

Южный математический институт –
филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Федеральный научный центр
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

На правах рукописи

Нестеров Сергей Анатольевич

**Прямые и обратные задачи термомеханики
для неоднородных тел**

1.1.8 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2023

Работа выполнена в Южном математическом институте – филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук».

Научный консультант: **Ватульян Александр Ованесович**
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Лурье Сергей Альбертович**
доктор технических наук, профессор, лаборатория
«Неклассические модели механики композиционных
материалов и конструкций», ФГБУН «Институт прикладной
механики РАН», главный научный сотрудник

Глушков Евгений Викторович
доктор физико-математических наук, профессор, Институт
математики, механики и информатики, ФГБОУ ВО
«Кубанский государственный университет», главный
научный сотрудник

Суворова Татьяна Виссарионовна
доктор физико-математических наук, доцент, кафедра
«Высшая математика», ФГБОУ ВО «Ростовский
государственный университет путей сообщения», профессор

Защита диссертации состоится «23» января 2024 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.10 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени Ю.А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21 Ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1319365/>

Автореферат разослан « » октября 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Дударев
Владимир Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена разработке математического аппарата численных и аналитических методов решения прямых и коэффициентных обратных задач термоупругости и термоэлектроупругости для неоднородных тел.

Актуальность темы.

В настоящее время для повышения термopочности элементов конструкций, работающих в областях с высокотемпературным окружением, используются неоднородные материалы, в том числе слоистые покрытия и функционально-градиентные материалы (ФГМ) – композиты, созданные путем механического перемешивания материалов с сильно различающимися свойствами. При этом, благодаря современным технологиям в ФГМ в отличие от слоистых композитов обеспечивается плавное изменение термомеханических характеристик.

Однако при термомеханических расчетах конструкций, изготовленных из неоднородных материалов, возникает ряд проблем. Законы неоднородности могут быть любыми, поэтому важной задачей является разработка эффективных численных методов решения задач термомеханики при произвольных законах неоднородности. Другая проблема связана с миниатюризацией устройств электроники и широким применением микроэлектромеханических систем. Однако использование классической механики для описания термомеханического поведения составных и слоистых микрообъектов не позволяет оценить масштабные эффекты, выявленные экспериментально. В настоящее время для учета масштабных эффектов используются как модели микромеханики, например, молекулярной динамики, так и механики сплошных сред (градиентная теория упругости, нелокальная теория упругости и др.). При этом решения задач градиентной механики получены в основном для однородных материалов. Третьей проблемой является то обстоятельство, что точность расчета термонапряженного состояния тел, изготовленных из ФГМ, зависит от знания переменных законов неоднородности. Для этого требуется построение эффективных и устойчивых вычислительных схем идентификации термомеханических характеристик путем решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) термомеханики.

В связи с этим тема диссертационной работы «Прямые и обратные задачи термомеханики для неоднородных тел» является актуальной.

Работа на разных этапах выполнялась при поддержке грантов РФФИ (№ 10-01-00194-а, 13-1-00196, 16-01-00354-а), РНФ (№ 18-11-00069, 22-11-

00265), проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, Программы президиума РАН «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (грант №114072870112), НИР Южного математического института – филиала ВЦ РАН в 2016-2023 гг.

Объект и предмет исследования.

Объектами исследования являются неоднородные тела канонической формы: стержень, балка, полоса, прямоугольник, труба, конечный цилиндр. Предметом изучения является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) неоднородных стержневых, плоских (прямоугольник, полоса) и цилиндрических структур (труба, конечный цилиндр), исследование масштабных эффектов, влияния законов изменения термомеханических свойств на физические поля, построение эффективных вычислительных схем идентификации термомеханических свойств неоднородных тел.

Цель работы заключается в исследовании задач термоупругого и термоэлектроупругого деформирования неоднородных объектов с учетом инерционных эффектов, связанности полей, неоднородности материала, масштабных эффектов, в решении одномерных коэффициентных обратных задач термоупругости и термоэлектроупругости, в проведении вычислительных экспериментов, в обсуждении различных вариантов нагружения.

Для достижения этой цели были сформулированы следующие задачи:

1. Разработать эффективные методы решения динамических связанных задач термоупругости для неоднородных тел (стержень, труба, конечный цилиндр, прямоугольник) при произвольных одномерных законах неоднородности, провести исследование влияния эффекта связанности полей и законов неоднородности на физические поля.

2. Решить динамические связанные задачи термоэлектроупругости для неоднородного стержня и цилиндра, провести исследование влияния параметров связанности и законов неоднородности на физические поля.

3. Исследовать особенности деформирования составных и слоистых тел (стержня, балки, цилиндра, полосы) на основе градиентной теории упругости, термоупругости и электроупругости, построить асимптотические решения при малых значениях масштабного параметра, оценить влияние градиентных факторов.

4. Для решения КОЗ термоупругости получить операторные уравнения в пространстве трансформант Лапласа.

5. Получить операторные уравнения в оригиналах и сформировать итерационную схему для решения одномерных КОЗ термомеханики.

6. Провести вычислительные эксперименты по идентификации неоднородных термомеханических свойств стержня, слоя, прямоугольника, трубы и конечного цилиндра.

Научная новизна.

В диссертации разработаны новые подходы к решению статических и динамических задач термомеханики для тел, изготовленных из функционально-градиентных материалов и тел с покрытиями, с учетом типа нагружения, законов неоднородности материала, связанности физических полей, масштабных эффектов, что имеет большое значение для адекватного прогнозирования поведения неоднородных тел под действием термомеханической нагрузки. Разработаны новые итерационные схемы решения обратных задач термомеханики, которые апробированы при решении задач идентификации материальных характеристик стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра, прямоугольника.

Новыми являются следующие результаты:

1. Разработаны методы решения динамических связанных задач термоупругости и термоэлектроупругости для элементов стержневых, плоских и цилиндрических конструкций, изготовленных из неоднородных материалов.

2. В рамках градиентной модели исследованы задачи теории упругости, термоупругости и электроупругости для составных тел и тел с покрытиями (стержня, полосы, балки, цилиндра). Для малых значений масштабного параметра на основе методов Вишика-Люстерника и Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) получены асимптотические формулы для нахождения перемещений и напряжений составного стержня, балки и трубы, оценен вклад градиентных факторов.

3. Построена итерационная схема идентификации термомеханических характеристик, причем на каждом этапе итерационного процесса решается прямая задача с известными переменными характеристиками и интегральные уравнения Фредгольма (ИУФ) 1-го рода с гладкими ядрами для определения поправок к искомым характеристикам.

4. На основе разработанного итерационного подхода исследованы обратные задачи термоэлектроупругости для стержня, слоя и цилиндра.

Теоретическая и практическая значимость.

Теоретическая значимость диссертационной работы определяется необходимостью создания экономных и устойчивых аналитических и

численных методов решения прямых и обратных задач термоупругости и термоэлектроупругости для неоднородных тел.

Практическая значимость диссертационной работы определяется возможностью применения разработанных алгоритмов решения прямых и обратных задач термомеханики для усовершенствования теоретической базы неразрушающих методов диагностики свойств неоднородных тел, а также нахождения НДС элементов конструкций, выполненных из слоистых материалов и ФГМ с учетом связанности полей, законов неоднородности, масштабных эффектов.

Методология исследования.

Решение динамических связанных задач термомеханики для тел, изготовленных из ФГМ, реализовано на основе нескольких подходов. Задача для неоднородного термоупругого стержня решается путем сведения к системе ИУФ 2-го рода относительно трансформант Лапласа и обращением трансформант на основе теории вычетов. Задачи для термоупругой трубы и термоэлектроупругих тел (стержень, цилиндр) решаются путем сведения к канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в трансформантах Лапласа, ее решения методом пристрелки и обращении трансформант на основе метода разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра. Задачи для прямоугольника и конечного цилиндра решаются путем применения метода разделения переменных, а затем метода пристрелки для гармоник.

Исследование задачи градиентной теории упругости для составного стержня и составной балки при малых значениях масштабного параметра проведено на основе асимптотического метода Вишика-Люстерника.

Исследование задачи градиентной термоупругости для слоистого цилиндра проведено на основе асимптотического метода ВКБ.

Несколькими способами получены линеаризованные операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости, которые представляют собой ИУФ 1-го рода с гладкими ядрами; для построения их регуляризованного решения использован метод Тихонова А.Н.

Достоверность результатов.

Методы, использованные в работе, опираются на строгий математический аппарат динамических связанных задач термоупругости и термоэлектроупругости, на аппарат ИУФ 2-го рода, на применение апробированных численных методов решения задач Коши, на сравнении результатов, полученных при помощи предложенных методов с аналитическими и конечно-элементными решениями, на апробированные асимптотические методы, а также на проведении большого числа

вычислительных экспериментов, показавших их достаточную эффективность.

Апробация работы.

Выводы и результаты, приведенные в диссертации, докладывались на всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 2007, 2008, 2011-2019, 2021-2023 гг.), на международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2010 г.), на X всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 г.), на международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика Лаврентьева М.М. «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012 г.), на международной научной конференции «Механика и трибология транспортных систем МехТрибоТранс-2016» (Ростов-на-Дону, 2016 г.) на международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (Ростов-на-Дону, 2017 г.), на X всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017 г.), на IX международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис, Армения 2018 г.), на международных научных конференциях «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (РСО-А, с. Цей, 2017, 2019, 2021 гг.), на Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2017, 2019, 2021 гг.), на международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2017-2020, 2022 гг.), на международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2009, 2011, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020 гг.), на всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды — 2020» (Казань, 2020 г.), на V международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (Донецк, 2020 г.), на XXVIII научной конференции «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития (СИТО)» (Ростов-на-Дону, 2021-2023 гг.), на XI всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики» (Томск, 2021 г.), на международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2021 г.), на международной конференции «Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные» (Якутск, 2021 г.), на

международной конференции «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications (PHENMA)» (2021, 2022 гг.), на международной конференции «Modern Problems in Modeling Materials for Mechanical, Medical and Biological Applications» (Ростов-на-Дону, 2022 г.), на семинарах кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета и отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиала ВНИЦ РАН.

