{u}_1(0, p) = 0, \quad \bar{c}_{44}(1) \tilde{u}'_1(1, p) = P_1^{(1*)}(p), \quad (5.3.31)$$

$$\tilde{u}_1(1, p) = \tilde{G}_1^{(1)}, \quad (5.3.32)$$

где  $\tilde{P}_1^{(1*)} = \tilde{P}_1^{(1)} + \bar{c}_{44}(1)\tilde{v}_0(1, p)$ ,  $s_1 = (\bar{c}_{44}\tilde{v}_0)' + \bar{c}_{13}^*\tilde{v}_0' - \delta_2\bar{\gamma}_1^*\tilde{w}_0$ ,  $\bar{c}_{13}^* = \bar{c}_{13} + \delta_1^2 \frac{(\bar{e}_{31} + \bar{e}_{15})\bar{e}_{33}}{\bar{\alpha}_3}$ ,

$$\bar{\gamma}_1^* = \bar{\gamma}_1 - \frac{\delta_1\delta_3}{\delta_2} \frac{(\bar{e}_{31} + \bar{e}_{15})\bar{g}_3}{\bar{\alpha}_3}.$$

### Задача 2b.

В случае механического способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$(\bar{c}_{33}^*\tilde{v}_1)' - \delta_2(\bar{\gamma}_3^*\tilde{w}_1)' - p^2\bar{\rho}\tilde{v}_1 = s_2, \quad (5.3.33)$$

$$(\bar{k}_{33}\tilde{w}_1)' - p\bar{c}^*\tilde{w}_1 - p\delta_2\bar{\gamma}_3^*\tilde{v}_1 = s_3, \quad (5.3.34)$$

$$\tilde{v}_1(0, p) = 0, \quad \tilde{w}_1(0, p) = 0, \quad (5.3.35)$$

$$\tilde{w}_1'(1, p) = 0, \quad \bar{c}_{33}^*(1)\tilde{v}_1'(1, p) - \delta_2\bar{\gamma}_3^*(1)\tilde{w}_1'(1, p) = \tilde{P}_3^{(1*)}, \quad (5.3.36)$$

$$\tilde{v}_1(1, p) = \tilde{G}_3^{(1)}, \quad (5.3.37)$$

где  $s_2 = \bar{c}_{44}\tilde{u}_0' + (\bar{c}_{13}^*\tilde{u}_0)' + \delta_1^2(\bar{e}_{13} + \bar{e}_{15})\bar{e}_{33}\tilde{u}_0$ ,  $s_3 = p\delta_2\bar{\gamma}_1^*\tilde{u}_0$ ,  $\tilde{P}_3^{(1*)} = \tilde{P}_3^{(1)} + \bar{c}_{13}^*(1)\tilde{u}_0(1, p)$ .

Если функция  $\tilde{u}_1$  известна из решения задачи 2a, а пара функций  $(\tilde{v}_1, \tilde{w}_1)$  из решения задачи 2b, тогда можно сформулировать постановки обратных задач 3a и 3b.

### Задача 3a.

$$(\bar{c}_{44}\tilde{u}_2)' - p^2\bar{\rho}\tilde{u}_2 = s_4, \quad (5.3.38)$$

$$\tilde{u}_2(0, p) = 0, \quad \bar{c}_{44}(1)\tilde{u}_2'(1, p) = \tilde{P}_1^{(2*)}, \quad (5.3.39)$$

$$\tilde{u}_2(1, p) = \tilde{G}_1^{(2)}, \quad (5.3.40)$$

где  $s_4 = \bar{c}_{11}^*\tilde{u}_0 + \bar{\gamma}_1^*\tilde{w}_1 - (\bar{c}_{44}\tilde{v}_1)'$ ,  $\bar{c}_{11}^* = \bar{c}_{11} + \delta_1^2 \frac{(\bar{e}_{13} + \bar{e}_{15})^2}{\bar{\alpha}_3}$ ,  $\tilde{P}_1^{(2*)} = \tilde{P}_1^{(2)} - \bar{c}_{44}(1)\tilde{v}_1(1, p)$ .

### Задача 3b.

В случае теплового способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$(\bar{c}_{33}^*\tilde{v}_2)' - \delta_2(\bar{\gamma}_3^*\tilde{w}_2)' - p^2\bar{\rho}\tilde{v}_2 = s_5, \quad (5.3.41)$$

$$-\bar{k}_1\tilde{w}_0 + (\bar{k}_3\tilde{w}_2)' - p\bar{c}^*\tilde{w}_2 - p\delta_2\bar{\gamma}_3^*\tilde{v}_2 = s_6, \quad (5.3.42)$$

$$\tilde{v}_2(0, p) = 0, \quad \tilde{w}_2(0, p) = 0, \quad (5.3.43)$$

$$-\bar{k}_3(1)\tilde{w}'_2(1, p) = \tilde{Q}_2, \quad \bar{c}_{33}^*(1)\tilde{v}'_2(1, p) - \delta_2\bar{\gamma}_3^*(1)\tilde{w}'_2(1, p) = 0, \quad (5.3.44)$$

$$\tilde{w}_2(1, p) = \tilde{F}_2. \quad (5.3.45)$$

Здесь  $s_5 = -\bar{c}_{44}\tilde{u}'_1 + \bar{c}_{44}\tilde{v}_0 - (\bar{c}_{13}^*\tilde{u}_1)'$ ,  $s_6 = p\delta_2\bar{\gamma}_1^*\tilde{u}_1$ .

Решение прямых задач 1а, 2а, 3а сводится к решению ИУФ 2-го рода в трансформантах Лапласа и обращении трансформант на основе теории вычетов.

Так, задачи 3а сводится к следующему ИУФ 2-го рода:

$$\tilde{J}_2(z, p) = \tilde{P}_1^{(2*)} + \int_0^1 K_1(z, \eta, p)\tilde{J}_2(\eta, p)d\eta - \int_z^1 s_4(\eta)d\eta, \quad (5.3.46)$$

$$\text{где } K_1(z, \eta, p) = -\frac{p^2}{\bar{c}_{44}(\eta)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\xi)d\xi.$$

После нахождения  $\tilde{J}_2(z, p)$  из решения уравнения (5.3.46) методом коллокаций далее вычисляется  $\tilde{u}_2(z, p) = \int_0^z \frac{1}{\bar{c}_{44}(\eta)}\tilde{J}_2(\eta, p)d\eta$ .

Решение прямых задач 1б, 2б, 3б сводится к решению системы ИУФ 2-го рода в трансформантах Лапласа и обращении трансформант на основе теории вычетов. Например, система ИУФ 2-го рода для решения задачи 2б, имеет вид:

$$\tilde{w}_1(z, p) = \int_0^1 K_2(z, \zeta, p)\tilde{w}_1(\zeta, p)d\zeta + \int_0^1 K_3(z, \zeta, p)\tilde{\Omega}_1(\zeta, p)d\zeta + \int_0^z K_0(z, \zeta, p)s_3(\zeta)d\zeta, \quad (5.3.47)$$

$$\tilde{\Omega}_1(z, p) = \int_0^1 K_4(z, \zeta, p)\tilde{w}_1(\zeta, p)d\zeta + \int_0^1 K_5(z, \zeta, p)\tilde{\Omega}_1(\zeta, p)d\zeta + \tilde{P}_3^{(1*)}(p) - \int_z^1 s_2(\zeta)d\zeta, \quad (5.3.48)$$

$$\text{где } K_0(z, \zeta) = \int_0^{\min\{z, \zeta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}_{33}(\eta)}, \quad K_2(z, \zeta, p) = -p \left( \bar{c}^*(\zeta) + \delta_2 \frac{\bar{\gamma}_3^2(\zeta)}{\bar{c}_{33}^*(\zeta)} \right) \int_0^{\min\{z, \zeta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}_{33}(\eta)},$$

$$K_3(z, \zeta, p) = -\delta_2 p \frac{\bar{\gamma}_3^*(\zeta)}{\bar{c}_{33}^*(\zeta)} \int_0^{\min\{z, \zeta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}_{33}(\eta)}, \quad K_4(z, \zeta, p) = -p^2 \frac{\bar{\gamma}_3^*(\zeta)}{\bar{c}_{33}^*(\zeta)} \int_{\min\{z, \zeta\}}^1 \bar{\rho}(\eta)d\eta,$$

$$K_5(z, \zeta, p) = -\frac{p^2}{\bar{c}_{33}^*(\zeta)} \int_{\min\{z, \zeta\}}^1 \bar{\rho}(\eta)d\eta.$$

### 5.3.3 Схема решения упрощенных обратных задач

Реконструкция неоднородных свойств термоэлектроупругого слоя осуществляется в три этапа.

На первом этапе находятся функции  $\bar{c}_{44}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $u_0$  из решения обратной задачи *1a*, а также функции  $\bar{c}_{33}^*$ ,  $\gamma_3^*$ ,  $\bar{c}^*$ ,  $\bar{k}_3$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  из решения задачи *1b*.

Решение нелинейных задач такого типа основывается на построении итерационного процесса по схеме параграфа 3.3. Функционал невязки при тепловом способе нагружения имеет вид:

$$J_1 = \int_{a_1}^{a_2} (F_0(\tau_1) - w_0(1, \tau_1))^2 d\tau_1; \quad (5.3.49)$$

В случае механическом способа нагружения:

$$J_2 = \int_{b_1}^{b_2} (G_1^{(0)}(\tau_2) - u_0(1, \tau_2))^2 d\tau_2, \quad (5.3.50)$$

$$J_3 = \int_{c_1}^{c_2} (G_3^{(0)}(\tau_2) - v_0(1, \tau_2))^2 d\tau_2. \quad (5.3.51)$$

Рассмотрим операторные уравнения в трансформантах Лапласа, полученные при решении обратных задач *1a* и *1b*.

*Задача 1a.*

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{44}^{(n-1)} (\tilde{u}_0^{(n-1)})^2 dz = \tilde{F}_1^{(0)} (\tilde{G}_1^{(0)}(p) - \tilde{u}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (5.3.52)$$

*Задача 1b.*

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{33}^{*(n-1)} (\tilde{v}_0^{(n-1)})^2 dz = \tilde{F}_3^{(0)} (\tilde{G}_3^{(0)}(p) - \tilde{v}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.3.53)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{k}_3^{(n-1)} (\tilde{w}_0^{(n-1)})^2 dz = \tilde{Q}_0 (\tilde{F}_0 - \tilde{w}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.3.54)$$

$$p \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{w}_0^{(n-1)})^2 dz = \tilde{Q}_0 (\tilde{F}_0 - \tilde{w}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.3.55)$$

$$-\delta_2 p \int_0^1 \delta \bar{\gamma}_3^{*(n-1)} \tilde{v}_0^{(n-1)} \tilde{w}_0^{(n-1)} dz = \tilde{Q}_0 (\tilde{F}_0 - \tilde{w}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (5.3.56)$$

После нахождения характеристик  $\bar{c}_{44}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{c}_{33}^*$ ,  $\gamma_3^*$ ,  $\bar{c}^*$ ,  $\bar{k}_3$ , далее из решения *прямых задач 1a и 1b* находятся функции  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , которые необходимы для решения *обратных задач 2a и 2b*.

На втором этапе находятся функции  $\bar{c}_{13}^*$ ,  $u_1$  из решения *задачи 2a*, а также функций  $\bar{\gamma}_1^*$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  из решения *задачи 2b*.

