МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

На правах рукописи

ТОВСУЛТАНОВ АБУБАКАР АЛХАЗУРОВИЧ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С АФФИННЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Специальность 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая
физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону - 2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Института математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО “Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова” и в Региональном научно-образовательном математическом центре “Северо-Кавказский центр математических исследований” Владикавказского научного центра РАН

Научный руководитель:

Россовский Леонид Ефимович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО “Российский университет дружбы народов”

Официальные оппоненты:

Нестеров Павел Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО “Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова”

Сакбаев Всеволод Жанович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГУ “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук”.

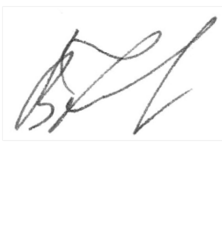
Защита состоится ________________ 2023 года в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21-ж, и на сайте https://hub.sfedu.ru/diss/show/1319163/

Автореферат разослан ________________ 2023 г.

Отзыв на автореферат в 2-х экз. (с указанием даты, Фамилии Имени Отчества, учёной степени, специальности, звания, организации, подразделения, должности, адреса, телефона, e-mail), заверенный печатью организации, просим направлять по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 111, учёному секретарю диссертационного совета ЮФУ801.01.02 Кряквину В. Д., а также в формате .pdf на e-mail: kryakvin@sfedu.ru.

Ученый секретарь
диссертационного совета ЮФУ801.01.02



Кряквин Вадим Донатович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Диссертация относится к области нелокальных задач для уравнений с частными производными. В ней рассматривается новый класс линейных эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих в старшей части слагаемые со сжатиями (растяжениями), поворотами и сдвигами аргументов неизвестной функции.

Теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в ограниченных областях стала интенсивно развиваться в 1970-х годах. Интерес к ней был вызван многочисленными естественнонаучными приложениями, а также применением к эллиптическим задачам с нелокальными краевыми условиями (задача Бицадзе-Самарского[1]). В авиастроении и ракетостроении широкое применение находят многослойные оболочки и пластины с гофрированным заполнителем. В работе Г. Г. Онанова, А. Л. Скубачевского[2] было показано, что упругую модель пластины с гофрированным заполнителем можно описать сильно эллиптической системой дифференциально-разностных уравнений. Сведение к дифференциально-разностным уравнениям позволяет получить ряд результатов для полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов.[3] Необходимость исследования краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений появляется и в современной нелинейной оптике при построении оптических систем с вращением поля в контуре обратной связи.[4] Систематическое исследование эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в тесной связи с нелокальными краевыми задачами для эллиптических уравнений было начато А. Л. Скубачевским[3] и продолжено в работах его учеников Е. Л. Цветкова, Е. П. Ивановой, Л. Е. Россовского, В. В. Подъяпольского, Е. М. Варфоломеева, М. А. Скрябина, В. А. Попова, Д. А. Неверовой, В. В. Лийко. Характерной чертой рассматриваемых постановок являлось нарушение гладкости решений краевых задач даже при бесконечно дифференцируемой правой части. Был обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений на некотором множестве точек как на границе, так и внутри области.

Теория краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с изотропными (одинаковыми по всем координатам) растяжениями и сжатиями переменных, была построена Л. Е. Россовским.[5,6] При этом краевые задачи рассматривались в ограниченных областях, содержащих неподвижную точку преобразования сжатия (начало координат), что создавало принципиальную трудность в их изучении и приводило к ряду новых свойств. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с ортотропными сжатиями/растяжениями (где одна координата подвергает-

[1] Бицадзе А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. акад. наук СССР. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 739–740.

[2] Онанов Г.Г. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела / Г.Г. Онанов, А.Л. Скубачевский // Прикл. мех. — 1979. — Т. 15, № 5. — С. 39–47.

[3] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional-Differential Equations and Applications, in Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 91 / A.L. Skubachevskii. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1997. — 293 p.

[4] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics/ A.L. Skubachevskii // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1998. — V. 32, № 2. — P. 261–278.

[5] Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россовский // СМФН. — 2014. — Т. 54. — С. 3–138.

[6] Rossovskii L. Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions / L. Rossovskii // Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — V. 12. — P. 226–239.