Публикации по теме диссертации.

Содержание диссертации отражено в 87 публикациях, из них два издания монографии «Коэффициентные обратные задачи термомеханики», одна глава в коллективной монографии издательства Springer, 39 статей в рецензируемых журналах из перечня изданий, рекомендованных диссертационным советом ЮФУ801.01.10, баз Scopus и WoS.

Структура и объем диссертации.

Диссертация общим объемом 252 страницы состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения, содержит 81 рисунок и 14 таблиц и список литературы из 265 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проведен обзор исследований прямых и обратных задач термомеханики, обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи работы, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В развитие теории динамической связанной термоупругости и термоэлектроупругости внесли работы Валишина А.А., Вестяка В.А., Гайдука С.И., Грибанова В.Ф., Гринченко В.Т., Даниловской В.И., Жигалина А.Г., Жорника А.И., Калинчука В.В., Карташова Э.М., Коваленко А.Д., Козлова В.И., Кувыркина Г.Н., Кудинова В.А., Купрадзе В.Д., Лурье С.А., Лычева С.А., Михайлова М.Д., Мухелишвили Н.И., Наседкина А.В., Новацкого В., Партона В.З., Подстригача Я.С., Радаева Ю.Н., Сеницкого Ю.А., Соловьева А.Н., Тарлаковского Д.В., Шляхина Д.А., Babaei M.H., Biot M.A., Boley B.A., Brull M.A., Duhamel J.M., Hertenarski R.B., Khorsand M., Mindlin R.D., Muki R., Noda N., Wilms E.V. и др.

Большой вклад в решение задач механики неоднородных тел внесли работы Айзиковича С.М., Андреева В.И., Колчина Г.Б., Коляно Ю.М., Ломакина В.А., Подстригача Я.С., Суворовой Т.В., Noda N., Raddy J.N., Chin C.D. и др.

Задачи градиентной механики исследовали: Белов П.А., Еремеев В.А., Лурье С.А., Соляев Ю.О., Altenbach H., Mindlin R.D., Toupin R.A., Ahmadi G., Firoozbakhsh K., Altan B.S., Aifantis E.C., Gao X.L., Park S.K., Li A., Zhou S., Wang B., Papargyri-Beskou S., Tsinoopoulos S., Charalambopoulos A., Polyzos D., Guangyang F., Shenjuie Z., Lu Q. и др.

Исследованию коэффициентных обратных задач механики и теплопроводности посвящены работы Алексеева А.С., Алифанова О.М., Артюхина Е.А., Румянцева С.В., Аниконова А.Ю., Апбасова С.О., Бакушинского А.Б., Благовещенского А.С., Бухгейма А.Л., Ватульяна А.О., Гасанова А., Глушковых Е.В. и Н.В., Денисова А.М., Кабанихина С.И., Лаврентьева М.М., Ломазова В.А., Ляпина А.А., Морозова В.А., Ненарокова А.В., Романова В.Г., Сковороды А.Р., Сатыбаева А. Дж., Тананы В.П., Яхно В.Г., Bui H.D., Chang J-D., Chavent G., Cheng T.C., Chen G., Constantinescu A., Jadamba B., Hao D., Klivanov M.V., Kravaris C., Lee C.R., Lukasiewicz S.A., Xu M.H., Cao K., Lesnic D., Chen J., Gockenbach M.S. и др.

В **первой главе** приведены постановки прямых задач термоупругости и термоэлектроупругости для неоднородных тел. Рассмотрены два способа нагружения – тепловой и механический. Исследованы динамические связанные задачи термоупругости для стержня, прямоугольника, трубы, конечного цилиндра и термоэлектроупругости – для стержня и цилиндра.

Первая часть главы 1 посвящена исследованию динамических связанных задач термоупругости с переменными характеристиками.

В параграфе 1.1 сформулированы общие постановки прямых задач термоупругости для неоднородных тел, как при тепловом, так и механическом способах нагружения. В результате обезразмеривания поставленных задач получены два малых параметра: δ_0 – термомеханический параметр связанности, ε_0 – отношение характерных времен звуковых и тепловых возмущений.

В параграфе 1.2 исследуется динамическая связанная задача термоупругости для неоднородного стержня.

Рассматриваются неустановившиеся колебания жестко закрепленного на торце $x=0$ термоупругого стержня, под действием приложенной на другом торце $x=l$ силы $p(t) = p_0\phi(t)$ или теплового потока $q(t) = q_0\phi(t)$.

Обезразмеренная постановка задачи в случае теплового нагружения стержня имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau_1^2}, \quad (1)$$

$$\Omega = \bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau_1}, \quad (3)$$

$$U(0, \tau_1) = W(0, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau_1) = \beta_1 \varphi(\tau_1), \quad \Omega(1, \tau_1) = 0, \quad (4)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau_1}(z, 0) = 0, \quad (5)$$

где $z = \frac{x}{l}$, $U = \frac{u}{l}$, $W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}$, $\Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}$, $\bar{E} = \frac{E}{E_0}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, $\bar{k} = \frac{k}{k_0}$, $\bar{c} = \frac{c}{c_0}$, $t_1 = \frac{l^2 c_0}{k_0}$,

$t_2 = \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} l$, $\tau_1 = \frac{t}{t_1}$, $\beta_1 = \frac{q_0 \gamma_0 l}{k_0 E_0}$. При этом k_0 , c_0 , E_0 , ρ_0 , γ_0 – максимальные

значения соответствующих термомеханических характеристик.

Задача (1)-(5) после преобразования Лапласа сводится к системе ИУФ 2-го рода относительно трансформант температуры и напряжений:

$$\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \varsigma, p) \tilde{W}(\varsigma, p) d\varsigma + \int_0^1 K_2(z, \varsigma, p) \tilde{\Omega}(\varsigma, p) d\varsigma + J_0(z, p), \quad (6)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \varsigma, p) \tilde{W}(\varsigma, p) d\varsigma + \int_0^1 K_4(z, \varsigma, p) \tilde{\Omega}(\varsigma, p) d\varsigma. \quad (7)$$

где $K_1(z, \varsigma, p) = -p \left(\bar{c}(\varsigma) + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2(\varsigma)}{\bar{E}(\varsigma)} \right) \int_0^{\min\{z, \varsigma\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}$, $K_2(z, \varsigma, p) = -\delta_0 p \frac{\bar{\gamma}(\varsigma)}{\bar{E}(\varsigma)} \int_0^{\min\{z, \varsigma\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}$,

$K_3(z, \varsigma, p) = -\varepsilon_0^2 p^2 \frac{\bar{\gamma}(\varsigma)}{\bar{E}(\varsigma)} \int_{\min\{z, \varsigma\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta$, $K_4(z, \varsigma, p) = -\frac{\varepsilon_0^2 p^2}{\bar{E}(\varsigma)} \int_{\min\{z, \varsigma\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta$,

$J_0(z, p) = -\beta_1 \tilde{\varphi}(p) \int_0^z \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}$, p – параметра преобразования Лапласа.

Решение системы интегральных уравнений в трансформантах (6), (7) строится в программе Maple методом коллокаций. Результатом решения являются дробно-рациональные функции от p в узловых точках z_i , $i=1..m$. Обращение трансформант осуществляется на основе теории вычетов, а так как среди особых точек отсутствуют точки ветвления, то это значительно упрощает процедуру обращения.

Для однородного стержня путем сравнения с аналитическим решением проведена оценка точности предложенного метода решения в зависимости от выбора значения параметра дискретизации m .

Исследованы инерционные эффекты, возникающие при нагружении торца $z=1$ стержня нестационарной тепловой нагрузкой $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$.

На рис. 1 изображена зависимость напряжения Ω от времени в точке $z=0$ при $\varepsilon_0=0.1$ и двух значениях параметра термомеханической связанности: а) $\delta_0=0.04$; б) $\delta_0=0.4$. При решении задачи в квазистатической постановке ($\varepsilon_0=0$) напряжение в любой момент времени равно нулю, а в динамической постановке возникают пики напряжений, амплитуды которых со временем убывают тем быстрее, чем больше параметр связанности.

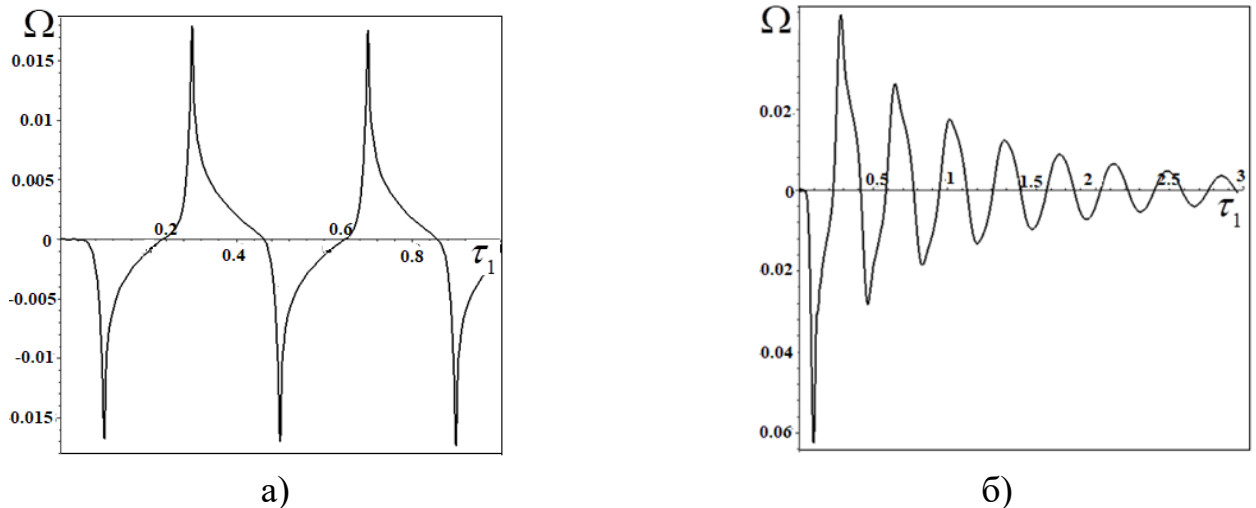


Рисунок 1. Зависимость напряжения от времени на торце стержня $z=0$ в случае теплового нагружения при: а) $\delta_0=0.04$; б) $\delta_0=0.4$.