Для нахождения функции  $\bar{c}_{13}^*$ , выполняя линеаризацию по схеме, предложенной в [34], получим ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{13}^* \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{v}_0^{(n-1)} dz = \tilde{P}_1^{(0)} \tilde{G}_1^{(1)} - \tilde{P}_1^{(1*)} \tilde{G}_1^{(0)} + \int_0^1 \bar{c}_{44} \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{v}_0^{(n-1)} dz, \quad p \in [0, \infty). \quad (5.3.57)$$

Аналогичным способом получено ИУФ 1-го рода для нахождения функции  $\bar{\gamma}_1^*$ , которое имеет вид:

$$p \delta_2 \int_0^1 \delta \bar{\gamma}_1^{*(n-1)} \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{w}_0^{(n-1)} dz = \tilde{Q}_0 \tilde{F}_1 - \tilde{Q}_1 \tilde{F}_0, \quad p \in [0, \infty). \quad (5.3.58)$$

На третьем этапе осуществляется идентификация  $\bar{c}_{11}^*$ ,  $u_2$  из решения *обратной задачи 3a*, а также функций  $\bar{k}_1$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  из решения *обратной задачи 3b*.

Проводя действия, аналогичные второму этапу, получим следующие ИУФ 1-го рода с гладкими ядрами:

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{11}^* (\tilde{u}_0^{(n-1)})^2 dz = \tilde{P}_1^{(0)} \tilde{G}_1^{(2)} - \tilde{P}_1^{(2*)} \tilde{G}_1^{(0)} - \delta_2 \int_0^1 \bar{\gamma}_1^* \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{w}_1^{(n-1)} dz - \int_0^1 \bar{c}_{44} \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{w}_1^{(n-1)} dz + \int_0^1 \bar{c}_{13}^* \tilde{v}_1' \tilde{u}_0^{(n-1)} dz, \quad p \in [0, \infty). \quad (5.3.59)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{k}_1 (\tilde{w}_0^{(n-1)})^2 dz = \tilde{Q}_0 \tilde{F}_2 - \tilde{Q}_2 \tilde{F}_0 - p \delta_2 \int_0^1 \bar{\gamma}_1^* \tilde{u}_1^{(n-1)} \tilde{w}_0^{(n-1)} dz, \quad p \in [0, \infty). \quad (5.3.60)$$

### 5.3.4 Результаты реконструкции

На первом этапе восстанавливались характеристики  $\bar{c}_{44}$ ,  $\bar{c}_{33}^*$ ,  $\gamma_3^*$ ,  $\bar{k}_3$ .  
при  $P_1(\tau_2) = P_3(\tau_2) = H(\tau_2)$ ,  $Q_0(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\delta_1 = 0.6$ ,  $\delta_2 = 0.05$ ,  $\delta_3 = 0.04$ . При

решении интегральных уравнений методом коллокаций отрезок  $z \in [0,1]$  разбивался на 20 равных частей.

На рис. 5.4 показаны результаты реконструкции следующих характеристик: а)  $\bar{c}_{44}(z) = 2.5 - 1.7z^3$ ; б)  $\bar{k}_{33}(z) = 4 - e^{z^2}$  при  $[a_1, a_2] = [0.04, 0.48]$ ,  $[b_1, b_2] = [0.06, 0.88]$ ,  $\bar{c}_{44}^0(z) = 2.45 - 1.60z$ ,  $\bar{k}_{33}^0(z) = 3.05 - 1.55z$ .

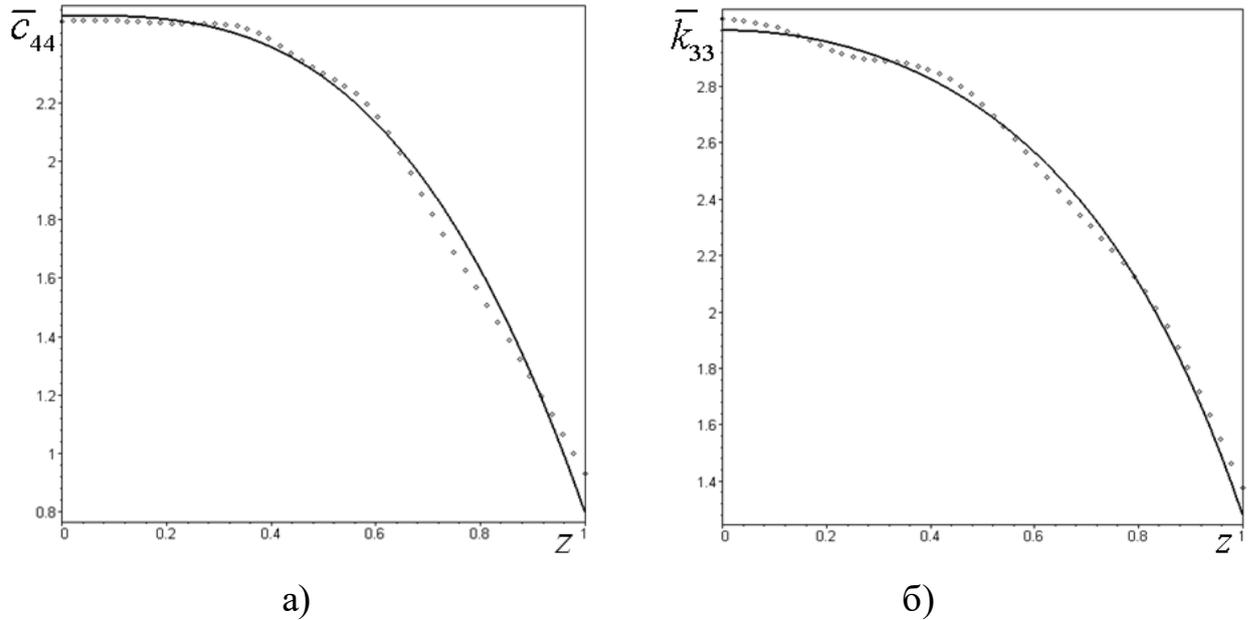


Рисунок 5.4 – Результаты реконструкции термомеханических

характеристик слоя на первом этапе: а)  $\bar{c}_{44}(z) = 2.5 - 1.7z^3$ ; б)  $\bar{k}_{33}(z) = 4 - e^{z^2}$ .

На втором этапе восстанавливались функции  $\bar{c}_{13}^*$ ,  $\bar{\gamma}_1^*$  из решения ИУФ 1-го рода, полученных путем обращения уравнений (5.3.57), (5.3.58). При применении метода коллокаций отрезок  $z \in [0,1]$  разбивался на 100 частей.

На рис. 5.5 изображены результаты реконструкции термомеханических характеристик на втором этапе: а)  $\bar{c}_{13}^*(z) = 1.2 - 0.3z + 3z^2$ ; б)  $\bar{\gamma}_1^*(z) = 0.7 + 0.2e^{2.8z}$ . При этом максимальная погрешность реконструкции увеличивается по сравнению с первым этапом, что связано с накоплением погрешности идентификации на предыдущем этапе.

На третьем этапе восстанавливались характеристики  $\bar{c}_{11}^*$ ,  $\bar{k}_1$  из решения ИУФ 1-го рода (5.3.59), (5.3.60). При решении ИУФ 2-го рода методом

коллокаций сетка еще более измельчалась: отрезок  $z \in [0,1]$  разбивался на 150 равных частей.

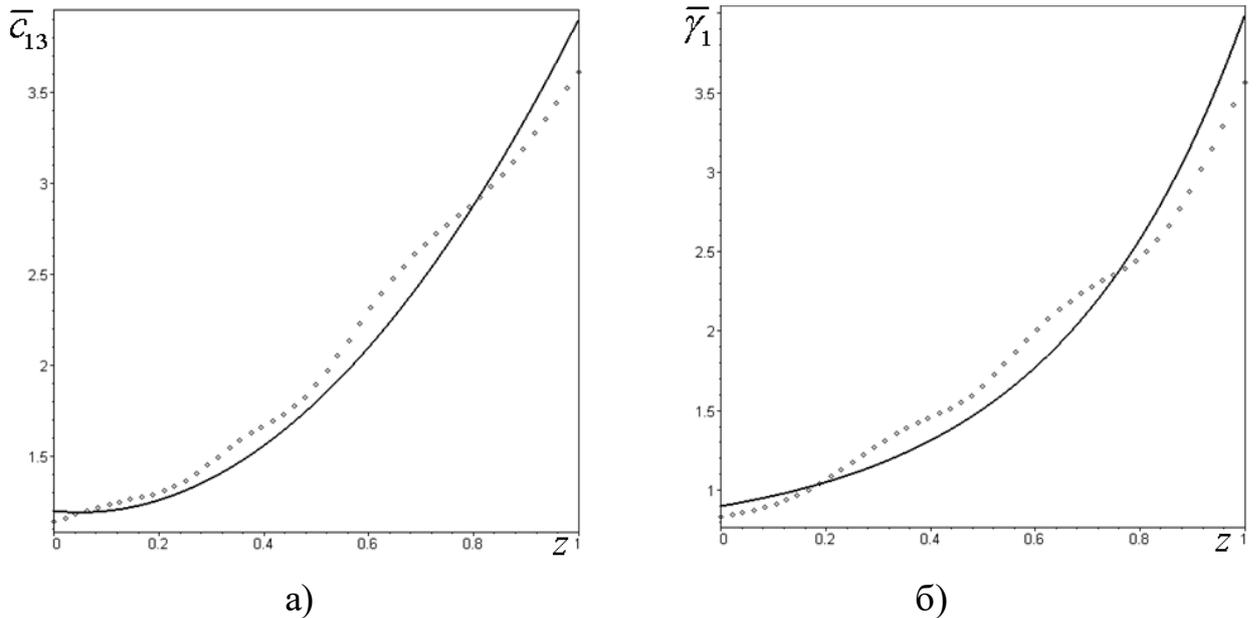


Рисунок 5.5 – Результаты реконструкции термомеханических характеристик слоя: а)  $\bar{c}_{13}^*(z) = 1.2 - 0.3z + 3z^2$ ; б)  $\bar{\gamma}_1^*(z) = 0.7 + 0.2e^{2.8z}$ .

На рис. 5.6 представлены результаты реконструкции термомеханических характеристик на третьем этапе: а)  $\bar{c}_{11}^*(z) = 1.4 + \sin(0.45\pi z + 0.2)$ ; б)  $\bar{k}_1(z) = 1.6 - \cos(\pi z)$ .

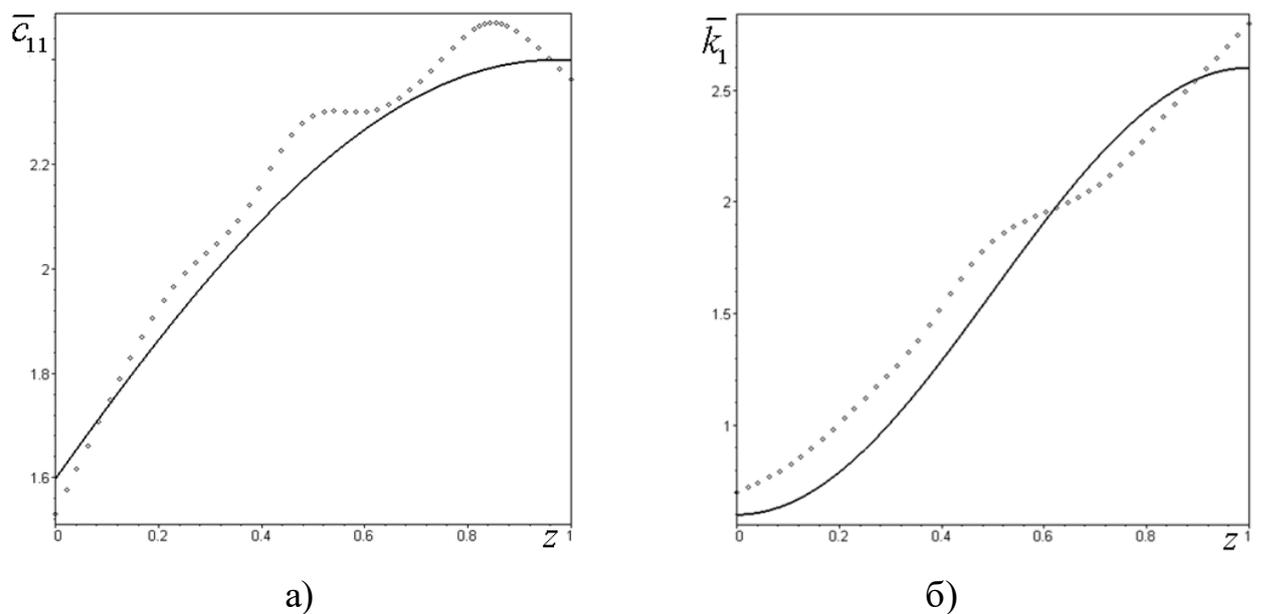


Рисунок 5.6 – Результаты реконструкции термомеханических характеристик слоя: а)  $\bar{c}_{11}^*(z) = 1.4 + \sin(0.45\pi z + 0.2)$ ; б)  $\bar{k}_1(z) = 1.6 - \cos(\pi z)$ .

