МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АХМАТА АБДУЛХАМИДОВИЧА КАДЫРОВА”

На правах рукописи

Товсултанов Абубакар Алхазурович

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями

Специальность 1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Россовский Л.Е.

Грозный — 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Работа посвящена линейным функционально-дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка с преобразованиями аргументов в старших производных неизвестной функции. Эти преобразования представляют собой (в различных комбинациях) изотропное сжатие/растяжение, поворот и сдвиг. Для указанных уравнений рассматривается краевая задача в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$. На структуру оператора накладываются ограничения, позволяющие отнести изучаемые уравнения к эллиптическому типу. Источниками для рассматриваемых в диссертации задач служат

1) функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями в одномерном случае, обобщающие хорошо известное уравнение пантографа $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$,

2) теория краевых задач в ограниченных областях для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных.

Диссертация является продолжением исследований в теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, начатых А.Л. Скубачевским [20, 38, 39] и получивших развитие в работах его учеников [9, 11, 12, 19, 36].

Уравнение пантографа и его обобщения находят применение в самых разных областях: астрофизике [1], нелинейных колебаниях [34], биологии [27], теории чисел [33], теории вероятностей [26]. Функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями на прямой достаточно подробно изучались, начиная с 1970-х годов, в связи с вопросами существования ограниченных решений и асимптотического поведения решений на бесконечности, см., например, [4, 28, 30] (к настоящему времени опубликовано значительное число работ этих же авторов, а также ряда других математиков).

С другой стороны, в теории упругости [7,35,39,40], теории многомерных диффузионных процессов [18,39], а также в связи с нелокальными краевыми задачами типа А. В. Бицадзе, А. А. Самарского [2,16,17] возникает необходимость рассматривать эллиптические функционально-дифференциальные уравнения в ситуации, когда присутствующие в старших производных преобразования аргументов могут отображать некоторые точки границы внутрь области. Так, например, упругие модели конструкций, содержащих многослойные оболочки и пластины с гофрированным заполнителем, могут быть сведены к сильно эллиптическим системам дифференциально-разностных уравнений. Впервые влияние сдвигов в старших производных, отображающих точки границы в область, на разрешимость эллиптических краевых задач и гладкость обобщенных решений исследовалось А. Л. Скубачевским [20, 38, 39]. Им были разработаны основы общей теории краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений: получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений. Показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться в области даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Был обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений в некоторых точках как на границе, так и внутри области. Наиболее полно эти результаты представлены в [20, 39].

Краевые задачи для эллиптических уравнений, содержащих в старшей части сжатия и растяжения переменных, рассматривались Л.Е. Россовским [9,36] (изотропные, т.е. одинаковые по всем координатам, сжатия или растяжения), Л.Е. Россовским и А.Л. Тасевич [11,12] (ортотропные сжатия: например, сжатие по одной координате и растяжение по другой). При этом краевые задачи рассматривались в областях, содержащих начало координат — центр, или неподвижную точку, преобразования сжатия. Это предположение не позволяло воспользоваться уже имеющейся теорией нелокальных краевых задач, например, свести задачу к нелокальной краевой задаче для эллиптического уравнения, а также напрямую переносить методы, развитые для дифференциально-разностных уравнений. Кроме того, в указанной ситуации не работает известный принцип локализации, основанный на разбиении единицы и широко используемый в теории краевых задач для исследования гладкости решений, доказательства априорных оценок, "замораживания" переменных коэффициентов. Для уравнений со сжатиями (растяжениями) был получен ряд новых свойств. Так, ядро краевой задачи может быть бесконечномерным и содержать негладкие функции, а гладкость решения часто равносильна его единственности. Стоит отметить, что переход от уравнений с изотропными сжатиями к уравнениям с ортотропными сжатиями также потребовал применения существенно иной техники. Стало ясно, что свойства уравнений сильно завязаны на структуру орбит точек области под действием соответствующей группы преобразований.

Цели и задачи работы. Целями данного диссертационного исследования являются является изучение нового класса эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих одновременно сжатия и сдвиги, а также сжатия и повороты аргументов старших производных неизвестной функции. Рассматриваются проблема коэрцитивности, вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле в смысле обобщенных решений из пространств Соболева, а также гладкости обобщенных решений.

Объектом исследования являются линейные функционально-дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с аффинными преобразованиями аргументов неизвестной функции в старших членах.

Предметом исследования являются необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга для рассматриваемых функционально-дифференциальных операторов, вопросы разрешимости и гладкости решений задачи Дирихле.

Методы исследования. Исследование эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с аффинными преобразованиями основано на комбинации методов, развитых для дифференциально-разностных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений с изотропными растяжениями и сжатиями. Используются современные функциональные пространства, техника сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений, теория Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, преобразование Фурье.

Научная новизна исследования. Выносимые на защиту результаты яв- ляются новыми и получены автором самостоятельно.

В настоящее время достаточно хорошо изучены краевые задачи как для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, так и для уравнений со сжатиями (растяжениями) многомерной независимой переменной. Влияние комбинации сдвигов и сжатия аргумента в старших производных искомой функции на разрешимость краевой задачи ранее в математической литературе, как отечественной, так и зарубежной, не рассматривалось. В диссертации впервые проводится исследование краевых задач в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих одновременно сжатия и сдвиги, а также сжатия и повороты аргументов старших производных неизвестной функции. Рассматриваются вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в смысле обобщенных решений из пространств Соболева, а также гладкости обобщенных решений.

Первые две главы посвящены уравнениям с растяжениями и поворотами, являющимися коммутирующими преобразованиями. Значительное внимание здесь уделяется решению проблемы коэрцитивности — нахождению необходимых и достаточных условий в алгебраической форме выполнения для уравнения неравенства типа Гординга. Данный подход позволяет выделить класс сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, для которых задача Дирихле обладает набором классических свойств, порождая секториальный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$.

Проблема коэрцитивности для дифференциальных уравнений и систем была решена в работах М.И. Вишика [3] и Л. Гординга [25]: неравенство Гординга эквивалентно классическому определению сильной эллиптичности. В случае дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами неравенство типа Гординга сводится к положительности конечного набора матричных полиномов, зависящих, помимо коэффициентов разностных операторов, от размеров и геометрии области [38]. Для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными растяжениями [9, 36] необходимые условия и достаточные условия неравенства типа Гординга были получены на основе преобразования Гельфанда, а также (в случае переменных коэффициентов) с применением теории псевдодифференциальных операторов; в случае постоянных коэффициентов получались одновременно необходимые и достаточные условия в терминах скалярного “символа” уравнения. В работе [11] проблема коэрцитивности для уравнений с ортотропными растяжениями была сведена к проверке положительной определенности действующего в $L_2(\mathbb{R})$ разностного оператора с переменными коэффициентами; для последнего был получен ряд простых необходимых и близких к ним достаточных условий.

В настоящей диссертации для решения проблемы коэрцитивности используется сочетание различных подходов: при выводе достаточных условий применяется комбинация преобразований Фурье и Гельфанда, а получение необходимых условий опирается на сведение к сильно эллиптическим системам из N уравнений с последующим предельным переходом при $N \to \infty$. Этот метод (без предельного перехода) был впервые применен для исследования дифференциально-разностных уравнений [38], а затем уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов [8]. Существенную роль в рассуждениях играет коммутативность сжатий (растяжений) и поворотов и анализ орбит точек области под действием соответствующей группы преобразований.

Третья глава диссертации посвящена уравнению, содержащему комбинацию сжатия и сдвигов аргументов старших производных неизвестной функции. Возникающие здесь трудности обусловлены тем, что сжатие и сдвиг являются некоммутирующими преобразованиями; кроме того, наличие в уравнении одновременно сжатия и сдвигов существенно усложняет структуру орбит точек области под действием соответствующей группы преобразований. С другой стороны, рассматриваемый случай отличается от уравнений, где присутствуют лишь сдвиги аргумента, тем, что допускает широкий класс ограниченных областей, инвариантных относительно соответствующих преобразований координат. Для того, чтобы учесть эти особенности, предложен новый подход к определению функционального оператора со сдвигами и сжатиями аргументов: изучение подобных операторов предлагается объединить в общую схему на основе соответствующего интеграла по регулярной борелевской мере. Для функционального оператора T, определенного как композиция оператора сжатия аргумента (функции, на которую действует оператор) и оператора свертки с сосредоточенной на компакте регулярной борелевской мерой, выведена формула спектрального радиуса (в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$) на основе характеристической функции меры. Получены явные выражения для спектрального радиуса в случае атомарных мер, а также ряда других мер. Изучено действие функционального оператора T на функции, заданные в ограниченной области. Далее для модельного уравнения вида $-\Delta(u+aTu) = f$ установлено достаточное условие однозначной разрешимости задачи Дирихле. Показано, что при нарушении этого условия в краевой задаче возможно появление бесконечномерного ядра и негладких решений.

Теоретическое значение. Диссертация носит теоретический характер. Она является продолжением исследований в теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, начатых А.Л. Скубачевским и получивших развитие в работах его учеников. Результаты диссертации и разработанные в ней методы существенно дополняют общую теорию краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Следствием проведенных в работе исследований явилось обнаружение нового неожиданного эффекта зависимости спектральных свойств оператора с растяжениями и сдвигами от числового значения коэффициента растяжения.

Практическая значимость. Все полученные в работе результаты являются конструктивными, условия теорем выражаются непосредственно через коэффициенты уравнений и легко проверяются для конкретных примеров. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при численном решении краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

- исследована краевая задача в ограниченной плоской области для модельного (без смешанной производной и с одним функциональным оператором) функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего комбинацию сжатий (растяжений) и поворотов аргумента в старших производных искомой функции; найдены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, обеспечивающего однозначную (фредгольмову) разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле; для некоторых уравнений разрешимость и гладкость решений исследованы при всевозможных значениях коэффициентов, в том числе и тогда, когда условие сильной эллиптичности нарушено;

- в случае поворота на угол $\alpha = \pi$ (уравнения со сжатиями, растяжениями и симметрией) результаты распространяются на уравнение более общей с точки зрения дифференциального оператора структуры, содержащее смешанные производные и различные функциональные операторы;

- исследована задача Дирихле для функционально-дифференциального уравнения, содержащего комбинацию сдвигов и сжатия аргумента искомой функции под знаком оператора Лапласа. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости и гладкости обобщенного решения. Показано также, что задача может иметь бесконечномерное многообразие решений.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1) 5-я Международная конференция “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, посвященная 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г.);

2) Международная конференция “Dynamics in Siberia – 2020”, посвященная 70-летию академика Валерия Васильевича Козлова (Новосибирск, НГУ, 24–29 февраля 2020 г.);

3) Международная конференция “Интегрируемые системы и нелинейная динамика ISND – 2020” (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 19–23 октября 2020 г.);

4) Международная конференция “Интегрируемые системы и нелинейная динамика ISND – 2021” (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 4-8 октября 2021 г.);

5) XVII Владикавказская молодежная математическая школа (Владикавказ, ЮФУ, 23–27 мая 2022 г.; пленарный доклад).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 4 научных публикациях [13,14,22,37] в журналах, входящих в базы данных международных индексов научного цитирования Scopus и Web of Science. Работы [13, 14, 37] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежат постановка задач и указание методов исследования. Автору диссертации принадлежат доказательства приведенных в работах утверждений.

Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Института математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова» в рамках госзадания Минобрнауки РФ по проекту “Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи” (EGS-2020-0001) и при содействии Северо-Кавказского центра математических исследований Владикавказского научного центра РАН.

Структура и краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разделены на параграфы, имеющие двойную нумерацию: первое число означает номер главы, второе — номер параграфа внутри главы. Нумерация формул (теорем, лемм и т.д.) в главах также двойная: номер главы и номер формулы (теоремы, леммы и т.д.) внутри главы.

Уравнения в диссертации рассматриваются всегда в ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (в первых двух главах $n = 2$). Поскольку изучаются обобщенные решения из $\mathring{H}^1(\Omega)$ однородной задачи Дирихле, от границы области обычно никакой регулярности не требуется (есть исключения, например, когда рассматривается вопрос гладкости обобщенного решения). С другой стороны, для получения части результатов на область накладываются дополнительные условия геометрического характера (инвариантность области относительно преобразований координат).

Из функциональных пространств в диссертации в основном используются пространства Соболева $H^s(\Omega)$. Для целого неотрицательного значения s пространство $H^s(\Omega)$ состоит из всех комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными до порядка s включительно. Пространство $H^s(\Omega)$ — гильбертово, скалярное произведение в нем задается по формуле

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int\limits_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)}\, dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}.$$

Через $\mathring{H}^s(\Omega)$ обозначается замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^s(\Omega)$. Известно, что в $\mathring{H}^s(\Omega)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{H}^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = s} \int\limits_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)}\, dx.$$

В частности, при $s = 1$ и $n = 2$,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \Big(u\bar{v} + \sum_{j=1}^{2} u_{x_j} \bar{v}_{x_j} \Big) \, dx, \quad (u, v)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{2} u_{x_j} \bar{v}_{x_j} \, dx.$$

В третьей главе также возникают пространства Соболева с вещественным показателем s. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех тех обобщенных функций $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (пространство Шварца обобщенных функций умеренного роста в $\mathbb{R}^n$; при $s \geqslant 0$ в контексте определения можно говорить о функциях из $L_2(\mathbb{R}^n)$), чей образ Фурье $\tilde{u}(\xi)$ локально принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n_\xi)$ и

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

Пространство $H^s(\Omega)$ состоит из сужений на Ω всех функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Норму функции в $H^s(\Omega)$ можно определить стандартным образом как нижнюю грань норм в $H^s(\mathbb{R}^n)$ всевозможных продолжений этой функции в $\mathbb{R}^n$ (inf-норма). При целом неотрицательном s эта норма эквивалентна норме

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Пространство $H^{-1}(\Omega)$ можно отождествить с двойственным к $\mathring{H}^1(\Omega)$.

В первых двух главах диссертации используются следующие функциональные операторы: оператор изотропного сжатия (растяжения) P, оператор поворота R_α, а также их комбинации $T(P, R_\alpha)$. Они будут применяться к функциям, заданным как на всей евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, так и в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Оператор P определен формулой

$$Pu(x) = p^{-1} u(p^{-1} x) = p^{-1} u(p^{-1} x_1, p^{-1} x_2)$$

при $p > 1$. Оператор R_α при $\alpha \in \mathbb{R}$ определен формулой

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha).$$

Если число α несоизмеримо с π, то полагаем $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk} P^m R^k_\alpha$, где суммирование производится по произвольному конечному набору целых индексов m и k. Если же α соизмеримо с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то полагаем

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{m0}P^m + \sum a_{m1}P^m R_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1}P^m R_\alpha^{n-1},$$

где суммы берутся по произвольным конечным наборам целых индексов m. Здесь $a_{mk} \in \mathbb{C}$.

В первой главе диссертации рассматривается краевая задача

$$\mu u + \sum_{j=1}^{2} (T(P, R_\alpha)u_{x_j})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{0.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{0.2}$$

Считаем $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\Omega)$.

Обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) — функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^{2} (T(P, R_\alpha)u_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Уравнение (0.1) называется сильно эллиптическим в Ω, если существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ такие, что при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено неравенство (типа Гординга)

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \big(T(P, R_\alpha)u_{x_j}, u_{x_j}\big)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{0.3}$$

Положим $\tilde{a}_{mk} = a_{mk} \cos k\alpha$ и введем зависящую от комплексных переменных λ и w функцию

$$\tilde{t}(\lambda, w) = \sum \tilde{a}_{mk} \lambda^m w^k,$$

если α несоизмеримо с π, либо набор функций

$$\tilde{t}_k(\lambda) = \sum \tilde{a}_{m0}\lambda^m + \sum \tilde{a}_{m1}\lambda^m e^{i2\pi k/n} + \ldots + \sum \tilde{a}_{m,n-1}\lambda^m e^{i2\pi(n-1)k/n}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

если α соизмеримо с π.

Доказано следующее утверждение: если ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ содержит начало координат, то уравнение (0.1) является сильно эллиптическим в Ω тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} \tilde{t}(\lambda, w) > 0 \quad (|\lambda| = |w| = 1) \quad (\alpha \text{ несоизмеримо с } \pi) \tag{0.4}$$

либо

$$\operatorname{Re} \tilde{t}_k(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмеримо с } \pi). \tag{0.5}$$

Во второй главе диссертации при $\alpha = \pi$ $(R_\pi u(x) = u(-x))$ исследуется задача Дирихле для уравнения более общей структуры

$$\mu u + \sum_{i,j=1}^{2} (T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{0.6}$$

с различными функциональными операторами

$$T_{ij}(P, R_\pi) = \sum a_{ijm} P^m + \sum b_{ijm} P^m R_\pi,$$

где $a_{ijm}, b_{ijm} \in \mathbb{C}$, а индекс суммирования m пробегает конечное подмножество $\mathbb{Z}$.

Аналогично определяются обобщенное решение краевой задачи (0.6), (0.2) и свойство сильной эллиптичности уравнения (0.6), заключающееся в существовании постоянных $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ таких, что при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} \big(T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i}, u_{x_j}\big)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{0.7}$$

Операторам $T_{ij}(P, R_\pi)$ в уравнении (0.6) сопоставляются зависящие от комплексной переменной λ функции

$$\mathbf{t}^{\pm}_{ij}(\lambda) = \sum (a_{ijm} \pm b_{ijm}) \lambda^m \quad (i, j = 1, 2).$$

Показано, что выполнение алгебраических неравенств

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j \operatorname{Re} \mathbf{t}^{\pm}_{ij}(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = 1, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2) \tag{0.8}$$

является необходимым и достаточным для сильной эллиптичности уравнения (0.6) в предположении, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ содержит начало координат.

На самом деле, неравенство (0.8) гарантирует сильную эллиптичность уравнения (0.6) для совершенно произвольной области Ω. Требование $0 \in \Omega$ возникает при выводе (0.8) из неравенства типа Гординга. Это требование можно ослабить, заменив следующим условием: для любого натурального числа N найдется точка $x^0 \in \Omega$ такая, что точки $\pm p^{1-k} x^0$ $(k = 1, \ldots, N)$ также принадлежат Ω.

Фредгольмовость задач Дирихле (0.1), (0.2) и (0.6), (0.2) для сильно эллиптических уравнений (0.1) и (0.6), дискретность и полуограниченность их спектров выводятся из неравенств (0.3) и (0.7) стандартными методами функционального анализа. В частности, при выполнении условия (0.4) (либо (0.5), соответственно) задача (0.1), (0.2) с $\mu = 0$ имеет единственное обобщенное решение для всех функций $f \in L_2(\Omega)$. Аналогично, при выполнении условия (0.8) задача (0.6), (0.2) с $\mu = 0$ имеет единственное обобщенное решение для всех функций $f \in L_2(\Omega)$. Приведены примеры, демонстрирующие интересные возможные сочетания параметров p, α и коэффициентов в сильно эллиптических уравнениях.

Для некоторых частных случаев уравнений, рассмотренных в первых двух главах, разрешимость краевой задачи удалось исследовать при всевозможных значениях коэффициентов, когда уравнение и не является сильно эллиптическим. Так, в предположении о том, что область Ω удовлетворяет условию $\overline{\Omega} \subset p\Omega_{-\alpha} = \{px_{-\alpha} \in \mathbb{R}^2 : \, x \in \Omega\}$, задача Дирихле для уравнения

$$-\mathrm{div}\left((I + \gamma_1 PR_\alpha + \gamma_{-1}(PR_\alpha)^{-1})\nabla u\right) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{0.9}$$

являющегося сильно эллиптическим тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}\,(1 + \gamma_1 \cos\alpha\, z + \gamma_{-1} \cos\alpha\, z^{-1}) > 0 \quad (z \in \mathbb{C},\, |z| = 1),$$

изучена для любых $\gamma_{\pm 1} \in \mathbb{C}$. Если, например, $\gamma_1 \gamma_{-1} \neq 0$, то разрешимость задачи зависит от расположения корней квадратного уравнения

$$(\gamma_1 p \cos\alpha) z^2 + z + \gamma_{-1} p^{-1} \cos\alpha = 0$$

относительно окружности $|z| = p^{-1}$. Задача при этом может потерять свойство корректности (фредгольмовости) и оказаться как “сильно” недоопределенной (бесконечномерное ядро), так и “сильно” переопределенной (бесконечномерное коядро).

Результаты первой и второй глав диссертации опубликованы в [14, 22].

В главе 3 диссертации рассматривается задача уже в n-мерной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Помимо оператора изотропного сжатия (растяжения) $Pu(x) = u(p^{-1}x)$ (в отличие от первых двух глав, здесь удобней опустить множитель p^{-1}), используется оператор свертки с $\nu \in (C(K))^*$ — регулярной комплексной борелевской мерой, сосредоточенной на некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$(\nu * u)(x) = \int\limits_K u(x-h)\, d\nu(h).$$

Свертка моделирует сдвиги аргумента: в случае атомарной меры ν она представляет собой конечную линейную комбинацию сдвигов функции u. Функциональный оператор с растяжением и сдвигами T (также называемый в диссертации оператором с аффинным преобразованием аргумента) вводится по формуле:

$$Tu(x) = P(\nu * u)(x) = \int\limits_K u(p^{-1}x - h)\, d\nu(h). \tag{0.10}$$

Он представляет собой композицию оператора P и свертки.

Выведена формула спектрального радиуса оператора T в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\rho(T) = p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}, \tag{0.11}$$

где

$$\tilde{\nu}(\xi) = \int\limits_K e^{-ih\xi}\, d\nu(h)$$

есть характеристическая функция меры ν.

На область Ω в третьей главе накладывается условие инвариантности

$$p^{-1}\Omega - K \subset \Omega, \tag{0.12}$$

которое позволяет рассматривать оператор T в (0.10) как ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ и пространствах Соболева $H^s(\Omega)$. Доказано, что оператор $I + aT : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$, где $a \in \mathbb{C}$, имеет ограниченный обратный при $|a| < 1/\rho(T)$ в случае $s \geqslant 0$, и при $|a| < 1/(p^s\rho(T))$ в случае $s < 0$.

Центральный результат третьей главы связан с краевой задачей

$$-\Delta(u(x) + aTu(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{0.13}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{0.14}$$

Считая $f \in L_2(\Omega)$, под обобщенным решением задачи (3.7), (3.8), как и прежде, понимаем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n}((u + aTu)_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

при любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Доказано, что при

$$|a| < p^{1-n/2}\left[\lim_{m\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}\right]^{-1} \tag{0.15}$$

задача (0.13), (0.14) имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ для любой функции $f \in L_2(\Omega)$. Если вдобавок $f \in H^k(\Omega)$, а $\partial\Omega \in C^{k+2}$ (k — целое неотрицательное), то $u \in H^{k+2}(\Omega)$. Приведен пример задачи (0.13), (0.14), имеющей (при нарушении (0.15)) бесконечномерное многообразие негладких обобщенных решений $u \in \mathring{H}^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$.

Результаты главы опубликованы в работах [13, 37] автора диссертации. Исключение составляет параграф 3.3, принадлежащий Н.Б. Журавлеву и Л.Е. Россовскому [42]. Целесообразность включения этого результата в текст диссертации продиктована следующим.

Использование формулы (0.11) приводит к интересным результатам. Так, для простейшего двучленного оператора

$$Tu(x) = u(p^{-1}x + h^0) - u(p^{-1}x - h^0)$$

будем иметь

$$\rho(T) = 2p^{n/2}\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|\sin t\sin pt\ldots\sin p^{m-1}t|^{1/m}.$$

Оказывается, фигурирующий здесь предел равен 1 в случае трансцендентных (не только) чисел p, а для алгебраических значений p он связан с коэффициентами минимального многочлена алгебраического числа! Например,

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sin t \sin 2t \ldots \sin 2^{m-1}t|^{1/m} = \cos\frac{\pi}{6}.$$

В то же время, спектральный радиус оператора

$$Tu(x) = u(p^{-1}x + h^0) + u(p^{-1}x - h^0)$$

(сумма вместо разности) всегда равен $2p^{n/2}$.