В параграфе 1.3 приводится решение динамической связанной задачи термоупругости для неоднородной трубы.

Рассматриваются неустановившиеся колебания неоднородной трубы, внутренняя поверхность которой $r=r_1$ свободна от напряжений, а на внешней поверхности $r=r_2$ действует тепловая или механическая нагрузка:

$$1) -k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = q_0 \varphi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = 0; \quad 2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = -p_0 \phi(t).$$

Сформулирована каноническая система ОДУ 1-го порядка в пространстве трансформант Лапласа, которая решается методом пристрелки. Обращение трансформант осуществляется методом разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра.

Исследовано влияние термомеханических характеристик на граничные физические поля. Проведена верификация предложенного метода решения задачи для трубы путем сравнения с аналитическими решениями для некоторых частных случаев и с конечно-элементным (КЭ) решением, полученным в программе FlexPDE.

В параграфе 1.4 представлено решение динамической связанной термоупругости для неоднородного конечного цилиндра. Рассматриваются неустановившиеся колебания конечного радиально-неоднородного цилиндра,

торцы которого $z = \pm h$ находятся в условиях скользящей заделки и теплоизолированы, внутренняя поверхность $r = r_1$ свободна от напряжений и поддерживается при нулевой температуре, а на внешней поверхности $r = r_2$ действует нестационарная нагрузка одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = q_0 g_1(z) \phi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0; \quad 2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0, \\ & \sigma_{rr}(r_2, z, t) = -p_{rr} g_2(z) \phi(t), \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0; \quad 3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \\ & \sigma_{rz}(r_2, z, t) = -p_{rz} g_3(z) \psi(t). \end{aligned}$$

После обезразмеривания и применения преобразования Лапласа задача для конечного цилиндра решается методом разделения переменных и последующего применения метода пристрелки для решения одномерных задач для гармоник.

Для моделирования неоднородных свойств конечного цилиндра рассмотрен ФГМ, свойства которого принимают свойства Ni на внутренней поверхности $\xi_1 = \xi_0$ и свойства TiC на внешней поверхности $\xi_1 = 1$. При этом свойства $Ni - TiC$ ФГ цилиндра изменяются по степенным законам вида:

$$\bar{a}(\xi_1) = \bar{a}_{Ni} + (\bar{a}_{TiC} - \bar{a}_{Ni}) \left(\frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Проведена верификация предложенного метода решения задачи термоупругости для конечного цилиндра путем сравнения с КЭ решением.

Исследовано влияние законов неоднородности на физические поля. На рис. 2 представлен график изменения безразмерного радиального смещения

U_r от времени в точке $(1, 0)$ при нагрузке $\Omega_{rr}(1, \xi_2, \tau_2) = -\left(1 - \left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2\right) \tau_2 e^{-\tau_2}$ и

$\xi_0 = 0.8$, $\delta_0 = 0.05$, $\varepsilon_0 = 10^{-6}$. При этом сплошной линией изображено изменение радиального смещения, если в законах (8) положить $s = 1$, точками – $s = 2$.

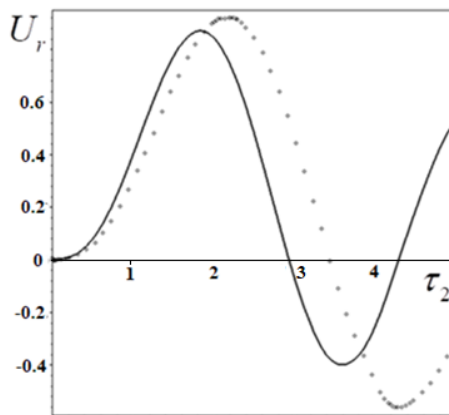


Рисунок 2. Изменение радиального смещения конечного цилиндра от времени в точке $(1, 0)$ при различных законах неоднородности $\bar{a}(\xi_1)$.

Из рис. 2 следует, что графики радиального смещения при различных законах неоднородности существенно отличаются друг от друга, поэтому такую информацию можно использовать при решении обратных задач.

В параграфе 1.5 рассмотрены неустановившиеся колебания неоднородной по координате x_3 термоупругой среды, занимающей прямоугольную область $S = [-L, L] \times [0, h]$. Боковые стороны прямоугольника $x_1 = \pm L$ теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. Нижняя сторона $x_3 = 0$ жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней стороне $x_3 = h$ действует нестационарная термомеханическая нагрузка.

После обезразмеривания и применения преобразования Лапласа задача для прямоугольника решается методом разделения переменных и последующего применения метода пристрелки для решения одномерных задач для гармоник.

В качестве примера рассмотрен ФГМ, свойства которого принимают свойства Ni на нижней грани прямоугольника $y_3 = 0$ и свойства TiC при $y_3 = 1$. Для моделирования свойств ФГМ используются степенные законы:

$$\bar{a}(y_3) = \bar{a}_{Ni} + (\bar{a}_{TiC} - \bar{a}_{Ni}) y_3^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Проведен анализ влияния показателя неоднородности s в законах (9) на физические поля. На рис. 3 показан график изменения безразмерной температуры в точке $(y_1, y_3) = (0.1, 1)$ при законе изменения теплового потока

$$Q(y_1, 1, \tau_1) = \left(1 - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2\right) (H(\tau_1) - H(\tau_1 - 1)) \text{ на верхней грани. При этом сплошной}$$

линией изображены графики изменения температуры, если в формулах (9) положить $s = 1$, точками – $s = 2$.

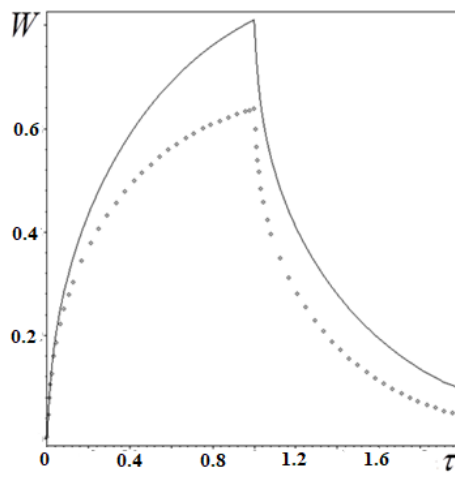


Рисунок 3. Изменение температуры прямоугольника от времени в точке $(0.1, 1)$ при различных законах неоднородности $\bar{a}(y_3)$.

Из рис. 3 следует, что различные степенные законы изменения термомеханических характеристик прямоугольника по-разному оказывают влияние на изменение температуры от времени.

Вторая часть главы 1 посвящена исследованию динамических связанных задач термоэлектроупругости с переменными характеристиками.

В параграфе 1.6 сформулированы общие постановки прямых задач термоэлектроупругости для неоднородных тел. При обезразмеривании поставленных задач введены следующие параметры: δ_1 – параметр электромеханической связанности, δ_2 – параметр термомеханической связанности, δ_3 – параметр теплоэлектрической связанности.

В параграфе 1.7 исследована динамическая связанная задача термоэлектроупругости для неоднородного стержня.

Рассмотрен продольно поляризованный термоэлектроупругий стержень конечной длины, один торец которого жестко зашпелен, закорочен и поддерживается при нулевой температуре, а на другом торце действует нестационарная нагрузка, одного из следующих видов: 1) $-k_3(l) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(l, t) = q_0 \varphi(t)$, $\sigma(l, t) = 0$, $\varphi(l, t) = 0$; 2) $\frac{\partial \theta}{\partial x_3}(l, t) = 0$, $\sigma(l, t) = p_0 \phi(t)$, $\varphi(l, t) = 0$.

Задача после преобразования Лапласа решается методом пристрелки.

Проведен анализ влияния коэффициента теплопроводности стержня и различных законов тепловой нагрузки на распределение электрического потенциала. На рис. 4 представлено изменение безразмерного потенциала от времени в середине стержня $z = 0.5$ при: а) нагрузке $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$; б) нагрузке $\varphi(\tau_1) = \delta(\tau_1)$. При этом сплошной линией изображено изменение потенциала при $\bar{k}(z) = 1$, точками – при $\bar{k}(z) = 1.5 - z^2$, пунктиром – при $\bar{k}(z) = \cos(z)$.

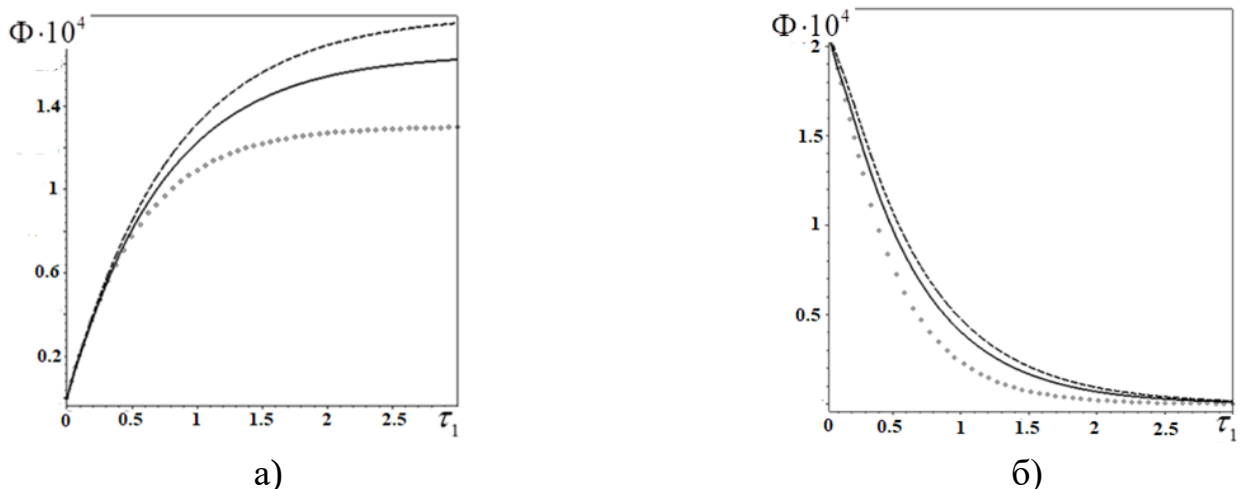


Рисунок 4. Изменение потенциала стержня от времени в точке $z = 0.5$ при различных законах неоднородности коэффициента теплопроводности.