Из рис. 5.6 следует, что погрешность реконструкции на третьем этапе значительно увеличивается по сравнению со вторым этапом, что связано с накоплением погрешности на предыдущих этапах.

#### **5.4 Коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости для неоднородного цилиндра.**

##### **5.4.1 Постановка обратной задачи для цилиндра. Операторные уравнения**

Обратная задача для термоэлектроупругого цилиндра при тепловом способе нагружения состоит в нахождении характеристик  $(\bar{\gamma}_3(\xi), \bar{g}(\xi), \bar{k}(\xi), \bar{c}(\xi))$  из (1.8.10)-(1.8.15) при известных остальных по информации о температуре на внешней поверхности  $\xi = \xi_0$ :

$$W(1, \tau_1) = f(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2]. \quad (5.4.1)$$

Обратная задача для термоэлектроупругого цилиндра при механическом способе нагружения состоит в нахождении характеристик  $(\bar{c}_{11}(\xi), \bar{c}_{13}(\xi), \bar{c}_{33}(\xi), \bar{\gamma}_1(\xi), \bar{e}_{31}(\xi), \bar{e}_{33}(\xi))$  из (1.8.16)-(1.8.21) при известных остальных по информации о смещении на внешней поверхности  $\xi = \xi_0$ :

$$U_r(1, \tau_2) = g(\tau_2), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2]. \quad (5.4.2)$$

Операторные уравнения для решения КОЗ термоэлектроупругости для цилиндра получаются, если перейти в интегралах в левой и правой частях соотношений (5.1.6), (5.1.7) к цилиндрической системе координат. После обезразмеривания, выполненного по формулам параграфа 1.6, операторные уравнения для цилиндра в обозначениях Фойхта примут вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{c}_{11}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{c}_{13}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \xi d\xi + \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{c}_{33}^{(n-1)} \left( \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \xi d\xi + \\ & + p^2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\rho} \left( \tilde{U}_r^{(n-1)} \right)^2 \xi d\xi + \delta_1 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{e}_{31}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \xi d\xi + \delta_1 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{e}_{33}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \xi d\xi - \\ & - \delta_2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\gamma}_3^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi - \delta_2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\gamma}_1^{(n-1)} \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi = \end{aligned}$$

$$= -\beta_2 \tilde{\phi}(p) \left( \tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.4.3)$$

$$\int_{\xi_0}^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + p \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{W}^{(n-1)} \right)^2 \xi d\xi + \delta_2 p \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\gamma}_3^{(n-1)} \left( \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right) \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi + \delta_3 p \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi = \beta_1 \tilde{\varphi}(p) \left( \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \quad (5.4.4)$$

В случае восстановления одной характеристики термоэластопругого цилиндра при известных остальных операторные уравнения для нахождения поправок  $\delta \bar{k}(\xi)$ ,  $\delta \bar{c}(\xi)$ ,  $\delta \bar{\rho}(\xi)$ ,  $\delta \bar{\gamma}_3(\xi)$  имеют одинаковую структуру с соответствующими уравнениями для термоупругой трубы. Получены новые по сравнению с задачей для термоупругой трубы операторные уравнения для нахождения упругих модулей, пьезомодулей и пироккоэффициента. Так, уравнения для нахождения пьезомодулей и пироккоэффициента имеют вид:

$$\frac{\delta_1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{e}_{31}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \xi d\xi = - \left( \tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.4.5)$$

$$\frac{\delta_1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{e}_{33}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \xi d\xi = - \left( \tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \quad (5.4.6)$$

$$\frac{\delta_3 p}{\beta_1 \tilde{\varphi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty). \quad (5.4.7)$$

Рассмотрим итерационную схему идентификации двух термомеханических характеристик цилиндра, например,  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{g}(\xi)$ .

Для этого рассмотрим две задачи для радиально неоднородного цилиндра с заземленными электродами. При этом тепловая нагрузка на поверхностях цилиндра и характер снимаемой дополнительной информации, имеют такой же вид, как в случае обратной задачи для термоупругой трубы, рассмотренной в п. 4.4.3.

Исходя из постановки обратной задачи, с учетом двух типов различной тепловой нагрузки на внешней поверхности цилиндра, получим следующую систему операторных уравнений 1-го рода в трансформантах:

$$\begin{aligned}
& p \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_I^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \delta_3 p^2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}_I^{(n-1)}}{d\xi} \tilde{W}_I^{(n-1)} \xi d\xi = \\
& = \tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty),
\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

$$\begin{aligned}
& (p+1)^2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_{II}^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \delta_3 p (p+1)^2 \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}_{II}^{(n-1)}}{d\xi} \tilde{W}_{II}^{(n-1)} \xi d\xi = \\
& = \tilde{f}_{II}(p) - \tilde{Q}_{II}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty).
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

Операторные уравнения для нахождения поправок в оригиналах получатся путем обращения уравнений вида (5.4.5) или системы (5.4.8), (5.4.9) в трансформантах.

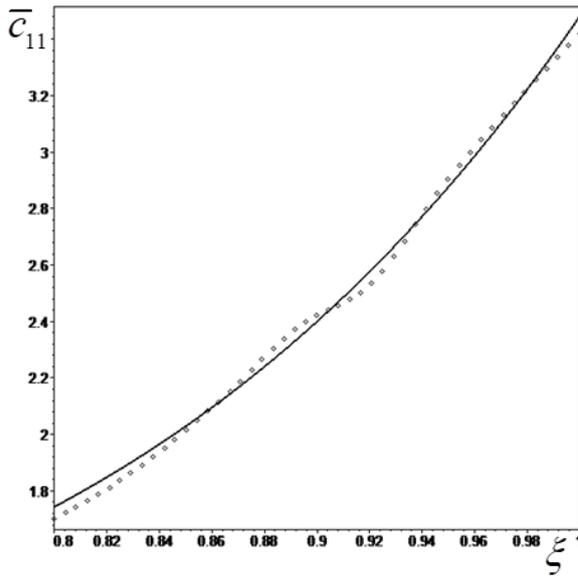
### 5.4.2 Результаты реконструкции

Вначале рассмотрим результаты реконструкции одной из характеристик цилиндра при известных других. В расчетах принято:  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = 0.59$ ,  $\delta_2 = 0.005$ ,  $\delta_3 = 0.035$ ,  $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$ .

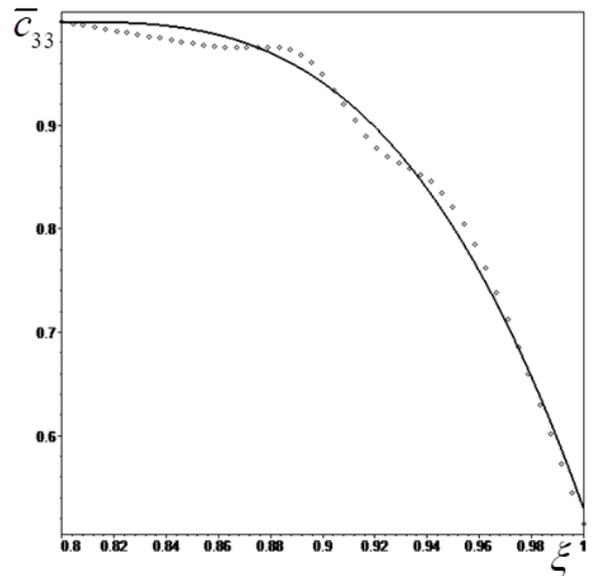
На рис. 5.7 изображены результаты реконструкции упругих модулей: а)

$$\bar{c}_{11}(\xi) = 1 + 1.4(\xi + 0.1)^6; \quad \text{б) } \bar{c}_{33}(\xi) = 1 - 0.47 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^3 \quad \text{при} \quad [b_1, b_2] = [0.07, 0.58],$$

$$\bar{c}_{11}^{(0)} = 8.1\xi - 4.65, \quad \bar{c}_{33}^{(0)} = 2.90 - 2.35\xi.$$



а)



б)

Рисунок 5.7 – Результаты реконструкции: а)  $\bar{c}_{11}$ ; б)  $\bar{c}_{33}$ .

На рис. 5.8 представлены результаты реконструкции пьезомодулей: а)  $\bar{e}_{33}(\xi) = 0.4(1 + \xi^{10})$ ; б)  $\bar{e}_{31}(\xi) = 1.5 + \sin(8(\xi - 1))$  при  $\delta_1 = 0.6$ ,  $[b_1, b_2] = [0.12, 0.56]$ .

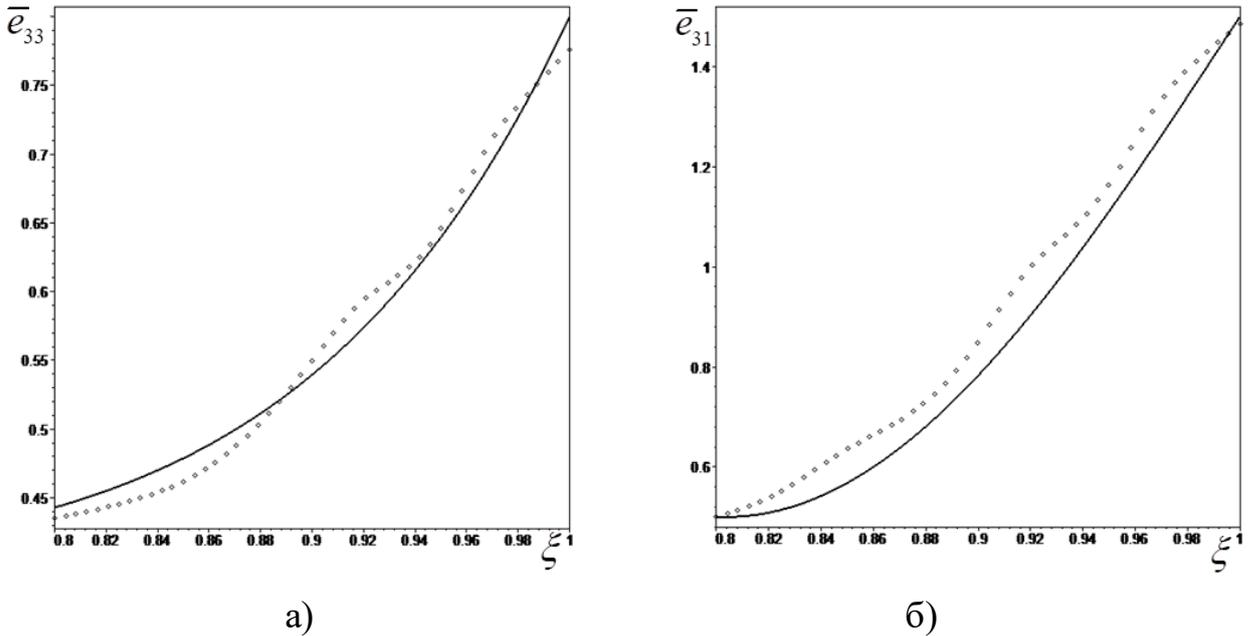


Рисунок 5.8 – Результаты реконструкции пьезомодулей: а)  $\bar{e}_{33}$ ; б)  $\bar{e}_{31}$ .