ся сжатию, а другая — растяжению) и краевые задачи для таких уравнений в областях, содержащих начало координат, рассматривались Л. Е. Россовским, А. Л. Тасевич.[7,8] Исследование каждого упомянутого класса задач не сводилось к применению уже разработанной техники и требовало нового подхода. Примерами уравнений с растяжениями/сжатиями, изученных в приведенных выше работах, являются

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}u_{x_i}(x)+b_{ij}u_{x_i}(p^{-1}x)+c_{ij}u_{x_i}(q^{-1}x)\right)_{x_j}=f(x)\quad (x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n),$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}u_{x_i}(x)+b_{ij}u_{x_i}(q^{-1}x_1,px_2)+c_{ij}u_{x_i}(qx_1,p^{-1}x_2)\right)_{x_j}=f(x)\quad (x\in\Omega\subset\mathbb{R}^2),$$

$$(p,q>1;\ a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in\mathbb{C}).$$

Отметим, что эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованиями переменных, отображающими область на себя, наиболее глубоко исследовались в работах В. С. Рабиновича,[9] А. Б. Антоневича, А. В. Лебедева,[10] А. Ю. Савина, Б. Ю. Стернина.[11] Теория Фредгольма для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатием — отображением многообразия с краем строго внутрь себя, получила развитие в работе.[12]

В одномерном случае функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями моделируют самые разные явления. Так, уравнение пантографа

$$\dot y = ay(\lambda t)+by(t)$$

возникает в астрофизике (В.А. Амбарцумян, 1944, поглощение света межзвездной материей), теории колебаний (Дж. Р. Окендон, А. Б. Тайлер, 1971, математическая модель динамики контактного провода электроснабжения подвижного состава), биологии (А. Дж. Холл, Г. С. Уэйк, 1989, моделирование процесса роста и деления клеток) и ряде других областей. Уравнение пантографа и его обобщения рассматривались многими математиками, например, Т. Като и Дж. Б. Маклеодом,[13] Г. А. Дерфелем и С. А. Молчановым,[14] А. Изерлесом.[15]

[7] Россовский Л.Е. Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями / Л.Е. Россовский, А.Л. Тасевич // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, вып. 5. — С. 733–748.

[8] Россовский Л.Е. Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах / Л.Е. Россовский, А.Л. Тасевич // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1679–1692.

[9] Рабинович В.С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений в $\mathbb{R}^n$ и полупространстве / В.С. Рабинович // Докл. акад. наук СССР. — 1978. — Т. 243. — С. 1134–1137.

[10] Антоневич А.Б. О нетеровости функционально-дифференциального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента / А.Б. Антоневич, А.В. Лебедев // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18. — С. 987–996.

[11] Савин А.Ю. Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений / А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 10. — С. 99–130.

[12] Савин А.Ю. Эллиптические задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем / А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин // Дифференц. уравнения. — 2016.— Т. 52, № 10. — С. 1383-1392.

[13] Kato T. Functional differential equation $\dot y = ay(\lambda t)+by(t)$ / T. Kato and J.B. McLeod // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 77. — P. 891–937.

[14] Дерфель Г.А. Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений / Г.А. Дерфель, С.А. Молчанов // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47. — С. 42–51.

[15] Iserles A. On the generalized pantograph functional–differential equation / A. Iserles // European J. Appl. Math. — 1993. — V. 4. — P. 1–38.

В диссертации значительное место отводится проблеме коэрцитивности рассматриваемых функционально-дифференциальных операторов. Задача о коэрцитивности квадратичных форм, порожденных дифференциальными операторами, исследовалась в работах М. И. Вишика[16] и Л. Гординга.[17] Проблема коэрцитивности для дифференциально-разностных операторов и функционально-дифференциальных операторов с растяжениями/сжатиями рассматривалась в приведенных выше работах А. Л. Скубачевского, Л. Е. Россовского, А. Л. Тасевич.

Цель работы. Целью диссертации является изучение нового класса эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих одновременно сжатия и сдвиги, а также сжатия и повороты аргументов старших производных неизвестной функции. Рассматриваются проблема коэрцитивности, вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле в смысле обобщенных решений из пространств Соболева, а также гладкости обобщенных решений.