Анализу этой зависимости и посвящен последний параграф третьей главы. При этом обнаружена новая связь между теорией функционально-дифференциальных уравнений и теорией динамических систем.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на 5-й Международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г.), Международной конференции “Dynamics in Siberia – 2020”, посвященной 70-летию академика Валерия Васильевича Козлова (Новосибирск, НГУ, 24–29 февраля 2020 г.), Международной конференции “Интегрируемые системы и нелинейная динамика ISND – 2020” (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 19–23 октября 2020 г.), Международной конференции “Интегрируемые системы и нелинейная динамика ISND – 2021” (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 4-8 октября 2021 г.), а также на XVII Владикавказской молодежной математической школе (Владикавказ, ЮФУ, 23–27 мая 2022 г.; пленарный доклад).

Глава 1

Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом

В настоящей главе рассматривается краевая задача в ограниченной плоской области для функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего комбинацию растяжений и поворотов старших производных искомой функции. Найдены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, обеспечивающего однозначную (фредгольмову) разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле. В литературе в данной ситуации принят термин *сильно эллиптическое уравнение*. Вывод упомянутых условий, выражаемых непосредственно через коэффициенты уравнения, основан на комбинации преобразований Фурье и Гельфанда элементов коммутативной B^*-алгебры, порожденной операторами растяжения и поворота. Основной момент здесь — выяснение структуры пространства максимальных идеалов этой алгебры. Доказано, что пространство максимальных идеалов гомеоморфно прямому произведению спектров оператора растяжения (окружность) и оператора поворота (вся окружность в случае, когда угол поворота α несоизмерим с π, и конечный набор точек на окружности, когда α соизмерим с π). Такое различие между двумя случаями для α приводит к тому, что в зависимости от α условия однозначной разрешимости краевой задачи могут иметь существенно разный вид и, например, для α соизмеримого с π, могут зависеть не только от абсолютной величины, но и от знака коэффициента при слагаемом с поворотом.

1.1 Алгебра функциональных операторов с растяжением и поворотом

Пусть заданы числа $p > 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Сопоставим этим числам унитарные операторы растяжения P и поворота R_α в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, действующие по формулам

$$Pu(x) = p^{-1}u(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2),$$

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha).$$

Спектр $\sigma(P)$ оператора P есть вся единичная окружность, см., например, [9].

Лемма 1.1. *Пусть число α соизмеримо с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π. Тогда спектр $\sigma(R_\alpha)$ совпадает с множеством корней n-й степени из 1, $\sigma(R_\alpha) = \{e^{i2\pi k/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ уравнение $\lambda u - R_\alpha u = v$. Применяя к обеим частям этого уравнения оператор $R_\alpha^k = R_{k\alpha}$ для $k = 1, \ldots, n-1$ и учитывая $R_\alpha^n = I$, получим систему уравнений

$$\lambda u - R_\alpha u = v, \quad \lambda R_\alpha u - R_\alpha^2 u = R_\alpha v, \quad \ldots, \quad \lambda R_\alpha^{n-1}u - u = R_\alpha^{n-1}v.$$

Умножим первое уравнение на λ^{n-1}, второе на λ^{n-2} и т.д. (предпоследнее уравнение умножается на λ, а последнее на 1), после чего сложим получившиеся уравнения. Будем иметь $(\lambda^n - 1)u = \lambda^{n-1}v + \lambda^{n-2}R_\alpha v + \ldots + R_\alpha^{n-1}v$, что при $\lambda^n \neq 1$ равносильно соотношению

$$u = (\lambda^n - 1)^{-1}\left(\lambda^{n-1}v + \lambda^{n-2}R_\alpha v + \ldots + R_\alpha^{n-1}v\right).$$

Таким образом, любое число λ, отличное от корня n-й степени из 1, является резольвентной точкой оператора R_α, и резольвента имеет вид

$$(\lambda I - R_\alpha)^{-1} = (\lambda^n - 1)^{-1}\left(\lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}R_\alpha + \ldots + R_\alpha^{n-1}\right).$$

С другой стороны, зафиксировав $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, возьмем на плоскости кусочно постоянную функцию η_k, принимающую в угле $-j\alpha < \varphi < 2\pi/n - j\alpha$ значение $e^{i2\pi kj/n}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда для произвольной ненулевой “$2\pi/n$-периодической” функции $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ $(u(r, \varphi + 2\pi/n) \equiv u(r, \varphi)$, (r, φ) — полярные координаты), функция $\eta_k u$ является собственной функцией оператора поворота R_α, отвечающей собственному значению $\lambda_k = e^{i2\pi k/n}$. □

Лемма 1.2. *Пусть число α несоизмеримо с π, тогда $\sigma(R_\alpha)$ совпадает с единичной окружностью, $\sigma(R_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

Доказательство. Пусть $|\lambda| = 1$. В условиях леммы все числа $j\alpha$ $(j \in \mathbb{Z})$ различны по модулю числа 2π. Следовательно, зафиксировав произвольное натуральное число n, мы можем взять такое число $\delta > 0$, что отрезки

$$[-\alpha, -\alpha + \delta], \quad [0, \delta], \quad [\alpha, \alpha + \delta], \quad \dots, \quad [(n-1)\alpha, (n-1)\alpha + \delta]$$

по модулю 2π попарно не пересекаются. Зададим функцию $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$ равной λ^j для $r \in (0, 1)$ и $\varphi \in (j\alpha, j\alpha + \delta)$, где $j = 0, 1, \dots, n-1$, и нулю в остальных точках плоскости. Очевидно, $\|u_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = n\delta/2$. В то же время, функция $\lambda u_n - R_\alpha u_n$ отлична от нуля только в области $r \in (0, 1)$, $\varphi \in (-\alpha, -\alpha + \delta)$, где она равна -1, и в области $r \in (0, 1)$, $\varphi \in ((n-1)\alpha, (n-1)\alpha + \delta)$, где она равна λ^n, так что $\|\lambda u_n - R_\alpha u_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \delta$. Существование последовательности $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которой

$$\frac{\|u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}}{\|\lambda u_n - R_\alpha u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

означает, что при $|\lambda| = 1$ оператор $\lambda I - R_\alpha$ не имеет ограниченного обратного в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. □

Обозначим через $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_\alpha$ коммутативные банаховы B^*-алгебры ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденные оператором P и R_α, соответственно. При α несоизмеримом с π эти алгебры устроены одинаково, будучи изоморфными алгебре непрерывных функций на окружности. Так, в алгебре $\mathfrak{A}_\alpha$ плотны по операторной норме конечные суммы $\sum a_m R_\alpha^m$ $(a_m \in$

$\mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}$). По теореме Гельфанда–Наймарка [15, теорема 14.18] $\mathfrak{A}_\alpha$ изометрически изоморфна алгебре $C(\Delta_\alpha)$ всех непрерывных комплекных функций на пространстве Δ_α максимальных идеалов алгебы $\mathfrak{A}_\alpha$, причем отображение $\widehat{R_\alpha} : \Delta_\alpha \to \mathbb{C}$ (преобразование Гельфанда оператора R_α, $\widehat{R_\alpha}(h) = h(R_\alpha)$) осуществляет гомеоморфизм Δ_α на $\sigma(R_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Образом оператора $\sum a_m R_\alpha^m$ при упомянутом изоморфизме будет функция $\sum a_m \lambda^m$ на окружности.

Если же угол α соизмерим с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то всякий элемент алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ имеет вид $a_0 I + a_1 R_\alpha + \ldots a_{n-1} R^{n-1}$ $(a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C})$, при этом для любого комплексного гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ выполняется, очевидно, соотношение $(h(R_\alpha))^n = h(R_\alpha^n) = h(I) = 1$. Поэтому существует ровно n комплексных гомоморфизмов $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$, где $h_k(R_\alpha) = e^{i2\pi k/n}$, и пространство максимальных идеалов Δ_α отождествляется со спектром $\sigma(R_\alpha) = \{e^{i2\pi k/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. В рассматриваемом случае алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$ изоморфна $\mathbb{C}^n$, и оператору $a_0 I + a_1 R_\alpha + \ldots a_{n-1} R^{n-1}$ при изоморфизме отвечает вектор, k-я координата которого равна $a_0 + a_1 e^{i2\pi k/n} + \ldots a_{n-1} e^{i2\pi k(n-1)/n}$.

Перейдем теперь к алгебре $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$, порожденной парой коммутирующих операторов P и R_α. Это коммутативная B^*-алгебра, полученная замыканием по операторной норме конечных сумм $\sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$, если угол поворота α несоизмерим с π, и сумм $\sum a_{m0} P^m + \sum a_{m1} P^m R_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1} P^m R_\alpha^{n-1}$, если угол поворота α соизмерим с π $(a_{mk} \in \mathbb{C}, m, k \in \mathbb{Z})$. Пусть $\Delta_{p,\alpha}$ — пространство максимальных идеалов этой алгебры. Мы покажем, что $\Delta_{p,\alpha} = \Delta_p \times \Delta_\alpha$. Таким образом, получается, что пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно либо двумерному тору $\mathbb{T}^2$, либо n экземплярам окружности, а сама алгебра $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ изометрически изоморфна либо алгебре непрерывных функций на торе, либо алгебре $\mathbb{C}^n$-значных функций на окружности.

Лемма 1.3. *Для норм операторов справедливы оценки снизу*

$$\left\| \sum a_{mk} P^m R_\alpha^k \right\| \geqslant \left(\sum |a_{mk}|^2 \right)^{1/2} \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi),$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_m a_{mk} P^m R_\alpha^k \right\| \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_m |a_{mk}|^2 \right)^{1/2} \qquad (\alpha \textit{ соизмерим с } \pi).$$

Доказательство. Предположим для определенности, что угол α несоизмерим с π. Зафиксируем на плоскости круг $B = B(x^0;\varepsilon)$ с центром в любой точке $x^0 \neq 0$ настолько малого радиуса ε, что все круги $B_{mk} = B(p^m x^0_{-k\alpha}; p^m\varepsilon)$ попарно непересекаются, когда индексы m и k пробегают присутствующие в рассматриваемом операторе значения. Это возможно, поскольку все точки $p^m x^0_{-\alpha}$ различны. Обозначим через $\chi_B(x)$ характеристическую функцию этого круга. Образом этой функции под действием оператора $\sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$ будет простая функция $s(x)$, принимающая значения $a_{mk}p^{-m}$ в кругах B_{mk} и равная нулю вне этих кругов. Очевидно,

$$\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \sum |a_{mk}|^2 p^{-2m} \mu(B_{mk}) = \mu(B) \sum |a_{mk}|^2,$$

в то время, как $\|\chi_B\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \mu(B)$. Из определения нормы оператора вытекает требуемая оценка.

Доказательство для случая, когда α соизмерим с π, полностью аналогично. □

Теорема 1.1. *Пусть угол α несоизмерим с π. Тогда пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2 = \{(\lambda, w) \in \mathbb{C}^2 : |\lambda| = |w| = 1\}$.*

Доказательство. Убедимся вначале при помощи стандартных рассуждений, что $\Delta_{p,\alpha}$ гомеоморфно некоторому компактному подмножеству тора. Для этого рассмотрим заданное формулой $\phi(h) = (\widehat{P}(h), \widehat{R_\alpha}(h))$ отображение $\phi : \Delta_{p,\alpha} \to \mathbb{C}^2$. По определению преобразования Гельфанда и топологии $\Delta_{p,\alpha}$ это отображение непрерывно. Более того, множество значений каждой из координат в отдельности — единичная окружность. Действительно, когда комплексный гомоморфизм h пробегает все пространство $\Delta_{p,\alpha}$, числа $h(P)$ и $h(R_\alpha)$ пробегают спектры операторов P и R_α в алгебре $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$, а спектр элемента один и тот же во всех B^*-алгебрах, его содержащих [15, теорема 11.29].

Если предположить, что $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т.е. $h_1(P) = h_2(P)$ и $h_1(\mathbb{R}_\alpha) = h_2(\mathbb{R}_\alpha)$, то значения гомоморфизмов h_1 и h_2 будут совпадать на конечных суммах $\sum a_{mk}P^m R_\alpha^k$. В силу плотности последних в $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ получаем $h_1 = h_2$. Таким образом, отображение ϕ взаимно однозначно и, следовательно, является гомеоморфизмом $\Delta_{p,\alpha}$ на некоторый компакт $K \subset \mathbb{T}^2$ (любое непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово есть гомеоморфизм).

Перенося функции с $\Delta_{p,\alpha}$ на K при помощи отображения ϕ^{-1}, получаем на основании теоремы Гельфанда-Наймарка изометрический изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ на алгебру $C(K)$. При этом изоморфизме оператору

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk}P^m R_\alpha^k$$

отвечает рассматриваемая на K функция

$$t(\lambda, w) = \sum a_{mk}\lambda^m w^k = \sum a_{mk}e^{i(m\theta+k\eta)}$$

(воспользовались представлением $\lambda = e^{i\theta}, w = e^{i\eta}$, θ и η — вещественные параметры), а изометрия означает, что

$$\|T(P, R_\alpha)\| = \sup\left\{|t(\lambda, w)| : (\lambda, w) \in K\right\}.$$

Соединяя этот вывод с результатом леммы 2.1, приходим к оценке

$$\left(\sum |a_{mk}|^2\right)^{1/2} \leqslant \sup\left\{\left|\sum a_{mk}e^{i(m\theta+k\eta)}\right| : \, (e^{i\theta}, e^{i\eta}) \in K\right\}. \tag{1.1}$$

Эта оценка выражает следующее ключевое свойство компакта K: равномерная сходимость к нулю на множестве K любой последовательности тригонометрических полиномов от двух переменных обеспечивает ее сходимость к нулю в среднем квадратичном на всем торе $\mathbb{T}^2$. Такое возможно только при $K = \mathbb{T}^2$. Действительно, предположим, что множество $\mathbb{T}^2 \setminus K$ непусто. В силу того, что оно открыто, существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, обращающаяся в ноль на K. Частичные суммы ряда Фурье этой функции есть тригонометрические полиномы, сходящиеся к f в $L_2(\mathbb{T}^2)$ и равномерно аппроксимирующие f, т.е. стремящиеся к нулю, на K. Получили противоречие с оценкой (2.4). Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть угол α соизмерим с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π. Тогда пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно дизъюнктному объединению n экземпляров окружности $\mathbb{S}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.1 мы показываем при помощи отображения $\phi(h)$, что алгебра $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ изометрически изоморфна алгебре $C(K)$ непрерывных функций на некотором компактном подмножестве K прямого произведения

$$\mathbb{S}\times\{w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}\},\quad w_k=e^{i2\pi k/n}.$$

Обозначим $K_k=\{\lambda\in\mathbb{S}:(\lambda,w_k)\in K\}$. Оператору

$$T(P,R_\alpha)=\sum a_{m0}P^m+\sum a_{m1}P^mR_\alpha+\ldots+\sum a_{m,n-1}P^mR_\alpha^{n-1}$$

теперь отвечает набор функций

$$t_k(\lambda)\equiv t(\lambda,w_k)=\sum a_{m0}\lambda^m+\sum a_{m1}\lambda^m w_k+\ldots+\sum a_{m,n-1}\lambda^m w_k^{n-1},$$

$(\lambda\in K_k,\ k=0,1,\ldots,n-1)$. При этом справедливо равенство

$$\|T(P,R_\alpha)\|=\sup_k\sup\{|t_k(\lambda)|:\lambda\in K_k\}. \tag{1.2}$$

Зафиксируем индекс $j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ и положим

$$a_{m0}=a_m,\quad a_{m1}=a_m w_j^{-1},\quad \ldots,\quad a_{m,n-1}=a_m w_j^{1-n}.$$

Для оператора с такими коэффициентами имеем

$$t_k(\lambda)=(1+w_j^{-1}w_k+\ldots+(w_j^{-1}w_k)^{n-1})\sum a_m\lambda^m.$$

Если $k\neq j$, то $1+w_j^{-1}w_k+\ldots+(w_j^{-1}w_k)^{n-1}=$

$$=1+e^{i2\pi(k-j)/n}+\ldots+e^{i2\pi(k-j)(n-1)/n}=(e^{i2\pi(k-j)/n}-1)^{-1}(e^{i2\pi(k-j)}-1)=0.$$

Поэтому супремум в правой части равенства (1.2) достигается при $k=j$ и равен $\sup\{|t_j(\lambda)|:\lambda\in K_j\}$. Комбинируя (1.2) с леммой 2.1, получаем

$$\left(\sum|a_m|^2\right)^{1/2}\leqslant\sqrt{n}\sup\left\{\left|\sum a_m e^{im\theta}\right|:e^{i\theta}\in K_j\subset\mathbb{S}\right\}.$$

Применяя те же рассуждения, что и в последнем абзаце доказательства теоремы 2.1, с заменой $\mathbb{T}^2$ на $\mathbb{S}$, выводим $K_j=\mathbb{S}$. Это справедливо для всех $j=0,1,\ldots,n-1$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Из описанного выше изоморфизма вытекает следующий критерий положительной определенности операторов алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$.

Следствие 1.1. *Оператор $T(P, R_\alpha) : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ положительно определен тогда и только тогда, когда $t(\lambda, w) > 0$ при всех $\lambda, w \in \mathbb{C}$ таких, что $|\lambda| = |w| = 1$, в случае угла α несоизмеримого с π, и $t_k(\lambda) = t(\lambda, w_k) > 0$ при $|\lambda| = 1$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$ в случае, если угол α соизмерим с π.*

Пример 1.1. Запишем условия положительной определенности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ эрмитовой части оператора

$$u(x) \mapsto u(x) + au(p^{-1}x) + bu(x_\alpha) \quad (a, b \in \mathbb{C}). \tag{1.3}$$

Если α несоизмерим с π, то символом оператора $I + apP + bR_\alpha$ будет выражение $1 + ap\lambda + bw$, в котором λ и w независимо пробегают единичные окружности. В этом случае мы требуем положительности выражения $\operatorname{Re}\left(1 + p|a|e^{i(\theta+\arg a)} + |b|e^{i(\eta+\arg b)}\right)$ для всех $\theta, \eta \in \mathbb{R}$, что, очевидно, равносильно условию $p|a| + |b| < 1$.

Если же угол α соизмерим с π, то положительная определенность оператора (1.3) равносильна неравенствам

$$1 + p|a|\cos(\theta + \arg a) + \operatorname{Re}(bw_k) =$$

$$= 1+p|a|\cos(\theta+\arg a)+|b|\cos(\arg b+2\pi k/n) > 0 \quad (\theta \in \mathbb{R};\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

или $p|a| - |b|\cos(\arg b + 2\pi k/n) < 1$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть, например, $\alpha = \pi$, тогда записанное через коэффициенты условие положительной определенности выглядит так: $p|a| + |\operatorname{Re} b| < 1$.

Пусть $\alpha = 2\pi/3$. Если $b > 0$, то условие принимает вид $p|a| + b/2 < 1$, а если $b < 0$, то $p|a| + |b| < 1$.

Пример 1.2. Для проверки положительной определенности эрмитовой части оператора $u(x) \mapsto u(x) + au(p^{-1}x_\alpha)$ (оператора $I + paPR_\alpha$) следует рассмотреть неравенство $1 + p|a|\cos(\theta + \eta + \arg a) > 0$ $(\theta, \eta \in \mathbb{R})$ либо неравенства

$$1 + p|a|\cos(\theta + 2\pi k/n + \arg a) > 0 \quad (\theta \in \mathbb{R};\ k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Условия на коэффициент в обоих случаях получаются одинаковыми: $p|a| < 1$.

Отметим, что спектральные свойства оператора $T(P, R_\alpha)$ одни и те же для всех значений α несоизмеримых с π. В противном случае, как мы видим, это не так. В этом состоит принципиальное отличие между двумя рассматриваемыми случаями.

1.2 Разрешимость краевой задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Определим оператор $T(P, R_\alpha)$ на функциях из $L_2(\Omega)$ следующим образом: вначале функция $u \in L_2(\Omega)$ продолжается нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, затем к этому продолжению применяется действующий в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор $T(P, R_\alpha)$, а после результат действия оператора сужается на Ω. Понятно, что в этом случае мы также имеем ограниченный линейный оператор $T(P, R_\alpha) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, причем из положительной определенности оператора $T(P, R_\alpha)$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ следует, очевидно, его положительная определенность в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mu u + \operatorname{div}(T(P, R_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $f \in L_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (1.4) назовем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - (T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Наряду с оператором $T(P, R_\alpha)$ с коэффициентами a_{mk} будем рассматривать аналогичный оператор $\widetilde{T}(P, R_\alpha)$, коэффициенты которого равны $a_{mk}\cos k\alpha$.

Теорема 1.3. *Для всякой ограниченной области Ω, содержащей начало координат, условие*

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda, w) > 0 \quad (|\lambda| = |w| = 1) \quad (\alpha \text{ *несоизмерим с* } \pi),$$

либо

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda, w_k) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi)$$

является необходимым и достаточным для существования постоянных $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ *таких, что при всех* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено неравенство (типа Гординга)*

$$\operatorname{Re}\,(T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в рассматриваемом случае неравенство (1.5) на классе $C_0^\infty(\Omega)$ равносильно оценке

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\big(T(P, R_\alpha)u_{x_j}, u_{x_j}\big)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c_1\||\nabla u|\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \tag{1.6}$$

на всем классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. В этом легко убедиться, сделав в интегралах замену переменных $y = \tau x$, $\tau > 1$:

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\big(T(P, R_\alpha)v_{y_j}, v_{y_j}\big)_{L_2(\tau\Omega)} \geqslant c_1\||\nabla v|\|^2_{L_2(\tau\Omega)} - (c_2 - c_1)\tau^{-2}\|v\|^2_{L_2(\tau\Omega)}$$

$$(v \in C_0^\infty(\tau\Omega)).$$

Поскольку Ω содержит начало координат, получаем оценку (1.6) для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Воспользовавшись теоремой Планшереля, перейдем в (1.6) к преобразованию Фурье $\tilde{u}(\xi)$. Заметим, что в образах Фурье оператору P отвечает сопряженный оператор $P^* = P^{-1}$, а оператор R_α переходит в R_α. Таким образом будем иметь

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\xi_j\overline{\tilde{u}(\xi)}\,T(P^*, R_\alpha)[\xi_j\tilde{u}(\xi)]\,d\xi \geqslant c_1\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\xi|^2|\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi$$

или

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-1}\xi_j\overline{v(\xi)}\,T(P^*, R_\alpha)[|\xi|^{-1}\xi_j v(\xi)]\,d\xi \geqslant c_1\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.7}$$

где $v(\xi)$ обозначает $|\xi|\tilde{u}(\xi)$. Поскольку

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_1}{|\xi|}v(\xi)\right]=\frac{\xi_1^2\cos k\alpha-\xi_1\xi_2\sin k\alpha}{|\xi|^2}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k v(\xi),$$

$$\frac{\xi_2}{|\xi|}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_2}{|\xi|}v(\xi)\right]=\frac{\xi_1\xi_2\sin k\alpha+\xi_2^2\cos k\alpha}{|\xi|^2}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k v(\xi)$$

и, следовательно,

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_1}{|\xi|}v(\xi)\right]+\frac{\xi_2}{|\xi|}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_2}{|\xi|}v(\xi)\right]=\overline{v(\xi)}\cos k\alpha P^{*m}R_\alpha^k v(\xi),$$

стоящее под интегралом в левой части (1.7) выражение есть в точности $\overline{v(\xi)}\,\widetilde{T}(P^*,R_\alpha)v(\xi)$, а само неравенство (1.7) принимает вид

$$\operatorname{Re}\Big(\widetilde{T}(P^*,R_\alpha)v,v\Big)_{L_2(\mathbb{R}^2)}\geqslant c_1\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.8}$$

Заметим, что множество участвующих в полученном неравенстве функций v является всюду плотным в $L_2(\mathbb{R}^2)$, когда u пробегает все пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Действительно, в $L_2(\mathbb{R}^2)$ плотны функции $\varphi\in L_2(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, не пересекающимся с началом координат. С другой стороны, функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ плотны в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Поэтому последовательностью $\tilde{u}_m$ образов Фурье гладких финитных функций по теореме Планшереля можно аппроксимировать любую функцию вида $\psi=\varphi/|\xi|$ в следующем смысле:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)|\tilde{u}_m-\psi|^2\,d\xi\to 0,\ m\to\infty.$$

Получаем, таким образом, что $\int_{\mathbb{R}^2}||\xi|\tilde{u}_m-\varphi|^2\,d\xi\to 0$, $m\to\infty$.