На рис. 5.9 показаны результаты реконструкции теплофизических характеристик: а)  $\bar{c}(\xi) = 0.5 + 200e^{-8\xi}$ ; б)  $\bar{k}(\xi) = 4e^{-8(\xi - \xi_0)}$ .

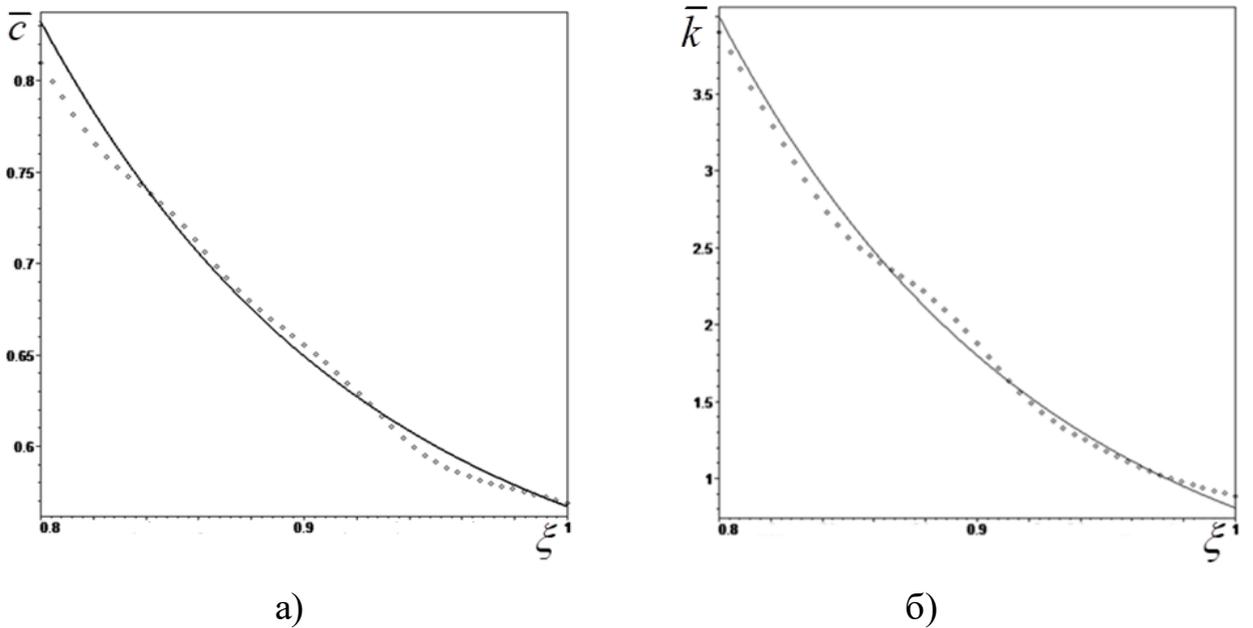


Рисунок 5.9 – Результаты реконструкции: а)  $\bar{c}(\xi)$ ; б)  $\bar{k}(\xi)$ .

Из рис. 5.7-5.9 следует, что пьезомодули восстанавливаются с большей погрешностью, чем упругие модули и теплофизические характеристики.

Проведено исследование влияния параметра  $\delta_3$  на результаты реконструкции пирокоэффициента  $\bar{g}(\xi)$ . На рис. 5.10 представлены результаты реконструкции  $\bar{g}(\xi) = 1 - 0.56 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^2$  при: а)  $\delta_3 = 0.1$ ; б)  $\delta_3 = 0.5$ .

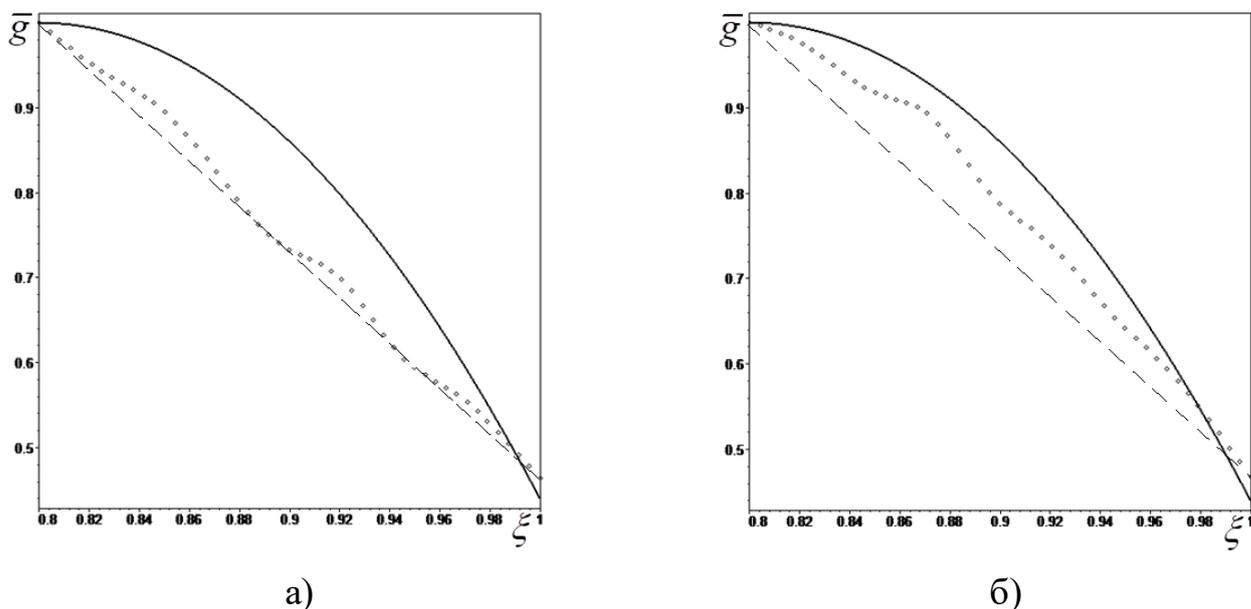


Рисунок 5.10 – Результаты реконструкции  $\bar{g}(\xi)$  при: а)  $\delta_3 = 0.1$ ; б)  $\delta_3 = 0.5$ .

В табл. 5.1 представлено исследование зашумления входной информации на результаты реконструкции материальных характеристик.

Таблица 5.1

Функции	Максимальная погрешность реконструкции	
	$\beta = 0$	$\beta = 0.01$
$\bar{c}_{11}(\xi) = 1 + 1.4(\xi + 0.1)^6$	1.7	7.4
$\bar{c}_{33}(\xi) = 1 - 0.47 \left( \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^3$	3.6	9.7
$\bar{e}_{33}(\xi) = 0.4(1 + \xi^{10})$	5.9	11.8
$\bar{c}(\xi) = 0.5 + 200e^{-8\xi}$	6.1	10.9
$\bar{k}(\xi) = 4e^{-8(\xi - \xi_0)}$	1.5	6.8

Из табл. 5.1 следует, что с увеличением зашумления входной информации погрешность реконструкции материальных характеристик цилиндра возрастает, но даже при 1%-м шуме не превышает 12%.

Далее рассмотрим результаты реконструкции двух характеристик термоэлектроупругого цилиндра.

На рис. 5.11 изображен результат реконструкции двух характеристик:

а)  $\bar{k}(\xi) = -8\xi^2 + 12\xi - 3$ ; б)  $\bar{g}(\xi) = -4\xi^2 + 6\xi - 1$  при  $\delta_3 = 0.5$ ,  $\bar{k}^0(\xi) = 3.4 - 2.4\xi$ ,  $\bar{g}^0(\xi) = 2.2 - 1.2\xi$ .

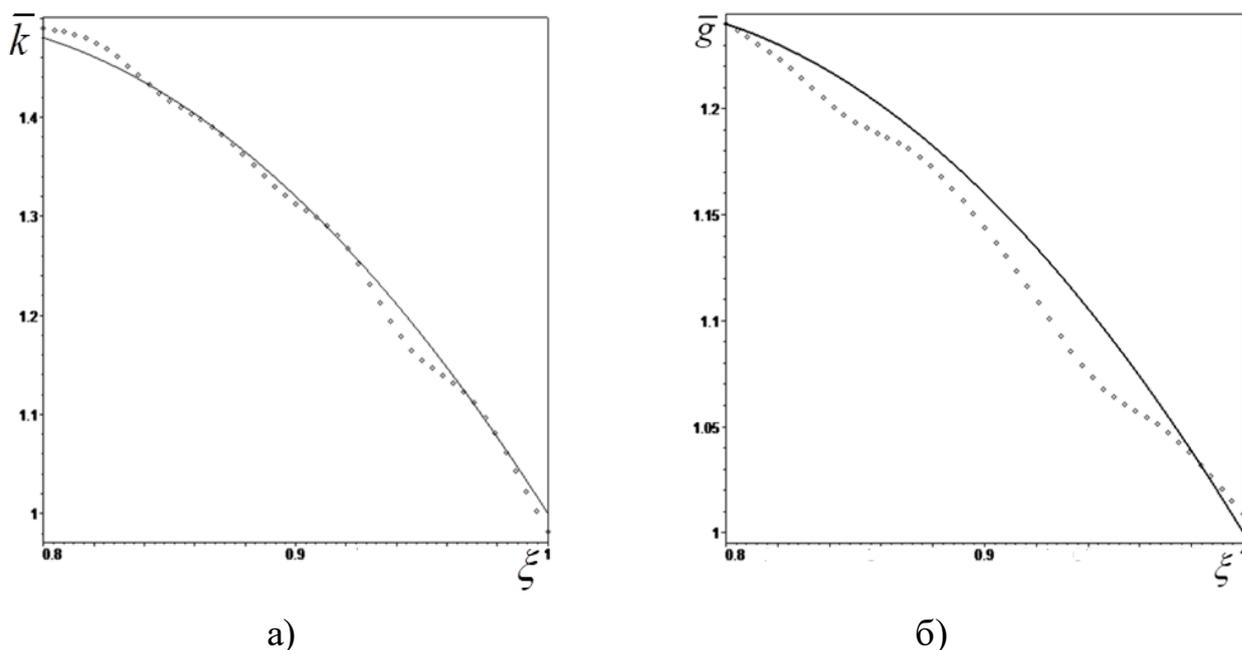


Рисунок 5.11 –Результат одновременного восстановления:

а)  $\bar{k}(\xi)$ ; б)  $\bar{g}(\xi)$ .

Из рис. 5.11 следует, что погрешность восстановления пирокоэффициента значительно превосходит погрешность реконструкции коэффициента теплопроводности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработаны численные методы исследования динамических связанных задач термоупругости и термоэлектроупругости для элементов стержневых, плоских и цилиндрических конструкций, изготовленных из неоднородных материалов.

2. В рамках градиентной механики получены асимптотические формулы для нахождения напряженно-деформированного состояния составных и слоистых упругих, термоупругих и электроупругих тел при малых значениях масштабных параметров.

3. В зависимости от временного интервала съема дополнительной информации (полубесконечный и конечный) исследованы две постановки обратной задачи об определении переменных характеристик неоднородной модели термоупругости. Получены операторные уравнения для решения обратных задач термоупругости в первой и второй постановках.

4. Разработаны численные схемы решения обратных коэффициентных задач термоупругости и термоэлектроупругости при восстановлении одной или двух материальных функций, сочетающие итерационные схемы и метод регуляризации.

5. Решен ряд коэффициентных обратных задач для моделей неоднородной теории термоупругости и термоэлектроупругости для стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра и прямоугольника. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *III. Прикладная модель термоупругого деформирования прямоугольника с неоднородным покрытием.*

В первой части приложения представлена прикладная модель термоупругого деформирования системы «подложка – неоднородное покрытие» [256].

В рамках плоской деформации ( $u_1 = u_1(x_1, x_3)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = u_3(x_1, x_3)$ ,  $T = T(x_1, x_3)$ ) рассмотрим равновесие слоистой прямоугольной области с плоскостью сопряжения  $x_3 = h_1$ . Боковые грани прямоугольника  $x_1 = \pm L$  теплоизолированы и свободны от напряжений. Нижняя сторона  $x_3 = 0$  жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхнюю грань  $x_3 = h$ , свободную от напряжений, действует температура  $T_1$ .