Научная новизна. В настоящее время достаточно хорошо изучены краевые задачи как для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, так и для уравнений со сжатиями (растяжениями) многомерной независимой переменной. Влияние комбинации сдвигов и сжатия аргумента в старших производных искомой функции на разрешимость краевой задачи ранее в математической литературе, как отечественной, так и зарубежной, не рассматривалось. В диссертации впервые проводится исследование краевых задач в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих одновременно сжатия и сдвиги, а также сжатия и повороты аргументов старших производных неизвестной функции.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) Исследована краевая задача в ограниченной плоской области для модельного функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего комбинацию сжатиий (растяжений) и поворотов аргумента в старших производных искомой функции; найдены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, обеспечивающего однозначную (фредгольмову) разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле; для некоторых уравнений разрешимость и гладкость решений исследованы при всевозможных значениях коэффициентов, в том числе и тогда, когда условие сильной эллиптичности нарушено;

2) В случае поворота на угол $\alpha = \pi$ (уравнения со сжатиями, растяжениями и симметрией) результаты распространяются на уравнение более общей с точки зрения дифференциального оператора структуры, содержащее смешанные производные и различные функциональные операторы.

3) Исследована задача Дирихле для функционально-дифференциального уравнения, содержащего комбинацию сдвигов и сжатия аргумента искомой функции под знаком оператора Лапласа. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости и гладкости обобщенного решения. Показано также, что задача может иметь бесконечномерное многообразие решений.

Методы исследования. Изучение функционально-дифференциальных уравнений

[16]Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.И. Вишик // Мат. сб. —1951. — Т. 29, № 3. — С. 615–676.

[17]Gårding L. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations / L. Gårding // Math. Scand. — 1953. — V. 1. — P. 55–72.

с аффинными преобразованиями основано на комбинации методов, развитых для дифференциально-разностных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений с изотропными растяжениями и сжатиями. Используются современные функциональные пространства, техника сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений, теория Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, преобразование Фурье.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Она является продолжением исследований в теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, начатых А.Л. Скубачевским и получивших развитие в работах его учеников. Результаты диссертации и разработанные в ней методы существенно дополняют общую теорию краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Следствием проведенных в работе исследований явилось обнаружение нового неожиданного эффекта зависимости спектральных свойств оператора с растяжениями и сдвигами от числового значения коэффициента растяжения.

Апробация. Результаты диссертационной работы докладывались на 5-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования", посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г.), Международной конференции "Dynamics in Siberia – 2020", посвященной 70-летию академика Валерия Васильевича Козлова (Новосибирск, НГУ, 24–29 февраля 2020 г.), Международной конференции "Интегрируемые системы и нелинейная динамика ISND – 2020" (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 19–23 октября 2020 г.), Международной конференции "Интегрируемые системы и нелинейная динамика ISND – 2021" (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 4-8 октября 2021 г.), а также на XVII Владикавказской молодежной математической школе (Владикавказ, ЮФУ, 23–27 мая 2022 г.; пленарный доклад).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 4 научных публикациях [1–4] в журналах, входящих в базы данных международных индексов научного цитирования Scopus и Web of Science. Все основные результаты диссертации получены автором. В публикациях [1–2] и [4] Л. Е. Россовскому принадлежат постановки задач и указание методов исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация, изложенная на 93 страницах, состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 42 наименования, включая работы автора по теме диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен обзор работ по теме диссертации и сформулированы основные полученные в ней результаты.

В **первой главе** рассматривается краевая задача вида

$$\mu u + \sum_{j=1}^{2} (T(P, R_\alpha) u_{x_j})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\Omega)$, а $T(P, R_\alpha)$ — функциональный оператор с растяжениями (сжатиями) и поворотами. Он определяется следующим образом. Вводятся оператор P, действующий по формуле

$$Pu(x) = p^{-1}u(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2)$$

при $p > 1$, и оператор R_α, определенный при $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha).$$

Если число α несоизмеримо с π, то полагаем $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$, где суммирование производится по произвольному конечному набору целых индексов m и k (которые могут принимать значения обоих знаков) Если же α соизмеримо с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то полагаем

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{m0} P^m + \sum a_{m1} P^m R_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1} P^m R_\alpha^{n-1},$$

где суммы берутся по произвольным конечным наборам целых индексов m. Коэффициенты a_{mk} в суммах — комплексные числа. Для корректного определения оператора $T(P, R_\alpha)$ считаем функцию, на которую действует оператор, продолженной нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

По своей структуре уравнение (1) является модельным в классе уравнений с растяжениями и поворотами: оно содержит один и тот же функциональный оператор $T(P, R_\alpha)$ под знаком старших производных, смешанные производные и младшие производные отсутствуют.