Теперь можно сказать, что неравенство (1.8), а, значит, и исходное неравенство (1.5), есть условие положительной определенности в $L_2(\mathbb{R}^2)$ эрмитовой части оператора $\widetilde{T}(P^*,R_\alpha)$. С учетом следствия 2.1 последнее эквивалентно либо алгебраическому неравенству $\operatorname{Re}\tilde{t}(\bar\lambda,w)>0$ при $|\lambda|=|w|=1$, либо $\operatorname{Re}\tilde{t}(\bar\lambda,w_k)>0$ при $|\lambda|=1$; $k=0,1,\ldots,n-1$. Понятно, что $\bar\lambda$ здесь можно заменить на λ. Неравенство (1.5) выполняется с постоянными $c_2=0$ и $c_1=\min\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w)$ $(c_1=\min\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w_k))$. Теорема доказана. □

Следствие 1.2. *Пусть ограниченная область Ω содержит начало координат и выполнено условие*

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w)>0\quad(|\lambda|=|w|=1)\quad(\alpha\ \textit{несоизмерим с}\ \pi),$$

либо

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda, w_k) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi).$$

Тогда спектр краевой задачи (1.4) *состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается внутри симметричного угла с вершиной в нуле, охватывающего положительную вещественную полуось, раствора меньше* π. *В частности, при* $\mu = 0$ *краевая задача* (1.4) *имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f \in L_2(\Omega)$. *При любом* $\mu \in \mathbb{C}$ *задача* (1.4) *фредгольмова.*

Доказательство основано на неравенстве (1.5) и проводится стандартными методами функционального анализа, см., например, [9, 20, 39]. Этот способ доказательства будет описан во второй главе, а здесь мы такие же выкладки опускаем. В примерах ниже считаем, что $0 \in \Omega$.

Пример 1.3. Рассмотрим в Ω уравнение

$$-\sum_{j=1}^{2}\Big(u_{x_j}(x) + a u_{x_j}(p^{-1}x) + b u_{x_j}(-(x_1 + \sqrt{3}x_2)/2, (\sqrt{3}x_1 - x_2)/2)\Big)_{x_j} =$$

$$= f(x) \quad (x \in \Omega),$$

в котором $\alpha = 2\pi/3$. Пусть $b \in \mathbb{R}$. Комбинируя пример 1.1 с теоремой 1.3, получаем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле для данного уравнения при условии $p|a| - b/4 < 1$, если $b < 0$, и при условии $p|a| + b/2 < 1$, если $b > 0$. Таким образом, условия однозначной разрешимости могут быть связаны не только с абсолютной величиной коэффициента в уравнении, но и с его сигнатурой.

Пример 1.4. Для уравнения

$$-\sum_{j=1}^{2}(u_{x_j}(x) + a p^{-1} u_{x_j}(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha), p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha))_{x_j} =$$

$$= f(x) \quad (x \in \Omega)$$

или, коротко,

$$-\operatorname{div}((I + aPR_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

имеем $T(P, R_\alpha) = I + aPR_\alpha$, $\widetilde{T}(P, R_\alpha) = I + a\cos\alpha PR_\alpha$. Каков бы ни был угол α, если $|a\cos\alpha| < 1$, то задача Дирихле имеет единственное обобщенное решение при всех $f \in L_2(\Omega)$. В частности, при $\alpha = \pi/2$, задача однозначно разрешима для любых $p > 1$ и $a \in \mathbb{C}$. То, что в данном случае условие на a и p пропадает, имеет элементарное объяснение: при формальном дифференцировании получаем

$$\sum_{j=1}^{2}(u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(-x_2/p, x_1/p))_{x_j} = \Delta u(x).$$

Оставшаяся часть параграфа посвящена уравнению примера 1.4 и некоторым его модификациям. Эти уравнения будут рассмотрены более подробно, при всех значениях коэффициентов. Однако на область Ω будет наложено дополнительное условие геометрического характера.

Композицию PR_α, являющуюся унитарным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2)$, будем обозначать P_α,

$$P_\alpha u(x) = p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha) = p^{-1}u(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha), p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)).$$

Очевидно,

$$P_\alpha^* u(x) = P_\alpha^{-1}u(x) = pu(px_{-\alpha}).$$

Кроме того, для функций в $\mathbb{R}^2$ имеют место соотношения

$$\nabla P_\alpha u = p^{-1}P_\alpha \nabla_{-\alpha}u, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{div}(P_\alpha \nabla u) = p\cos\alpha\,\Delta P_\alpha u = p^{-1}\cos\alpha\,P_\alpha\Delta u. \tag{1.10}$$

В формуле (1.9) используется краткое обозначение $\nabla_{-\alpha}u$ для операции поворота вектора градиента на угол $(-\alpha)$:

$$\nabla_{-\alpha}u = \begin{pmatrix} u_{x_1}\cos\alpha + u_{x_2}\sin\alpha \\ -u_{x_1}\sin\alpha + u_{x_2}\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Равенства (1.9), (1.10) можно понимать как для гладких функций, так и в смысле обобщенных функций. Они проверяются непосредственно. Формула (1.10) в частности выражает тот факт, что оператор Лапласа инвариантен относительно ортогональных преобразований вектора независимых переменных. Аналогичные формулы справедливы с участием P_α^{-1} вместо P_α:

$$\nabla P_\alpha^{-1} u = p P_\alpha^{-1} \nabla_\alpha u, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{div}(P_\alpha^{-1} \nabla u) = p^{-1} \cos\alpha\, \Delta P_\alpha^{-1} u = p \cos\alpha\, P_\alpha^{-1} \Delta u. \tag{1.12}$$

Лемма 1.4. *Обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ однородной задачи Дирихле для уравнения*

$$-\operatorname{div}((I + aP_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{1.13}$$

— то же, что обобщенное решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Доказательство. Действительно, при $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$, интегрируя по частям и используя формулу (1.12), будем иметь

$$((I + aP_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla u, (I + \overline{a} P_\alpha^{-1})\nabla v)_{L_2^2(\Omega)} =$$

$$= -(u, \operatorname{div}((I + \overline{a} P_\alpha^{-1})\nabla v))_{L_2(\Omega)} = -(u, (I + \overline{a} p \cos\alpha\, P_\alpha^{-1})\Delta v))_{L_2(\Omega)}.$$

В силу плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$ это равенство распространяется, очевидно, на все функции $\in \mathring{H}^1(\Omega)$. С другой стороны,

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = -((I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \Delta v))_{L_2(\Omega)} =$$

$$= -(u, (I + \overline{a} p \cos\alpha\, P_\alpha^{-1})\Delta v))_{L_2(\Omega)}$$

при всех $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Остается полученное для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ равенство

$$((I + aP_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)}$$

продолжить на все функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. $\square$

Спектр оператора $P_\alpha : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ также совпадает со всей единичной окружностью. При $|\lambda| > 1$ для его резольвенты справедливо представление

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1} P_\alpha)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} P_\alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} P_\alpha^k,$$

поскольку $\|\lambda^{-1}P_\alpha\| < 1$. Таким образом,

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1}u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} p^{-k} u(p^{-k}x_{k\alpha}), \text{ если } |\lambda| > 1. \tag{1.14}$$

При $|\lambda| < 1$, наоборот, имеем

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1} = -P_\alpha^{-1}(I - \lambda P_\alpha^{-1})^{-1} = -P_\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k P_\alpha^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}P_\alpha^{-k},$$

поскольку $\|\lambda P_\alpha^{-1}\| < 1$. Получаем

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1}u(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} p^k u(p^k x_{-k\alpha}), \text{ если } |\lambda| < 1. \tag{1.15}$$

На основе формул (1.14), (1.15) может быть получен следующий результат, связанный с действием оператора $\lambda I - P_\alpha$ в пространствах Соболева $H^s(\Omega)$.

Лемма 1.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, инвариантная относительно преобразования координат $x \mapsto p^{-1}x_\alpha$, а именно,*

$$\Omega \subset p\Omega_{-\alpha} = \{px_{-\alpha} \in \mathbb{R}^2 : x \in \Omega\}. \tag{1.16}$$

Тогда

а) если $|\lambda| > 1$, то оператор $\lambda I - P_\alpha : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ является изоморфизмом (линейным гомеоморфизмом) для всех $s = 0, 1, \ldots$;

б) если $|\lambda| < p^{-s}$ для некоторого $s = 0, 1, \ldots$, то изоморфизмом будет оператор $\lambda I - P_\alpha : \mathring{H}^s(\Omega) \to \mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$.

Доказательство. а) Очевидно, оператор $\lambda I - P_\alpha : H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R}^2)$ ограничен для любого $s = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим ограниченный обратный оператор $(\lambda I - P_\alpha)^{-1} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, действующий на функции $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле (1.14). При $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ первые производные общего члена ряда (1.14) имеют вид $\lambda^{-(k+1)}\nabla P_\alpha^k u = \lambda^{-(k+1)}p^{-k}P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha} u$. Получаем

$$\left\| |\lambda^{-(k+1)}\nabla P_\alpha^k u| \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{-(k+1)} p^{-k} \left\| |P_\alpha^k \nabla u| \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= |\lambda|^{-(k+1)} p^{-k} \left\| |\nabla u| \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

откуда следует, что оператор в (1.14) является ограниченным и в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Аналогично обстоит дело с производными высших порядков: при каждом следующем дифференцировании члена ряда (1.14) возникает улучшающий сходимость ряда множитель p^{-k}. Итак, $\lambda I - P_\alpha$ непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ на себя для любого $s = 0, 1, \ldots$ при $|\lambda| > 1$. Далее, для $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ положим $v = (\lambda I - P_\alpha)u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Благодаря условию (1.16) сужение образа $v|_\Omega$ однозначно определяется сужением $u|_\Omega$, так что $\lambda I - P_\alpha$ корректно определен и как ограниченный линейный оператор в $H^s(\Omega)$ для таких областей Ω. При этом формула (1.14), построенная лишь на неотрицательных степенях оператора P_α, показывает, что сужение прообраза $u|_\Omega$ также однозначно определяется сужением $v|_\Omega$. Тем самым показано, что ограниченный оператор в (1.14) является обратным к оператору $\lambda I - P_\alpha : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$.

б) Условие $|\lambda| < p^{-s}$, в свою очередь, обеспечивает возможность s-кратного почленного дифференцирования ряда в формуле (1.15). Для таких λ оператор $\lambda I - P_\alpha$ также непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ на себя. Далее, если функция $u \in \mathring{H}^s(\Omega)$ продолжена нулем в $\mathbb{R}^2$, то она принадлежит $H^s(\mathbb{R}^2)$, ее образ $v = (\lambda I - P_\alpha)u$ из $H^s(\mathbb{R}^2)$ равен нулю вне $p\Omega_{-\alpha}$, а сужение v на $p\Omega_{-\alpha}$ принадлежит $\mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$ в силу условия (1.16). Наоборот, если v — продолженная нулем в $\mathbb{R}^2$ функция из $\mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$, то как показывает формула (1.15), ее прообраз u из $H^s(\mathbb{R}^2)$ равен нулю вне Ω (суммирование в (1.15) начинается с $k = 1$) и сужение u на Ω принадлежит $\mathring{H}^s(\Omega)$. Лемма доказана. $\square$

При $|\lambda| = 1$, как показывает следующее утверждение, свойства оператора $\lambda I - P_\alpha$, действующего на функции в ограниченной области, близки в некотором смысле к ситуации, описанной в пункте а) леммы 1.5 (случай $|\lambda| > 1$).

Лемма 1.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию (1.16), $|\lambda| = 1$, $u \in L_2(\Omega)$ и $v = (\lambda I - P_\alpha)u$. Тогда для функции $u(x)$ в Ω справедливо представление*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} p^{-k} v(p^{-k} x_{k\alpha}) \quad (x \in \Omega), \tag{1.17}$$

где ряд сходится в $L_2(\Omega)$. При этом, если $v \in H^s(\Omega)$, то и $u \in H^s(\Omega)$.

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда (1.17), подставляя вместо $v(x)$ выражение $\lambda u(x) - p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha)$:

$$\lambda^{-1}(\lambda u(x) - p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha)) + \lambda^{-2}p^{-1}(\lambda u(p^{-1}x_\alpha) - p^{-1}u(p^{-2}x_{2\alpha})) + \ldots$$

$$+\lambda^{-M}p^{-M+1}(\lambda u(p^{-M+1}x_{(M-1)\alpha}) - p^{-1}u(p^{-M}x_{M\alpha})) =$$

$$= u(x) - (p\lambda)^{-M}u(p^{-M}x_{M\alpha}).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\|\lambda^{-M}P_\alpha^M u\|^2_{L_2(\Omega)} = p^{-2M}\int\limits_\Omega |u(p^{-M}x_{M\alpha})|^2\,dx =$$

$$= \int\limits_{p^{-M}\Omega_{M\alpha}} |u(y)|^2\,dy \to 0, \quad M \to \infty,$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и очевидного соотношения $\mathrm{mes}(p^{-M}\Omega_{M\alpha}) = p^{-2M}\mathrm{mes}(\Omega)$. Второе утверждение леммы получается почленным дифференцированием ряда (1.17). $\square$

Нам понадобится также векторный вариант части утверждений леммы 1.6 и пункта а) леммы 1.5.

Лемма 1.7. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — *ограниченная область, удовлетворяющая условию* (1.16). *Тогда*

а) *если* $|\lambda| > 1$, *то оператор* $\mathbf{u} \mapsto \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha}$ *является изоморфизмом пространства вектор-функций* $L_2^2(\Omega)$;

b) *если* $|\lambda| = 1$, $\mathbf{u} \in L_2^2(\Omega)$ *и* $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha} \in L_2^2(\Omega)$, *то* $\mathbf{u}$ *представляется сходящимся в* $L_2^2(\Omega)$ *рядом*

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)}P_\alpha^k\mathbf{v}_{-k\alpha}(x) \quad (x \in \Omega).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что и в этом случае при $|\lambda| > 1$ оператор $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} := \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha}$ имеет ограниченный обратный в $L_2^2(\mathbb{R}^2)$, действующий по формуле

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)}P_\alpha^k\mathbf{v}_{-k\alpha}$$

($\|P_\alpha \mathbf{u}_{-\alpha}\|_{L_2^2(\mathbb{R}^2)} = \|\mathbf{u}\|_{L_2^2(\mathbb{R}^2)}$). Переход от $\mathbb{R}^2$ к области Ω, а также к значениям $|\lambda| = 1$ вполне аналогичен изложенному при доказательстве лемм 1.5 и 1.6. □

Приведенное ниже утверждение уточняет результат примера 1.4 и, кроме того, содержит алгоритм решения краевой задачи. Формально, решение сводится к тому, что в уравнении (1.13) следует "продифференцировать" функциональный оператор $I + aP_\alpha$, а затем применить к обеим частям ограниченный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}$. Однако, имея дело с обобщенным решением, соответствующие выкладки приходится производить в интегральном тождестве.

Предложение 1.1. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (1.16) *и* $0 \neq |a\cos\alpha| \leqslant 1$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (1.13) *имеет единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *при любой функции* $f \in L_2(\Omega)$. *Это решение является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона*

$$-\Delta u(x) = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы (1.4) обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (1.13) определяется из интегрального тождества

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)). \tag{1.18}$$

Обозначим $\omega = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u$, тогда $\nabla\omega = \nabla u + a\cos\alpha P_\alpha \nabla_{-\alpha} u$. По лемме 1.7 с учетом неравенства $0 \neq |a\cos\alpha| \leqslant 1$ будем иметь

$$\nabla u = \sum_{k=0}^{\infty} (-a\cos\alpha)^k P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha}\, \omega. \tag{1.19}$$

Вместе с каждой функцией $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ подставим в интегральное тождество (1.18) функцию $P_\alpha^{-k} v$ ($k = 1, 2, \ldots$): в силу условия (1.16) последняя также принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega)$. В соответствии с (1.11) получим

$$(\nabla\omega, p^k P_\alpha^{-k} \nabla_{k\alpha} v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, P_\alpha^{-k} v)_{L_2(\Omega)}$$

или, перенося вращение вектора градиента и функциональный оператор P_α^{-k} с ∇v на $\nabla\omega$ (в виде сопряженных преобразований),

$$(P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha}\,\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p^{-k}(P_\alpha^k f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножая полученные равенства на $(-a\cos\alpha)^k$, суммируя по всем индексам $k = 0, 1, \ldots$ и принимая во внимание (1.19), приходим к тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)), \tag{1.20}$$

определяющему обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = g$ в в области Ω с функцией

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} (-ap^{-1}\cos\alpha)^k P_\alpha^k f = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} f \in L_2(\Omega).$$

В обратную сторону при помощи подобных выкладок тождество (1.18) выводится из тождества (1.20). Утверждение теоремы следует теперь из существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью из $L_2(\Omega)$. □

Замечание 1.1. В предложении 1.1 неявно содержится и утверждение о гладкости обобщенного решения u, поскольку исходная задача сведена к задаче Дирихле для уравнения Пуассона. В условиях предложения 1.1 функциональный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}$ ограничен по лемме 1.5 не только в $L_2(\Omega)$, но и во всей шкале пространств Соболева $H^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$, так что для гладкости u в Ω остается наложить соответствующие требования на $\partial\Omega$. Так, хорошо известно (см., например, [10]), что если $g \in H^s(\Omega)$ и $\partial\Omega \in C^{s+2}$, то $u \in H^{s+2}(\Omega)$ и выполняется оценка

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leqslant c_1 \|g\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c_2 \|f\|_{H^s(\Omega)}.$$

Стоит отметить также, что при $|a\cos\alpha| = 1$ уравнение (1.13) уже не является сильно эллиптическим. Тем не менее, как показывает предложение 1.1, и в этом случае краевая задача однозначно разрешима. Существенным дополнением к предложению 1.1 является результат ниже. Оказывается, при $|a\cos\alpha| > 1$ краевая задача перестает быть корректной и становится “сильно” недоопределенной.

Предложение 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая усиленному условию инвариантности*

$$\overline{\Omega} \subset p\Omega_{-\alpha} \tag{1.21}$$

и $|a\cos\alpha| > 1$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (1.13) *имеет обобщенные решения для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$, *причем при* $f = 0$ *существует бесконечно много линейно независимых обобщенных решений соответствующей однородной задачи.*

Доказательство. С учетом леммы 1.4 речь идет об обобщенных решениях задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Поскольку в условиях теоремы $|ap\cos\alpha|^{-1} < p^{-1}$, оператор

$$I + ap\cos\alpha\, P_\alpha = ap\cos\alpha\,((ap\cos\alpha)^{-1}I + P_\alpha)$$

в силу пункта б) леммы 1.5 непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ на все пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$.

Построим теперь функцию ω в $p\Omega_{-\alpha} \supset \overline{\Omega}$ следующим образом. Пусть $\omega_1 \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega_1 = f$ в Ω, а ω_2 — произвольная функция из $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$. Положим

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & x \in \Omega, \\ \omega_2(x), & x \in p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Очевидно, что $w \in \mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Проверим, что лежащая в $\mathring{H}^1(\Omega)$ функция $u = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1}\omega$ есть обобщенное решение рассматриваемой задачи. Действительно, для любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ справедлива цепочка

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla\omega_1, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что на Ω функция ω совпадает с ω_1. Мы показали, что для всякой функции f существует как минимум целое семейство обобщенных решений рассматриваемой задачи, “параметризованное” произвольной функцией из $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$. $\square$

Замечание 1.2. В отличие от ситуации, описанной в предложении 1.1, построенные в предложении 1.2 решения не обязаны быть гладкими. Действительно, если посмотреть в этом случае на вид обратного оператора

$$(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(ap\cos\alpha)^{-k}P_\alpha^{-k},$$

то получается, что в части $\Omega\setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$ области Ω построенное обобщенное решение $u = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1}\omega$ совпадает с функцией $(ap\cos\alpha)^{-1}\omega_2(px_{-\alpha})$. Таким образом, если $\omega_2 \notin H^2(p\Omega_{-\alpha}\setminus\overline{\Omega})$ (локально), то и сужение u на $\Omega\setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$ не принадлежит $H^2(\Omega\setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha)$ (локально). То же самое относится к сужению u на $p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha\setminus p^{-2}\overline{\Omega}_{2\alpha}$ и т.д.

Такое “щепетильное” отношение к вопросу о перестановке операции дивергенции и функционального оператора в уравнении (1.13) обосновано. Так, предположим, что $|a\cos\alpha| \leqslant p$, но нас интересуют только гладкие решения краевой задачи, $u \in \mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Такие решения удовлетворяют уравнению (1.13) почти всюду, и его теперь можно переписать в виде

$$-(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)\Delta u = f(x) \quad (x\in\Omega).$$

В силу неравенства на коэффициенты по-прежнему существует ограниченный обратный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, и мы приходим к эквивалентному уравнению $-\Delta u = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}f$, для которого задача Дирихле имеет единственное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ и $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)}$ (считаем, что граница области обладает нужной гладкостью). Получается, что при $1 < |a\cos\alpha| \leqslant p$ одновременно с бесконечномерным многообразием негладких обобщенных решений существует единственное гладкое решение краевой задачи для уравнения 1.13, непрерывно зависящее от правой части f.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу Дирихле для уравнения

$$-\mathrm{div}((I + bP_\alpha^{-1})\nabla u) = f(x) \quad (x\in\Omega), \tag{1.22}$$

$b\in\mathbb{C}$, с оператором P_α^{-1} вместо оператора P_α. Применяя теорему 1.3 к уравнению (1.22), получаем необходимое и достаточное условие сильной эллиптичности: $|b\cos\alpha| < 1$. Эквивалентной (с точки зрения обобщенного решения) записью уравнения (1.22) будет

$$-\Delta(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})u = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

(проверяется аналогично лемме 1.4). Здесь ситуация с разрешимостью в определенном смысле обратная по отношению к уравнению (1.13): обобщенное решение всегда единственно, но при $|b\cos\alpha| \geqslant 1$ задача становится "сильно" переопределенной.

Предложение 1.3. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (1.21). *Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (1.22) *единственно, при этом*

а) *если $0 < |b\cos\alpha| < 1$, то всякое обобщенное решение имеет вид*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-b\cos\alpha)^k\omega(p^k x_{-\alpha}), \tag{1.23}$$

где w есть решение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta\omega(x) = f(x)$ в Ω;

б) *если $|b\cos\alpha| \geqslant 1$, то задача разрешима тогда и только тогда, когда функция f ортогональна бесконечномерному подпространству в $L_2(\Omega)$.*

Отметим, что при использовании формулы (1.23) функцию ω следует считать продолженной нулем вне Ω.