Исходя из граничных условий, полагаем, что температура изменяется только вдоль  $x_3$ . После обезразмеривания, выполненного по формулам параграфа 1.5, постановка задачи теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k}_i(y_3) \frac{\partial W_i}{\partial y_3} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad y_3 \in [0, 1], \quad (1)$$

$$W_1(0) = 0, \quad W_2(1) = 1, \quad (2)$$

$$W_1(\bar{h}_1) = W_2(\bar{h}_1), \quad \bar{k}_1(\bar{h}_1) \frac{\partial W_1}{\partial y_3}(\bar{h}_1) = \bar{k}_2(\bar{h}_1) \frac{\partial W_2}{\partial y_3}(\bar{h}_1). \quad (3)$$

После нахождения распределения температуры из (1)-(3) перемещения и напряжения определяются из решения следующей задачи:

$$\frac{\partial \Omega_{11}^{(i)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{13}^{(i)}}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{31}^{(i)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{33}^{(i)}}{\partial y_3} = 0, \quad i = 1, 2, \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad y_3 \in [0, 1], \quad (4)$$

$$U_1^{(1)}(y_1, 0) = U_3^{(1)}(y_1, 0) = 0, \quad \Omega_{13}^{(2)}(y_1, 1) = \Omega_{33}^{(2)}(y_1, 1) = 0, \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad (5)$$

$$U_1^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = U_1^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad U_3^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = U_3^{(2)}(y_1, \bar{h}_1),$$

$$\Omega_{13}^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = \Omega_{13}^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad \Omega_{33}^{(1)}(y_1, \bar{h}_1) = \Omega_{33}^{(2)}(y_1, \bar{h}_1), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad (6)$$

$$\Omega_{31}^{(i)}(\pm\beta_0, y_3) = \Omega_{11}^{(i)}(\pm\beta_0, y_3) = 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial y_1}(\pm\beta_0, y_3) = 0, \quad y_3 \in [0, 1]. \quad (7)$$

$$\text{Здесь} \quad \Omega_{11}^{(i)} = (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial y_1} + \bar{\lambda}_i \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial y_3} - \bar{\gamma}_i W_i, \quad \Omega_{33}^{(i)} = \bar{\lambda}_i \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial y_1} + (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial y_3} - \bar{\gamma}_i W_i,$$

$$\Omega_{13}^{(i)} = \bar{\mu}_i \left( \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial y_3} + \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial y_1} \right), \quad i = 1, 2.$$

Согласно [146] для решения задачи (4)-(7) воспользуемся аналогией между статической задачей термоупругости и задачей изотермической теории упругости с фиктивными поверхностными и массовыми силами. Для решения задачи теории упругости с фиктивными поверхностными и массовыми силами применим вариационный принцип Лагранжа. Для этого запишем функционал полной энергии системы:

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \bar{\mu} \left( (U_{1,1})^2 + (U_{1,3})^2 + (U_{3,3})^2 + \frac{\bar{\lambda}}{2} (U_{1,1} + U_{3,3})^2 \right) dy_3 dy_1 - \int_{-\beta_0}^{\beta_0} p^* U_3(y_1, 1) dy_1 - \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 X^* U_3 dy_3 dy_1. \quad (8)$$

Здесь  $p^* = \bar{\gamma}(1)W(1)$  – фиктивная поверхностная сила,  $X^* = -(\bar{\gamma}W)_{,3}$  – фиктивная массовая сила.

Упростим (8), используя метод Канторовича [133], вводя гипотезы о распределении ненулевых компонент вектора перемещения [60, 61, 256]:

$$U_1 = u(y_1)F_1(y_3), \quad U_3 = w(y_1)F_3(y_3). \quad (9)$$

В формулах (9)  $u(y_1)$ ,  $w(y_1)$  – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора перемещения на верхней стороне  $y_3 = 1$ ;  $F_1(y_3) = \frac{g_1(y_3)}{g_1(1)}$ ,

$$F_3(y_3) = \frac{g_3(y_3)}{g_3(1)}, \quad g_1(y_3) = \int_0^{y_3} \frac{d\eta}{\bar{\mu}(\eta)}, \quad g_3(y_3) = \int_0^{y_3} \frac{d\eta}{\bar{\lambda}(\eta) + 2\bar{\mu}(\eta)}.$$

Подставив (9) в (8) и, проинтегрировав (8) по координате  $y_3$ , получим:

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left( A_1 u'^2 + A_2 w'^2 + 2(A_3 u'w + A_4 uw') + A_5 u^2 + A_6 w^2 \right) dy_1 - \int_{-\beta_0}^{\beta_0} P^* w dy_1, \quad (10)$$

$$\text{где } P^* = p^* + \int_0^1 X^* F_3 dy_3, \quad A_1 = \int_0^1 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) F_1^2 dy_3, \quad A_2 = \int_0^1 \bar{\mu} F_3^2 dy_3, \quad A_3 = \int_0^1 \bar{\lambda} F_1 \frac{dF_3}{dy_3} dy_3,$$

$$A_4 = \int_0^1 \bar{\mu} F_3 \frac{dF_1}{dy_3} dy_3, \quad A_5 = \int_0^1 \bar{\mu} \left( \frac{dF_1}{dy_3} \right)^2 dy_3, \quad A_6 = \int_0^1 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \left( \frac{dF_3}{dy_3} \right)^2 dy_3.$$

Исходя из условия стационарности функционала (10), получим связанную систему ОДУ 2-го порядка и граничные условия для нахождения функций  $u(y_1)$ ,  $w(y_1)$ :

$$-A_1 u'' + (A_4 - A_3) w' + A_5 u = 0, \quad (11)$$

$$-A_2 w'' - (A_4 - A_3) u' + A_6 w = P^*, \quad (12)$$

$$A_1 u'(\pm\beta_0) + A_3 w(\pm\beta_0) = 0, \quad (13)$$

$$A_4 u(\pm\beta_0) + A_2 w'(\pm\beta_0) = 0. \quad (14)$$

Проведены вычисления НДС прямоугольника в случае, если подложка изготовлена из  $Ni$ , а покрытие – из ФГМ на основе  $Ni-TiC$ , что обеспечивает непрерывное изменение материальных характеристик через границу раздела.

Безразмерные материальные характеристики имеют вид [256]:

$$\bar{a}(y_3) = \begin{cases} 1, & y_3 \in [0, \bar{h}_1] \\ 1 + \left( \frac{P_c}{P_m} - 1 \right) \left( \frac{y_3 - \bar{h}_1}{1 - \bar{h}_1} \right)^{s_2}, & y_3 \in [\bar{h}_1, 1] \end{cases}. \quad (15)$$

Здесь  $P_m$ ,  $P_c$  – материальные характеристики металлической и керамической составляющих соответственно.

В табл. П1 представлены результаты вычисления распределения напряжения  $\Omega_{33}$  по координате  $y_3$  при  $y_1 = 0.35$  и  $s_2 = 1$  в выражении (15). Из анализа табл. П.1 следует, что при линейном законе распределении термомеханических характеристик максимальная погрешность вычисления напряжения  $\Omega_{33}$  за исключением границ  $y_3 = 0$  и  $y_3 = 1$  не превышает 2%.

Таблица П1.

Координата $y_3$	МКЭ	Приближенная модель	Относительное отклонение, %
0	-11.20	-11.58	3.40
0.1	-9.83	-9.95	1.22
0.2	-9.09	-9.15	0.66
0.3	-7.86	-7.95	1.15
0.4	-7.20	-7.26	0.83
0.5	-6.36	-6.42	0.93
0.6	-5.28	-5.33	0.95
0.7	-3.89	-3.93	1.03
0.8	-2.63	-2.67	1.52
0.9	-1.15	-1.17	1.74
1.0	0.0001	0.02	-

На рис. П1 представлено распределение напряжений  $\Omega_{11}$  по координате  $y_3$  при  $y_1 = -0.8$  и полагая  $s_2 = 1$  в формуле (15) (сплошной линией изображено КЭ решение, точками – на основе гипотез модели).

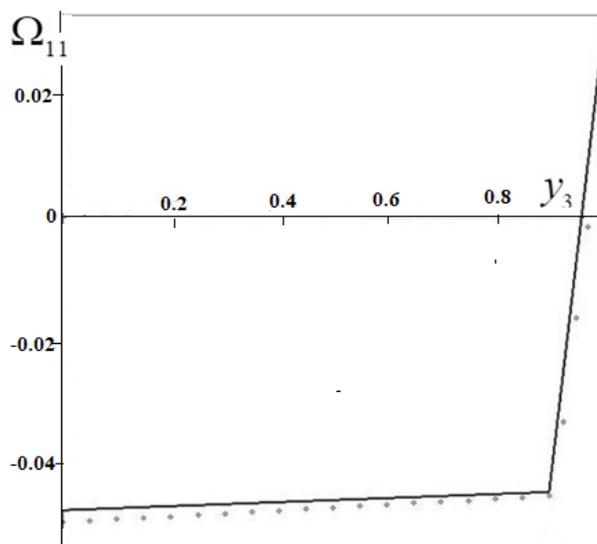


Рисунок П1 – Распределение по координате  $y_3$  напряжения  $\Omega_{11}$ .

Из анализа рис. П1. следует, что в случае неоднородного покрытия в отличие от однородного напряжение  $\Omega_{11}$  не испытывает скачка на границе раздела покрытия и подложки.

**П2. Идентификация теплофизических характеристик стержня на основе метода алгебраизации.**

Во второй части приложения на основе метода алгебраизации [63] исследована обратная задача об идентификации теплофизических характеристик неоднородного стержня.

Обезразмеренная постановка обратной задачи о реконструкции теплофизических характеристик неоднородного стержня имеет вид [63]:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}(z)\frac{\partial W}{\partial z}) = \bar{c}(z)\frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad 0 \leq z \leq 1, \tau > 0, \quad (16)$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1)\frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 1, \quad (17)$$

$$W(z, 0) = 0, \quad (18)$$

$$W(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [a_1, a_2]. \quad (19)$$

Применим к (16)-(18) преобразование Лапласа. Представим теплофизические характеристики  $\bar{a}(z)$  и трансформанту температуры  $\tilde{W}$  в виде разложения по системам линейно независимых функций:

$$\bar{a}(z) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j \psi_j(z), \quad \tilde{W}_{n_0}(z, p) = \varphi_0(z, p) + \sum_{i=1}^{n_0} \tilde{b}_i(p) \varphi_i(z), \quad (20)$$

где  $\psi_j(z) = z^{j-1}$ ,  $\varphi_0(z, p) = -\frac{z}{p\bar{k}(1)}$ ,  $\varphi_i(z) = \sin \frac{(2i-1)\pi z}{2}$ ,  $i = 1..n_0$ ,  $j = 1..m_0$ . При этом

$\varphi_0(z, p)$  – функция, которая удовлетворяет неоднородным граничным условиям (17),  $\varphi_i(z, p)$  – ортогональные функции, которые удовлетворяют однородным граничным условиям; значение  $\bar{k}(1)$  полагается известным.

Составим невязку  $L(\tilde{W}_n) = \frac{d}{dz}(\bar{k}(z)\frac{d\tilde{W}_n}{dz}) - p\bar{c}(z)\tilde{W}_n(z, p)$  и потребуем ее ортогональность к базисным функциям  $\varphi_i$ . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно  $\tilde{b}_i(p)$ , при этом выражение для определителя полученной системы уравнений зависит от параметра преобразования Лапласа  $p$  и коэффициентов  $a_j$ .

Дополнительную информацию (19), измеренную в точках временного интервала  $\tau \in [c, d]$ , можно аппроксимировать в виде линейной комбинации экспоненциальных функций:

$$f(\tau) \approx d_0 + d_1 e^{p_1 \tau} + d_2 e^{p_2 \tau} + \dots + d_{m_0} e^{p_{m_0} \tau}. \quad (21)$$

Для нахождения показателей экспонент  $p_1, p_2, \dots, p_{m_0}$  в разложении (21) применяется метод Прони [129].