Из рис. 4 следует, что на характер изменения от времени индуцируемого электрического потенциала существенное влияние оказывают как законы неоднородности коэффициента теплопроводности, так и тип тепловой нагрузки.

В параграфе 1.8 проведено исследование динамической связанной задачи термоэлектроупругости для неоднородного цилиндра.

Рассматриваются неустановившиеся колебания длинного полого радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра, внутренняя поверхность которого $r=r_1$ заземлена, свободна от напряжений и поддерживается при нулевой температуре, а на внешней поверхности $r=r_2$ действует нестационарная нагрузка.

Поставленная задача после обезразмеривания при произвольных законах неоднородности решается численно методом пристрелки. Проведена верификация предложенного метода решения задачи термоэлектроупругости для цилиндра путем сравнения с известным решением, полученным ранее для некоторых частных случаев.

В результате вычислений выяснено, что при тепловом воздействии безразмерное напряжение Ω_r и потенциал Φ достигают небольших значений и нелинейным образом распределены по радиусу цилиндра; законы неоднородности материальных характеристик оказывают большое влияние на радиальное распределение температуры, смещения, напряжений и потенциала; только большие значения параметров связанности могут оказывать существенное влияние на физические поля.

Во **второй главе** в рамках модели градиентной механики построены асимптотические решения статических задач для составных тел и тел с покрытиями (стержня, балки, цилиндра, полосы).

Первая часть главы 2 посвящена исследованию статических задач градиентной теории упругости и термоупругости для составных тел.

В параграфе 2.1 представлены основные положения градиентной теории упругости. Введены компоненты тензоров напряжений Коши $\tau_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}$, моментных напряжений $m_{ijk} = l_M^2 \tau_{ij,k}$, полных напряжений $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}$. Здесь l_M – механический градиентный параметр.

В параграфе 2.2 на основе градиентной модели проведено исследование деформирования составного стержня.

Рассмотрено равновесие составного термоупругого стержня длиной L с местом стыка в точке $x=L_0$. Торце $x=0$ жестко закреплён и поддерживается при нулевой температуре. На торце $x=L$ действует один из видов нагрузки:

1) силовая $\sigma_{11}(L) = p_0$, $T(l) = 0$; 2) температурная $T(l) = T^*$, $\sigma_{11}(L) = 0$. При этом полагаем, что распространение тепла в стержне подчиняется классическому уравнению теплопроводности.

Математическая постановка задачи сформулирована в терминах напряжений Коши. На основе метода Вишика-Люстерника при малых значениях масштабного параметра получены асимптотические формулы для нахождения безразмерных напряжений Коши $S_z = \frac{\tau_{11}}{E_0}$. На рис. 5 изображены распределения по координате z : а) напряжений Коши; б) моментных напряжений $M = \frac{m_{111}}{E_0 L}$ при $\alpha = \frac{l_M}{L} = 0.01$, $P_0 = \frac{p_0}{E_0} = 0.1$.

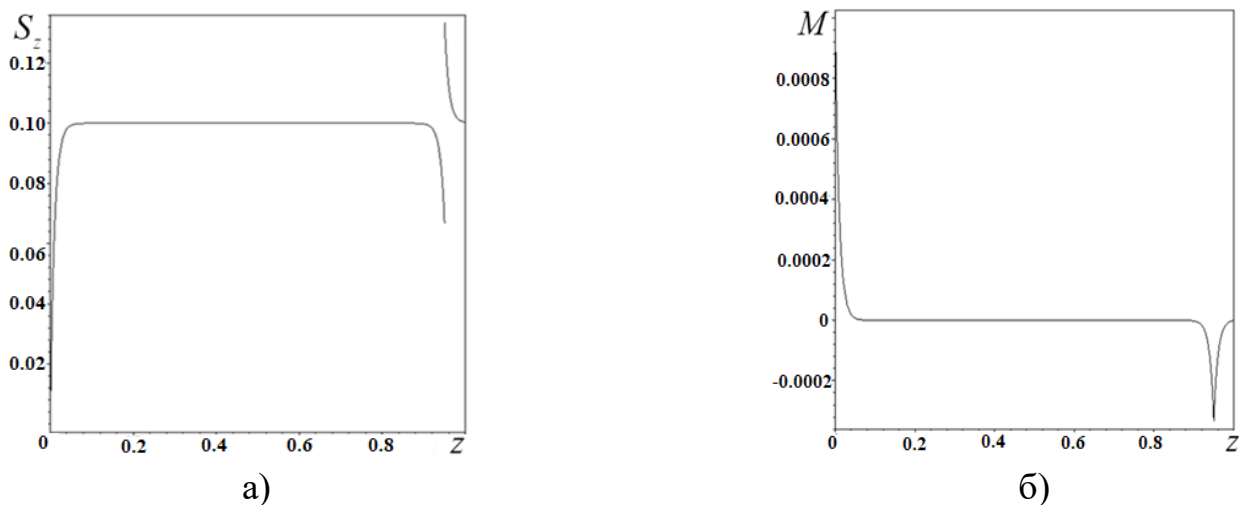


Рисунок 5. Распределение по координате z : а) напряжений Коши; б) моментных напряжений составного стержня.

Согласно рис. 5 напряжения Коши экспоненциально затухают до нуля вблизи заземленного торца стержня и испытывают скачок в точке сопряжения, обусловленный разностью термомеханических характеристик и непрерывностью смещений и их первых производных.

В параграфе 2.3 исследована градиентная модель изгиба составной балки Эйлера-Бернулли.

Рассмотрена составная балка длиной L с поверхностью сопряжения $x_1 = L_0$, при этом конец балки $x_1 = 0$ жестко заземлен. На балку действует нагрузка, одного из следующих видов: 1) равномерно распределенная нагрузка F ; 2) на конце $x_1 = L$ действует момент M_0 ; 3) на конце $x_1 = L$ действует поперечная сила N_0 .

На основе метода Вишика-Люстерника при малых значениях масштабного параметра α получены асимптотические выражения для изгибающих моментов, которые в случае равномерно распределенной нагрузки, имеют вид:

$$\bar{m}_1(z, \alpha) \cong -\frac{\bar{F}}{2}(z-1)^2 + \bar{F}\alpha e^{-\frac{z}{\alpha}} + P_1 \left(e^{\frac{2(z_0-1)}{\alpha}} - 1 \right) e^{\frac{z-z_0}{\alpha}}, \quad (10)$$

$$\bar{m}_2(z, \alpha) \cong -\frac{\bar{F}}{2}(z-1)^2 + P_1 \left(e^{\frac{z_0-z}{\alpha}} + e^{\frac{z_0-1}{\alpha}} e^{\frac{z-1}{\alpha}} \right), \quad (11)$$

где $\bar{F} = \frac{FL^3}{E_0 I_0}$, $\bar{m}_i = \frac{M_i L}{E_0 I_0}$, $P_1 = -\frac{\bar{F}}{2}(z_0-1)^2 Y_0$, $Y_0 = \frac{v_2(z_0) - v_1(z_0)}{v_1(z_0) + v_2(z_0) + (v_1(z_0) - v_2(z_0))e^{\frac{2(z_0-1)}{\alpha}}}$,

$v_i = \frac{D_i}{E_0 I_0}$, $z = \frac{x_1}{L}$, $z_0 = \frac{L_0}{L}$, I_0 – момент инерции балки.

Изгибающие моменты согласно (10), (11) испытывают скачок на границе $z = z_0$, обусловленный разностью изгибных жесткостей балок и непрерывностью прогибов, их первых и вторых производных.

Параграф 2.4 посвящен моделированию деформирования цилиндра с покрытием.

Рассмотрено равновесие бесконечного полого термоупругого двухслойного цилиндра, имеющего поверхность сопряжения $r = r_0$, под действием одного из видов нагрузки: 1) внутренняя поверхность $r = r_1$ находится под действием внутреннего давления p_0 , внешняя поверхность $r = r_2$ свободна от напряжений, при этом тепловое воздействие отсутствует; 2) температурная нагрузка $T(r_1) = 0$, $T(r_2) = T_*$, при этом боковые поверхности свободны от напряжений.

При малых значениях масштабного параметра методом Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна получены асимптотические формулы для нахождения распределения безразмерных радиальных смещений слоистого цилиндра:

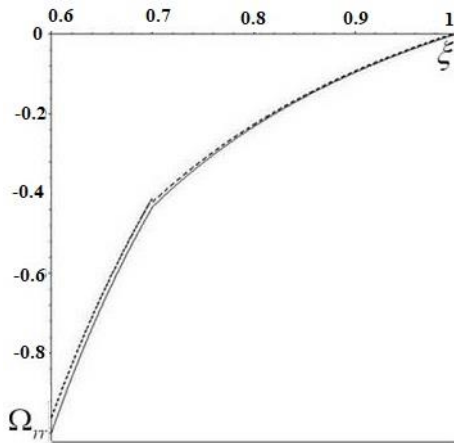
$$U^{(1)}(\xi) = G_5 \xi + \frac{G_6}{\xi} + \frac{\bar{\gamma}_1}{(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} \eta W^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{C_3}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_3}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - R_0}{\alpha}}, \quad \xi \in [\xi_0, R_0], \quad (12)$$

$$U^{(2)}(\xi) = G_7 \xi + \frac{G_8}{\xi} + \frac{\bar{\gamma}_2}{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)\xi} \int_{R_0}^{\xi} \eta W^{(2)}(\eta) d\eta + \frac{C_4}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{R_0 - \xi}{\alpha}} + \frac{D_4}{\sqrt{\xi}} e^{\frac{\xi - 1}{\alpha}}, \quad \xi \in [R_0, 1]. \quad (13)$$

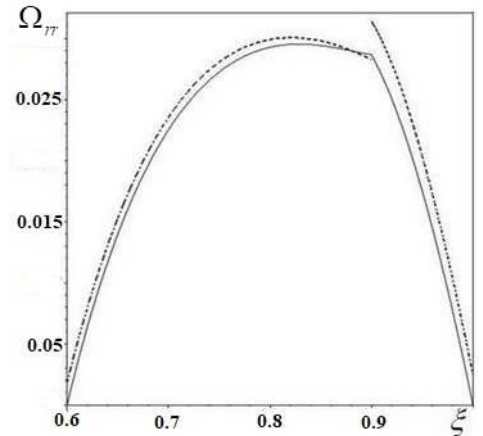
Исследованы границы применимости асимптотических формул (12), (13) путем сравнения с точным аналитическим решением. Результаты расчетов показали, что асимптотические формулы имеют погрешность, не превосходящую 1%, при масштабном параметре $\alpha \leq 0.03$.