Доказательство. а) Рассмотрим оператор

$$I + bp^{-1}\cos\alpha\, P_\alpha^{-1} = P_\alpha^{-1}(bp^{-1}\cos\alpha\, I + P_\alpha).$$

По лемме 1.5, пункт б), оператор $(bp^{-1}\cos\alpha I + P_\alpha)$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ на пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Но в таком случае, очевидно, сам оператор $I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1}$ является изоморфизмом пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$, а обратный имеет вид

$$(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})^{-1} = (bp^{-1}\cos\alpha I + P_\alpha)^{-1}P_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-bp^{-1}\cos\alpha)^k P_\alpha^{-k},$$

что соответствует формуле (1.23). Итак, замена $(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})u = \omega$ сводит исходную задачу к эквивалентной задаче Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega(x) = f(x)$ в Ω.

б) В этой ситуации замена $P_\alpha^{-1}u = \omega$ сводит вопрос нахождения обобщенного решения $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (1.22) к определению функции $\omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ из интегрального тождества

$$(\nabla(I + p(b\cos\alpha)^{-1}P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p(b\cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое, как видно из доказательства предложения 1.1, равносильно тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

с новой функцией $g = p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1}f \in L_2(\Omega)$. Здесь мы учли, что $|b\cos\alpha|^{-1} \leqslant 1$. Стоит подчеркнуть, что функция ω, являющаяся обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega = g$ в Ω, принадлежит пространству $\mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ и тождественно равна нулю вне $p^{-1}\Omega_\alpha$. Тогда, очевидно, и функция g должна обращаться в ноль в $\Omega \backslash p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$. Кроме того, равенство

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(p^{-1}\Omega_\alpha)} = (g, v)_{L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)} \tag{1.24}$$

фактически выполнено уже для любой функции $v \in H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Нетрудно видеть (см., например, [9, стр. 30]), что для существования функции $\omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, удовлетворяющей (1.24) при любой $v \in H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы функция g была ортогональна в скалярном произведении в $L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)$ всем гармоническим функциям, принадлежащим $H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Итак, в случае $|b\cos\alpha| \geqslant 1$ задача Дирихле для уравнения (1.22) разрешима при тех и только тех $f \in L_2(\Omega)$, для которых функция $g = p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1}f \in L_2(\Omega)$ обращается в ноль вне $p^{-1}\Omega_\alpha$, а в $L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)$ ортогональна всем гармоническим функциям из $H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Понятно, что для функции f это означает выполнение бесконечного числа условий ортогональности в $L_2(\Omega)$ (их можно записать при помощи сопряженного к $p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1}$ оператора).

При $f = 0$ имеем $g = 0$, а значит, и ω вместе с $u = P_\alpha\omega$ равны нулю, т. е. обобщенное решение для уравнения (1.22) всегда единственно. $\square$

Замечание 1.3. В условиях пункта а) предложения 1.3 обобщенное решение существует и единственно, но не обязательно принадлежит $H^2(\Omega)$, и непрерывная зависимость решения от правой части гарантируется лишь относительно H^1-нормы, поскольку обратный оператор $(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})^{-1}$ (формула (1.23)), вообще говоря, неограничен в $H^2(\Omega)$.

Наконец, в области Ω, удовлетворяющей усиленному условию инвариантности (1.21), рассмотрим уравнение

$$-\mathrm{div}\,\big((I + \gamma_1 P_\alpha + \gamma_{-1} P_\alpha^{-1})\nabla u\big) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.25}$$

естественным образом обобщающее уравнения (1.13) и (1.22). По аналогии с предыдущим уравнение (1.25) можно записывать в виде

$$-\Delta(I + \gamma_1 p \cos\alpha\, P_\alpha + \gamma_{-1} p^{-1} \cos\alpha\, P_\alpha^{-1})u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Считаем, что $0 \neq \gamma_{\pm 1} \in \mathbb{C}$ и $\cos\alpha \neq 0$. По теореме 1.3 уравнение (1.25) является сильно эллиптическим тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}\,(1 + \gamma_1 \cos\alpha\, z + \gamma_{-1}\cos\alpha\, z^{-1}) > 0 \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| = 1)$$

(через z мы обозначили произведение λw; z также пробегает всю единичную окружность). Отметим, что из условия (1.21) вытекает $0 \in \Omega$.

Нетрудно выписать соответствующие ограничения на коэффициенты в явном виде ($\varphi_1 := \arg\gamma_1$, $\varphi_{-1} := \arg\gamma_{-1}$):

$$\mathrm{Re}\,(1 + \gamma_1 \cos\alpha\, z + \gamma_{-1}\cos\alpha\, z^{-1}) =$$

$$1 + \cos\alpha\big[|\gamma_1|\cos(\varphi + \varphi_1) + |\gamma_{-1}|\cos(\varphi - \varphi_{-1})\big] =$$

$$= 1 + \cos\alpha\big[(|\gamma_1|\cos\varphi_1 + |\gamma_{-1}|\cos\varphi_{-1})\cos\varphi +$$

$$+ (|\gamma_{-1}|\sin\varphi_{-1} - |\gamma_1|\sin\varphi_1)\sin\varphi\big] =$$

$$= 1 + \cos\alpha\sqrt{|\gamma_1|^2 + |\gamma_{-1}|^2 + 2|\gamma_1\gamma_{-1}|\cos(\varphi_1 + \varphi_{-1})}\,\sin(\varphi + \varphi_0) > 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ (здесь φ_0 — некоторый фиксированный угол, зависящий от $\gamma_{\pm 1}$). Таким образом, необходимым и достаточным условием сильной эллиптичности уравнения (1.25) будет неравенство

$$|\cos\alpha|\sqrt{|\gamma_1|^2 + |\gamma_{-1}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\gamma_1\gamma_{-1})} < 1.$$

Для более детального изучения уравнения (1.25) факторизуем функциональный оператор под знаком лапласиана:

$$I + \gamma_1 p \cos\alpha\, P_\alpha + \gamma_{-1} p^{-1} \cos\alpha\, P_\alpha^{-1} = \gamma_1 p \cos\alpha (\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha) P_\alpha^{-1}.$$

Здесь λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения

$$(\gamma_1 p \cos\alpha)\lambda^2 + \lambda + \gamma_{-1} p^{-1} \cos\alpha = 0.$$

Без ограничения общности считаем $0 < |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$. Поведение решений краевой задачи для уравнения (1.25) описывается в терминах этих корней: все зависит от расположения $\lambda_{1,2}$ на комплексной плоскости относительно окружности $|\lambda| = p^{-1}$.

Теорема 1.4. а) *Пусть $|\lambda_1| \geqslant p^{-1}$, $|\lambda_2| < p^{-1}$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения* (1.25) *(корректная задача).*

б) *Пусть $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1| < p^{-1}$. Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (1.25) *существует для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, при этом соответствующая однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых обобщенных решений (недоопределенная задача).*

в) *Пусть $p^{-1} \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$. Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (1.13) *единственно, а для существования решения необходимо и достаточно, чтобы функция f была ортогональна некоторому бесконечномерному подпространству в пространстве $L_2(\Omega)$ (переопределенная задача).*

Доказательство. а) По лемме 1.5 оператор $(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}$ есть изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$. Поэтому замена $(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1} u = \omega$ сводит исходную задачу к интегральному тождеству

$$(\nabla(\lambda_1 I - P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\gamma_1 p \cos\alpha)^{-1} (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое при $|\lambda_1| \geqslant p^{-1}$ равносильно тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p(\gamma_1 \cos\alpha)^{-1} \left((p^2 \lambda_1 I - P_\alpha)^{-1} f, v \right)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

(см. доказательство предложения 1.1). Последнее единственным образом определяет $\omega \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ с оценкой $\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1\|(p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1}f\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда для единственного обобщенного решения $u = P_\alpha(\lambda_2 I - P_\alpha)^{-1}\omega \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ рассматриваемой задачи имеет место оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

(регулярность границы гарантирует для функции ω и более сильную оценку $\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_4\|f\|_{L_2(\Omega)}$, но для функции u соответствующую оценку в H^2-норме записать уже нельзя).

б) В этом случае по лемме 1.5 весь оператор $\gamma_1 p\cos\alpha(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}$ осуществляет изоморфизм пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ на пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Поэтому исходная задача сводится к нахождению функции

$$\omega = \gamma_1(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}u \in \overset{\circ}{H}{}^1(p\Omega_{-\alpha})$$

в области $p\Omega_{-\alpha} \supset \overline{\Omega}$ из интегрального тождества

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)),$$

которое отвечает строго внутренней подобласти Ω более широкой области $p\Omega_{-\alpha}$. Получается недоопределенная задача. Построение бесконечномерного нуль-пространства такой задачи проведено в предложении 1.2.

в) Здесь мы делаем замену $P_\alpha^{-1}u = \omega \in \overset{\circ}{H}{}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ и для функции ω, равной нулю вне $p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha \subset \Omega$, имеем тождество

$$(\nabla(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\gamma_1 p\cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)),$$

эквивалентное тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p^4(\gamma_1 p\cos\alpha)^{-1}\left((p^2\lambda_2 I - P_\alpha)^{-1}(p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1}f, v\right)_{L_2(\Omega)} =$$
$$= p^3\left((\gamma_1\cos\alpha\, P_\alpha^2 + pP_\alpha + p^2\gamma_{-1}\cos\alpha I)^{-1}f, v\right)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)).$$

Получается, что обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Ω тождественно равно нулю в части $\Omega \backslash p^{-1}\Omega_\alpha$. Это переопределенная задача. Бесконечномерное ортогональное дополнение к (замкнутому) образу оператора такой краевой задачи построено в доказательстве пункта б) предложения 1.3. $\square$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что сильно эллиптическому уравнению (1.25) отвечает следующее расположение корней $\lambda_{1,2}$: $|\lambda_1| > p^{-1}$, $|\lambda_2| < p^{-1}$.

Источником краевой задачи в обобщенной постановке для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения в дивергентной форме с симметричным оператором может быть задача на поиск минимума квадратичного функционала. Проиллюстрируем подобную связь на примере.

Пример 1.5. Рассмотрим задачу поиска минимума функционала

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} ((T\nabla u, \nabla u) - 2fu)\ dx$$

на пространстве функций $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Здесь Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $T = I + aP_\alpha$, скобки $(.,.)$ означают скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^2$, $f \in L_2(\Omega)$, а функция u считается продолженной нулем вне Ω. Коэффициент a и все пространства в этом примере — вещественные.

Из вышеизложенного следует, что условие $|a\cos\alpha| < 1$ обеспечивает оценку (коэрцитивность функционала)

$$J_0(u) := \int\limits_{\Omega} (T\nabla u, \nabla u)\, dx \geqslant (1 - |a\cos\alpha|) \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \quad (u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)).$$

Запишем первую вариацию (производную Гато) функционала J в элементе u. Для этого зафиксируем произвольную функцию $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и подставим $u + \tau v$, $\tau \in \mathbb{R}$, вместо u в функционал J. Получим

$$J(u + \tau v) = J(u) + \tau B(u, v) + \tau^2 J_0(v),$$

где билинейная форма $B(u, v)$ на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} ((T\nabla u, \nabla v) + (T\nabla v, \nabla u) - 2fv)\ dx = ((T + T^*)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} -$$

$$-2(f, v)_{L_2(\Omega)} = ((2I + aP_\alpha + aP_\alpha^{-1})\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} - 2(f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Условие

$$\frac{d}{d\tau} J(u + \tau v)\Big|_{\tau=0} = B(u, v) = 0 \quad (v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$$

является необходимым, а при $|a\cos\alpha| < 1$, очевидно, и достаточным условием строгого глобального минимума функционала J. С другой стороны, это условие определяет обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ краевой задачи

$$-\mathrm{div}\left((I + (a/2)(P_\alpha + P_\alpha^{-1}))\nabla u\right) = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Эта задача при дополнительном условии (1.21) на область исследована в теореме 1.4 для всевозможных значений параметров, но сильно эллиптическим соответствующее уравнение будет только при $|a\cos\alpha| < 1$.

Глава 2

Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и симметрией

Эта глава посвящена задаче Дирихле в плоской ограниченной области для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в старших производных преобразования аргументов вида $x \mapsto px$ $(p > 0)$ и $x \mapsto -x$. Предположение $\alpha = \pi$ (соответственно, $R_\pi u(x) = u(-x)$) позволяет распространить подход и результаты предыдущей главы на уравнение более общей структуры

$$\mu u + \sum_{i,j=1}^{2} (T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.1}$$

с различными функциональными операторами

$$T_{ij}(P, R_\pi) = \sum a_{ijm} P^m + \sum b_{ijm} P^m R_\pi,$$

где $a_{ijm}, b_{ijm} \in \mathbb{C}$, а индекс суммирования m пробегает конечное подмножество $\mathbb{Z}$.

Кроме того, условия сильной эллиптичности исследованы при более общем, нежели в предыдущей главе, предположении относительно области Ω.

2.1 Алгебра функциональных операторов с растяжением и симметрией

Как и прежде, через $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ обозначаем подалгебру алгебры $\mathfrak{B}(L_2(\mathbb{R}^2))$ ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденную парой коммутирующих унитарных операторов $P, R_\pi : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$. Она представляет собой коммутативную B^*-алгебру, полученную замыканием по операторной норме конечных сумм $T(P, R_\pi) = \sum a_m P^m + \sum b_m P^m R_\pi$ $(a_m, b_m \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{Z})$. Пусть $\Delta_{p,\pi}$ — пространство максимальных идеалов этой алгебры. В главе 1 показано, что $\Delta_{p,\pi}$ гомеоморфно дизъюнктному объединению двух экземпляров окружности $\mathbb{S}$, $\Delta_{p,\pi} \simeq \mathbb{S} \times \{\pm 1\}$. Отсюда и из теоремы Гельфанда–Наймарка [15, теорема 11.18] следует, что алгебра $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ изометрически изоморфна алгебре $C(\mathbb{S}; \mathbb{C}^2)$ всех непрерывных $\mathbb{C}^2$-значных функций на окружности. При таком изоморфизме оператору $T(P, R_\pi)$ отвечает функция

$$\mathbf{t}(\lambda, w) = \sum (a_m + b_m w)\lambda^m \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1,\ w = \pm 1)$$

или, что то же самое, пара функций

$$\mathbf{t}^{\pm}(\lambda) = \sum (a_m \pm b_m)\lambda^m \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1).$$

При изучении удовлетворения уравнения (2.1) неравенству Гординга нам понадобится более широкая по сравнению с $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ алгебра операторов, включающая также операторы умножения на однородные функции нулевой степени.

Любую однородную функцию $g(\xi)$ нулевой степени ($g(r\xi) = g(\xi)$ при $0 \neq r \in \mathbb{R}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$), непрерывную в $\mathbb{R}^2_\xi \setminus \{0\}$, можно рассматривать как элемент алгебры $C(\mathbb{PR}^1)$ всех непрерывных комплексных функций на проективной прямой $\mathbb{PR}^1$ с однородными координатами $\xi_1 : \xi_2$. Отметим, что в $C(\mathbb{PR}^1)$ всюду плотны полиномы от функций

$$y_1(\xi) = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{|\xi|^2}, \quad y_2(\xi) = \frac{2\xi_1\xi_2}{|\xi|^2},$$

задающих гомеоморфизм

$$\upsilon : \mathbb{PR}^1 \to \mathbb{S}, \quad \xi_1 : \xi_2 \mapsto (y_1(\xi), y_2(\xi)), \tag{2.2}$$

проективной прямой $\mathbb{PR}^1$ на $\mathbb{S}$ (удвоение угла). Это следует из теоремы Стоуна–Вейерштрасса или из того факта, что любая π-периодическая непрерывная функция равномерно приближается тригонометрическими полиномами от $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$.

Сопоставим функции g ограниченный в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор умножения на g:

$$Gu(\xi) = g(\xi)u(\xi).$$

При этом легко убедиться (см., например, [9, стр. 52]), что отображение $g \mapsto G$ является изометрическим изоморфизмом алгебры $C(\mathbb{PR}^1)$ на замкнутую подалебру $\mathfrak{A}_g$ алгебры $\mathfrak{B}(L_2(\mathbb{R}^2))$, состоящую из всех таких операторов. Поэтому, в частности, всякий комплексный гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}_g$ имеет вид

$$h(G) = g(\xi^h) \quad (\xi_1^h : \xi_2^h \in \mathbb{PR}^1),$$

т.е. пространство максимальных идеалов Δ_g алгебры $\mathfrak{A}_g$ совпадает с $\mathbb{PR}^1$. Кроме того, в $\mathfrak{A}_g$ плотны полиномы от операторов Y_1, Y_2 умножения на функции $y_1(\xi), y_2(\xi)$.

Принципиальным моментом является то, что операторы из $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ коммутируют с операторами из $\mathfrak{A}_g$, поскольку $g(\xi) = g(-\xi)$. Коммутативную B^*-алгебру, полученную замыканием по операторной норме конечных сумм вида

$$\sum G_j T_j(P, R_\pi) \quad (G_j \in \mathfrak{A}_g,\ T_j(P, R_\pi) \in \mathfrak{A}_{p,\pi})$$

или, что то же самое, сумм вида

$$\sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi \quad (G_m^\pm \in \mathfrak{A}_g), \tag{2.3}$$

обозначим $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$.

Лемма 2.1. *Для нормы оператора* (2.3) *справедлива оценка снизу*

$$\left\| \sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi \right\| \geqslant \sup_{\xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1} \left(\sum |g_m^+(\xi)|^2 + |g_m^-(\xi)|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Зафиксируем на плоскости круг $B = B(\xi^0; \varepsilon)$ с центром в любой точке $\xi^0 \neq 0$ настолько малого радиуса ε, что все круги

$B_m^{\pm} = B(\pm p^m \xi^0; p^m \varepsilon)$ попарно непересекаются, когда индекс m пробегает присутствующие в рассматриваемом операторе значения. Это возможно, поскольку все точки $\pm p^m \xi^0$ различны. Образом характеристической функции $\chi_B(\xi)$ круга B под действием оператора (2.3) будет функция $s(\xi)$, равная $p^{-m} g_m^{\pm}(\xi)$ в кругах $B_m^{\pm}$ и нулю вне этих кругов. С учетом однородности функций $g_m^{\pm}(\xi)$ будем иметь

$$\frac{\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}}{\|\chi_B\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}} = \frac{1}{|B|} \sum \int\limits_{B_m^+} p^{-2m} |g_m^+(\xi)|^2 \, d\xi + \frac{1}{|B|} \sum \int\limits_{B_m^-} p^{-2m} |g_m^-(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{|B|} \sum \int\limits_{B} \left(|g_m^+(\xi)|^2 + |g_m^-(\xi)|^2 \right) \, d\xi,$$

так что

$$\left\| \sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi \right\|^2 \geqslant \frac{1}{|B|} \sum \int\limits_{B} \left(|g_m^+(\xi)|^2 + |g_m^-(\xi)|^2 \right) \, d\xi$$

при всех достаточно малых ε. Используя непрерывность подынтегральной функции в $\overline{B}$, интегральную теорему о среднем, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\left\| \sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi \right\|^2 \geqslant \sum \left| g_m^+(\xi^0) \right|^2 + \left| g_m^-(\xi^0) \right|^2 .$$

Поскольку точка $\xi^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ произвольна, получаем утверждение леммы.

$\square$

Следующая теорема содержит основной результат этого пункта.

Теорема 2.1. *Пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\pi,g}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{PR}^1$.*

Доказательство. Убедимся вначале, что $\Delta_{p,\pi,g}$ гомеоморфно некоторому компактному подмножеству прямого произведения $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S}$. Для этого рассмотрим следующее непрерывное отображение

$$\phi : \Delta_{p,\pi,g} \to \mathbb{C}^4, \quad \phi(h) = \left(\widehat{P}(h), \widehat{R_\pi}(h), \widehat{Y}_1(h), \widehat{Y}_2(h) \right),$$

составленное из преобразований Гельфанда соответствующих операторов. Непрерывность ϕ следует из способа введения топологии на пространстве максимальных идеалов. Если $h \in \Delta_{p,\pi,g}$, т.е. h — это комплексный гомоморфизм алгебы $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$, то h будет также комплексным гомоморфизмом подалгебр $\mathfrak{A}_{p,\pi}$ и $\mathfrak{A}_g$. Поэтому пара $(\widehat{P}(h), \widehat{R_\pi}(h)) = (h(P), h(R_\pi))$ принимает значения в $\mathbb{S} \times \{\pm 1\}$, а

$$(\widehat{Y_1}(h), \widehat{Y_2}(h)) = (h(Y_1), h(Y_2)) = (y_1(\xi^h), y_2(\xi^h)) \in \mathbb{S},$$

так что образ непрерывного отображения ϕ лежит в $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S}$.

Если предположить, что $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т.е. гомоморфизмы h_1 и h_2 совпадают на операторах P, R_π, Y_1 и Y_2, то они будут совпадать и на операторах (2.3), где в качестве $G_m^\pm \in \mathfrak{A}_g$ берутся полиномы от Y_1, Y_2, всюду плотные в $\mathfrak{A}_g$. Такие операторы (2.3) будут плотны в $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$, так что $h_1 = h_2$ в силу непрерывности h_1, h_2, и отображение ϕ взаимно однозначно. Следовательно, ϕ есть гомеоморфизм $\Delta_{p,\pi,g}$ на некоторый компакт $\mathbf{K} \subset \mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S}$. Комбинируя этот вывод с теоремой Гельфанда–Наймарка, приходим к изометрическому изоморфизму

$$\Psi : \mathfrak{A}_{p,\pi,g} \to C(\mathbf{K}), \quad \Psi(L) = \widehat{L} \circ \phi^{-1} \ (L \in \mathfrak{A}_{p,\pi,g}).$$

Непосредственно из определения ϕ следует, что

$$\Psi(P)(\lambda, w, \eta) = \widehat{P}\left(\phi^{-1}(\lambda, w, \eta)\right) = \lambda,$$

$$\Psi(R_\pi)(\lambda, w, \eta) = \widehat{R_\pi}\left(\phi^{-1}(\lambda, w, \eta)\right) = w,$$

$$\Psi(Y_i)(\lambda, w, \eta) = \widehat{Y_i}\left(\phi^{-1}(\lambda, w, \eta)\right) = \eta_i \quad (i = 1, 2).$$

Образом полинома от Y_1, Y_2 при изоморфизме Ψ будет такой же полином от η_1, η_2, а тогда для любой функции $g(\xi)$ из $C(\mathbb{PR}^1)$ соответствующий оператор G перейдет в функцию $\alpha(\eta) = g(\upsilon^{-1}(\eta_1, \eta_2))$, т.е. g переносится с $\mathbb{PR}^1$ на $\mathbb{S}$ при помощи гомеоморфизма (2.2). В итоге получаем, что операторам вида (2.3) при изоморфизме Ψ отвечают функции $\sum \alpha_m^+(\eta)\lambda^m + \sum \alpha_m^-(\eta)\lambda^m w$ на $\mathbf{K}$, где $\alpha_m^\pm$ пробегают все пространство $C(\mathbb{S})$.

Поскольку Ψ — изометрия, имеем

$$\left\| \sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi \right\| =$$

$$= \sup\left\{ \left| \sum \alpha_m^+(\eta)\lambda^m + \sum \alpha_m^-(\eta)\lambda^m w \right| : (\lambda, w, \eta) \in \mathbf{K} \right\}.$$

Отсюда и из леммы 2.1 вытекает оценка

$$\sup_{\xi_1:\xi_2\in\mathbb{PR}^1}\Big(\sum|g_m^+(\xi)|^2+|g_m^-(\xi)|^2\Big)^{1/2}\leqslant\sup_{\mathbf{K}}\Big|\sum\alpha_m^+(\eta)\lambda^m+\sum\alpha_m^-(\eta)\lambda^m w\Big|$$

или

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}}\Big(\sum|\alpha_m^+(\eta)|^2+|\alpha_m^-(\eta)|^2\Big)^{1/2}\leqslant\sup_{\mathbf{K}}\Big|\sum(\alpha_m^+(\eta)+\alpha_m^-(\eta)w)\lambda^m\Big|=$$

$$=\max\left\{\sup_{\mathbf{K}_+}\Big|\sum(\alpha_m^+(\eta)+\alpha_m^-(\eta))\lambda^m\Big|,\ \sup_{\mathbf{K}_-}\Big|\sum(\alpha_m^+(\eta)-\alpha_m^-(\eta))\lambda^m\Big|\right\},\tag{2.4}$$

которая выполняется для любых конечных сумм и функций $\alpha_m^{\pm}\in C(\mathbb{S})$ и выражает ключевое свойство компакта $\mathbf{K}$. Здесь $\mathbf{K}_{\pm}=\{(\lambda,\eta)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}:(\lambda,\pm1,\eta)\in\mathbf{K}\}$.