Обобщенным решением задачи (1), (2) называется всякая функция u из пространства Соболева $\mathring{H}^1(\Omega)$, продолженная нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ и удовлетворяющая при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^{2} (T(P, R_\alpha) u_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Следуя работам,[18,19] назовем уравнение (1) сильно эллиптическим в Ω, если существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ такие, что при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено неравенство (типа Гординга)

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \big(T(P, R_\alpha) u_{x_j}, u_{x_j}\big)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{3}$$

Значение неравенства (3) состоит в том, что при его удовлетворении задача Дирихле (1), (2) обладает набором классических свойств, порождая секториальный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$. Поэтому важно описать класс уравнений, удовлетворяющих (3), в алгебраических терминах, т.е. непосредственно через коэффициенты (параметры)

[18] *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications, Operator Theory: Advances and Applications, *91*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1997.

[19] *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// СМФН. — 2014. — *54*. — С. 3-138.

уравнения. Эта задача известна как *проблема коэрцитивности.* В **главе 1** проблема коэрцитивности решена для уравнения (1).

Параграф 1.1 посвящен алгебраическому описанию операторов $T(P, R_\alpha)$. Это естественно сделать при помощи теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр. Для того, чтобы конструктивно воспользоваться теоремой Гельфанда–Наймарка, следует дать явное описание пространства максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденной парой коммутирующих операторов P и R_α (в ней всюду плотны по операторной норме суммы вида $T(P, R_\alpha)$).

Теорема 1. *Если угол α несоизмерим с π, то пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2 = \{(\lambda, w) \in \mathbb{C}^2 : |\lambda| = |w| = 1\}$. Если же угол α соизмерим с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно дизъюнктному объединению n экземпляров окружности $\mathbb{S}$.*

При изоморфизме алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ на алгебру непрерывных функций $C(\Delta_{p,\alpha})$ оператору $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$ отвечает функция

$$t(\lambda, w) = \sum a_{mk} \lambda^m w^k \quad (|\lambda| = |w| = 1)$$

(при α несоизмеримом с π), а оператору

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{m0} P^m + \sum a_{m1} P^m R_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1} P^m R_\alpha^{n-1}$$

— набор функций

$$t_k(\lambda) = \sum a_{m0} \lambda^m + \sum a_{m1} e^{i2\pi k/n} \lambda^m + \ldots + \sum a_{m,n-1} e^{i2\pi(n-1)k/n} \lambda^m$$
$$(|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(при α соизмеримом с π).

Следствие 1. *Оператор $T(P, R_\alpha) : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ положительно определен тогда и только тогда, когда $t(\lambda, w) > 0$ при всех $\lambda, w \in \mathbb{C}$ таких, что $|\lambda| = |w| = 1$, в случае угла α несоизмеримого с π, и $t_k(\lambda) > 0$ при $|\lambda| = 1$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$ в случае, если угол α соизмерим с π.*

Отметим, что спектральные свойства оператора $T(P, R_\alpha)$ одни и те же для всех значений α несоизмеримых с π. В противном случае, как показывают примеры, это не так.

В параграфе 1.2 установлены необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности уравнения (1) в предположении, что область Ω содержит начало координат.

Введем обозначение $\tilde{a}_{mk} = a_{mk} \cos k\alpha$ и положим

$$\tilde{t}(\lambda, w) = \sum \tilde{a}_{mk} \lambda^m w^k,$$

если α несоизмерим с π, либо

$$\tilde{t}_k(\lambda) = \sum \tilde{a}_{m0} \lambda^m + \sum \tilde{a}_{m1} e^{i2\pi k/n} \lambda^m + \ldots + \sum \tilde{a}_{m,n-1} e^{i2\pi(n-1)k/n} \lambda^m$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

если α соизмерим с π.