На рис. 6 изображено радиальное распределение полных радиальных напряжений в случае: а) силового нагружения $\Omega_{rr}(\xi_0) = -1$; б) теплового нагружения $W(1) = 1$. При этом сплошной линией изображено распределение при $\alpha = 0$, пунктиром – при $\alpha = 0.03$. Выяснено, что с увеличением

масштабного параметра радиальные напряжения увеличиваются и терпят скачок при $\xi = R_0$.



а)



б)

Рисунок 6. Радиальное распределение полных радиальных напряжений.

В параграфе 2.5 в рамках градиентной модели проведено исследование термоупругого деформирования составной полосы.

Рассматривается бесконечная термоупругая слоистая полоса, имеющей поверхность сопряжения $x_3 = h_1$. На нижней жестко заземленной поверхности $x_3 = 0$, поддерживается заданная температура. На свободной от напряжений верхней поверхности $x_3 = h$ на отрезке $x_1 \in [a, b]$ действует тепловой поток, а остальная часть верхней границы теплоизолирована.

В результате проведенных расчетов выяснено, что увеличение масштабного параметра $\alpha = \frac{l_m}{h}$ приводит к уменьшению значений перемещений и увеличению полных напряжений.

Вторая часть главы 2 посвящена исследованию статических задач градиентной теории электроупругости для составных и слоистых тел.

В параграфе 2.6 представлены основные положения градиентной теории электроупругости. Введены компоненты тензоров напряжений Коши $\tau_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k$, моментных напряжений $m_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$, полных напряжений $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}$, квадрупольного момента $q_{ij} = \beta_{ijkl} E_{k,l}$, компоненты вектора электрической индукции $D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ij} E_j$, полной электрической индукции $P_i = D_i - Q_{ij,j}$. Здесь A_{ijklmn} – компоненты тензоров модулей упругости 6-го порядка, e_{kij} – компоненты тензора пьезомодулей 3-го порядка, ε_{ij} и β_{ijkl} – компоненты тензоров коэффициентов диэлектрической проницаемости 2-го и 4-го порядка соответственно.

В параграфе 2.7 проведено исследование деформирования составного продольно поляризованного пьезоупругого стержня.

Рассмотрено равновесие составного продольно поляризованного пьезоупругого стержня длины L с местом стыка в точке $x_3 = L_0$. Один торец стержня $x_3 = 0$ жестко зашпелен, закорочен, а на другом торце действует нагрузка, одного из следующих видов: 1) механическая нагрузка $\sigma_{33}(L) = p_0$, $\varphi(L) = 0$; 2) электростатическая нагрузка $\varphi(L) = \varphi_0$, $\sigma_{33}(L) = 0$.

В задаче для составного электроупругого стержня приняты следующие упрощения: $A_{333333} = l_m^2 c_{33}$, $\beta_{333333} = l_s^2 \varepsilon_3$, где l_s – электростатический градиентный параметр. Исследовано несколько частных случаев, когда учитывается только один из градиентных эффектов, механический или электростатический.

Выяснено, что с увеличением электростатического масштабного параметра значения потенциала уменьшаются, а в окрестности стыка стержней по сравнению с классической теорией наблюдается более плавное изменение потенциала.

Параграф 2.8 посвящен моделированию деформирования сплошного двухслойного неэлектропроводящего радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра радиуса R , имеющего поверхность сопряжения $r = r_0$. К внешней боковой поверхности $r = R$ цилиндра приложена нормальная механическая нагрузка p_0 .

Рассмотрена упрощенная постановка задачи, когда учитывается только механический градиентный эффект. Решение поставленной задачи после обезразмеривания и исключения потенциала из уравнения электростатики сводится к задаче градиентной теории упругости для анизотропного цилиндра с ужесточенными модулями упругости.

В третьей главе представлены постановки КОЗ термоупругости, когда дополнительная информация известна на полубесконечном временном интервале. Для решения КОЗ термоупругости в этой постановке получены операторные уравнения в трансформантах Лапласа. Сформулирован итерационный подход к идентификации одномерных термомеханических характеристик.

В параграфе 3.1 приведены общие постановки КОЗ термоупругости (в трансформантах Лапласа), как при тепловом, так и при механическом способах нагружения.

Дополнительной информацией являются значения трансформант температуры или перемещений:

$$\tilde{\theta}|_{S_q} = \tilde{f}(x, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (14)$$

$$\tilde{u}_i|_{S_\sigma} = \tilde{g}_i(x, p), \quad i = 1, 2, 3, \quad p \in [0, \infty). \quad (15)$$

В параграфе 3.2 для решения КОЗ термоупругости в трансформантах получены операторные уравнения двумя способами: 1) на основе обобщенного соотношения взаимности; 2) на основе слабой постановки прямой задачи и последующей линеаризации.

Операторные уравнения имеют вид:

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV + p \int_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV + p T_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad (16)$$

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV + \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS. \quad (17)$$

В параграфе 3.3 представлена итерационная схема решения одномерных обратных задач термомеханики.

Начальное приближение $\bar{a}^{(0)}$ определяется в классе положительных ограниченных линейных функций из условия минимума функционала невязки, вид которого зависит от способа нагружения тела:

а) при тепловом способе нагружения

$$J_1 = \int_{a_1}^{a_2} \left(f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1) \right)^2 d\tau_1; \quad (18)$$

б) при механическом способе нагружения

$$J_2 = \int_{b_1}^{b_2} \left(g(\tau_2) - U^{(n-1)}(1, \tau_2) \right)^2 d\tau_2. \quad (19)$$

На втором этапе путем решения соответствующего операторного уравнения вычисляются поправки реконструируемых функций $\delta \bar{a}^{(n-1)}$, строится новое приближение $\bar{a}^{(n)} = \bar{a}^{(n-1)} + \delta \bar{a}^{(n-1)}$ и решается прямая задача с уточненными характеристиками $\bar{a}^{(n)}$.

Условиями выхода из итерационного процесса выступают: 1) ограничение по количеству итераций ($n = 20$); 2) достижение предельного значения соответствующего функционала невязки J_1 или J_2 , равного 10^{-6} .

В параграфе 3.4 представлены постановки КОЗ термоупругости для стержня и получены операторные уравнения в трансформантах в случае реконструкции одной характеристики при известных остальных.

Например, для нахождения поправок безразмерного коэффициента теплопроводности $\delta \bar{k}$ получено следующее операторное уравнение:

$$\frac{1}{\beta_1 \tilde{\phi}(p)} \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty). \quad (20)$$

Решение уравнения (20) является некорректной задачей, для нахождения регуляризованного решения которой использован метод Тихонова А.Н.

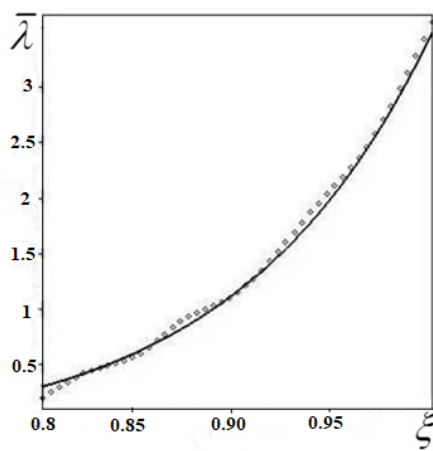
В параграфе 3.5 получены операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости для трубы в первой постановке в случае восстановления одной характеристики. Так, для нахождения поправок безразмерных коэффициентов Ламе получены следующие операторные уравнения:

$$\frac{1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} + \frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \xi d\xi = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (21)$$

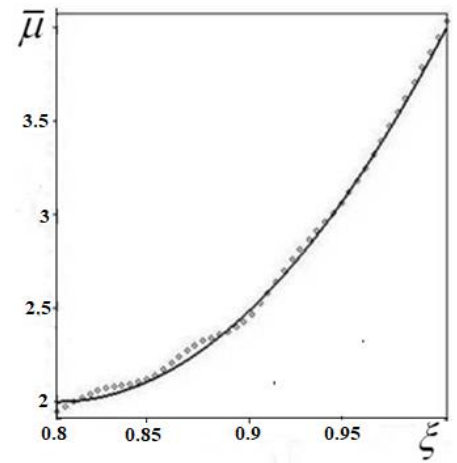
$$\frac{1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left(\left(\frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi} \right)^2 \right) \xi d\xi = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (22)$$

На рис. 7 представлены графики восстановления коэффициентов Ламе:

а) $\bar{\lambda}(\xi) = 0.5e^{10(\xi - \xi_0)} - 0.2$, б) $\bar{\mu}(\xi) = 50(\xi - \xi_0)^2 + 2$ при $\xi_0 = 0.8$, $\phi(\tau_2) = \tau_2 e^{-\tau_2}$, $\delta_0 = 0.03$.