Далее определитель полагается равным нулю, а в качестве значений параметра преобразования Лапласа  $p_1, p_2, \dots, p_{m_0}$  используются значения  $m_0$  первых показателей экспонент в (21). Решением полученной системы  $m_0$  нелинейных алгебраических уравнений является  $m_0$  наборов чисел  $a_j$ . При этом подходящему набору  $a_j$  соответствует минимальное значение функционала невязки (3.3.1).

На рис. П2 представлен результат реконструкции теплофизических характеристик: а)  $\bar{k}(z) = 1 - 0.3e^z$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1 + 0.4z^2$  в классе линейных функций.

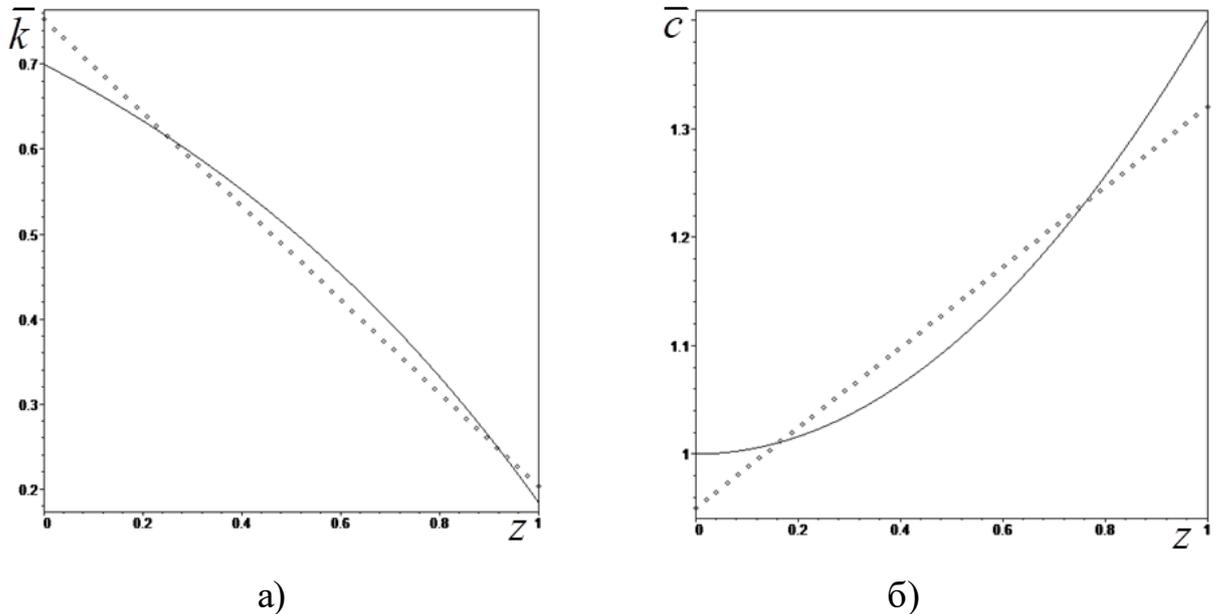
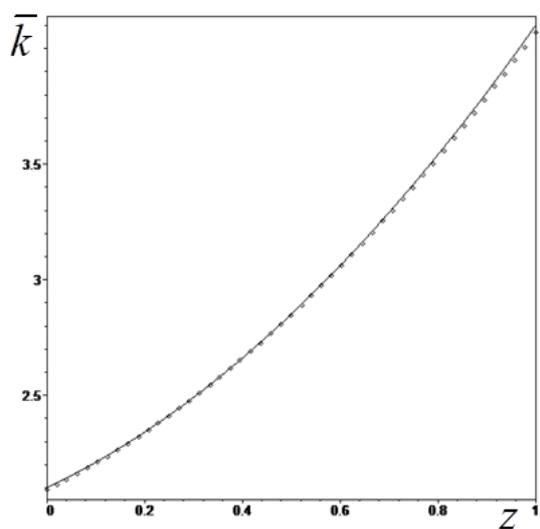


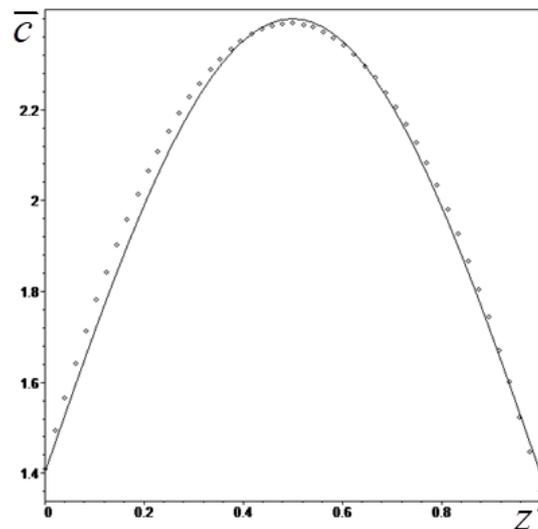
Рисунок П2 – Результат реконструкции теплофизических характеристик: а)  $\bar{k}(z) = 1 - 0.3e^z$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1 + 0.4z^2$  в классе линейных функций.

На рис. П3 представлен результат восстановления теплофизических характеристик: а)  $\bar{k}(z) = 2.1 + z + z^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1.4 + \sin(\pi z)$  в классе квадратичных

функций. В результате реконструкции получаем следующие функции: а)  $\bar{k}(z) = 2.08 + 1.05z + 0.93z^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1.42 + 3.97z - 4.02z^2$ . Погрешность реконструкции не превысила 3%.



а)



б)

Рисунок ПЗ – Результат реконструкции теплофизических характеристик:

а)  $\bar{k}(z) = 2.1 + z + z^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1.4 + \sin(\pi z)$  в классе квадратичных функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967. С. 9-84.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Апбасов С.О., Яхно В.Г. Определение характеристик изотропной вертикально - неоднородной несвязной термоупругой среды // Вопросы корректности задач математической физики и анализа. Новосибирск: Вычислительный центр Сибирского отделения Академии наук СССР, 1986. С. 26-37.
5. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Издательство Московского государственного университета, 1989. 198 с.
6. Белов П.А., Лурье С.А. Вариационная постановка связанной задачи тепломассопереноса и термоупругости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2020. Т. 26, № 4. С. 513-527.
7. Белянкова Т.И., Калинин В.В. К моделированию преднапряженного термоэлектроупругого полупространства с покрытием // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 1. С. 117-135.
8. Бердник В.В., Мухамедяров Р.Д. Применение метода нейронных сетей для решения обратной задачи теплопереноса // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41, № 6. С. 942-947.
9. Бахышев Ш.М. Одномерные обратные задачи термоупругости // Инженерно-физический журнал. 1993. Т. 65, № 1. С. 98-104.

10. Бемяк О.А., Суворова Т.В. Колебания штампа на поверхности гетерогенного слоя при учете трения в области контакта // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 3. С. 321-331.
11. Бемяк О.А., Суворова Т.В. Контактная задача о скольжении параболического индентора по гетерогенному основанию // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 1. С. 59-65.
12. Богачев И.В., Ватульян А.О. Об идентификации характеристик функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80, №1. С. 53-62.
13. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
14. Бородин П.Ю., Галанин М.П. Динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, №3. С. 61-82.
15. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988. 184 с.
16. Буш А.А. Пирозлектрический эффект и его применения. Учебное пособие. М.: Издательство Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики, 2005. 212 с.
17. Вабищевич П.Н., Денисенко А.Ю. Численное решение стационарной коэффициентной ОЗТ для слоистых сред // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 56, №3. С. 509-513.
18. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ Наука, 1993. 262 с.
19. Ватульян А.О. Тепловой удар по термоэлектроупругому слою // Вестник Донского государственного технического университета. 2001. Т. 1(7), №1. С. 82-89.

20. Ватульян А.О., Ковалева В.В. Вариационный принцип термоэлектроупругости и его применение в задаче о колебаниях тонкостенного элемента // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. С. 196-201.
21. Ватульян А.О., Домброва О.Б., Жиров В.Е. Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, №1. С. 93-101.
22. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
23. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2008. 176 с.
24. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. №3. С. 39-43.
25. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. Т. 6, № 3. С. 24-30.
26. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях постановки коэффициентных обратных задач для неоднородного стержня // Теоретическая и прикладная механика. 2009. Вып. 46. С. 118-124.
27. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса и модуля Юнга неоднородного стержня // Труды XIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 12-15 октября 2009. Т.1. С. 44-48.
28. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных свойств термоупругих тел // Труды международной научной конференции

«Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула, 22-26 ноября 2010. С. 114-118.

29. Ватульян А. О., Бемяк О. А., Сухов Д. Ю., Явруян О. В. Обратные и некорректные задачи. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2011. 232 с.

30. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных свойств термоупругих тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. Т. 8, №1. С. 29-36.

31. Ватульян А.О., Денина О.В. Об одном способе определения упругих характеристик для неоднородных тел // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, №2. С. 137-147.

32. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к восстановлению неоднородных свойств термоупругих тел // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. №4. С. 25-29.

33. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Численная реконструкция термомеханических характеристик неоднородного термоупругого стержня // Труды XVI международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 16-19 октября 2012. Т.1. С. 50-54.

34. Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акустический журнал. 2013. Т. 59, №6. С. 752-763.

35. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно напряженных термоупругих тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. Т. 11, №1. С. 18-24.

36. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия: Математика.

Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 329-335.

37. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76, № 4. С. 335-342.

38. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87, №1. С. 217-224.

39. Ватульян А.О., Ляпин А.А., Нестеров С.А. О коэффициентных обратных задачах для предварительно-напряженных термоупругих и пороупругих тел // Сборник трудов VIII всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Чебоксары, 16-21 июня 2014. Т. I. С. 87-89.

40. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об обратных коэффициентных задачах для функционально-градиентных материалов // Тезисы докладов международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». Дивноморское, 7-13 сентября 2014. С.17-18.

41. Ватульян А.О. Углич П.С. Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т.55, №3. С.149-153.

42. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. 206 с.

43. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, №4. С. 951-959.

44. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно-напряженного термоупругого

цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. Т. 12, №1. С. 34-40.

45. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Особенности реконструкции характеристик термоупругого слоя при наличии зон деструкции // Материалы XXV международной школы им. академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». Крым, Алушта, 21-27 сентября 2015. С. 45-47.

46. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об обратных коэффициентных задачах для функционально-градиентных материалов // Математический форум. Серия «Итоги науки. Юг России». Владикавказ, 2015. С. 48-58.

47. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к идентификации термомеханических характеристик слоистой биологической ткани // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. Т. 13, №2. С.29-36.

48. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78, №1. С. 22-29.

49. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об обратных задачах термоупругости для градиентных и предварительно напряженных тел // Сборник тезисов Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. Москва, 17-19 мая 2016. С. 35-39.

50. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Задача о тепловом ударе по неоднородному термоэлектроупругому слою // Материалы российской научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения член-корр. РАН, д-ра техн. наук, проф. Мавлютова Р.Р. «Мавлютовские чтения». Уфа, 21-24 марта 2016. Т. 3. С. 66-67.

51. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 1. С. 103-110.

52. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, №2. С. 117-126.

53. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач для неоднородных тел с покрытиями // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 5. С. 14-26.

54. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Итерационная схема решения коэффициентной обратной задачи термоэлектроупругости // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, № 4. С. 445-455.

55. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Обратные задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел // Материалы X всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Самара, 18-22 сентября 2017. С. 107-110.

56. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамические задачи термоэлектроупругости для неоднородных тел // Математический форум (Итоги науки. Юг России). Владикавказ, 2017. Т. 11. С. 55-67.

57. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации материальных характеристик функционально-градиентных пироматериалов // Сборник материалов Первой всероссийской конференции с международным участием «Цифровые средства производства инженерного анализа». Тула, 2017. С. 41-46.

58. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Идентификация неоднородных характеристик термоэлектроупругого стержня // Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж, 18-20 декабря 2017. С. 1008-1013.

59. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Дударев В.В. Обратные задачи механики связанных полей // Тезисы докладов XX Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 13-16 февраля 2017. С. 72-72.

60. Ватульян А.О., Плотников Д. К. Об идентифицировании неоднородной полосы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. Т. 14, №3. С. 22-29.

61. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А. А. О некоторых моделях идентифицирования функционально-градиентных покрытий // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18(4). С. 421-432.

62. Ватульян А.О., Нестеров С.А.. Идентификация неоднородных характеристик преднапряженных пироматериалов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 183-198.

63. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2018. Т. 15, №1. С. 50-60.

64. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Применение метода алгебраизации при решении обратных задач теплопроводности // Материалы докладов VIII международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VIII». Ростов-на-Дону, 22-27 апреля 2018. С. 77-78.

65. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.

66. Ватульян А.О., Ляпин А.А., Нестеров С.А. Исследование деформирования термоупругих предварительно напряженных покрытий // Тезисы докладов XXI Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 18-22 февраля 2019. С. 68-68.

67. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. 146 с.

68. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. 2-е издание, исправленное и дополненное. Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. 178 с.

69. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. №4. С. 409-423.

70. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Приближенные аналитические решения задачи градиентной термоупругости для составных тел // Труды XX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 18-21 июня 2020. Т. I. С. 195-199.

71. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к решению задачи термоупругости для системы «покрытие-подложка» с отслоением // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2020. Т. 17, №2. С. 18-28.

72. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентная обратная задача термоупругости для конечного FGM цилиндра // Материалы V Международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Донецк, 17-18 ноября 2020. Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. С. 44-47.

73. Ватульян А.О., Нестеров С.А. О деформировании тел с покрытиями на основе градиентной модели термоупругости // Материалы всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды - 2020». Казань, 28 сентября - 2 октября 2020. С. 100-105.

74. Ватульян А.О., Нестеров С.А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, №1. С. 35-47.

75. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению термомеханических характеристик функционально-градиентного конечного цилиндра // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, вып. 3. С. 396-408.

76. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 163, кн. 2. С.181-196.

77. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, №3. С. 253-263.

78. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 4. С. 60-70.

79. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение задачи градиентной термоупругости для системы «покрытие-подложка» // Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 7-9 декабря 2020. С. 1231-1237.

80. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с тонкослойным покрытием // Тезисы докладов XXII Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 22-26 марта 2021. С. 80-80.

81. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 180-195.

82. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, вып. 2. С. 75-84.

83. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентная модель изгиба составной балки // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 2. С. 6-16.

84. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Масштабно-зависимая модель деформирования слоистого прямоугольника // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, вып. 4. С. 47-56.

85. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентная модель изгиба неоднородной пьезоэлектрической балки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 10-20.

86. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Идентификация термомеханических характеристик функционально-градиентных и слоистых материалов // Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». Томск, 17-21 ноября 2021. С. 305-309.

87. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Вычислительная схема решения обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик неоднородной трубы // Материалы XXIX научной конференции «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития». Ростов-на-Дону, 21-23 апреля 2022. С. 70-72.

88. Вестяк В.А., Земсков А.В., Эрихман Н.Н. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16, № 6. С. 244-249.

89. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12(5). С. 3-122.
90. Гайдук С.И., Добрушин В.А. Решение одной задачи из теории термоупругости, связанной с механическими и тепловыми ударами // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, №9. С. 1632-1645.
91. Глушкова Н.В. Асимптотическое представление термоупругих напряжений в угловых точках разномодульных соединений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1998. №2. С. 69-77.
92. Горбашова Е.А., Углич П.С. Решение обратной коэффициентной задачи для двумерной области // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2012. №4. С. 48-55.
93. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанная и динамическая задачи термоупругости. М.: Машиностроение. 1984. 181 с.
94. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 279 с.
95. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева границы // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16, №3. С. 341-344.
96. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Издательство Московского государственного университета, 1994. 208 с.
97. Еремин А.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Применение пленочных пьезопреобразователей для возбуждения и регистрации бегущих упругих волн в системах активного мониторинга протяженных конструкций // Дефектоскопия. 2020. № 10. С. 24-38.
98. Ермоленко О.А., Еремин А.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Аналитическое и компьютерное моделирование волновых процессов бесконтактного ультразвукового неразрушающего контроля //

Математическое моделирование в естественных науках. 2021. Т. 1. С. 165-167.

99. Жигалин А.Г., Лычев А.С. Замкнутые решения динамических задач связанной термоупругости для цилиндра и шара // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4, №2. С. 17-34.

100. Жорник А.И., Жорник В.А., Савочка П.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2012. №6 (31). С. 63-68.

101. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.

102. Иванчов Н.И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициента теплопроводности и теплоемкости // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 39, №3. С. 612-621.

103. Искендеров А.Д., Гардашов Т.Б., Бахышев Ш.М. Решение некоторых обратных задач для систем уравнений термоупругости // Инженерно-физический журнал. 1990. Т. 58, №2. С. 326-327.

104. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1988. 168 с.

105. Кабанихин С.И., Гасанов А., Пененко А.В. Метод градиентного спуска для решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности // Сибирский журнал вычислительной математики. 2008. Т. 11, №1. С.41-54.

106. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

107. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термоупругости. Киев: Наукова думка, 1982. 260 с.

108. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Математические модели теплопроводности и термоупругости. М.: Издательство МИРЭА. 2018. 1200 с.

109. Клибанов М.В., Данилаев П.Г. О решении коэффициентных обратных задач методом квазиобращения // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т. 310, №3. С. 528-536.
110. Кобзарь В.Н., Фильштинский Л.А. Плоская динамическая задача термоупругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 5. С. 842-851.
111. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
112. Колчин Г.Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев: Штиинца, 1977. 119 с.
113. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наукова думка, 1992. 280 с.
114. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.
115. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Издательство Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 1993. 144 с.
116. Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Еремин А.В., Котова Е.В. Аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными свойствами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. №1(30). С. 215-221.
117. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
118. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
119. Ларин Н.В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение //

Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. Вып.11. Ч. 2. С. 216-234.

120. Латес Р., Лионе Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложение. М.: Мир, 1970. 336 с.

121. Ломазов В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: Издательство Орловского государственного технического университета, 2002. 168 с.

122. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Издательство Московского государственного университета, 1976. 368 с.

123. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах теории упругости за счет градиентных эффектов // Доклады Российской академии наук. 2019. Т. 489, №6. С. 585-591.

124. Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктур. М.: Издательство Московского авиационного института, 2011. 160 с.

125. Лурье С.А., Фам Т., Соляев Ю.О. Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18, №3. С. 440-449.

126. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н., Кондратова Ю.Н., Волон М.И. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. Т. 1. С. 161-181.

127. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // Вестник Самарского государственного университета. 2003. №4(30). С. 112-124.

128. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 138-154.

129. Марпл С.Л. (мл.) Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

130. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

131. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Пер. с нем. / Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Физматгиз. 1958. 167 с

132. Михалев А.М., Резник С.В. Метод определения теплофизических свойств ортотропных материалов на основе решения двумерной обратной задачи теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 56, №3. С. 483-491.

133. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

134. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.

135. Музылев Н.В. Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, №2. С. 388-400.

136. Нестеров С.А. Идентификация неоднородных свойств термоупругого стержня // Труды XV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 4-7 октября 2011. Т. 2. С. 186-190.

137. Нестеров С.А. Об особенностях постановки и решения коэффициентной обратной задачи термоупругости для неоднородных тел // Тезисы докладов международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения акад. Лаврентьева М.М. «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, 5-12 августа 2012. С. 320-320.

138. Нестеров С.А. Идентификация переменных характеристик термоупругих тел // Материалы XI всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015. С. 2753-2755.

139. Нестеров С.А. Определение наведенного потенциала в неоднородном термоэлектроупругом слое // Труды XVIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 6-10 ноября 2016. Т. II. С. 137-140.

140. Нестеров С.А. Построение упрощенных моделей для термоупругих тел с покрытиями // Труды XIX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2018. Т. 1. С. 178-182.

141. Нестеров С.А. Решение задач термоэлектроупругости для преднапряженных функционально-градиентных материалов // Труды XIX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2018. Т. 1. С. 183-187.

142. Нестеров С.А. Идентификация неоднородных характеристик преднапряженных термоупругих тел с покрытиями // Труды IX международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис, Армения, 01-06 октября 2018. С. 236-240.

143. Нестеров С. А. Масштабно-зависимые модели деформирования слоистых тел // Тезисы докладов XVI международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования.

Теория операторов и дифференциальные уравнения», Владикавказ, 20-24 сентября 2021. С. 175-176.

144. Нестеров С.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного цилиндра // Тезисы докладов XVI всероссийской школы «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», пос. Дивноморское, 26 мая - 31 мая 2022. С. 75-75.

145. Наседкин А.В., Наседкина А.А. Моделирование связанных задач: математические постановки и конечно-элементные технологии: учебное пособие. Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. 176 с.

146. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Издательство АН СССР, 1962. 364 с.

147. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

148. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.

149. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Пер. с нем. // Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Физматгиз. 1963. С. 252.

150. Победря Б.Е., Кравчук А.С., Аризпе П.А. Идентификация коэффициентов нестационарного уравнения теплопроводности // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, №4. С. 78-87.

151. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 386 с.

152. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 261 с.

153. Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А. Об одной динамической одномерной обратной задаче термоупругости // Наука и новые технологии. Бишкек. 2010. №5. С. 3-7.

154. Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // Прикладная механика АН УССР. 1982. Т. 18, №6. С. 34-41.
155. Сковорода А.Р. Реконструкция упругих свойств мягких биологических тканей по данным об их деформировании при динамическом нагружении // Биофизика. 2000. Т. 45, вып. 4. С. 723 -729.
156. Суворова Т.В., Беляк О.А. Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения // Прикладная математика и механика. 2020. Т. 84, № 4. С. 529-539.
157. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. 1943. Т. 39, №4. С. 195-198.
158. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
159. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра // Инженерный вестник Дона. 2020. №3. С. 9-12.
160. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 14, №4. С.677-691.
161. Яхно В.Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990. 304 с.
162. Abbas A.I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // Journal of Measurements in Engineering. 2014. Vol. 2, issue 4. P. 175-184.
163. Ahmadi G., Firoozbakhsh K. First strain gradient theory of thermoelasticity // International Journal of Solids and Structures. 1975. Vol. 11. P. 339-345.

164. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 1994. Vol. 5(3). P. 335-353.
165. Altan B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 1997. Vol. 8(3). P. 231-282.
166. Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V. et al. Investigation of Thermophysical Properties of Gradient Materials by the Method of Inverse Problems // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2022. Vol. 95. P. 1015-1025.
167. Alosami M., Lesnic D., Niesen J. Determination of the thermo-physical properties of multi-layered biological tissues // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 99. P. 228-242.
168. Aouadi M.A. generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2006. P. 1-15.
169. Aster R.C., Borchers B., Thurber C.H. Parameter estimation and inverse problems. Elsevier. 2019. 329 p.
170. Avdonin S.A., Medhin N.G., Sheronova T.L. Identification of a piecewise constant coefficient in the beam equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. №114. P. 11-21.
171. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 4978-5002.
172. Babaei M.H., Chen Z.T. The transient coupled thermo-piezoelectric hollow cylinder to dynamic loadings response of a functionally graded piezoelectric // Proceedings of the Royal Society A. 2010. Vol. 466. P. 1077-1091.
173. Belyak O.A., Suvorova T.V. Predicting the Mechanical Properties of Antifriction Composite Materials // Mechanics of Composite Materials. 2021. Vol. 57(5). P. 647-656.