Теорема 2. *Уравнение* (1) *является сильно эллиптическим во всякой содержащей начало координат области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re} \tilde{t}(\lambda, w) > 0 \quad (|\lambda| = |w| = 1) \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi)$$

либо

$$\operatorname{Re} \tilde{t}_k(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi).$$

Из неравенства (3) стандартными методами функционального анализа можно получить следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть ограниченная область* Ω *содержит начало координат и выполнено условие*

$$\operatorname{Re} \tilde{t}(\lambda, w) > 0 \quad (|\lambda| = |w| = 1) \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi),$$

либо

$$\operatorname{Re} \tilde{t}_k(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi).$$

Тогда спектр краевой задачи (1)–(2) *состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается в правой полуплоскости:* $\operatorname{Re} \mu > 0$. *В частности, при* $\mu = 0$ *краевая задача имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f \in L_2(\Omega)$. *При любом* $\mu \in \mathbb{C}$ *задача* (1)–(2) *фредгольмова.*

Интересно, что когда угол поворота соизмерим с π, условия однозначной разрешимости задачи могут быть связаны не только с абсолютной величиной коэффициентов в уравнении, но и с их сигнатурой.

При $\alpha = \pi$ (соответственно, $R_\pi u(x) = u(-x)$) оказывается возможным распространить примененный подход на уравнение более общей структуры

$$\mu u + \sum_{i,j=1}^{2} (T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{4}$$

которое уже содержит смешанные производные и различные функциональные операторы

$$T_{ij}(P, R_\pi) = \sum a_{ijm} P^m + \sum b_{ijm} P^m R_\pi,$$

где $a_{ijm}, b_{ijm} \in \mathbb{C}$, а индекс суммирования m пробегает конечное подмножество $\mathbb{Z}$. Задаче (4), (2) посвящена **глава 2** диссертации. Для этой задачи аналогичным образом вводятся понятия обобщенного решения и сильной эллиптичности, и решается проблема коэрцитивности. Здесь возникает необходимость в изучении более широкой по сравнению с $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ алгебры ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, включающей также операторы умножения на однородные функции нулевой степени. Этот вопрос рассмотрен в **параграфе 2.1**.

Любой однородной функции $g(\xi)$ нулевой степени ($g(r\xi) = g(\xi)$ при $0 \neq r \in \mathbb{R}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$), непрерывной в $\mathbb{R}^2_\xi \setminus \{0\}$ (которую естественно рассматривать как элемент алгебры $C(\mathbb{PR}^1)$ всех непрерывных комплексных функций на проективной прямой $\mathbb{PR}^1$ с однородными координатами $\xi_1 : \xi_2$), сопоставляется ограниченный в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор умножения на g:

$$Gu(\xi) = g(\xi) u(\xi).$$

При этом отображение $g \mapsto G$ является изометрическим изоморфизмом алгебры $C(\mathbb{PR}^1)$ на замкнутую подалебру $\mathfrak{A}_g$ алгебры $\mathfrak{B}(L_2(\mathbb{R}^2))$, состоящую из всех таких операторов. Принципиальным моментом является то, что операторы из $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ коммутируют с операторами из $\mathfrak{A}_g$. Коммутативную B^*-алгебру, полученную замыканием по операторной норме всех конечных сумм

$$\sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi \quad (G_m^\pm \in \mathfrak{A}_g), \tag{5}$$

обозначим $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$.

Теорема 3. *Пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\pi,g}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{PR}^1$.*

При изоморфизме $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$ на $C(\Delta_{p,\pi,g})$ оператору (5) отвечает пара функций

$$\sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right) \lambda^m \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1;\ \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1).$$

Следствие 3. *Оператор* (5) *положительно определен в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *тогда и только тогда, когда* $\sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right) \lambda^m > 0$ *при всех* $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1,$ *и* $\xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$.

В **параграфе 2.2** установлены необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности уравнения (4) в Ω. Введем функции

$$g_m^+(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ijm} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \quad g_m^-(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijm} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \quad g_m^\pm \in C(\mathbb{PR}^1),$$

и назовем символом уравнения (4) пару $\sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right) \lambda^m$, определенную на множестве $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, $\xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$.

Теорема 4. *Пусть*

$$\operatorname{Re} \sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right) \lambda^m > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1;\ \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1). \tag{6}$$

Тогда для всякой ограниченной области Ω уравнение (4) *является сильно эллиптическим в Ω.*

В ходе доказательства, основанного на применении преобразования Фурье и следствия 3, нетрудно убедиться, что положительность вещественной части символа уравнения (4) является (как и первой главе) также необходимым условием сильной эллиптичности, если область Ω содержит начало координат. Однако, необходимым это условие будет и при более общем предположении относительно области.