При $\alpha_m^-=\alpha_m^+=\alpha_m$ неравенство (2.4) превращается в

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}}\Big(\sum|\alpha_m(\eta)|^2\Big)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\sup_{\mathbf{K}_+}\Big|\sum\alpha_m(\eta)\lambda^m\Big|.\tag{2.5}$$

Покажем, что такое может быть лишь в случае, когда $\mathbf{K}_+=\mathbb{S}\times\mathbb{S}$. Предположим противное: открытое множество $(\mathbb{S}\times\mathbb{S})\setminus\mathbf{K}_+$ непусто. Тогда оно содержит множество вида $U\times V$, где U и V открыты в $\mathbb{S}$. Возьмем не равные тождественно нулю функции $\beta\in C^\infty(\mathbb{S})$ и $\alpha\in C(\mathbb{S})$ с носителями в U и V соответственно, и пусть β_m — коэффициенты Фурье функции β по ортонормированному базису $\{(2\pi)^{-1/2}e^{im\theta}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(\mathbb{S})$. Рассмотрим последовательность

$$\sum_{|m|\leqslant N}\alpha(\eta)\beta_m\lambda^m\quad(N=0,1,\ldots),$$

стремящуюся к нулю равномерно на $(\mathbb{S}\setminus U)\times\mathbb{S}$ и равную нулю тождественно на $\mathbb{S}\times(\mathbb{S}\setminus V)$. Поскольку

$$\mathbf{K}_+\subset(\mathbb{S}\times\mathbb{S})\setminus(U\times V)=(\mathbb{S}\setminus U)\times\mathbb{S}\bigcup\mathbb{S}\times(\mathbb{S}\setminus V),$$

имеем

$$\sup_{\mathbf{K}_+}\left|\sum_{|m|\leqslant N}\alpha(\eta)\beta_m\lambda^m\right|\to0,\ N\to\infty.$$

В то же время, последовательность

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}}\sum_{|m|\leqslant N}|\alpha(\eta)\beta_m|^2=\|\alpha\|^2_{C(\mathbb{S})}\sum_{|m|\leqslant N}|\beta_m|^2$$

стремится в силу равенства Парсеваля к $\|\alpha\|^2_{C(\mathbb{S})}\|\beta\|^2_{L_2(\mathbb{S})}\neq 0$, что противоречит оценке (2.5). Таким образом, $\mathbf{K}_+=\mathbb{S}\times\mathbb{S}$. Аналогично показывается, что $\mathbf{K}_-=\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ (для этого в (2.4) надо положить $\alpha_m^-=-\alpha_m^+$), так что $\mathbf{K}=\mathbb{S}\times\{\pm1\}\times\mathbb{S}$. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться гомеоморфизмом (2.2), при помощи которого функции из $C(\mathbb{S}\times\{\pm1\}\times\mathbb{S})$ переносятся на $\mathbb{S}\times\{\pm1\}\times\mathbb{PR}^1$. Итак, алгебра $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$ изометрически изоморфна алгебре $C(\mathbb{S}\times\{\pm1\}\times\mathbb{PR}^1)$, а образом оператора (2.3) при этом изоморфизме (символом оператора) будет функция

$$\sum g_m^+(\xi)\lambda^m+\sum g_m^-(\xi)\lambda^m w\quad(\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|=1,\,w=\pm1,\,\xi_1:\xi_2\in\mathbb{PR}^1)$$

или, что то же самое, пара функций

$$\sum\left(g_m^+(\xi)\pm g_m^-(\xi)\right)\lambda^m\quad(\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|=1,\,\xi_1:\xi_2\in\mathbb{PR}^1).$$

$\square$

Из описанного выше изоморфизма вытекает следующий критерий положительной определенности операторов алгебры $\mathfrak{A}_{p,\pi,g}$.

Следствие 2.1. *Оператор* (2.3) *положительно определен в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *тогда и только тогда, когда* $\sum\left(g_m^+(\xi)\pm g_m^-(\xi)\right)\lambda^m>0$ *при всех* $\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|=1$, *и* $\xi_1:\xi_2\in\mathbb{PR}^1$.

2.2 Разрешимость краевой задачи

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Определим оператор $T(P,R_\pi)$ на функциях из $L_2(\Omega)$ следующим образом: вначале функция $u\in L_2(\Omega)$ продолжается нулем в $\mathbb{R}^2\setminus\Omega$, затем к этому продолжению применяется действующий в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор $T(P,R_\pi)$, а после результат действия оператора сужается на Ω. Понятно, что в этом случае мы также имеем ограниченный линейный оператор $T(P,R_\pi):L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, причем из положительной определенности оператора $T(P,R_\pi)$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ следует, очевидно, его положительная определенность в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mu u + \sum_{i,j=1}^{2} (T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i})_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{2.6}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.7}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $f \in L_2(\Omega)$, а операторы $T_{ij}(P, R_\pi)$ задаются формулами

$$T_{ij}(P, R_\pi) = \sum a_{ijm} P^m + \sum b_{ijm} P^m R_\pi,$$

где $a_{ijm}, b_{ijm} \in \mathbb{C}$, а индекс суммирования m пробегает конечное подмножество $\mathbb{Z}$.

Введем функции

$$g_m^+(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ijm} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \quad g_m^-(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijm} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \quad g_m^\pm \in C(\mathbb{PR}^1), \tag{2.8}$$

и назовем символом уравнения (2.6) пару $\sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right) \lambda^m$, определенную на множестве $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1,\ \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$.

Обобщенным решением задачи (2.6), (2.7) назовем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{i,j=1}^{2} (T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Уравнение (2.6) назовем сильно эллиптическим в Ω, если существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ такие, что неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{2} \left(T_{ij}(P, R_\pi) u_{x_i}, u_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{2.9}$$

выполнено при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Пусть*

$$\operatorname{Re} \sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right) \lambda^m > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1). \tag{2.10}$$

Тогда для всякой ограниченной области Ω *уравнение* (2.6) *является сильно эллиптическим в* Ω.

Доказательство. Применим преобразование Фурье $u(x) \mapsto \tilde{u}(\xi)$ ($u \in C_0^\infty(\Omega)$) и учтем, что

$$Pu(x) \mapsto P^*\tilde{u}(\xi), \quad R_\pi u(x) \mapsto R_\pi \tilde{u}(\xi).$$

Тогда по теореме Планшереля

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{2}\left(T_{ij}(P,R_\pi)u_{x_i},u_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} = \operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\xi_j\overline{\tilde{u}(\xi)}\,T_{ij}(P^*,R_\pi)[\xi_i\tilde{u}(\xi)]\,d\xi =$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-1}\xi_j\overline{v(\xi)}\,T_{ij}(P^*,R_\pi)[|\xi|^{-1}\xi_i v(\xi)]\,d\xi,$$

где $v(\xi) = |\xi|\tilde{u}(\xi)$. После очевидных выкладок

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\xi_j}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\left(\sum a_{ijm}P^{*m} + \sum b_{ijm}P^{*m}R_\pi\right)\left[\frac{\xi_i}{|\xi|}v(\xi)\right] =$$

$$= \overline{v(\xi)}\left(\sum G_m^+P^{*m} - \sum G_m^-P^{*m}R_\pi\right)v(\xi)$$

с учетом обозначений (2.8) левая часть неравенства (2.9) приобретает вид

$$\operatorname{Re}\left(\left(\sum G_m^+P^{*m} - \sum G_m^-P^{*m}R_\pi\right)v,v\right)_{L_2(\mathbb{R}^2_\xi)}.$$

Ввиду следствия 2.1 условие теоремы означает, что эрмитова часть оператора полученной квадратичной формы положительно определена. Действительно, неравенства $\operatorname{Re}\sum\left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right)\lambda^m > 0$ равносильны неравенствам $\operatorname{Re}\sum\left(g_m^+(\xi) \mp g_m^-(\xi)\right)\bar{\lambda}^m > 0$ на множестве $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, и $\xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$. Окончательно имеем

$$\operatorname{Re}\left(\left(\sum G_m^+P^{*m} - \sum G_m^-P^{*m}R_\pi\right)v,v\right)_{L_2(\mathbb{R}^2_\xi)} \geqslant \gamma\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \gamma\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \gamma\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \gamma\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma = \min\left\{\operatorname{Re}\sum\left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\right)\lambda^m\right\}.$$

□

Замечание 2.1. Условие (2.10) можно также записать следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\xi_i\xi_j\operatorname{Re}\mathbf{t}_{ij}^{\pm}(\lambda) > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2), \tag{2.11}$$

где $\mathbf{t}_{ij}^{\pm}(\lambda) = \sum(a_{ijm} \pm b_{ijm})\lambda^m$.

Замечание 2.2. Применяя рассуждения, аналогичные используемым при доказательстве теоремы 1.3, нетрудно убедиться, что положительность вещественной части символа является также необходимым условием сильной эллиптичности в случае, когда область Ω содержит начало координат. Далее мы исследуем необходимые условия сильной эллиптичности при более общем предположении относительно области. Для этого нам понадобится матричный подход, который применялся вначале для исследования дифференциально-разностных уравнений [38, 39], а затем уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов [9].

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и выберем произвольную ограниченную область O_1 на плоскости такую, что все области

$$O_k^+ = p^{1-k} O_1,\ O_k^- = -O_k^+ \quad (k = 1, \ldots, N)$$

попарно не пересекаются. Положим $O = \bigcup_{k=1}^{N} (O_k^+ \cup O_k^-)$. Всякой заданной в O функции $u(x)$ поставим в соответствие вектор-функцию

$$\mathbf{u} = (u_1^+, \ldots, u_N^+, u_1^-, \ldots, u_N^-)^T,$$

$$u_k^+(x) = p^{1-k} u(p^{1-k}x),\ u_k^-(x) = p^{1-k} u(-p^{1-k}x) \quad (k = 1, \ldots, N;\ x \in O_1),$$

определенную в O_1, при этом отображение $u \mapsto \mathbf{u}$ из $L_2(O)$ в $L_2^{2N}(O_1)$ является, очевидно, унитарным. Далее, по заданному оператору $T = \sum (a_m I + b_m R_\pi) P^m$ строим $N \times N$-матрицы $\mathbf{T}^+$ и $\mathbf{T}^-$ с элементами

$$t_{kl}^+ = a_{l-k},\ t_{kl}^- = b_{l-k} \quad (k, l = 1, \ldots, N),$$

и составляем блочную матрицу

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^+ & \mathbf{T}^- \\ \mathbf{T}^- & \mathbf{T}^+ \end{bmatrix}$$

порядка $2N \times 2N$. Если $v = Tu$ и $\mathbf{v} = (v_1^+, \ldots, v_N^+, v_1^-, \ldots, v_N^-)^T$ — соответствующая v вектор-функция в O_1, то $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}$. Действительно,

$$v_k^+(x) = p^{1-k} T u(p^{1-k}x) =$$

$$= \sum_m p^{1-k} \left(a_m p^{-m} u(p^{1-(k+m)}x) + b_m p^{-m} u(-p^{1-(k+m)}x) \right) =$$

$$= \sum_l \left(a_{l-k} p^{1-l} u(p^{1-l}x) + b_{l-k} p^{1-l} u(-p^{1-l}x) \right) = \sum_{l=1}^{N} (t^+_{kl} u^+_l(x) + t^-_{kl} u^-_l(x)),$$

$$v^-_k(x) = p^{1-k} T u(-p^{1-k}x) =$$

$$= \sum_m p^{1-k} \left(a_m p^{-m} u(-p^{1-(k+m)}x) + b_m p^{-m} u(p^{1-(k+m)}x) \right) =$$

$$= \sum_l \left(a_{l-k} p^{1-l} u(-p^{1-l}x) + b_{l-k} p^{1-l} u(p^{1-l}x) \right) = \sum_{l=1}^{N} (t^-_{kl} u^+_l(x) + t^+_{kl} u^-_l(x)).$$

Лемма 2.2. *Пусть матрицы* $\mathbf{T} + \mathbf{T}^*$ *равномерно по* N *положительно определены, т.е. существует постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$\operatorname{Re}(\mathbf{Tz}, \mathbf{z}) \geqslant c|\mathbf{z}|^2 \quad (N = 1, 2, \ldots; \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N).$$

Тогда оператор $T + T^* : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ *положительно определен.*

Доказательство. Для произвольных $N \in \mathbb{N}$ и $M > 0$ положим

$$O_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \, p^{-1}M < |x| < M, x_2 > 0\}, \quad O = \bigcup_{k=1}^{N} (O^+_k \cup O^-_k).$$

Ясно, что все области $O^+_k = p^{1-k} O_1$, $O^-_k = -O^+_k$ $(k = 1, \ldots, N)$ попарно не пересекаются. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $u = 0$ вне O и $v = Tu$. Используя условие леммы, унитарность отображения $u \mapsto \mathbf{u}$, и соотношение $\mathbf{v} = \mathbf{Tu}$, можем записать

$$\operatorname{Re}(Tu, u)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \operatorname{Re}(v, u)_{L_2(O)} = \operatorname{Re}(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{L_2^{2N}(O_1)} =$$

$$= \operatorname{Re}(\mathbf{Tu}, \mathbf{u})_{L_2^{2N}(O_1)} \geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{L_2^{2N}(O_1)} = c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

причем c не зависит от N, M, u. Но при всевозможных M и N функция u пробегает всюду плотное в $L_2(\mathbb{R}^2)$ подмножество. Поэтому неравенство

$$\operatorname{Re}(Tu, u)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$$

выполняется для любых $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$. □

Теорема 2.3. *Пусть ограниченная область* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *обладает следующим свойством: для любого натурального числа* N *найдется точка* $x^0 \in \Omega$ *такая, что точки* $\pm p^{1-k} x^0$ $(k = 1, \ldots, N)$ *также принадлежат* Ω*. Тогда, если уравнение* (2.6) *сильно эллиптическое в* Ω*, то имеет место неравенство* (2.11).

Замечание 2.3. В условии теоремы, очевидно, $0 \in \overline{\Omega}$, при этом условие заведомо выполнено, если $0 \in \Omega$. С другой стороны, легко видеть, что одного лишь требования $0 \in \overline{\Omega}$ недостаточно для выполнения условия теоремы.

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. Ясно, что в условии теоремы можно взять круг O_1 с центром в точке x^0 настолько малого радиуса, что все круги $O_k^+ = p^{1-k}O_1$, $O_k^- = -O_k^+$ (с центрами в точках $\pm p^{1-k}x^0$, $k = 1, \ldots, N$) целиком лежат в Ω и попарно не пересекаются. В таком случае можно подставлять в неравенство (2.9) функции с носителями в $O = \bigcup_{k=1}^{N}(O_k^+ \cup O_k^-)$: $u \in C_0^\infty(O) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Наряду с вектор-функцией

$$\mathbf{u} = (u_1^+, \ldots, u_N^+, u_1^-, \ldots, u_N^-)^T \in C_0^{\infty,2N}(O_1),$$

нам понадобится вектор-функция

$$\mathbf{w} = (w_1^+, \ldots, w_N^+, w_1^-, \ldots, w_N^-)^T \in C_0^{\infty,2N}(O_1), \quad w_k^\pm(x) = \pm p^{k-1}u_k^\pm(x).$$

Справедливы соотношения ($j = 1, 2$)

$$(u_{x_j})_k^+(x) = p^{1-k}u_{x_j}(p^{1-k}x) = p^{k-1}p^{1-k}\left(u(p^{1-k}x)\right)_{x_j} = p^{k-1}u_{kx_j}^+(x) = w_{kx_j}^+(x),$$

$$(u_{x_j})_k^-(x) = p^{1-k}u_{x_j}(-p^{1-k}x) = -p^{k-1}p^{1-k}\left(u(-p^{1-k}x)\right)_{x_j} =$$
$$= -p^{k-1}u_{kx_j}^-(x) = w_{kx_j}^-(x),$$

т.е. функции u_{x_j} отвечает вектор-функция $\mathbf{w}_{x_j}$ в круге O_1. Отсюда получаем

$$\left(T_{ij}(P, R_\pi)u_{x_i}, u_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} = \left(T_{ij}(P, R_\pi)u_{x_i}, u_{x_j}\right)_{L_2(O)} = (\mathbf{T}_{ij}\mathbf{w}_{x_i}, \mathbf{w}_{x_j})_{L_2^{2N}(O_1)},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{2}\|u_{x_j}\|_{L_2(O)}^2 = \sum_{j=1}^{2}\|\mathbf{w}_{x_j}\|_{L_2^{2N}(O_1)}^2 = \|\mathbf{w}\|_{H^{1,2N}(O_1)}^2,$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{N}\left(\|u_k^+\|_{L_2(O_1)}^2 + \|u_k^-\|_{L_2(O_1)}^2\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}p^{2(1-k)}\left(\|w_k^+\|_{L_2(O_1)}^2 + \|w_k^-\|_{L_2(O_1)}^2\right) \leqslant \|\mathbf{w}\|_{L_2^{2N}(O_1)}^2.$$

Неравенство (2.9) принимает вид

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{2}(\mathbf{T}_{ij}\mathbf{w}_{x_i},\mathbf{w}_{x_j})_{L_2^{2N}(O_1)} \geqslant c_1\|\mathbf{w}\|^2_{H^{1,2N}(O_1)} - c_2\|\mathbf{w}\|^2_{L_2^{2N}(O_1)},$$

где $\mathbf{w}\in C_0^{\infty,2N}(O_1)$ — произвольная вектор-функция. Отсюда и из классических результатов о сильно эллиптических системах [3] следует, что для всех натуральных N матричный оператор $-\sum_{i,j=1}^{2}\partial_j\mathbf{T}_{ij}\partial_i$ сильно эллиптический:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\xi_i\xi_j\big((\mathbf{T}_{ij}+\mathbf{T}_{ij}^*)\mathbf{z},\mathbf{z}\big) \geqslant \frac{c_1}{2}|\xi|^2|\mathbf{z}|^2 \quad (\xi\in\mathbb{R}^2,\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N).$$

При этом c_1 — это постоянная из неравенства (2.9), т.е. c_1 не зависит в том числе и от N. Получается, что для каждого вектора $\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ матрицы $\sum\limits_{i,j=1}^{2}\xi_i\xi_j(\mathbf{T}_{ij}+\mathbf{T}_{ij}^*)$ положительно определены равномерно по N. По лемме 2.2 функциональный оператор

$$\sum_{i,j=1}^{2}\xi_i\xi_j(T_{ij}+T_{ij}^*) : L_2(\mathbb{R}^2)\to L_2(\mathbb{R}^2)$$

положительно определен при любом ненулевом векторе ξ, который играет здесь роль параметра. Поэтому

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{2}\xi_i\xi_j\mathbf{t}_{ij}^{\pm}(\lambda)>0 \quad (\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|=1,0\neq\xi\in\mathbb{R}^2).$$

$\square$

Следствие 2.2. *Предположим, что для уравнения* (2.6) *выполнено условие* (2.11)*. Тогда для любой ограниченной области* Ω *спектр краевой задачи* (2.6), (2.7) *состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается в правой полуплоскости* $\operatorname{Re}\mu>0$ *внутри симметричного угла с вершиной в нуле, охватывающего положительную вещественную полуось, раствора меньше* π*. В частности, при* $\mu=0$ *краевая задача* (2.6), (2.7) *имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f\in L_2(\Omega)$*. При любом* $\mu\in\mathbb{C}$ *задача* (2.6), (2.7) *фредгольмова.*

Доказательство проводится стандартными методами функционального анализа, см., например, [9, 20, 39]. Тем не менее, для связности изложения приведем соответствующие рассуждения. Они носят достаточно общий характер и опираются на неравенство (2.9), позволяющее ввести в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ эквивалентное скалярное произведение.

Формулой

$$\mathfrak{a}[u,v] = \sum_{i,j=1}^{2} \left(T_{ij}(P,R_\pi)u_{x_i}, u_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)}$$

зададим полуторалинейную форму $\mathfrak{a}[u,v]$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(\mathfrak{a}) = \mathring{H}^1(\Omega)$ плотной в $L_2(\Omega)$. В случае, когда уравнение сильно эллиптическое, можем записать

$$\operatorname{Re}\mathfrak{a}[u,u] \geqslant \gamma \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in D(\mathfrak{a})) \tag{2.12}$$

(см. доказательство теоремы 2.2; доказанное для гладких финитных функций неравенство, очевидно, распространяется и на все функции из $\mathring{H}^1(\Omega)$ в силу плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $\mathring{H}^1(\Omega)$ и ограниченности операторов T_{ij} в $L_2(\Omega)$). Кроме того, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\mathfrak{a}[u,v]| \leqslant M \||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)} \||\nabla v|\|_{L_2(\Omega)} \quad (u,v \in D(\mathfrak{a})). \tag{2.13}$$

Поэтому формула

$$(u,v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}[u,v] + \overline{\mathfrak{a}[v,u]}\right) \tag{2.14}$$

задает эквивалентное скалярное произведение на пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$. Это скалярное произведение и будет использоваться далее в доказательстве.

Лемма 2.3. *Форма $\mathfrak{a}[u,v]$ порождает самосопряженный оператор S в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ посредством равенства*

$$\frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}[u,v] - \overline{\mathfrak{a}[v,u]}\right) = (u, Sv)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} \quad (u,v \in \mathring{H}^1(\Omega)), \tag{2.15}$$

причем $\|S\|' \leqslant M/\gamma$, где $\|.\|'$ есть операторная норма, отвечающая норме $\|.\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)}$.

Доказательство. Левая часть равенства (2.15) является (при фиксированной функции v) непрерывным по u линейным функционалом на пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$. Действительно,

$$\left|\frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}[u,v]-\overline{\mathfrak{a}[v,u]}\right)\right| \leqslant M\||\nabla v|\|_{L_2(\Omega)}\||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{M}{\gamma}\|v\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)}\|u\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве существует (единственная) функция $\omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$ такая, что

$$\frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}[u,v]-\overline{\mathfrak{a}[v,u]}\right) = (u,\omega)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}, \quad \|\omega\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant \frac{M}{\gamma}\|v\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

Соответствие $v \mapsto \omega$ является, очевидно, линейным; обозначим $\omega = Sv$. Имеем $\|S\|' \leqslant M/\gamma$. Поменяв местами u и v, запишем

$$(v,Su)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}[v,u]-\overline{\mathfrak{a}[u,v]}\right),$$

поэтому

$$(Su,v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \overline{(v,Su)'}_{\mathring{H}^1(\Omega)} = -\frac{1}{2i}\left(\overline{\mathfrak{a}[v,u]}-\mathfrak{a}[v,u]\right) = (u,Sv)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

□

Доказательство следствия 2.2. Рассмотрим задачу (2.6), (2.7) вначале при $\mu = 0$. Интегральное тождество

$$-\sum_{i,j=1}^{2}(T_{ij}(P,R_\pi)u_{x_i},v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)}$$

для определения ее обобщенного решения может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}[u,v]+\overline{\mathfrak{a}[v,u]}\right) + i\frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}[u,v]-\overline{\mathfrak{a}[v,u]}\right) = -(f,v)_{L_2(\Omega)}$$

или, принимая во внимание лемму (2.3),

$$(u,v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} + i(Su,v)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Скалярное произведение $(f,v)_{L_2(\Omega)}$ является относительно v непрерывным антилинейным функционалом на пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ и по теореме Рисса порождает ограниченный линейный оператор $\Lambda : L_2(\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$ такой, что

$$(\Lambda f, v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Таким образом, исходная краевая задача записывается в виде операторного уравнения

$$(I + iS)u = -\Lambda f$$

в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$.