а)



б)

Рисунок 7. Результаты реконструкции коэффициентов Ламе трубы:

а) $\bar{\lambda}(\xi) = 0.5e^{10(\xi - \xi_0)} - 0.2$; б) $\bar{\mu}(\xi) = 50(\xi - \xi_0)^2 + 2$.

В параграфе 3.6 получены операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости конечного цилиндра. При этом в качестве дополнительной информации на наружной поверхности цилиндра выступают либо трансформанта приращения температуры

$$\tilde{W}(1, \xi_2, p) = \tilde{f}(\xi_2, p), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad p \in [0, \infty), \quad (23)$$

либо трансформанта радиального перемещения

$$\tilde{U}_r(1, \xi_2, p) = \tilde{g}(\xi_2, p), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad p \in [0, \infty). \quad (24)$$

В предположении, что функции $\tilde{f}(\xi_2, p)$, $\tilde{g}(\xi_2, p)$ в (23), (24) допускают разложения в ряды: $\tilde{f}(\xi_2, p) = \sum_{N_3=0}^{\infty} \tilde{f}_{N_3}(p) \cos(\nu_{N_3} \xi_2)$, $\tilde{g}(\xi_2, p) = \sum_{N_3=0}^{\infty} \tilde{g}_{N_3}(p) \cos(\nu_{N_3} \xi_2)$, обратные задачи для конечного цилиндра сформулированы для гармоник.

Исследована возможность одновременной реконструкции коэффициентов Ламе. Расчеты показали, что значение норм ядер при

поправке $\delta\bar{\mu}^{(n-1)}$ значительно больше, чем при $\delta\bar{\lambda}^{(n-1)}$. Для преодоления этой проблемы предложен двухэтапный процесс идентификации: на первом этапе определяются поправки $\delta\bar{\lambda}^{(n-1)}$; на втором этапе функция $\bar{\lambda}(\xi_1)$ полагается известной, при этом на каждой итерации определяются поправки $\delta\bar{\mu}^{(n-1)}$.

В параграфе 3.7 рассмотрены постановки КОЗ термоупругости для неоднородного прямоугольника, получены операторные уравнения для различных гармоник и проведены вычислительные эксперименты по идентификации термомеханических характеристик прямоугольника.

В **четвертой главе** исследуются обратные задачи термоупругости, когда дополнительная информация измеряется на конечном временном интервале. Представлены постановки и решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел.

В параграфе 4.1 представлена общая постановка КОЗ термоупругости в оригиналах (вторая постановка КОЗ) для неоднородных тел.

В параграфе 4.2 проведено исследование КОЗ термоупругости для неоднородного стержня во второй постановке.

Операторные уравнения в оригиналах получены путем обращения соответствующих операторных уравнений в трансформантах. Например, для нахождения поправок $\delta\bar{k}(z)$ путем обращения (20) при $\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$ получено уравнение:

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} R_1(z, \tau_1) dz = f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2], \quad (25)$$

$$R_1(z, \tau_1) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau_1 - \tau)}{\partial z} d\tau.$$

Исследовано влияние выбора временного интервала съема дополнительной информации $[a_1, a_2]$ и количества точек наблюдения внутри него на точность реконструкции. Выяснено, что наиболее информативными являются те интервалы, на которых скорость изменения температуры максимальна и которые находятся в наиболее близкой к началу отчета времени зоне.

Для оценки устойчивости предложенного похода решения КОЗ к ошибке измерения входной информации проведено ее зашумление по формуле:

$$f_\beta(\tau_1) = f(\tau_1)(1 + \beta\gamma_0), \quad (26)$$

где β – амплитуда зашумления, γ_0 – случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке $[-1, 1]$.

Выяснено, что при 1%-м шуме погрешность реконструкции

монотонных функций, характеризующих изменение коэффициента теплопроводности и модуля Юнга, не превышает 10%.

Рассмотрена постановка КОЗ об определении двух теплофизических характеристик стержня. Для этого рассмотрены две задачи термоупругости с разным типом тепловой нагрузки на торце $z=1$. В первой задаче на торце $z=1$ действует тепловой поток, а в качестве дополнительной информации выступает температура:

$$W_I(1, \tau_1) = f_I(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (27)$$

Во второй задаче на торце $z=1$ задана температура, изменяющаяся по закону $\tau_1 e^{-\tau_1}$, а в качестве дополнительной информации выступает тепловой поток:

$$Q_{II}(1, \tau_1) = f_{II}(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_2, b_2]. \quad (28)$$

Начальное приближение определяется в классе линейных функций основе минимизации следующего функционала невязки:

$$J = \int_{a_1}^{b_1} (f_I(\tau_1) - W_I(1, \tau_1))^2 d\tau_1 + \int_{a_2}^{b_2} (f_{II}(\tau_1) - Q_{II}(1, \tau_1))^2 d\tau_1. \quad (29)$$

Система операторных уравнений в трансформантах для нахождения поправок $\bar{k}(z)$ и $\bar{c}(z)$ имеет вид:

$$p \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz = \tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p), \quad (30)$$

$$(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p+1)^2 \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz = \tilde{f}_{II}(p) - \tilde{Q}_{II}^{(n-1)}(1, p). \quad (31)$$

Система операторных уравнений в оригиналах получается путем обращения системы уравнений (30), (31).

На рис. 8 изображены результаты одновременного восстановления двух функций: а) $\bar{k}(z) = 1 - 0.5(z-1)^2$; б) $\bar{c}(z) = 0.5(1+z^2)$.

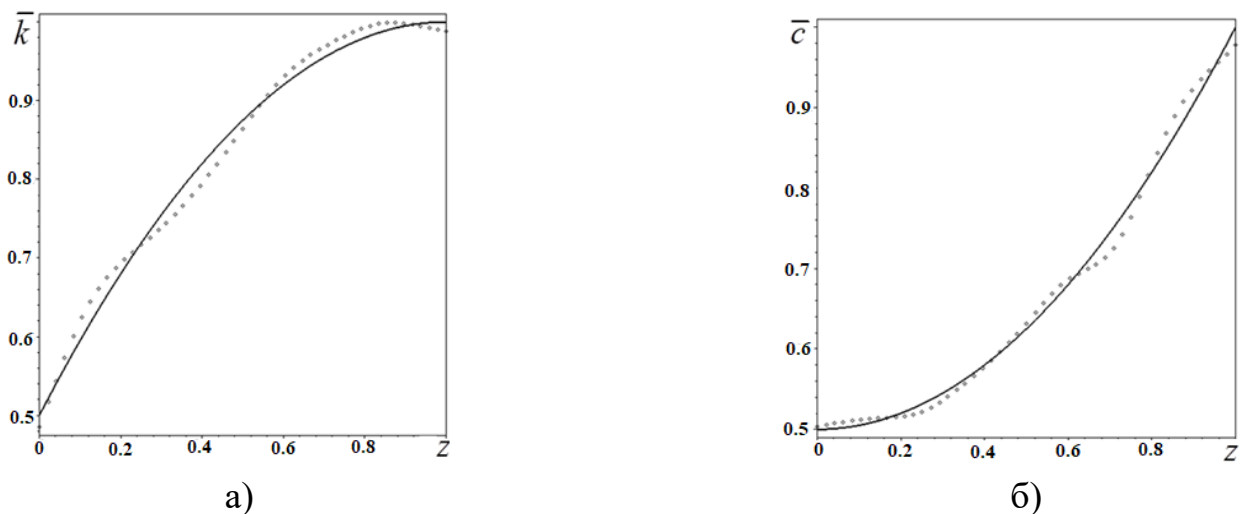


Рисунок 8. Результат восстановления двух функций: а) $\bar{k}(z)$; б) $\bar{c}(z)$.

В параграфе 4.3 представлено исследование КОЗ термоупругости для поперечно неоднородного слоя.

Рассматривается изотропный поперечно неоднородный термоупругий слой, занимающий область $(x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h])$, нижняя грань которого жестко закреплена, а на верхней грани приложена нестационарная нагрузка. КОЗ термоупругости состоит в определении неоднородных по толщине слоя характеристик по дополнительной информации о полях температуры и перемещений, измеренных на верхней границе слоя.

Применив преобразование Фурье и, положив параметр преобразования Фурье равным нулю, получены две упрощенные несвязанные задачи относительно усредненных по x_1 компонент полей. Идентификация термомеханических характеристик сводится к последовательному решению двух одномерных КОЗ, в одну из которых входят неизвестные функции $\mu(x_3)$ и $\rho(x_3)$, а в другую – $\lambda(x_3)$, $\gamma(x_3)$, $k(x_3)$, $c(x_3)$. Задача 1 аналогична обратной задаче для упругого стержня, а задача 2 – для термоупругого стержня.

Исследованы особенности идентификации плотности, модуля сдвига слоя и коэффициента теплопроводности слоя.

Поправки для нахождения безразмерного модуля сдвига находятся путем решения следующего операторного уравнения:

$$\int_0^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} L_1(z, \tau_2) dz = -\left(g_1(\tau_2) - \bar{U}_1(1, \tau_2)\right), \quad \tau_2 \in [c, d], \quad (32)$$

$$\text{где } L_1(z, \tau_2) = \int_0^{\tau_2} \frac{\partial^2 \bar{U}_1(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial \bar{U}_1(z, \tau - \tau_2)}{\partial z} d\tau.$$

На рис. 9 показан пример восстановления модуля сдвига $\bar{\mu}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.45)^4}$, характеризующего наличие зоны локальной неоднородности внутри слоя.

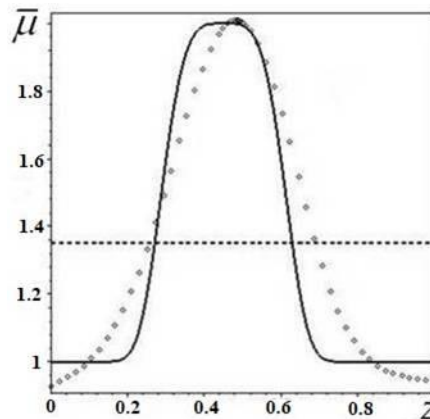


Рисунок 9. Результат реконструкции модуля сдвига слоя.