Теорема 5. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ обладает следующим свойством: для любого натурального числа N найдется точка $x^0 \in \Omega$ такая, что точки $\pm p^{1-k} x^0$ $(k = 1, \ldots, N)$ также принадлежат Ω. Тогда, если уравнение* (4) *сильно эллиптическое в Ω, то имеет место неравенство* (6).

При выводе необходимых условий во второй главе используется другой подход, основанный на сведении к сильно эллиптическим системам дифференциальных уравнений.

Предположение в теореме (5) подразумевает, конечно, что $0 \in \overline{\Omega}$. Для придания большего сходства с обозначениями и результатами первой главы условие (6) удобно записать следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j \operatorname{Re} \sum_m (a_{ijm} \pm b_{ijm}) \lambda^m > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1;\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2). \tag{7}$$

Следствие 4. *Пусть для уравнения* (4) *выполнено условие* (7)*. Тогда для любой ограниченной области* Ω *спектр краевой задачи* (4), (2) *состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается в проавой полуплоскости:* $\operatorname{Re}\mu > 0$*. В частности, при* $\mu = 0$ *краевая задача* (4), (2) *имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f \in L_2(\Omega)$*. При любом* $\mu \in \mathbb{C}$ *задача* (4), (2) *фредгольмова.*

Важно отметить, что результатами, сформулированными в следствии 4, выводы из неравенства типа Гординга (условия сильной эллиптичности) не ограничиваются. Краевой задаче (4), (2) в случае сильно эллиптического уравнения (4) отвечает операторное уравнение $(\mu I - \mathcal{A})u = f$ с m-секториальным в смысле Т. Като оператором $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset \mathring{H}^1(\Omega)$. При этом оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором аналитической полугруппы.

Для некоторых частных случаев операторов $T(P, R_\alpha)$ разрешимость краевой задачи исследована и тогда, когда уравнение не является сильно эллиптическим. Так, в предположении о том, что область Ω удовлетворяет условию $\overline{\Omega} \subset p\Omega_{-\alpha} = \{px_{-\alpha} \in \mathbb{R}^2 : x \in \Omega\}$, задача Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}\big((I + \gamma_1 P R_\alpha + \gamma_{-1}(P R_\alpha)^{-1})\nabla u\big) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

являющегося сильно эллиптическим тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}(1 + \gamma_1 \cos\alpha\, z + \gamma_{-1}\cos\alpha\, z^{-1}) > 0 \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| = 1),$$

изучена для любых $\gamma_{\pm 1} \in \mathbb{C}$. Если, например, $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 0$, то разрешимость задачи зависит от расположения корней квадратного уравнения

$$(\gamma_1 p \cos\alpha) z^2 + z + \gamma_{-1} p^{-1} \cos\alpha = 0$$

относительно окружности $|z| = p^{-1}$. Задача при этом может потерять свойство корректности (фредгольмовости) и оказаться как “сильно” недоопределенной (бесконечномерное ядро), так и “сильно” переопределенной (бесконечномерное коядро).

Третья глава диссертации посвящена задаче Дирихле для уравнения

$$-\Delta(u(x) + aTu(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{8}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{C}$, а оператор T теперь определен формулой

$$Tu(x) = \int_K u(p^{-1}x - h)\, d\nu(h), \tag{9}$$

представляя собой композицию оператора сжатия аргумента (по-прежнему, $p > 1$) и свертки с регулярной комплексной борелевской мерой ν, сосредоточенной на компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Свертка моделирует сдвиги аргумента: в случае атомарной меры ν она представляет собой конечную линейную комбинацию сдвигов функции u.

Считая $f \in L_2(\Omega)$, под обобщенным решением задачи (9), (2), как и прежде, понимаем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n}((u+aTu)_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

при любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

В **параграфе 3.1** вначале рассматривается действие (ограниченного линейного) оператора T в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Показано, что спектральный радиус оператора $T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вычисляется по формуле

$$\rho(T) = p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\dots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m},$$

где $\tilde{\nu}(\xi) = \int_K e^{-ih\xi}\,d\nu(h)$ есть характеристическая функция меры ν. Например, для простейшего двучленного оператора

$$Tu(x) = u(p^{-1}x + h^0) - u(p^{-1}x - h^0)$$

эта формула дает

$$\rho(T) = 2p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sin t \sin pt \dots \sin p^{m-1}t|^{1/m}. \tag{10}$$

Далее, в предположении о том, что область Ω удовлетворяет условию инвариантности

$$p^{-1}\Omega - K \subset \Omega, \tag{11}$$

оператор T естественным образом определяется и как ограниченный оператор в пространствах Соболева $H^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{R}$). Доказано, что оператор $I + aT : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$, где $a \in \mathbb{C}$, имеет ограниченный обратный при $|a| < 1/\rho(T)$ в случае $s \geqslant 0$, и при $|a| < 1/(p^s\rho(T))$ в случае $s < 0$.