Оператор iS кососимметрический, поэтому существует ограниченный обратный оператор $(I+iS)^{-1} : \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$. Другими словами, задача имеет единственное решение $u = -(I+iS)^{-1}\Lambda f$. Подставляя $v = u$ в (2.16), будем иметь

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + i(Su, u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)} = -(f, v)_{L_2(\Omega)},$$

откуда, приравнивая вещественные части, получим

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} = -\operatorname{Re}(f, u)_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}$$

(учли, что выражение $i(Su, u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}$ принимает чисто мнимые значения). С другой стороны, применяя неравенство Фридрихса для функций из $\mathring{H}^1(\Omega)$, видим, что

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \operatorname{Re}\mathfrak{a}[u, u] \geqslant \gamma\, \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{\gamma}{d^2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $d = \operatorname{diam}\Omega$. Комбинируя последние два неравенства, выводим оценку для решения:

$$\|u\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant \frac{d}{\sqrt{\gamma}}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Рассмотрим теперь задачу (2.6), (2.7) при произвольном $\mu \neq 0$:

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - \mathfrak{a}[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Она аналогичным образом сводится к операторному уравнению

$$\mu\Lambda u - (I + iS)u = \Lambda f.$$

В силу компактности вложения $\mathring{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и ограниченности оператора $\Lambda : L_2(\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$ сужение Λ_0 оператора Λ на $\mathring{H}^1(\Omega)$ есть компактный оператор в $\mathring{H}^1(\Omega)$, и композиция $(I+iS)^{-1}\Lambda_0$ также есть компактный оператор в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Таким образом, приходим к уравнению Фредгольма

$$(\mu^{-1}I-(I+iS)^{-1}\Lambda_0)u=-\mu^{-1}(I+iS)^{-1}\Lambda f.$$

Это означает, что задача (2.6), (2.7) фредгольмова. При этом $\mu\neq 0$ принадлежит спектру краевой задачи (2.6), (2.7) тогда и только тогда, когда число $1/\mu$ является (ненулевым) собственным значением компактного оператора $(I+iS)^{-1}\Lambda_0:\mathring{H}^1(\Omega)\to\mathring{H}^1(\Omega)$. Отметим, что компактный оператор $\Lambda_0:\mathring{H}^1(\Omega)\to\mathring{H}^1(\Omega)$ является положительным:

$$(\Lambda_0 u,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}=\|u\|^2_{L_2(\Omega)}>0 \text{ при } u\neq 0.$$

Убедимся теперь, что все собственные значения краевой задачи лежат в угле, охватывающем положительную вещественную полуось. Предположим, что для функции $u\in\mathring{H}^1(\Omega)$, $\|u\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)}=1$, выполнено

$$\mu(u,v)_{L_2(\Omega)}=\mathfrak{a}[u,v]\quad(v\in\mathring{H}^1(\Omega))$$

или, в равносильной записи,

$$\mu(\Lambda_0 u,v)'=((I+iS)u,v)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}\quad(v\in\mathring{H}^1(\Omega)).$$

Полагая здесь $v=u$, будем иметь

$$\operatorname{Re}\mu\,(\Lambda_0 u,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}+i\operatorname{Im}\mu\,(\Lambda_0 u,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}=1+i(Su,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

Приравниваем действительные и мнимые части:

$$\operatorname{Re}\mu\,(\Lambda_0 u,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}=1,\quad \operatorname{Im}\mu\,(\Lambda_0 u,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}=(Su,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

С учетом $(\Lambda_0 u,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}>0$ отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\mu>0,\quad \frac{\operatorname{Im}\mu}{\operatorname{Re}\mu}=(Su,u)'_{\mathring{H}^1(\Omega)}.$$

Лемма 2.3 дает ($\|u\|'_{\mathring{H}^1(\Omega)}=1$)

$$\frac{|\operatorname{Im}\mu|}{\operatorname{Re}\mu}\leqslant\|S\|'\leqslant\frac{M}{\gamma}.$$

Следствие доказано.

$\square$

Замечание 2.4. Здесь уместно сделать важное замечание, касающееся дальнейших следствий из неравенства типа Гординга, которые также основаны на общих известных рассуждениях. Неравенства (2.12) и (2.13) означают, что полуторалинейная форма $\mathfrak{a}$ замкнутая и секториальная, а соответствующая квадратичная форма $\mathfrak{a}[u,u]$, $0 \neq u \in D(\mathfrak{a})$, принимает значения в угле

$$\{0 \neq \lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \arctan(M/\gamma)\}.$$

В соответствии с первой теоремой о представлении [6, гл. IV, теорема 2.1], формой $\mathfrak{a}$ однозначно определен m-секториальный (по Т. Като) оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathfrak{a})$, такой, что $\mathfrak{a}[u,v] = (\mathcal{A}u, v)_{L_2(\Omega)}$ при $u \in D(\mathcal{A})$, $v \in D(\mathfrak{a})$. Обобщенное решение краевой задачи есть решение операторного уравнения $(\mu I - \mathcal{A})u = f$ в $L_2(\Omega)$. Типичной ситуацией будет $D(\mathcal{A}) \not\subset H^2_{loc}(\Omega)$, т.е. для функционально-дифференциальных уравнений рассматриваемых классов характерно нарушение гладкости обобщенных решений. Нетрудно также показать, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы (см., например, [36, теорема 3.4]).

Кроме того, с исследованием неравенства типа Гординга связана известная проблема Т. Като [29] о совпадении областей определения квадратных корней $\mathcal{A}^{1/2}$ и $\mathcal{A}^{*1/2}$. В работах [31,32] для абстрактных операторов A были получены достаточные условия совпадения областей определения операторов $A^{1/2}$ и $A^{*1/2}$, а также были построены примеры операторов с числовой областью значений в сколь угодно малом угле, охватывающем положительную вещественную полуось, для которых указанные области определения не совпадают. Дальнейшее развитие эти исследования в приложении к дифференциальным и функционально-дифференциальным операторам получили в работах [21, 23, 24, 41].

Конечно, все сказанное в этом замечании относится в равной степени и к задаче (1.4) из главы 1.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij0}u_{x_i}(x)+a_{ij1}p^{-1}u_{x_i}(x/p)+b_{ij0}u_{x_i}(-x)\right)_{x_j}=f(x)\quad (x\in\Omega). \tag{2.17}$$

Его символом будет выражение $g_0^+(\xi)\pm g_0^-(\xi)+g_1^+(\xi)\lambda$, где

$$g_0^+(\xi)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij0}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2},\quad g_0^-(\xi)=\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij0}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2},\quad g_1^+(\xi)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij1}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}.$$

Условие $\mathrm{Re}\,(g_0^+(\xi)\pm g_0^-(\xi)+g_1^+(\xi)\lambda)>0$ при $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|=1$, $\xi\neq 0$ сводится, очевидно, к неравенству

$$|\operatorname{Re} g_0^-(\xi)|+|g_1^+(\xi)|<\operatorname{Re} g_0^+(\xi)\quad (|\xi|=1).$$

При его выполнении уравнение (2.17) сильно эллиптическое, и для любой ограниченной области Ω задача Дирихле для уравнения (2.17) в Ω однозначно разрешима.

Пример 2.2. Для уравнения

$$-\Delta u(x)-2\left(ap^{-1}u_{x_1}(x/p)+bu_{x_1}(-x)\right)_{x_2}=f(x)\quad (x\in\Omega) \tag{2.18}$$

условие (2.11) выглядит следующим образом:

$$\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\,\mathrm{Re}(a\lambda\pm b)>0\quad (\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|=1,\xi\neq 0).$$

Данное неравенство сводится, очевидно, к проверке условия $-1<\mathrm{Re}(a\lambda\pm b)<1$ для всех $|\lambda|=1$, что равносильно $|a|+|\operatorname{Re} b|<1$. Итак, при $|a|+|\operatorname{Re} b|<1$ задача Дирихле для уравнения (2.18) в ограниченной области Ω однозначно разрешима.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij0}u_{x_i}(x)+b_{ij1}u_{x_i}(-x/p)\right)_{x_j}=f(x)\quad (x\in\Omega). \tag{2.19}$$

Его символом будет выражение $g_0^+(\xi)\pm g_1^-(\xi)\lambda$, где

$$g_0^+(\xi)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij0}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2},\quad g_1^-(\xi)=\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij1}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}.$$

Условие $\operatorname{Re}(g_0^+(\xi) \pm g_1^-(\xi)\lambda) > 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $\xi \neq 0$ сводится к проверке неравенства

$$|g_1^-(\xi)| < \operatorname{Re} g_0^+(\xi) \quad (|\xi| = 1).$$

При его выполнении уравнение (2.19) сильно эллиптическое, и для любой ограниченной области Ω задача Дирихле для уравнения (2.19) в Ω однозначно разрешима.

Пример 2.4. Для уравнения

$$-\Delta u(x) - 2\left(au_{x_1}(x) + bu_{x_1}(-x/p)\right)_{x_2} = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.20}$$

условие (2.11) выглядит следующим образом:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \operatorname{Re}(a \pm b\lambda) > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi \neq 0).$$

Данное неравенство сводится к проверке условия $-1 < \operatorname{Re}(a \pm b\lambda) < 1$ для всех $|\lambda| = 1$, что равносильно $|\operatorname{Re} a| + |b| < 1$. Получаем, что при $|\operatorname{Re} a| + |b| < 1$ задача Дирихле для уравнения (2.20) в ограниченной области Ω однозначно разрешима.

Глава 3

Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сдвигами

В настоящей главе рассматривается модельное (функциональный оператор под знаком лапласиана) уравнение, содержащее и сдвиг, и растяжение. Возникающие при этом трудности связаны с тем, что растяжение и сдвиг являются некоммутирующими преобразованиями. Кроме того, наличие в уравнении одновременно растяжения и сдвига приводит к появлению бесконечного числа неподвижных точек для преобразований аргументов. Задача рассматривается в предположении, что все эти неподвижные точки принадлежат замыканию рассматриваемой области. Условия однозначной разрешимости краевой задачи выражены при помощи формулы спектрального радиуса для соответствующего класса функциональных операторов. Ее использование связано с вычислением пределов некоторого типа, которые даже в самых простых случаях обнаруживают удивительную «хаотическую» зависимость от коэффициента сжатия. Важным дополнением к тексту главы является последний параграф, в котором эта зависимость анализируется. При этом обнаружены новые тесные связи между теорией функционально-дифференциальных уравнений и теорией динамических систем.

3.1 Свойства функционального оператора с растяжением и сдвигами аргумента

Пусть K — некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$, и $\nu \in (C(K))^*$ — регулярная (комплексная) борелевская мера, сосредоточенная на этом компакте. Для функций, заданных в $\mathbb{R}^n$, рассмотрим операцию свертки

$$(\nu * u)(x) = \int\limits_K u(x-h)\, d\nu(h).$$

Понятно, что для непрерывной финитной функции u, $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$, свертка также будет непрерывной финитной функцией, причем $\operatorname{supp}(\nu * u) \subset \operatorname{supp} u + K$. Если же $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то и $(\nu * u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Действительно, в этом случае для любой точки x семейство $t^{-1}(u(x+te_j-h) - u(x-h))$ сходится к $u_{x_j}(x-h)$ при $t \to 0$ равномерно по $h \in K$, и можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$(\nu * u)_{x_j} = \nu * u_{x_j}. \tag{3.1}$$

Применяя преобразование Фурье, убеждаемся с использованием теоремы Фубини, что

$$\widetilde{(\nu * u)}(\xi) = \tilde\nu(\xi)\tilde u(\xi), \quad \text{где} \quad \tilde\nu(\xi) = \int\limits_K e^{-ih\xi}\, d\nu(h)$$

есть характеристическая функция меры ν, равномерно непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}^n$ (и являющаяся сужением на $\mathbb{R}^n$ целой функции n комплексных переменных, см. [15, теорема 7.23]). Очевидно, $\tilde\nu(0) = \nu(K)$ и $\sup|\tilde\nu(\xi)| \leqslant |\nu|(K)$, $|\nu|$ — вариация меры ν. Таким образом, свертка однозначно продолжается до ограниченного линейного оператора в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ и пространствах Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, с одной и той же нормой, равной $\sup|\tilde\nu(\xi)|$, а равенство (3.1) переносится на обобщенные производные.

Повторное свертывание с мерами $\nu_1 \in (C(K_1))^*$ и $\nu_2 \in (C(K_2))^*$, являющееся в образах Фурье умножением на функцию $\tilde\nu_1(\xi)\tilde\nu_2(\xi)$, представляет собой свертку с мерой $\nu_1 * \nu_2$, $(\nu_1 * (\nu_2 * u)) = (\nu_1 * \nu_2) * u$, которая сосредоточена на компакте $K_1 + K_2$ и определяется по формуле

$$(\nu_1 * \nu_2)(B) = \int\limits_{K_1} \nu_2(B-h)\, d\nu_1(h) = \int\limits_{K_2} \nu_1(B-h)\, d\nu_2(h)$$

(B — борелевское подмножество $\mathbb{R}^n$). Норма такого оператора (в L_2 и H^s) равна $\sup|\tilde{\nu}_1(\xi)\tilde{\nu}_2(\xi)|$.

Для всякой меры $\nu \in (C(K))^*$ рассмотрим меру $\nu^\bullet \in (C(-K))^*$, определяемую соотношением $\nu^\bullet(B) = \overline{\nu(-B)}$. Очевидно, $\widetilde{\nu^\bullet} = \overline{\tilde{\nu}}$. Оператор, сопряженный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператору свертки с мерой ν, есть свертка с мерой $\nu^\bullet$.

Отметим, что если Ω и Ω' — открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\Omega' - K \subset \Omega$, то сужение функции $\nu * u$ на Ω' зависит исключительно от сужения функции u на Ω, поэтому свертка с мерой $\nu \in (C(K))^*$ действует и как ограниченный линейный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega')$, а также из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\Omega')$ (с нормой, не превосходящей $\sup|\tilde{\nu}(\xi)|$, если норму в $H^s(\Omega)$ определять как нижнюю грань норм в $H^s(\mathbb{R}^n)$ всех возможных продолжений в $\mathbb{R}^n$). Обобщенная производная функции $\nu * u \in H^s(\Omega')$ по-прежнему связана с обобщенной производной функции $u \in H^s(\Omega)$ формулой (3.1).

Зафиксировав число $p > 1$, обозначим $Pu(x) = u(p^{-1}x)$. Под оператором с аффинным преобразованием аргумента мы будем понимать оператор

$$Tu(x) = P(\nu * u)(x) = \int\limits_K u(p^{-1}x - h)\, d\nu(h). \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Если носителем меры ν служит конечный набор точек $K = \{h^1, \ldots, h^l\}$ (случай атомарной меры), то рассматриваемый оператор действительно является оператором с аффинными преобразованиям аргумента (комбинациями сжатия и сдвигов),

$$P(\nu * u)(x) = \alpha_1 u(p^{-1}x - h^1) + \ldots + \alpha_l u(p^{-1}x - h^l) \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{C}).$$

Мы будем пользоваться этим термином и для более общих мер, осуществляющих “размазанный” по некоторому компакту сдвиг.

Оператор T можно записать по-другому, поменяв местами операции свертки и сжатия:

$$Tu(x) = \int\limits_K u(p^{-1}(x - ph))\, d\nu(h) = \int\limits_{pK} u(p^{-1}(x - h))\, dP\nu(h) = (P\nu * Pu)(x).$$

Здесь $P\nu$ — мера на pK, определяемая по формуле $P\nu(B) = \nu(p^{-1}B)$.

Лемма 3.1. *Спектральный радиус оператора $T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вычисляется по формуле*

$$\rho(T) = p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p^{-1}\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\xi)|^{1/m} =$$

$$= p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Образ Фурье функции Tu есть функция $P^*(\tilde{\nu}\tilde{u})(\xi) = p^n\tilde{\nu}(p\xi)\tilde{u}(p\xi)$, поэтому

$$\|Tu\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = p^{2n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(p\xi)\tilde{u}(p\xi)|^2\, d\xi = p^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\eta)\tilde{u}(\eta)|^2\, d\eta,$$

так что норма действующего в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператора T равна $p^{n/2}\sup|\tilde{\nu}(\xi)|$. Для степеней оператора T имеем

$$T^m u = P^m(P^{1-m}\nu * \ldots * P^{-1}\nu * \nu * u),$$

$$\widetilde{(T^m u)}(\xi) = p^{mn}\tilde{\nu}(p\xi)\tilde{\nu}(p^2\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^m\xi)\tilde{u}(p^m\xi),$$

$$\|T^m u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = p^{mn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\eta)\tilde{\nu}(p^{-1}\eta)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\eta)|^2|\tilde{u}(\eta)|^2\, d\eta,$$

$$\|T^m : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)\| = p^{mn/2}\sup|\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p^{-1}\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\xi)|.$$

Отсюда и из известной формулы спектрального радиуса [15, Теорема 10.13] вытекает (3.3). Кроме того, предел в (3.3) совпадает с нижней гранью соответствующей последовательности. □

Пример 3.1. Пусть $0 \neq h^0 \in \mathbb{R}^n$, $K = \{h^0, -h^0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ и $\nu = a\delta(h + h^0) + b\delta(h - h^0)$, δ — мера (дельта-функция) Дирака. Имеем

$$Tu(x) = au(p^{-1}x + h^0) + bu(p^{-1}x - h^0),$$

$$\tilde{\nu}(\xi) = ae^{ih^0\xi} + be^{-ih^0\xi} = (a+b)\cos(h^0\xi) + i(a-b)\sin(h^0\xi),$$

$$|\tilde{\nu}(\xi)|^2 = (a+b)^2\cos^2(h^0\xi) + (a-b)^2\sin^2(h^0\xi) = (a^2+b^2)(1+\kappa\cos(2h^0\xi)),$$

$$\kappa = 2ab/(a^2+b^2), \quad |\kappa| \leqslant 1,$$

и, в соответствии с (3.3), $\rho(T) =$

$$= p^{n/2}(a^2+b^2)^{1/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |(1+\kappa\cos t)(1+\kappa\cos pt)\dots(1+\kappa\cos p^{m-1}t)|^{1/2m}.$$

Случаи $\kappa > 0$ и $\kappa < 0$ различаются. Если $\kappa > 0$ (a и b одного знака), то фигурирующая здесь верхняя грань достигается при $t = 0$, она одна и та же для всех m и равна $(1+\kappa)^{1/2}$. Так что спектральный радиус равен норме оператора T, $\rho(T) = p^{n/2}(|a|+|b|)$. Если же $\kappa < 0$ (a и b разных знаков), то ситуация начинает существенно зависеть от p. Пусть, к примеру, $a = 1$, $b = -1$. Можем записать

$$\rho(T) = 2p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sin t \sin pt \dots \sin p^{m-1}t|^{1/m}. \tag{3.4}$$

Когда p есть нечетное целое, $|\sin(\pi/2)\sin(p\pi/2)\dots\sin(p^{m-1}\pi/2)| = 1$. В этом случае мы вновь имеем стационарную последовательность, и спектральный радиус равен $2p^{n/2}$ — норме оператора T. Если же $p = 2$, то соответствующая последовательность уже не является стационарной. Например, $\sup|\sin t \sin 2t|^{1/2} = 2\cdot 3^{-3/4} < 1$, а $\sup|\sin t\sin 2t\sin 4t|^{1/3}$ еще меньше, так что $\rho(T) < 2p^{n/2}$. Исследованию зависимости от параметра сжатия p спектрального радиуса оператора $T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вида

$$Tu(x) = u(p^{-1}x + h^0) - u(p^{-1}x - h^0)$$

посвящен последний параграф главы. Так, будет показано, что

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sin t \sin 2t \dots \sin 2^{m-1}t|^{1/m} = \cos\frac{\pi}{6}.$$

Пример 3.2. Пусть $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$ — сфера радиуса r в $\mathbb{R}^3$, и ν — (нормированная) площадь на сфере. Свертка в данном случае усредняет по сфере,

$$Tu(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{|h|=r} u(p^{-1}x - h)\, dS_h,$$

$$\tilde{\nu}(\xi) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{|x|=r} e^{-i\xi h}\, dS_h = \frac{\sin r|\xi|}{r|\xi|},$$

$$\rho(T) = p^{3/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{t>0} \left| \frac{\sin t}{t} \frac{\sin pt}{pt} \dots \frac{\sin p^{m-1}t}{p^{m-1}t} \right|^{1/m} = p^{3/2}.$$

В рассмотренных примерах величина $\rho(T)$ не зависит от величины сдвига.

Перейдем к операторам в ограниченной области Ω. Наложим на пару Ω, K основное условие

$$p^{-1}\Omega - K \subset \Omega. \tag{3.5}$$

Замечание 3.2. Если K состоит из одной лишь точки h, то условие (3.5) может быть проинтерпретировано следующим образом. Преобразование $x \mapsto p^{-1}x - h$ есть сжатие $\mathbb{R}^n$ с центром $x^0 = ph/(1-p)$, и для любой начальной точки x^1 последовательность итераций $x^{k+1} = p^{-1}x^k - h$ сходится к x^0. Взяв $x^1 \in \Omega$, в силу условия (3.5) будем иметь $x^k \in \Omega$ $(k = 2, 3, \dots)$, откуда $x^0 \in \overline{\Omega}$. Таким образом, центр сжатия должен лежать в замыкании рассматриваемой области, а сама область при сжатии отображаться в себя. Интеграл (3.2) в этом случае представляет по сути сжатие с распределенными некоторым образом по $\overline{\Omega}$ центрами.

Условие (3.5) позволяет также рассматривать T как ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ — этот оператор является композицией оператора свертки, действующего из $L_2(\Omega)$ в $L_2(p^{-1}\Omega)$, и оператора сжатия P из $L_2(p^{-1}\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. То же относится и к случаю пространства $H^s(\Omega)$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнено геометрическое условие* (3.5), *а число* $\alpha \in \mathbb{C}$ *таково, что* $|\alpha| < 1/\rho(T)$. *Тогда при всех* $s \geqslant 0$ *оператор* $I + \alpha T : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ *имеет ограниченный обратный. Если же для некоторого положительного числа* s *выполнено более сильное условие* $|\alpha| < 1/(p^s\rho(T))$, *то ограниченно обратимым будет и оператор* $I + \alpha T : H^{-s}(\Omega) \to H^{-s}(\Omega)$.

Доказательство. В условиях леммы оператор $I + \alpha T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный

$$(I + \alpha T)^{-1} v = \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha)^m T^m v = \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha)^m P^m (\nu_m * v), \tag{3.6}$$

$$\nu_m = P^{1-m}\nu * \ldots * P^{-1}\nu * \nu.$$

Пусть $s \geqslant 0$ и $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. В этом случае для члена ряда получается оценка

$$\|(-\alpha)^m T^m v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= (p^n|\alpha|)^{2m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(p\xi)\tilde{\nu}(p^2\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^m\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s|\tilde{v}(p^m\xi)|^2\,d\xi =$$

$$= (p^n|\alpha|^2)^m \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\eta)\tilde{\nu}(p^{-1}\eta)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\eta)|^2(1+|p^{-m}\eta|^2)^s|\tilde{v}(\eta)|^2\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant (p^n|\alpha|^2)^m \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\eta)\tilde{\nu}(p^{-1}\eta)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\eta)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^s|\tilde{v}(\eta)|^2\,d\eta.$$

Коэффициент при $\|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^s|\tilde{v}(\eta)|^2\,d\eta$ мажорируется убывающей геометрической прогрессией. Таким образом, оператор (3.6) ограничен и в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $(1+|p^{-m}\eta|^2)^{-s} \leqslant p^{2ms}(1+|\eta|^2)^{-s}$, в этом случае имеем оценку

$$\|(-\alpha)^m T^m v\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} \leqslant (p^{n+2s}|\alpha|^2)^m \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} |\tilde{\nu}(\eta)\tilde{\nu}(p^{-1}\eta)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\eta)|^2\|v\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}.$$

Сходимость ряда гарантируется неравенством $|\alpha| < 1/(p^s\rho(T))$.