Погрешность реконструкции $\bar{\mu}(z)$ достаточно высокая, как из-за немонотонности функции, так и ее быстрого изменения на небольшом отрезке.

В параграфе 4.4 проведено исследование КОЗ термоупругости для цилиндрической трубы во второй постановке.

Проведено исследование сходимости итерационного процесса, влияния параметра термомеханической связанности и влияния зашумления входной информации на результаты реконструкции термомеханических характеристик трубы.

На рис. 10 представлены результаты реконструкции коэффициента температурных напряжений трубы $\bar{\gamma}(\xi) = 1 + \sin(10(\xi - \xi_0))$ на 20-й итерации при $[a_1, a_2] = [0.007, 0.018]$ и двух значениях параметра связанности: а) $\delta_0 = 0.15$; б) $\delta_0 = 0.4$. Начальное приближение $\bar{\gamma}_0(\xi) = 4.95\xi - 2.95$.

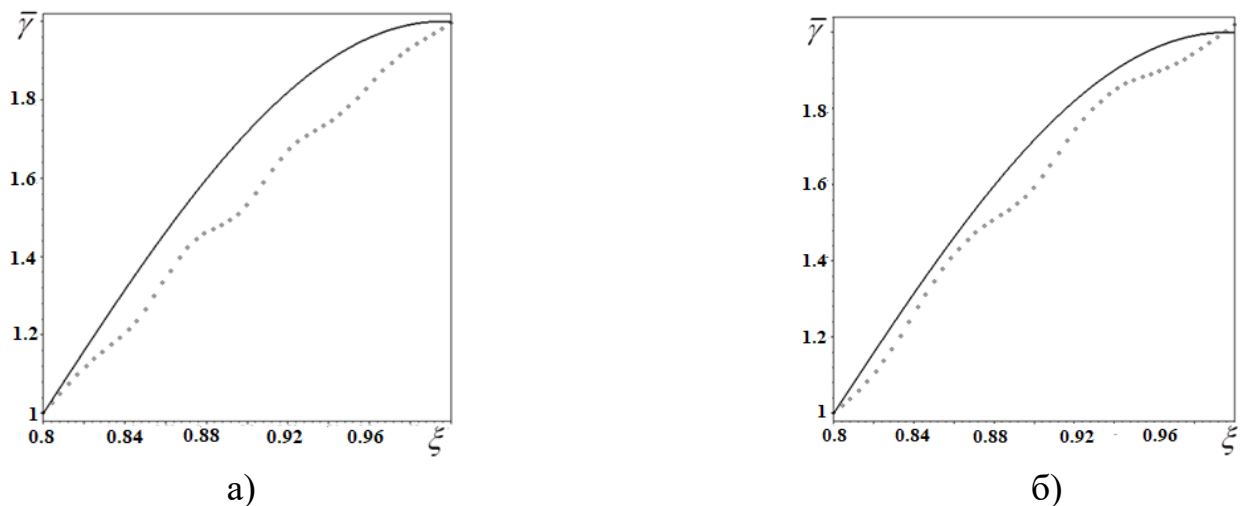


Рисунок 10. Результат реконструкции $\bar{\gamma}(\xi)$ при: а) $\delta_0 = 0.15$; б) $\delta_0 = 0.4$.

Из рис. 10 следует, что с увеличением параметра термомеханической связанности погрешность реконструкции $\bar{\gamma}(\xi)$ уменьшается.

Проведено исследование КОЗ термоупругости об идентификации двух неоднородных характеристик трубы. Для этого рассмотрены две задачи термоупругости для трубы с разной тепловой нагрузкой на ее внешней поверхности. Схема решения КОЗ для трубы построена аналогично схеме реконструкции двух теплофизических характеристик стержня.

В параграфе 4.5 исследована КОЗ термоупругости для неоднородного цилиндра конечной длины по дополнительной информации о гармониках температуры и радиального смещения.

Исследуется обратная задача о реконструкции двух характеристик конечного цилиндра $\bar{k}(\xi_1)$ и $\bar{c}(\xi_1)$. Выяснено, что ядра системы операторных уравнений различаются на порядок друг от друга и одновременная

идентификация двух характеристик невозможна. Применен поэтапный процесс идентификации теплофизических характеристик: на первом этапе находятся поправки $\delta \bar{k}^{(n-1)}$, а на втором этапе – поправки $\delta \bar{c}^{(n-1)}$.

На рис. 11 изображены результаты поэтапного восстановления двух характеристик: а) $\bar{k}(\xi_1) = 80e^{-5.2\xi_1}$; б) $\bar{c}(\xi_1) = 100e^{-6.1\xi_1}$ при начальных приближениях $\bar{k}^{(0)}(\xi_1) = -4.05\xi_1 + 4.5$, $\bar{c}^{(0)}(\xi_1) = -2.87\xi_1 + 3.12$.

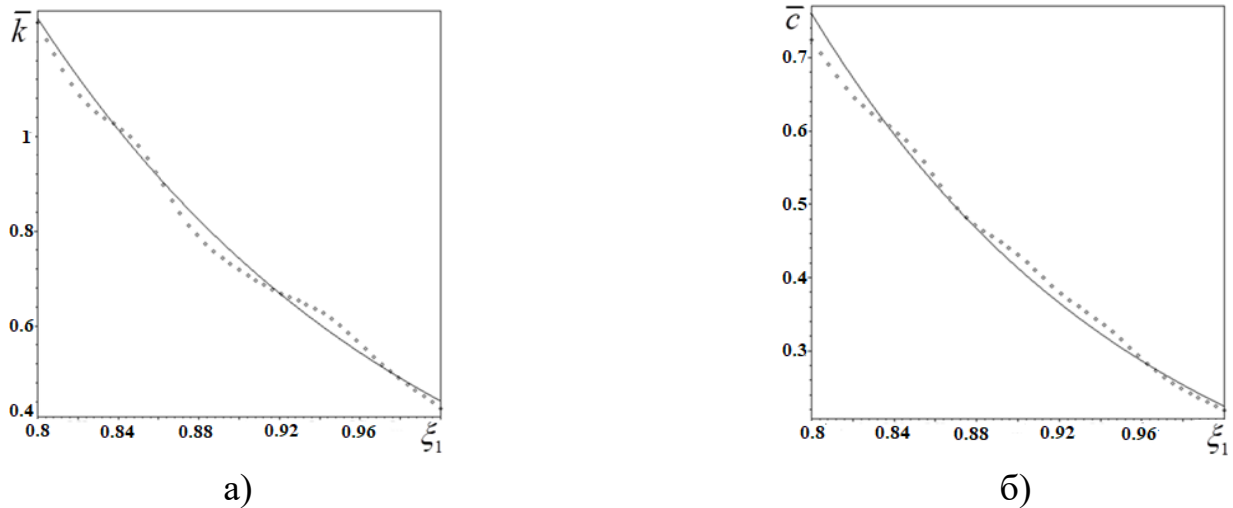


Рисунок 11. Результат поэтапной реконструкции теплофизических характеристик конечного цилиндра: а) $\bar{k}(\xi_1) = 80e^{-5.2\xi_1}$; б) $\bar{c}(\xi_1) = 100e^{-6.1\xi_1}$.

В параграфе 4.6 решена КОЗ термоупругости для прямоугольника во второй постановке.

Приведены вторые постановки КОЗ термоупругости для прямоугольника. Обратные задачи сформулированы для гармоник и получены операторные уравнения в оригиналах для их решения. Реализована схема поэтапного восстановления нескольких пар термомеханических характеристик прямоугольника $(\bar{\mu}(y_3), \bar{\rho}(y_3))$ и $(\bar{k}(y_3), \bar{\gamma}(y_3))$.

В **пятой главе** представлена общая постановка КОЗ термоэлектроупругости, когда дополнительная информация известна на конечном временном отрезке.

В параграфе 5.1 приведена общая постановка КОЗ термоэлектроупругости и получены операторные уравнения для ее решения.

В параграфе 5.2 исследована КОЗ термоупругости для неоднородного термоэлектроупругого стержня.

Операторные уравнения для нахождения поправок $\delta \bar{k}$, $\delta \bar{c}$, $\delta \bar{c}_{33}$, $\delta \bar{\rho}$, $\delta \bar{\gamma}$ термоэлектроупругого стержня по своей структуре совпадают с аналогичными уравнениями для термоупругого стержня. Получены новые операторные уравнения и проведены вычислительные эксперименты по нахождению законов неоднородности пьезомодуля и пьезокоэффициента.

В параграфе 5.3 исследована обратная задача об идентификации материальных характеристик поперечно неоднородного термоэлектроупругого слоя. После преобразования Фурье двумерная обратная задача для слоя сведена к ряду одномерных задач относительно усредненных характеристик и их моментов. После исключения электрического потенциала получено три набора обратных задач, аналогичных обратным задачам для упругого стержня и термоупругого стержня с модифицированными характеристиками. В вычислительных экспериментах реализована трехэтапная схема реконструкции характеристик.

В параграфе 5.4 решена обратная задача об идентификации материальных характеристик радиально поляризованного термоэлектроупругого цилиндра.

Получены операторные уравнения в трансформантах для нахождения поправок характеристик термоэлектроупругого цилиндра в итерационном процессе. Например, уравнения в трансформантах для нахождения поправок пьезомодуля и пирокoeffициента имеют вид:

$$\frac{\delta_1}{\beta_2 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{e}_{33}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi} \xi d\xi = -(\tilde{g}(p) - \tilde{U}_r^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (33)$$

$$\frac{\delta_3 p}{\beta_1 \tilde{\phi}(p)} \int_{\xi_0}^1 \delta \bar{g}^{(n-1)} \frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{d\xi} \tilde{W}^{(n-1)} \xi d\xi = \tilde{f}(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1, p), \quad p \in [0, \infty). \quad (34)$$

Операторные уравнения в оригиналах получаются путем обращения уравнений в трансформантах.

На рис. 12 изображены результаты реконструкции: а) упругого модуля $\bar{c}_{11}(\xi) = 1 + 1.4(\xi + 0.1)^6$; б) пьезомодуля $\bar{e}_{33}(\xi) = 0.4(1 + \xi^{10})$ при $\delta_1 = 0.6$.