174. Belyak O., Suvorova T. Modelling of dynamic processes in an elastic base with a heterogeneous coating // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 709(4).
175. Bialas M. Finite Element Analysis of stress distribution in thermal barrier coatings // Surface and Coatings Technology. 2008. Vol. 202. P. 6002-6010.
176. Bogachev I.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 97, № 3. P. 358-364.
177. Bui H.D. Inverse Problems in the Mechanic of Materials: An Introduction. CRC Press, 1994. 224 p.
178. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method // Numerical Methods in Partial Differential Equations. 2018. Vol. 34 (4). P. 1370-1400.
179. Carter J.P., Booker J.R. Finite element analysis of coupled thermoelasticity // Computers and Structures. 1989. Vol. 31, №1. P. 73-80.
180. Chang J-D., Guo B-Z. Identification of variable special coefficients for a beam equation from boundary measurements // Automatica. 2007. №43. P. 732-737.
181. Chen J., Gockenbach M. S. A variational method for recovering planar Lamé` moduli // Mathematics and Mechanics of Solids. 2002. Vol. 7. P. 191-202.
182. Chen W.L., Chou H.M., Yang Y.C. An inverse problem in estimating the space-dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder // Composites: Part B. 2013. Vol. 50. P. 112-119.
183. Cheng T. C., Romanov V. G., Weng C .I. An inverse problem for layered elastic plate // Applied Mathematics and Computation. 2003. Vol. 137. P. 349-369.

184. Chu L., Dui G. Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 148. P. 366-373.
185. Constantinescu A. On the identification of elastic moduli from displacement force boundary measurements // *Inverse Problems in Engineering*. 1995. Vol. 1. P. 293-313.
186. Ding H.J., Wang H.M., Hou P.F. The transient responses of piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems // *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. P. 105-123.
187. Djordjević K.Lj., Galović S.P., Popović M.N., Nešić M.V., Stanimirović I.P., Stanimirović Z.I., Markushev D.D. Use neural network in photoacoustic measurement of thermoelastic properties of aluminum foil // *Measurement*. 2022. Vol. 199.
188. Dudarev V.V., Vatulyan A.O., Mnukhin R.M., Nedin R.D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. P. 1-10.
189. Dulikravich G.S., Reddy S.R., Pasqualetta M.A., Colaço M.J., Orlande H.R., Coverston J. Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2016. Vol. 24. P. 181-194.
190. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // *The Computer Journal*. 1974. Vol. 17. P. 371-376.
191. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 218. P. 205-215.
192. Eremin A., Golub M., Glushkov E., Glushkova N. Identification of delamination based on the Lamb wave scattering resonance frequencies // *NDT & E International*. 2019. Vol. 103. P. 145-153.

193. Eremin A., Glushkov E., Glushkova N., Lammering R. Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites // *Structural Health Monitoring*. 2019. Vol. 18, № 5-6. P. 1803-1819.

194. Eremin A., Glushkov E., Glushkova N., Lammering R. Usage of Guided Wave Resonance Phenomena for Defect Detection in Laminate Elastic Structures // *Mathematical Applications in Continuum and Structural Mechanics*. Berlin: Springer Verlag, 2021. P. 1-12.

195. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. 1930. Vol. 49. P. 38-47.

196. Gao X.L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44(22-23). P. 7486-7499.

197. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: a variational approach // *Meccanica*. 2003. Vol. 38. P. 535-545.

198. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Eremin A.A. Guided wave based nondestructive testing and evaluation of effective elastic moduli of layered composite materials // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, № 1. P. 56-60.

199. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A., Boyko O. Determination of effective parameters of composite materials using surface acoustic waves // *Acoustical Society of America*. 2019. Vol. 38.

200. Glushkov E., Glushkova N., Ermolenko O., Tatarinov A. Analysis of the Ultrasonic Guided Wave Sensitivity to the Bone Structure for Osteoporosis Diagnostics // *Springer Proceedings in Materials*. 2021. Vol. 10. P. 409-424.

201. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Ermolenko O.A. Simulation of Air-Coupled Transducer Operation in Structural Health Monitoring Systems // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2022. Vol. 58(8). P. 666-678.

202. Gornandt A., Gabbert U. Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures // *Acta Mechanica*. 2002. Vol. 154. P. 129-140.
203. Grediac M., Hild F., Pineau A. Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics. Great Britain: Wiley, 2013. 496 p.
204. Hetnarski R.B. Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times // *Arch Mec. Stosow*. 1961. Vol. 13. P. 295-305.
205. Hussain T.M., Baig A.M., Saadawi T.N. Infrared Pyroelectric Sensor for Diction of Vehicular Traffic Using Digital Signal Processing Techniques // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 1995. Vol. 44, №3. P. 683-690.
206. Isakov V. Inverse problem for PDE. Springer – Verlag, 2005. 284 p.
207. Jadamba B., Khan A.A., Racity F. On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2008. Vol. 56, №2. P. 431-443.
208. Jarny Y., Ozisik N., Bardon J.P. A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1991. Vol. 34, №11. P. 2911-2919.
209. Ji L., McLaughlin J. Recovery of Lamé parameter  $\mu$  in biological tissues // *Inverse problems*. 2000. Vol. 20. P. 1-24.
210. Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks // *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2014. №228. P. 632-645.
211. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. Modeling mechanical properties of multilayer coatings TiAlN // *Defect and Diffusion Forum*. 2021. Vol. 410. P. 578-584.
212. Kolesnikov V.I., Belyak O.A., Suvorova T.V., Guda A.A., Pashkov D.M. Machine Learning-Based Predictive Modeling of Mechanical Properties of Coatings // *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023. P. 162-171.

213. Kulchytsky-Zhyhailo R., Bajkowski A. Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012. Vol. 54, №1. P. 105-112.
214. Lam T.T., Yeeng W.K. Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 1995. Vol. 9(2). P. 335-342.
215. Lee C.R., Kam T.Y. Identification of mechanical properties of elastically restrained laminated composite plates using vibration data // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 295. P. 999-1016.
216. Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F, Lee Y.D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // *Journal of American Ceramic Society*. 1996. Vol. 19. P. 3003-3012.
217. Li A., Zhou S., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // *Composite Structures*. 2014. Vol. 108. P. 259-266.
218. Lord H.A., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *Journal of Elasticity*. 1967. №15(5). P. 299-309.
219. Lukasiewicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // *Journal of Thermal Stresses*. 2003. Vol. 26, №1. P. 13-23.
220. Lurie S., Solyaev Y. Revisiting bending theories of elastic gradient beams // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 126. P. 1-21.
221. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskiy D.B., Moiseev E.I., Belov P.A. On Structure of Fundamental Solutions for Coupled Thermoelasticity and Thermal Stationary Conductivity Problems // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, №8. P. 1841-1851.

222. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Belov P.A. Analytical solution of stationary coupled thermoelasticity problem for inhomogeneous structures // Mathematics. 2022. Vol. 10, №1.

223. Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Altenbach H., Belov P., Nazarenko L. Coupled problems of gradient thermoelasticity for periodic structures // Archive of Applied Mechanics. 2023. Vol. 93, №1. P. 23-39.

224. McLaughlin J., Yoon J.-R. Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 25-45.

225. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16. P. 51-78.

226. Mindlin R.D. Equations of high frequency, vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // International Journal of Solids and Structures. 1974. Vol. 10, №6. P. 625-637.

227. Mohebbi F., Evans B., Rabczuk T. Solving direct and inverse heat conduction problems in functionally graded materials using an accurate and robust numerical method // International Journal of Thermal Sciences. 2021. Vol. 159. P. 1-41.

228. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: a review of fabrication and properties // Applied Materials Today. 2016. Vol. 5. P. 223-245.

229. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51(3). P. 767-773.

230. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 213-218.

231. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40, issue 4. P. 2711-2719.
232. Nedin R.D., Nesterov S.A., Vatulyan A.O. Concerning identification of two thermomechanical characteristics of functionally graded pipe // *Advanced Structured Materials*. Altenbach H. et al. (eds.). *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep*. 2023. Vol. 185. P. 247-264.
233. Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials // *Journal of Thermal Stresses*. 1999. Vol. 22(4-5). P. 477-512.
234. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1995. Vol. 33, №6. P. 773-780.
235. Ootao Y., Tanigawa Y. The transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply // *Archive of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 74, №7. P. 449-465.
236. Padture N. R., Gell M., Jordan E. H. Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications // *Science*. 2002. Vol. 296. P. 280-284.
237. Paige C.C., Saunders M.A. LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1982. Vol. 8, №1. P. 43-71.
238. Paul H., Renganathan K. Free vibrations of pyroelectric layer of hexagonal (6 mm) class // *Acoustical Society of America*. 1985. Vol. 78 (2). P. 395-397.
239. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2017. 1487 p.
240. Raddy J.N., Chin C.D. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates // *Journal of Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21. P. 593-626.

241. Rao S.S., Sunar M. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures // *AIAA Journal*. 1993. №7. P. 1280-1286.
242. Raudensky M., Woodbary K.A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // *Numerical Heat transfer B*. 1995. Vol. 28. P. 293-306.
243. Razzaghi H., Kowsary F., Ashjaee M. Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient // *Applied Thermal Engineering*. 2019. Vol. 154. P. 63-75.
244. Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R. Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders // *Scientia Iranica B*. 2014. Vol. 21(4). P. 1415-1423.
245. Sladek J., Sladek V., Wen P. H. Hon. Inverse heat conduction problems in three dimensional anisotropic functionally graded solids // *Journal of Engineering Mathematics*. 2012. Vol. 75. P. 157-171.
246. Solyaev Y., Lurie S. Pure bending of the piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. P. 4197-4211.
247. Sinitisa A.V., Capsoni A. Design of novel inverse analysis methodology for exact estimation of elasticity parameters in thermoelastic stress model // *International Communication in Heat and Mass Transfer*. 2022. Vol. 135. P. 1-11.
248. Shulz U., Peters M., Bach F.W., Tegeder G. Graded coatings for thermal, wear and corrosion barriers // *Materials Science and Engineering A*. 2003. Vol. 362 (1-2). P. 61-80.
249. Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer-Verlag New York, 2002. 746 p.

250. Suvorova T.V., Belyak O.A., Ivanochkin P.G., Danilchenko S.A. Modeling the mechanical characteristics of tribotechnical composites // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 680(1).
251. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962. Vol. 11. P. 385-414.
252. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226. P. 3263-3274.
253. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded hollow cylinder // Materials Physics Mechanics. 2015. Vol. 23. P. 71-75.
254. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 128. P. 1157-1167.
255. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On some features of identification of inhomogeneous prestressed state of thermoelastic hollow cylinder with coating // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42. P. 54-64.
256. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of «coating-substrate» system deformation // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2020. Vol. 32. P. 1173-1186.
257. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // Materials Physics Mechanics. 2020. Vol. 46. P. 27-41.
258. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Modeling of thermoelastic deformation of a thin-layer «coating-substrate» system // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2317, art. № 012012. P. 1-8.
259. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D. Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the

displacement field data // European Journal of Mechanics - A/Solids. 2020. Vol. 81.

260. Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O., Yavruyan O.V. On the Structure of Solutions in the Vicinity of Discontinuity of Boundary Conditions for Gradient Models // Sixty Shades of Generalized Continua, Advanced Structured Materials. Altenbach H. et al. (eds.). 2023. Vol. 170. P. 687-698.

261. Wang B.L., Noda N. Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10. P. 189-193.

262. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Composites Science and Technology. 1996. №56. P. 1099-1104.

263. Wilms E.V. On coupling effects in transient thermoelastic problems // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1964. Vol. 31, №4. P. 719-722.

264. Wu X.H., Shen Y.P., Chen C. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators // Materials Letters 2003. Vol. 57. P. 3532-3542.

265. Ying C., Zhifei S. Exact Solutions of Functionally Gradient Piezothermoelastic Cantilevers and Parameter Identification // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2005. P. 1-10.