Перейдем теперь к ограниченной области Ω. Мера ν_m сосредоточена на компакте $K_m = K + p^{-1}K + \ldots p^{1-m}K$. Из условия (3.5) следует, что $p^{-2}\Omega - p^{-1}K \subset p^{-1}\Omega$ и, значит, $p^{-2}\Omega - p^{-1}K - K \subset p^{-1}\Omega - K \subset \Omega$, т.е. $p^{-2}\Omega - K_2 \subset \Omega$. Продолжая аналогичным образом, будем иметь $p^{-m}\Omega - K_m \subset \Omega$. Это означает, что сужение функции $P^m(\nu_m * v)$ на Ω определяется исключительно сужением функции v на Ω, так что в условиях леммы оператор (3.6) действует и как ограниченный оператор в $H^{\pm s}(\Omega)$, являясь обратным к оператору $I + \alpha T : H^{\pm s}(\Omega) \to H^{\pm s}(\Omega)$. $\square$

3.2 Разрешимость краевой задачи

В условиях предыдущего параграфа рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(u(x) + \alpha P(\nu * u)(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{3.7}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.8}$$

Считая $f \in L_2(\Omega)$, под обобщенным решением задачи (3.7), (3.8) будем понимать функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n}((u + \alpha P(\nu * u))_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \tag{3.9}$$

при любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Теорема 3.1. *При выполнении условия* (3.5) *и неравенства*

$$|\alpha| < p^{1-n/2}\left[\lim_{m\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\dots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}\right]^{-1} \tag{3.10}$$

задача (3.7), (3.8) *имеет единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$. *Если вдобавок* $f \in H^k(\Omega)$, *а* $\partial\Omega \in C^{k+2}$ (k *— целое неотрицательное*), *то* $u \in H^{k+2}(\Omega)$.

Доказательство. Хорошо известно, что оператор Лапласа действует как линейный гомеоморфизм между пространством $\mathring{H}^1(\Omega)$ и сопряженным к нему пространством $(\mathring{H}^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega)$. Если переписать выражение в левой части уравнения (3.7) в виде $-(\Delta u+\alpha p^{-2}P(\nu*\Delta u)) = -(I+\alpha p^{-2}T)\Delta u$, где $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, то становится понятно, что вопрос об однозначной разрешимости задачи (3.7), (3.8) сводится к вопросу обратимости оператора $I + \alpha p^{-2}T : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Неравенство (3.10) означает, что $|\alpha|p^{-2} < 1/(p\rho(T))$. Тогда по лемме 3.2 данный оператор имеет ограниченный обратный $(I + \alpha p^{-2}T)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, так что в условиях теоремы исходная задача эквивалентна задаче Дирихле для уравнения $-\Delta u = (I+\alpha p^{-2}T)^{-1}f$. Утверждение теоремы следует теперь из известных свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и ограниченности оператора $(I + \alpha p^{-2}T)^{-1}$ также в пространстве $L_2(\Omega)$ и пространствах $H^k(\Omega)$. □

Замечание 3.3. Конечно, обобщенное решение задач (3.7), (3.8) существует и единственно и в случае обобщенной функции $f \in H^{-1}(\Omega)$, если правую часть в (3.9) понимать как действие функционала f на пробную функцию $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Замечание 3.4. Переход от задачи (3.7), (3.8) к задаче Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = (I + \alpha p^{-2}T)^{-1} f$ можно проделать, основываясь на интегральном тождестве (3.9). Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение задачи (3.7), (3.8). Обозначим $w = u + \alpha P(\nu * u)$, $w \in H^1(\Omega)$. Для обобщенных производных функции w справедливо представление $w_{x_j} = u_{x_j} + \alpha p^{-1} P(\nu * u_{x_j})$. Поскольку $|\alpha p^{-1}| < 1/\rho(T)$, в силу леммы 3.2 и формулы (3.6) можем представить u_{x_j} в виде сходящегося в $L_2(\Omega)$ ряда

$$u_{x_j} = \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha p^{-1})^m P^m(\nu_m * w_{x_j}).$$

Зафиксировав пробную функцию $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$, будем рассматривать для нее функции $P^{-m}v \in \mathring{H}^1(p^{-m}\Omega)$, $m = 1, 2, \ldots$. Для меры ν_m, сосредоточенной на компакте K_m, мера $\nu_m^\bullet$ сосредоточена на компакте $(-K_m)$. Поэтому носитель функции $\nu_m^\bullet * P^{-m}v$ лежит в $p^{-m}\overline{\Omega} - K_m \subset \overline{\Omega}$ и $\nu_m^\bullet * P^{-m}v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Подставим данную функцию вместо v в интегральное тождество (3.9). В результате очевидных преобразований будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} (w_{x_j}, (\nu_m^\bullet * P^{-m}v)_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, \nu_m^\bullet * P^{-m}v)_{L_2(\Omega)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} (w_{x_j}, \nu_m^\bullet * P^{-m}v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (p^{-m}f, \nu_m^\bullet * P^{-m}v)_{L_2(\Omega)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} (P^m(\nu_m * w_{x_j}), v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (p^{-m}P^m(\nu_m * f), v)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножая обе части полученных равенств на $(-\alpha p^{-1})^m$ и суммируя по $m = 0, 1, \ldots$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} (u_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)},$$

где принадлежащая пространству $L_2(\Omega)$ функция g связана с функцией f соотношением

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha p^{-2})^m P^m(\nu_m * f) = (I + \alpha p^{-2}T)^{-1} f,$$

причем оператор $(I + \alpha p^{-2}T)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ограничен. Мы показали, что всякое обобщенное решение задачи (3.7), (3.8) является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = g$ в Ω. Переход в обратном направлении вполне аналогичен.

Пример 3.3. В шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta \left(u(x) + \alpha \iint_{|h|=r} u(p^{-1}x - h)\, dS_h \right) = f(x), \tag{3.11}$$

где $r < (p-1)R/p$ — данное неравенство обеспечивает выполнение (3.5). Теорема 3.1 с учетом примера 3.2 гарантирует однозначную разрешимость задачи (3.11), (3.8) при условии $4\pi p^{1/2} r^2 |\alpha| < 1$.

Пример 3.4. Приведем пример, показывающий, что при определенных значениях α (достаточно больших по модулю) задача вида (3.7), (3.8) может иметь бесконечно много обобщенных решений. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат $\{-1 < x_1, x_2 < 1\}$ и $h = (1,1)$. Рассмотрим в Ω задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta \left(u(x) + \alpha[u((x+h)/2) - u((x-h)/2))] \right) = f(x) \quad (x \in \Omega). \tag{3.12}$$

Здесь $Tu(x) = u((x+h)/2) - u((x-h)/2))$, условие (3.5) выполнено (оператор представляет собой комбинацию сжатий с центрами в вершинах квадрата $(1,1)$ и $(-1,-1)$), а все выражение под знаком лапласиана задает, очевидно, ограниченный оператор $I + \alpha T : \mathring{H}^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$.

Покажем, что уравнение $u + \alpha T u = w$ имеет для любой функции $w \in \mathring{H}^1(\Omega)$ бесконечно много решений $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ (линейное многообразие решений бесконечномерно), если $|\alpha| > 1$. Тогда и краевая задача (3.12), (3.8) для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ будет иметь бесконечно много обобщенных решений. С другой стороны, теорема 3.1 гарантирует однозначную разрешимость задачи (3.12), (3.8) при $|\alpha| < 1/\sqrt{3}$, см. пример 3.1 и параграф 3.3.

Зафиксируем w и построим некоторые решения уравнения $u + \alpha T u = w$. Для этого нам понадобятся следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \{0 < x_1, x_2 < 1\}, \quad \Omega_2 = \{-1 < x_1 < 0,\, 0 < x_2 < 1\},$$

$$\Omega_3 = \{-1 < x_1, x_2 < 0\}, \quad \Omega_4 = \{0 < x_1 < 1,\, -1 < x_2 < 0\},$$

$$\Omega_{11} = \{1/2 < x_1, x_2 < 1\}, \quad \Omega_{12} = \{0 < x_1 < 1/2,\, 1/2 < x_2 < 1\},$$

$$\Omega_{13} = \{0 < x_1, x_2 < 1/2\}, \quad \Omega_{14} = \{1/2 < x_1 < 1,\, 0 < x_2 < 1/2\}$$

(это части квадрата Ω в координатных четвертях, причем часть Ω_1, лежащая в первой четверти, делится еще на четыре части),

$$\Gamma_1 = \{(x_1, -1/2) :\, -1 < x_1 < 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(-1/2, x_2) :\, -1 < x_2 < 0\}.$$

Также через u_i обозначим сужение искомой функции u на квадрат Ω_i, а u_{1i} — на квадрат Ω_{1i}, $i = 1, 2, 3, 4$. Будем искать $u_i \in \mathring{H}^1(\Omega_i)$, $u_{1i} \in \mathring{H}^1(\Omega_{1i})$. Каждую из функций u, u_i, u_{1i} будем считать продолженной нулем вне соответствующего квадрата, так что не вызывает недоразумений запись

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad u_1 = u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}.$$

С учетом сказанного исследуемое функциональное уравнение можно переписать в виде системы

$$u_1(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3((x-h)/2) = w(x) \quad (x \in \Omega_1), \tag{3.13}$$

$$u_2(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3((x-h)/2) = w(x) \quad (x \in \Omega_2), \tag{3.14}$$

$$u_3(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3((x-h)/2) = w(x) \quad (x \in \Omega_3), \tag{3.15}$$

$$u_4(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3((x-h)/2) = w(x) \quad (x \in \Omega_4). \tag{3.16}$$

Зададимся функцией $u_3 \in \mathring{H}^1(\Omega_3)$, удовлетворяющей условиям

$$u_3|_{\Gamma_1} = -\alpha^{-1} w(2x+h)|_{\Gamma_1}, \quad u_3|_{\Gamma_2} = -\alpha^{-1} w(2x+h)|_{\Gamma_2}, \tag{3.17}$$

а в остальном совершенно произвольной. Уравнением (3.15) тогда однозначно определены значения функции u_1 в Ω_{13}:

$$u_{13}(x) = u_1(x) = \alpha^{-1}(w(2x-h) - u_3(2x-h)) + u_3(x-h) \quad (x \in \Omega_{13}),$$

при этом функция u_{13} имеет нулевой след на $\partial\Omega_{13}$, т.е. $u_{13} \in \mathring{H}^1(\Omega_{13})$, в силу наложенных на u_3 условий (3.17). Действительно, к примеру, на стороне $0 < x_1 < 1/2$, $x_2 = 1/2$ квадрата имеем

$$u_{13}(x_1, 1/2) = \alpha^{-1}(w(2x_1 - 1, 0) - u_3(2x_1 - 1, 0)) + u_3(x_1 - 1, -1/2) =$$

$$= \alpha^{-1} w(2x_1 - 1, 0) + u_3(x_1 - 1, -1/2) = 0.$$

Положим $u_{12} = 0$, $u_{14} = 0$, и обратимся к уравнению (3.13), из которого мы собираемся найти u_{11}. Его можно переписать следующим образом:

$$u_{11}(x) + \alpha u_{11}((x+h)/2) = w(x) + \alpha u_3((x-h)/2) - u_{13}(x) \quad (x \in \Omega_1). \quad (3.18)$$

В этом уравнении функция справа принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega_1)$ благодаря условиям (3.17), а оператор в левой части есть сумма тождественного оператора и (с коэффициентом α) оператора со сжатием аргумента с центром в точке $(1, 1)$. Из [9, Лемма 1.2] следует, что при $|\alpha| > 1$ этот оператор является линейным гомеоморфизмом $\mathring{H}^1(\Omega_{11})$ на $\mathring{H}^1(\Omega_1)$. Таким образом, уравнение (3.18) позволяет однозначно определить $u_{11} \in \mathring{H}^1(\Omega_{11})$, и функция u_1 полностью построена. Для нахождения u_2 и u_4 остается просто воспользоваться уравнениями (3.14) и (3.16), причем условия (3.17) вновь гарантируют принадлежность этих функций пространствам $\mathring{H}^1(\Omega_2)$ и $\mathring{H}^1(\Omega_4)$, соответственно.

3.3 Спектральный радиус параметрического семейства функциональных операторов

Этот параграф посвящен вычислению предела, стоящего справа в формуле (3.4). Обозначим

$$\theta_m(t) = \theta_m(p, t) = \prod_{k=1}^{m} |\sin \pi p^{k-1} t| \quad (p > 0,\ t \in \mathbb{R},\ m = 1, 2, \ldots),$$

$$\nu(p) = \lim_{m \to \infty} \sup_t \theta_m(p, t)^{1/m} = \inf_m \sup_t \theta_m(p, t)^{1/m}.$$

В том, что записанный здесь предел существует и равен нижней грани последовательности $\sup \theta_m(t)^{1/m}$, можно убедиться и непосредственно. Этот факт вытекает из соотношения $\sup \theta_{m+l}(t) \leqslant \sup \theta_m(t) \sup \theta_l(t)$. Кроме того,

$$\sup_t \theta_m(p, t) = \sup_t \theta_m(p^{-1}, t),$$

так что $\nu(p) = \nu(1/p)$. Поэтому достаточно рассматривать случай $0 < p < 1$ либо случай $p > 1$. Очевидно, $0 \leqslant \theta_m(p, t) \leqslant 1$ и $0 \leqslant \nu(p) \leqslant 1$.

Поскольку мы имеем дело с 1-периодической функцией $|\sin \pi t|$, удобно сопоставить вектору аргументов $(t, pt, \dots, p^{m-1}t)$ точку на m-мерном торе:

$$(S(t), S(pt), \dots, S(p^{m-1}t)) \in \mathbb{T}^m,$$

где через $S(t)$ мы обозначаем класс эквивалентности всех вещественных чисел $\tilde{t}$ таких, что $\tilde{t} = t \mod 1$.

Для вещественного числа y положение точки $S(y)$ на окружности однозначно определяется его дробной частью $\{y\} \in [0,1)$, которую мы будем записывать в виде $\{y\} = 1/2 + \delta(y)$, $\delta(y) \in [-1/2, 1/2)$. Отметим, что если $\{y_0\} \neq 0$ и $0 < \varepsilon < 1/2 - |\delta_0|$, то попадание точки $S(y)$ в ε-окрестность точки $S(y_0)$ на окружности равносильно неравенству $|\{y\} - \{y_0\}| = |\delta - \delta_0| < \varepsilon$.

Имея вектор скоростей $(\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\omega_k > 0$, рассмотрим линейный поток

$$(S(\omega_1 t), \dots, S(\omega_m t))$$

на торе. Ключевую роль в большинстве рассуждений этого пункта играет следующее хорошо известное утверждение, см., например, [5, предложение 1.5.1].

Предложение 3.1. *Если компоненты ω_k вектора скоростей рационально независимы, т.е. $\sum_{k=1}^m a_k \omega_k \neq 0$ для любых целых чисел $a_1, \dots, a_n$, не всех равных нулю, то траектория*

$$\{(S(\omega_1 t), \dots, S(\omega_m t)) \in \mathbb{T}^m : t \in \mathbb{R}\}$$

всюду плотна в $\mathbb{T}^m$. Другими словами, для любого набора чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ из интервала $(-1/2, 1/2)$ и $0 < \varepsilon < 1/2 - \max|\gamma_k|$ найдется такое число $t_0 \in \mathbb{R}$, что

$$|\{\omega_k t_0\} - (1/2 + \gamma_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, m). \tag{3.19}$$

Будем обозначать $\delta(\omega_k t)$ через $\delta_k(t)$ или просто δ_k. Из утверждения 3.1 моментально вытекает

Лемма 3.3. *Если число p трансцендентное, то $\nu(p) = 1$.*

Доказательство. Если p — трансцендентное число, то для любого натурального m числа $\omega_k = p^{k-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$ рационально независимы. Полагая $\gamma_k = 0$ в (3.19), находим для любого $0 < \varepsilon < 1/2$ такую точку $t_0 \in \mathbb{R}$, что $|\delta_k(t_0)| < \varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Тогда $|\sin(\pi p^k t_0)| = \cos(\pi\delta_k(t_0)) > \cos(\pi\varepsilon)$ и $\theta_m(t_0)^{1/m} > \cos(\pi\varepsilon)$. Получаем $\sup \theta_m(t)^{1/m} = 1$ в силу произвольности ε. □

Нам понадобится также следующий вариант утверждения 3.1. Зафиксировав натуральные числа κ и $N \geqslant 2$, представим целую часть $[y]$ (любого) числа $y \in \mathbb{R}$ в виде

$$[y] = \sum_{i=0}^{\kappa-1} j_i N^i \mod N^\kappa,$$

где $j_0, j_1, \ldots, j_{\kappa-1} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Лемма 3.4. *Пусть числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ рационально независимы. Кроме того, пусть заданы наборы чисел $\gamma_k \in (-1/2, 1/2)$ и $j_{k,i} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ $(k = 1, \ldots, m;\ i = 0, \ldots, \kappa-1)$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1/2 - \max|\gamma_k|$ существует точка $t_0 \in \mathbb{R}$ такая, что*

$$\omega_k t_0 = 1/2 + \delta_k + \sum_{i=0}^{\kappa-1} j_{k,i} N^i \mod N^\kappa,$$

причем

$$|\delta_k - \gamma_k| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Доказательство. Положим

$$y_k = \frac{1}{N^\kappa}\left(1/2 + \gamma_k + \sum_{i=0}^{\kappa-1} j_{k,i} N^i\right) \in (0,1) \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{3.20}$$

Вещественное число $\omega_k t$ при любом t может быть записано в виде

$$\omega_k t = \{\omega_k t\} + [\omega_k t] = 1/2 + \delta_k(t) + \sum_{i=0}^{\kappa-1} \tilde{j}_{k,i}(t) N^i \mod N^\kappa$$

с $\delta_k(t) \in [-1/2, 1/2)$, и $\tilde{j}_{k,0}(t), \tilde{j}_{k,1}(t), \ldots, \tilde{j}_{k,\kappa-1}(t) \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. При этом

$$\left\{\frac{\omega_k t}{N^\kappa}\right\} = \frac{1}{N^\kappa}\left(1/2 + \delta_k(t) + \sum_{i=0}^{\kappa-1} \tilde{j}_{k,i}(t) N^i\right), \tag{3.21}$$

поскольку число в правой части этого равенства лежит в промежутке $[0,1)$. Пользуясь рациональной независимостью чисел $\omega_1 N^{-\kappa},\ldots,\omega_m N^{-\kappa}$ находим в силу утверждения 3.1 число $t_0\in\mathbb{R}$ так, чтобы

$$\left|\left\{\frac{\omega_k t_0}{N^\kappa}\right\}-y_k\right|<\frac{\varepsilon}{N^\kappa}\quad (k=1,\ldots,m).$$

Подставляя сюда (3.20) и (3.21), будем иметь

$$\left|\delta_k(t_0)-\gamma_k+\sum_{i=0}^{\kappa-1}\left(\tilde{j}_{k,i}(t_0)-j_{k,i}\right)N^i\right|<\varepsilon\quad (k=1,\ldots,m).$$

Обозначим $\varepsilon_k=\delta_k(t_0)-\gamma_k+\sum\limits_{i=0}^{\kappa-1}\left(\tilde{j}_{k,i}(t_0)-j_{k,i}\right)N^i$, при этом $|\varepsilon_k|<\varepsilon<1/2-\max|\gamma_k|$. Получаем равенства

$$\gamma_k+\varepsilon_k-\delta_k(t_0)=\sum_{i=0}^{\kappa-1}\left(\tilde{j}_{k,i}(t_0)-j_{k,i}\right)N^i,$$

в которых справа стоят целые числа, а

$$|\gamma_k+\varepsilon_k-\delta_k(t_0)|\leqslant|\gamma_k|+|\varepsilon_k|+|\delta_k(t_0)|<1.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_k+\varepsilon_k-\delta_k(t_0)=\sum_{i=0}^{\kappa-1}\left(\tilde{j}_{k,i}(t_0)-j_{k,i}\right)N^i=0,$$

т.е. $|\delta_k(t_0)-\gamma_k|=|\varepsilon_k|<\varepsilon$ и $\tilde{j}_{k,i}(t_0)=j_{k,i}$ для всех $k=1,\ldots,m$ и $i=0,\ldots,\kappa-1$. □

Предположим теперь, что число p является алгебраическим, т.е. корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Из курса алгебры известно, что существует единственный (с точностью до числового множителя) неприводимый над полем рациональных чисел многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является p. Этот многочлен называется минимальным многочленом числа p, а его степень — порядком алгебраического числа p. Очевидно, что для алгебраического числа p порядка l числа $1,p,\ldots,p^{l-1}$ рационально независимы.

Итак, пусть p — алгебраическое число порядка l, а

$$Q(q)=a_lq^l+a_{l-1}q^{l-1}+\ldots+a_1q+a_0$$

— его минимальный многочлен. Если считать, что все числа a_k целые, не имеют общих делителей, и $a_l > 0$ (а этого всегда можно добиться умножением $Q(q)$ на подходящее целое число), то такой набор $a_0, a_1, \dots, a_l$ однозначно определяется числом p. Обозначим $a = a_0 + a_1 + \dots + a_l$, $A = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_l|$. Как мы увидим, существенное влияние на поведение последовательности $\sup \theta_m(t)^{1/m}$ (и, как следствие, на значение $\nu(p)$) оказывает четность числа a.

Лемма 3.5. *Пусть p является алгебраическим числом порядка l и число a — нечетное. Тогда для $\nu(p)$ имеет место следующая оценка сверху:*

$$\nu(p) \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{2A}\right)^{1/(l+1)}.$$

Доказательство. Умножая равенство $a_l p^l + a_{l-1}p^{l-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ на t и полагая $p^{k-1}t = 1/2 + \delta_k(t)$, $[p^{k-1}t] = j_k(t)$, будем иметь $\sum_{k=0}^{l} a_k(1/2 + \delta_k(t) + j_k(t)) = 0$ или

$$\sum_{k=0}^{l} a_k\delta_k(t) = -\frac{a}{2} - \sum_{k=0}^{l} a_k j_k(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Отсюда и из того, что a — нечетное число, вытекает неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\sum_{k=0}^{l} a_k\delta_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{l} |a_k||\delta_k(t)| \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, для любого t существует такой номер $k_0 \in \{0, \dots, l\}$, что $|\delta_{k_0}(t)| \geqslant \frac{1}{2A}$. Поэтому

$$\theta_{l+1}(t) \leqslant \cos\frac{\pi}{2A} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

По той же причине

$$\prod_{k=l+2}^{2(l+1)} |\sin \pi p^{k-1}t| = \prod_{k=1}^{l+1} |\sin \pi p^{k-1}(p^{l+1}t)| = \theta_{l+1}(p^{l+1}t) \leqslant \cos\frac{\pi}{2A}$$

на $\mathbb{R}$, и т.д., так что

$$\sup_t \theta_{m(l+1)}(t) \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{2A}\right)^m.$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства корень степени $m(l+1)$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем утверждение леммы. □

Пример 3.5. Минимальным многочленом для числа $p = \sqrt{3} \pm 1$, очевидно, будет $Q(q) = q^2 \mp 2q - 2$. Поэтому $\nu(\sqrt{3} \pm 1) \leqslant \sqrt[3]{\cos(\pi/10)}$.