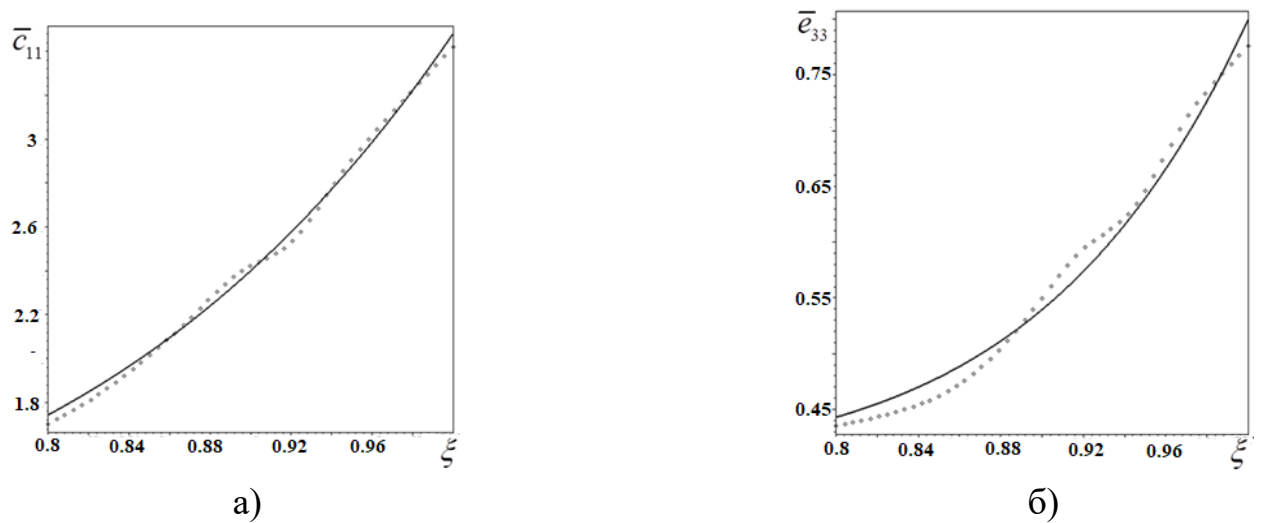


Рисунок 12. Результат реконструкции характеристик термоэлектроупругого цилиндра: а) $\bar{c}_{11}(\xi) = 1 + 1.4(\xi + 0.1)^6$; б) $\bar{e}_{33}(\xi) = 0.4(1 + \xi^{10})$.

В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что пьезомодули и пироккоэффициент восстанавливаются с большей погрешностью, чем другие характеристики термоэластопругого цилиндра.

В **приложение** вынесены решения двух задач. В первой задаче построена модель термоэластопругого деформирования системы «неоднородное покрытие-подложка». Вторая задача посвящена идентификации теплофизических характеристик неоднородного стержня методом алгебраизации.

В **заключении** сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

1. Разработаны численные методы исследования динамических связанных задач термоэластопругости и термоэлектростопругости для элементов стержневых, плоских и цилиндрических конструкций, изготовленных из неоднородных материалов.

2. В рамках градиентной механики получены асимптотические формулы для нахождения напряженно-деформированного состояния составных и слоистых стопругих, термоэластопругих и электростопругих тел при малых значениях масштабных параметров.

3. В зависимости от временного интервала съема дополнительной информации (полубесконечный и конечный) исследованы две постановки обратной задачи об определении переменных характеристик неоднородной модели термоэластопругости. Получены операторные уравнения для решения обратных задач термоэластопругости в первой и второй постановках.

4. Разработаны численные схемы решения обратных коэффициентных задач термоэластопругости и термоэлектростопругости при восстановлении одной или двух материальных функций, сочетающие итерационные схемы и метод регуляризации.

5. Решен ряд коэффициентных обратных задач для моделей неоднородной теории термоэластопругости и термоэлектростопругости для стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра и прямоугольника. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. Ватульян, А. О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики : монография /А. О. Ватульян, С. А. Нестеров; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Федеральное государственное

автономное образовательное учреждение высшего образования "Южный федеральный университет". – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. – 146 с.

2. Ватульян, А. О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики : монография / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Южный федеральный университет". – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. – 176 с.

Глава в коллективной монографии издательства Springer индексируемая в Scopus

3. Vatulyan, A. O. On Coefficient Inverse Problems of Heat Conduction for Functionally Graded Materials / A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov // Trends in Mathematics. – 2021. – P. 303-316. – DOI 10.1007/978-3-030-49763-7_20.

Статьи, опубликованные в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий диссертационного совета ЮФУ801.01.10

4. Ватульян, А. О. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2009. – № 3(151). – С. 39-43.

5. Ватульян, А. О. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2009. – Т. 6, № 3. – С. 24-30.

6. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации неоднородных свойств термоупругих тел / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2011. – Т. 8, № 1. – С. 29-36.

7. Ватульян, А. О. Об одном подходе к восстановлению неоднородных свойств термоупругих тел / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2012. – № 4(170). – С. 25-29.

8. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно напряженных термоупругих тел / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 18-24.

9. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 3. – С. 329-335. – DOI 10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335.

10. Ватульян, А. О. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Проблемы прочности и пластичности. – 2014. – Т. 76, № 4. – С. 335-342.

11. Nedin, R. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod / R. Nedin, S. Nesterov, A. Vatulyan // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51, No. 3-4. – P. 767-773. – DOI 10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003.

12. Ватульян, А. О. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 217-224.

13. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно-напряженного термоупругого цилиндра / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 34-40.

14. Ватульян, А. О. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 951-959.

15. Vatulyan, A. O. About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded hollow cylinder / A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23, No. 1. – P. 71-75. 16.

16. Nedin, R. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder / R. Nedin, S. Nesterov, A. Vatulyan // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40, No. 4. – P. 2711-2719. – DOI 10.1016/j.apm.2015.09.078.

17. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра / А. О. Ватульян, С. А.

Нестеров // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 1. – С. 22-29.

18. Ватульян, А. О. Об одном подходе к идентификации термомеханических характеристик слоистой биологической ткани / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2016. – Т. 13, № 2. – С. 29-36.

19. Nedin, R. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials / R. Nedin, S. Nesterov, A. Vatulyan // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2016. – Vol. 102. – P. 213-218. – DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027.

20. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81, № 1. – С. 103-110.

21. Ватульян, А. О. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 117-126. – DOI 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10.

22. Ватульян, А. О. Итерационная схема решения коэффициентной обратной задачи термоэлектроупругости / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 445-455. – DOI 10.7242/1999-6691/2017.10.4.37.

23. Ватульян, А. О. Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел с покрытиями / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 5. – С. 14-27.

24. Ватульян, А. О. Об одном подходе к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 50-60. – DOI 10.31429/vestnik-15-1-50-60.

25. Vatulyan, A. O. On some features of identification of inhomogeneous prestressed state of thermoelastic hollow cylinder with coating / A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – Vol. 42, No. 1. – P. 54-64. – DOI 10.18720/MPM.4212019_6.

26. Ватульян, А. О. Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия:

Математика. Механика. Информатика. – 2019. – Т. 19, № 4. – С. 409-423. – DOI 10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423.

27. Vatulyan, A. Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics / A. Vatulyan, S. Nesterov, R. Nedin // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – Vol. 128. – P. 1157-1167. – DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.084.

28. Ватульян, А. О. Об одном подходе к решению задачи термоупругости для системы "покрытие-подложка" с отслоением / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2020. – Т. 17, № 2. – С. 18-28. – DOI 10.31429/vestnik-17-2-18-28.

29. Vatulyan, A. Regarding some thermoelastic models of "coating-substrate" system deformation / A. Vatulyan, S. Nesterov, R. Nedin // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2020. – Vol. 32(4). – P. 1173-1186. – DOI 10.1007/s00161-019-00824-9.

30. Vatulyan, A. O. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity / A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov // Materials Physics and Mechanics. – 2020. – Vol. 46, No. 1. – P. 27-41. – DOI 10.18149/mpm.4612020_3.

31. Ватульян, А. О. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 1. – С. 35-47. – DOI 10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47.

32. Ватульян, А. О. К определению термомеханических характеристик функционально-градиентного конечного цилиндра / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, № 3. – С. 396-408. – DOI 10.31857/S0032823521030115.

33. Ватульян, А. О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров, В. О. Юров // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 3. – С. 253-263. – DOI 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.

34. Ватульян, А. О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров, В. О. Юров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 4. – С. 60-70. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.4.07.

35. Ватульян, А. О. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, № 2. – С. 180-195. – DOI 10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195.

36. Ватульян, А. О. Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Владикавказский математический журнал. – 2022. – Т. 24, № 2. – С. 75-84. – DOI 10.46698/v3482-0047-3223-о.

37. Ватульян, А. О. Градиентная модель изгиба составной балки / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2022. – Т. 19, № 2. – С. 6-16. – DOI 10.31429/vestnik-19-2-6-16.

38. Ватульян, А. О. Масштабно-зависимая модель деформирования слоистого прямоугольника / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Владикавказский математический журнал. – 2022. – Т. 24, № 4. – С. 48-57. – DOI 10.46698/v8145-3776-3524-q.

39. Ватульян, А. О. Градиентная модель изгиба неоднородной пьезоэлектрической балки / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2022. – № 4-1(216-1). – С. 10-20. – DOI 10.18522/1026-2237-2022-4-1-10-20.

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в Scopus

40. Ватульян, А. О. Идентификация неоднородных характеристик преднапряженных пироматериалов / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, № 2(66). – С. 183-198. – DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-183-198.

41. Ватульян, А. О. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2021. – Т. 163, № 2. – С. 181-196. – DOI 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.

42. Vatulyan, A. O. Modeling of thermoelastic deformation of a thin-layer "coating-substrate" system / A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2317. – Art. No 012012. – P. 1-8. – DOI 10.1088/1742-6596/2317/1/012012.