В **параграфе 3.2** установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (9), (2).

Теорема 6. *При выполнении геометрического условия* (11) *и неравенства*

$$|a| < p^{1-n/2}\left[\lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\dots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}\right]^{-1}$$

задача (9), (2) *имеет единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$. *Если вдобавок* $f \in H^k(\Omega)$, *а* $\partial\Omega \in C^{k+2}$ (k *— целое неотрицательное*), *то* $u \in H^{k+2}(\Omega)$.

В случае уравнения

$$-\Delta\left[u(x) + a\left(u((x+h)/2) - u((x-h)/2)\right)\right] = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{12}$$

в квадрате $\Omega = \{-1 < x_1, x_2 < 1\}$ с $h = (1, 1)$ однозначная разрешимость краевой задачи (вместе с гладкостью обобщенного решения) обеспечивается условием $|a| < 1/\sqrt{3}$. Показано в то же время, что при $|a| > 1$ в краевой задаче (12), (2) существует для каждой функции $f \in L_2(\Omega)$ бесконечномерное линейное многообразие обобщенных решений $u \in \mathring{H}^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$.

Отдельное место занимает **параграф 3.3**, содержащий результат статьи Н.Б. Журавлева, Л.Е. Россовского[20]. Включение этого результата в текст диссертации целесообразно по следующей причине.

Дело в том, что изучение зависимости значения предела в формуле (10) от величины p оказывается интересной и весьма нетривиальной задачей, которая вскрывает новую связь между теорией функционально-дифференциальных уравнений и теорией динамических систем. Исследование основано на анализе линейного потока

$$(S(t), S(pt), \ldots, S(p^{m-1}t))$$

на m-мерном торе $\mathbb{T}^m$ (через $S(t)$ мы обозначаем класс эквивалентности всех вещественных чисел $\tilde{t}$ таких, что $\tilde{t} = t \mod 1$). Нас интересуют точки $\mathbb{T}^m$, к которым соответствующая траектория подходит сколь угодно близко. Если p — трансцендентное число, то для любого m любая точка на торе $\mathbb{T}^m$ обладает таким свойством, так что для трансцендентных p имеем $\rho(T) = 2p^{n/2}$. В случае алгебраического числа p результат зависит от коэффициентов минимального многочлена числа p. Получены оценки спектрального радиуса сверху и снизу для различных случаев коэффициентов минимального многочлена p. Главным результатом параграфа является точное вычисление спектрального радиуса для рациональных (и корней любых степеней из рациональных) значений p.

Теорема 7. *Пусть N и M — натуральные числа и $Q(q) = Nq^l - M$ — минимальный многочлен числа p. Если $M + N$ — четное число, то $\rho(T) = 2p^{n/2}$. Если $M + N$ — нечетное число, то $\rho(T) = 2p^{n/2}\cos(\pi/(2M + 2N))$.*

Список литературы

[1] Rossovskii L.E. Elliptic functional differential equations with affine transformations / L.E. Rossovskii, A.A. Tovsultanov // J. Math. Anal. Appl. —2019. — V. 480. — 123403.

[2] Россовский Л.Е. О задаче Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с аффинным преобразованием аргумента / Л.Е. Россовский, А.А. Товсултанов // Доклады академии наук. —2019. — Т. 489, № 4. — С. 347–350.

[3] Товсултанов А.А. Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом / А.А. Товсултанов // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Т. 23, вып. 1. — С. 77–87.

[4] Россовский Л.Е. Функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и симметрией / Л.Е. Россовский, А.А. Товсултанов // Сибирский математический журнал. — 2022. — Т. 63, № 4. — С. 911–923.

[20] Zhuravlev N.B. Spectral Radius Formula for a Parametric Family of Functional Operators / N.B. Zhuravlev, L.E. Rossovskii // Regul. Chaotic Dyn. —2021. — V. 26, № 4. — С. 392–401.