Лемму 3.5 можно существенно дополнить, если предположить $a_l = 1$. Число p в этом случае называется целым алгебраическим.

Лемма 3.6. *Пусть число p является целым алгебраическим. Тогда $\nu(p) = 1$, если a четно, и $\nu(p) \geqslant \cos\frac{\pi}{2a}$ при нечетных $a \neq \pm 1$.*

Доказательство. 1. Пусть число a четное. Докажем индукцией по $m = 1, 2, \ldots$, что для любого $0 < \varepsilon < 1/2$ существует такая точка $t_0 \in \mathbb{R}$, что $|\delta_k(t_0)| < \varepsilon$ при всех $k = 1, 2, \ldots, l + m - 1$ ($\delta_k(t_0) = \delta(p^{k-1}t_0)$). При $m = 1$ это следует из утверждения 3.1 (числа $1, p, \ldots, p^{l-1}$ рационально независимы). Предположим, что для некоторого m выбрана по ε точка t_0 так, что $|\delta_k(t_0)| < \varepsilon/(A-1)$ при всех $k = 1, \ldots, l + m - 1$. Используем тождество $Q(p)t = 0$ при $t = p^{m-1}t_0$:

$$\frac{1}{2} + \delta_{l+m}(t_0) + j_{l+m}(t_0) + \sum_{s=0}^{l-1} a_s \left(\frac{1}{2} + \delta_{m+s}(t_0) + j_{m+s}(t_0)\right) = 0. \qquad (3.22)$$

С учетом $a/2 \in \mathbb{Z}$ отсюда вытекает

$$\delta_{l+m}(t_0) + \sum_{s=0}^{l-1} a_s \delta_{m+s}(t_0) \in \mathbb{Z}. \qquad (3.23)$$

При этом $|\delta_{l+m}(t_0)| \leqslant 1/2$ и

$$\left|\sum_{s=0}^{l-1} a_s \delta_{m+s}(t_0)\right| \leqslant \sum_{s=0}^{l-1} |a_s||\delta_{m+s}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{A-1} \sum_{s=0}^{l-1} |a_s| = \frac{\varepsilon}{A-1}(A-1) = \varepsilon < \frac{1}{2}$$

по предположению индукции. Следовательно, число в (3.23) равно нулю и

$$|\delta_{l+m}(t_0)| = \left|\sum_{s=0}^{l-1} a_s \delta_{m+s}(t_0)\right| < \varepsilon.$$

Фактически, мы показали, что неравенства $|\delta_1(t_0)|, \ldots, |\delta_l(t_0)| < (A-1)^{-m}\varepsilon$ гарантируют неравенства $|\delta_1(t_0)|, \ldots, |\delta_{l+m}(t_0)| < \varepsilon$.

Таким образом, для любого $m \in \mathbb{N}$ по любому $0 < \varepsilon < 1/2$ можно найти точку t_0 такую, что $\theta_m(t_0) > \cos^m \pi\varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $\sup \theta_m(t) = 1$ для всех m. Утверждение для случая четного a доказано.

2. Пусть теперь a — нечетное число и $|a| \neq 1$. Обозначим $\gamma = \frac{1}{2a}$. Аналогично первой части доказательства показываем, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon < 1/3$ существует точка t_0 такая, что $|\delta_k(t_0) - \gamma| < \varepsilon$ при всех $k = 1, 2, \ldots, l+m-1$. При $m = 1$ это следует из утверждения 3.1. Для фиксированного m находим по ε точку t_0, в которой $|\delta_k(t_0) - \gamma| < \varepsilon/(A-1)$ при всех $k = 1, \ldots, l+m-1$. Равенство (3.22) теперь уже с учетом $(a-1)/2 \in \mathbb{Z}$ дает

$$\delta_{l+m}(t_0) - \gamma + \sum_{s=0}^{l-1} a_s(\delta_{m+s}(t_0) - \gamma) \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Здесь $|\delta_{l+m}(t_0)| \leqslant 1/2$, $|\gamma| \leqslant 1/6$, и

$$\left| \sum_{s=0}^{l-1} a_s(\delta_{m+s}(t_0) - \gamma) \right| < \frac{\varepsilon}{A-1} \sum_{s=0}^{l-1} |a_s| = \varepsilon < \frac{1}{3}$$

по предположению индукции. Следовательно, число в (3.24) равно нулю. Тогда

$$|\delta_{l+m}(t_0) - \gamma| = \left| \sum_{s=0}^{l-1} a_s(\delta_{m+s}(t_0) - \gamma) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $m \in \mathbb{N}$ по любому $0 < \varepsilon < 1/3$ можно найти точку t_0 такую, что $\theta_m(t_0) > \cos^m \pi(|\gamma| + \varepsilon)$. В силу произвольности ε имеем $\sup \theta_m(t) \geqslant \cos \pi\gamma$ для всех m. Лемма полностью доказана. $\square$

Пример 3.6. Для $p = \sqrt{3} + 1$ имеем $Q(q) = q^2 - 2q - 2$, $a = -3$, и тогда

$$0.866 < \cos(\pi/6) \leqslant \nu(\sqrt{3} + 1) \leqslant \sqrt[3]{\cos(\pi/10)} < 0.984$$

в силу лемм 3.5 и 3.6.

А вот для $p = \sqrt{3} - 1$ минимальный многочлен есть $Q(q) = q^2 + 2q - 2$, $a = 1$, и лемму 3.6 для оценки $\nu(\sqrt{3} - 1) = \nu\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ снизу применить не получается.

Пример 3.7. Для $p = \sqrt{2} + 1$ имеем $Q(q) = q^2 - 2q - 1$, $a = -2$, и $\nu(\sqrt{2} + 1) = 1$ по лемме 3.6.

Когда число p рационально или является корнем из рационального числа, для $\nu(p)$ также получена точная формула. С этого места и до конца пункта мы считаем, что число p удовлетворяет уравнению $Np^l = M$ с натуральными взаимно простыми M и N, причем $M < N$, в то время как числа $1, p, \dots, p^{l-1}$ рационально независимы. Положим $\gamma = \pm 1/(2M+2N)$, если число $M + N$ нечетное, и $\gamma = 0$, если $M + N$ — четное число.

Лемма 3.7. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1/3$, *а число* δ *таково, что* $|\delta - \gamma| < \varepsilon$. *Тогда найдется такое число* $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, *что если* $y = 1/2 + \delta + j \mod N$, *то* $|\delta(p^l y) + \gamma| < \varepsilon$.

Доказательство. Считаем, что число $M + N$ нечетное и что $\gamma = 1/(2M + 2N)$ (для противоположного значения γ и для случая четного $M + N$ все выкладки аналогичны). Подставляя в равенство $Np^l y = My$ выражения $y = 1/2 + \delta + j + bN$ и $p^l y = 1/2 + \delta(p^l y) + B$, где b, B — некоторые целые числа, а $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ подлежит определению, будем иметь

$$N\delta(p^l y) - M\delta = \frac{M-N}{2} + Mj + N(bM - B)$$

или

$$N(\delta(p^l y) + \gamma) - M(\delta - \gamma) = \frac{M-N+1}{2} + Mj + N(bM - B), \qquad (3.25)$$

причем число в правой части является целым. Подберем $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ так, чтобы оно было кратно N. Это всегда можно сделать благодаря взаимной простоте M и N. В то же время, поскольку $|\delta(p^l y)| \leqslant 1/2$, а $M + N \geqslant 3$, получаем

$$|N(\delta(p^l y) + \gamma) - M(\delta - \gamma)| < N|\delta(p^l y) + \gamma| + M\varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(M+N)} + \frac{M}{3N}\right) < N.$$

Поэтому выражения в обеих частях равенства (3.25) равны нулю, т.е.

$$|\delta(p^l y) + \gamma| = \frac{M}{N}|\delta - \gamma| < \varepsilon.$$

$\square$

Лемму 3.7 можно значительно усилить.

Лемма 3.8. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1/3$, $|\delta - \gamma| < \varepsilon$ *и* $\kappa \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого набора чисел* $J_0, J_1, \ldots, J_{\kappa-1} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *найдутся числа* $j_0, j_1, \ldots, j_\kappa \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *такие, что если*

$$y = 1/2 + \delta + \sum_{i=0}^{\kappa} j_i N^i \mod N^{\kappa+1},$$

то

$$p^l y = 1/2 + \delta(p^l y) + \sum_{i=0}^{\kappa-1} J_i N^i \mod N^\kappa,$$

причем $|\delta(p^l y) + \gamma| < \varepsilon$.

Доказательство. Вновь будем считать число $M + N$ нечетным и $\gamma = 1/(2M + 2N)$. Запишем

$$y = 1/2 + \delta + \sum_{i=0}^{\kappa} j_i N^i + bN^{\kappa+1}, \quad p^l y = 1/2 + \delta(p^l y) + \sum_{i=0}^{\kappa-1} \tilde{j}_i N^i + BN^\kappa,$$

где b, B — некоторые целые числа, $\tilde{j}_0, \ldots, \tilde{j}_{\kappa-1}$ — некоторые числа из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, а $j_0, j_1, \ldots, j_\kappa \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ подлежат определению. Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 3.7, приходим к равенству

$$N(\delta(p^l y) + \gamma) - M(\delta - \gamma) =$$
$$= \frac{M - N + 1}{2} + Mj_0 + N\left(\sum_{i=0}^{\kappa-1}(Mj_{i+1} - \tilde{j}_i)N^i + N^\kappa(bM - B)\right), \quad (3.26)$$

где путем выбора $j_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ делаем правую часть кратной N. Это обеспечивает нужную оценку $|\delta(p^l y) + \gamma| < \varepsilon$ и фиксирует значение, которое принимает выражение в скобках в правой части (3.26):

$$\sum_{i=0}^{\kappa-1}(Mj_{i+1} - \tilde{j}_i)N^i + N^\kappa(bM - B) = B_1.$$

Перенося слагаемое с индексом $i = 0$ в правую часть, перепишем последнее равенство в виде

$$N\left(\sum_{i=0}^{\kappa-2}(Mj_{i+2} - \tilde{j}_{i+1})N^i + N^{\kappa-1}(bM - B)\right) = B_1 - Mj_1 + \tilde{j}_0. \quad (3.27)$$

Теперь выберем $j_1 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ так, чтобы число $\tilde{B} - Mj_1 + J_0$ было кратно N. Тогда и разность $B_1 - Mj_1 + \tilde{j}_0 - (B - Mj_1 + J_0) = \tilde{j}_0 - J_0$ будет кратна N, что возможно лишь при $\tilde{j}_0 = J_0$. Кроме того, выбор j_1 фиксирует значение, которое принимает выражение в скобках в правой части (3.27):

$$\sum_{i=0}^{\kappa-2} (Mj_{i+2} - \tilde{j}_{i+1}) N^i + N^{\kappa-1}(bM - B) = B_2.$$

При подходящем выборе $j_2 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ это равенство гарантирует $\tilde{j}_1 = J_1$ и т.д. На последнем шаге, выбирая $j_\kappa \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, из равенства

$$Mj_\kappa - \tilde{j}_{\kappa-1} + N(bM - B) = B_\kappa$$

выводим $\tilde{j}_{\kappa-1} = J_{\kappa-1}$. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть число $M+N$ нечетное. Тогда $\nu(p) \geqslant \cos(\pi/(2M+2N))$.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 2$ и рассмотрим $\theta_{ml}(t)$. Возьмем $\kappa = m-1$ и $0 < \varepsilon < 1/3$. В силу леммы 3.4 найдется точка t_0 такая, что

$$p^{k-1} t_0 = 1/2 + \delta_k + \sum_{i=0}^{m-2} j_{k,i} N^i \mod N^{m-1}, \quad |\delta_k - \gamma| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, l), \tag{3.28}$$

каков бы ни был набор $j_{k,i} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ $(i = 0, \ldots, m-2)$. Здесь $\gamma = 1/(2M + 2N)$. Применяя лемму 3.8 при $y = p^{k-1} t_0$, выберем в (3.28) числа $j_{k,i}$ так, чтобы в разложении

$$p^l y = p^{l+k-1} t_0 = 1/2 + \delta_{l+k} + \sum_{i=0}^{m-3} j_{l+k,i} N^i \mod N^{m-2} \quad (k = 1, \ldots, l),$$

иметь $|\delta_{l+k} + \gamma| < \varepsilon$ и наперед заданные наборы $j_{l+k,i} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ (здесь уже $i = 0, \ldots, m-3$), которые, в свою очередь, определяются условиями $|\delta_{2l+k} - \gamma| < \varepsilon$ и желаемыми наборами $j_{2l+k,i} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ $(i = 0, \ldots, m-4)$ в разложениях

$$p^{2l+k-1} t_0 = 1/2 + \delta_{2l+k} + \sum_{i=0}^{m-4} j_{2l+k,i} N^i \mod N^{m-3} \quad (k = 1, \ldots, l),$$

и т.д. “Правильным” выбором чисел $j_{(m-2)l+k,0}$ в разложении

$$p^{(m-2)l+k-1}t_0 = 1/2 + \delta_{(m-2)l+k} + j_{(m-2)l+k,0} \mod N \quad (k = 1, \ldots, l),$$

будет такой, который обеспечит неравенства $|\delta_{(m-1)l+k} + (-1)^m\gamma| < \varepsilon$ для

$$p^{(m-1)l+k-1}t_0 = 1/2 + \delta_{(m-1)l+k} \mod 1 \quad (k = 1, \ldots, l)$$

(лемма 3.7). Таким образом, в точке t_0 все δ_k при $k = 1, \ldots, ml$ удовлетворяют неравенству $|\delta_k - \gamma| < \varepsilon$ либо неравенству $|\delta_k + \gamma| < \varepsilon$. Поэтому

$$\theta_{ml}(t_0) > (\cos\pi(\gamma+\varepsilon))^{ml} \Rightarrow \sup_t \theta_{ml}(t)^{1/(ml)} > \cos\pi(\gamma+\varepsilon).$$

В силу произвольности ε получаем $\sup\theta_{ml}(t)^{1/(ml)} \geqslant \cos\pi\gamma$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть число $M + N$ четное. Тогда $\nu(p) = 1$.*

Отличие от доказательства следствия 3.1 лишь в том, что $\gamma = 0$. Кроме того, $\nu(p)$ не может быть больше 1.

Теорема 3.2. *Пусть N и M — натуральные числа и $Q(q) = Nq^l - M$ — минимальный многочлен числа p. Если $M + N$ — четное число, то $\nu(p) = 1$. Если $M + N$ — нечетное число, то $\nu(p) = \cos(\pi/(2M + 2N))$.*

Доказательство. С учетом следствий 3.1 и 3.2 остается получить оценку сверху $\nu(p) \leqslant \cos(\pi/(2M + 2N))$ в случае нечетного числа $M + N$.

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим два значения аргумента

$$p^{k-1}t = 1/2 + \delta_k \mod 1, \qquad p^{l+k-1}t = 1/2 + \delta_{k+l} \mod 1,$$

связанные соотношением

$$N\delta_{k+l} - M\delta_k = \frac{M-N}{2} \mod 1 \tag{3.29}$$

в силу определения числа p.

Покажем, что либо $|\sin\pi p^{l+k-1}t| \leqslant \cos\pi/(2M + 2N)$, либо

$$|\sin\pi p^{k-1}t \, \sin\pi p^{l+k-1}t| \leqslant \cos^2\pi/(2M + 2N).$$

Предположим, что первое неравенство не выполнено, т.е.

$$|\sin \pi p^{l+k-1}t| = |\sin \pi(1/2+\delta_{k+l})| =$$
$$= \cos \pi\delta_{k+l} > \cos \pi/(2M+2N) \ \Rightarrow\ |\delta_{k+l}| < \frac{1}{2(M+N)}.$$

Обозначим $\Delta = \frac{1}{2(M+N)} - |\delta_{k+l}|$, $0 < \Delta \leqslant \frac{1}{2(M+N)}$. Поскольку число $M-N$ нечетно, из (3.29) следует, что

$$\frac{1}{2} \leqslant |N\delta_{k+l} - M\delta_k| \leqslant N|\delta_{k+l}| + M|\delta_k|,$$

откуда

$$M|\delta_k| \geqslant \frac{1}{2} - N\left(\frac{1}{2(M+N)} - \Delta\right) = \frac{M}{2(M+N)} + N\Delta$$

и

$$\frac{1}{2(M+N)} + \frac{N}{M}\Delta \leqslant |\delta_k| \leqslant \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \cos \pi|\delta_k| \leqslant \cos\left(\frac{1}{2(M+N)} + \frac{N}{M}\Delta\right).$$

Но тогда

$$2|\sin \pi p^{k-1}t\ \sin \pi p^{l+k-1}t| = 2\cos \pi|\delta_k|\ \cos \pi|\delta_{k+l}| \leqslant$$
$$\leqslant 2\cos \pi\left(\frac{1}{2(M+N)} + \frac{N}{M}\Delta\right)\cos \pi\left(\frac{1}{2(M+N)} - \Delta\right) = \cos \pi\frac{M+N}{M}\Delta +$$
$$+ \cos \pi\left(\frac{1}{M+N} + \frac{N-M}{M}\Delta\right) \leqslant 1 + \cos\frac{\pi}{M+N} = 2\cos^2\frac{\pi}{2(M+N)}.$$

Здесь мы учитываем, что

$$\frac{1}{M+N} < \frac{1}{M+N} + \frac{N-M}{M}\Delta \leqslant \frac{1}{2M} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теперь, опираясь на доказанное, нетрудно получить оценку

$$\theta_{l+m}(t) \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{2(M+N)}\right)^m \quad (t \in \mathbb{R};\ m = 0, 1, \ldots),$$

т.е.

$$\sup_t \theta_{l+m}(t)^{1/(l+m)} \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{2(M+N)}\right)^{m/(m+l)} \ \Rightarrow\ \nu(p) \leqslant \cos\frac{\pi}{2(M+N)}.$$

$\square$

Пример 3.8. По теореме 3.2 имеем $\nu(2) = \nu(\sqrt{2}) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, и то же относится к корню любой степени из 2. В то же время, $\nu(3) = \nu(\sqrt{3}) = 1$, и то же относится к корню любой степени из 3.

Литература

[1] Амбарцумян В.А. К теории флуктуаций яркости в млечном пути / В.А. Амбарцумян // Докл. акад. наук СССР. — 1944. — Т. 44. — С. 244–247.

[2] Бицадзе А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. акад. наук СССР. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 739–740.

[3] Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.И. Вишик // Мат. сб. —1951. — Т. 29, № 3. — С. 615–676.

[4] Дерфель Г.А. Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений / Г.А. Дерфель, С.А. Молчанов // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47. — С. 42–51.

[5] Каток А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. — М.: Факториал, 1999. — 768 с.

[6] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

[7] Онанов Г.Г. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела / Г.Г. Онанов, А.Л. Скубачевский // Прикл. мех. — 1979. — Т. 15, № 5. — С. 39–47.

[8] Россовский Л.Е. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений / Л.Е. Россовский // Мат. замет. — 1996. — Т. 59, № 1. — С. 103–113.

[9] Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россовский // СМФН. — 2014. — Т. 54. — С. 3–138.

[10] Россовский Л.Е. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными / Л.Е. Россовский, А.Л. Скубачевский. — М.: МЦНМО, 2021. — 222 с.

[11] Россовский Л.Е. Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями / Л.Е. Россовский, А.Л. Тасевич // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, вып. 5. — С. 733–748.

[12] Россовский Л.Е. Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах / Л.Е. Россовский, А.Л. Тасевич // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1679–1692.

[13] Россовский Л.Е. О задаче Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с аффинным преобразованием аргумента / Л.Е. Россовский, А.А. Товсултанов // Доклады академии наук. —2019. — Т. 489, № 4. — С. 347–350.

[14] Россовский Л.Е. Функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и симметрией / Л.Е. Россовский, А.А. Товсултанов // Сибирский математический журнал. — 2022. — Т. 63, № 4. — С. 911–923.

[15] Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

[16] Скубачевский А.Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач / А.Л. Скубачевский // Матем. сб. — 1982. — Т. 117, № 4. — С. 548–558.

[17] Скубачевский А.Л. Нелокальные краевые задачи со сдвигом / А.Л. Скубачевский // Мат. замет. — 1985. — Т. 38, № 4. — С. 587–598.

[18] Скубачевский А.Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов / А.Л. Скубачевский // Докл. акад. наук СССР. — 1989. — Т. 307, № 2. — С. 287–292.

[19] Скубачевский А.Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений / А.Л. Скубачевский, Е.Л. Цветков // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. — 1998. — Т. 5. — С. 223–288.

[20] Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи матем. наук. — 2016. — Т. 71, № 5. — С. 3–112.

[21] Скубачевский А.Л. Об одном классе функционально-дифференциальных операторов, удовлетворяющих гипотезе Като / А.Л. Скубачевский // Алгебра и анализ. — 2018. — Т. 30, № 2. — С. 249–273.

[22] Товсултанов А.А. Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом / А.А. Товсултанов // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Т. 23, вып. 1. — С. 77–87.

[23] Шамин Р.В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве / Р.В. Шамин // Мат. сб. — 2003. — Т. 194, № 9. — С. 1411–1426.

[24] Auscher P. The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$ / P. Auscher, S. Hofmann, A. McIntosh, P. Tchamitchian // J. Evolution Equations. — 2001. — V. 1, № 4. — P. 361–385.

[25] Gårding L. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations / L. Gårding // Math. Scand. — 1953. — V. 1. — P. 55–72.

[26] Gaver Jr. D.P. An absorption probability problem / D.P. Gaver Jr. // J. Math. Anal. Appl. —1964. — V. 9. — P. 384–393.

[27] Hall A.J. A functional differential equation arising in the modeling of cell growth / A.J. Hall and G.C. Wake // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1989. — V. 30. — P. 424–435.

[28] Iserles A. On neutral functional-differential equation with proportional delays / A. Iserles // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — V. 207. — P. 73–95.

[29] Kato T. Fractional powers of dissipative operators / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. — 1961. — V. 13, № 3. — P. 246–274.

[30] Kato T. Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ / T. Kato and J.B. McLeod // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 77. — P. 891–937.

[31] Lions J.L. Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'operateurs / J.L. Lions // J. Math. Soc. Japan. — 1962. — V. 14, № 2. — P. 233–241.

[32] McIntosh A. On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$ / A. McIntosh // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 32, № 2. — P. 430–434.

[33] Mahler K. On a special functional equation / K. Mahler // J. London Math. Soc. — 1940. — V. 15. — P. 115–123.

[34] Ockendon J.R. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive / J.R. Ockendon and A.B. Tayler // Proc. Royal Soc. London A. — 1971. — V. 322. — P. 447–468.

[35] Onanov G.G. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory / G.G. Onanov, E.L. Tsvetkov // Russian J. Math. Phys. — 1996. — V. 3. — P. 491–500.

[36] Rossovskii L. Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions / L. Rossovskii // Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — V. 12. — P. 226–239.

[37] Rossovskii L.E. Elliptic functional differential equations with affine transformations / L.E. Rossovskii, A.A. Tovsultanov // J. Math. Anal. Appl. —2019. — V. 480. — 123403.

[38] Skubachevskii A.L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations / A.L. Skubachevskii // J. Differ. Eq. — 1986. — V. 63. — P. 332–361.

[39] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional-Differential Equations and Applications, in Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 91 / A.L. Skubachevskii. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1997. — 293 p.

[40] Skubachevskii A.L. Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells / A.L. Skubachevskii // Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — V. 12. — P. 192–207.

[41] Skubachevskii A.L. The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation / A.L. Skubachevskii, R.V. Shamin // Functional Differential Equations. — 2001. — V. 8, № 3–4. — P. 407–424.

[42] Zhuravlev N.B. Spectral Radius Formula for a Parametric Family of Functional Operators / N.B. Zhuravlev, L.E. Rossovskii // Regul. Chaotic Dyn. —2021. — V. 26, № 4. — C. 392–401.